

## 1 Contexte et étude préliminaire

**Objectif** Valider la pertinence de l'utilisation d'une machine spéciale appelée tour en fosse pour le reprofilage des roues ferroviaires.

### Question 1

- Pour la méthode *a*,  $t_{i1} = t_3 + t_4 = 14 \text{ h} = 840 \text{ min}$ .
- Pour la méthode *b*,  $t_{i2} = (6 \times 3 \times 2) t_5 + t_6 = 545 \text{ min}$ .

Le gain de temps  $\Delta t_i = t_{i1} - t_{i2} = 295 \text{ min}$  soit 4 h et 55 min. C'est autant de temps gagner sur l'exploitation de la rame.

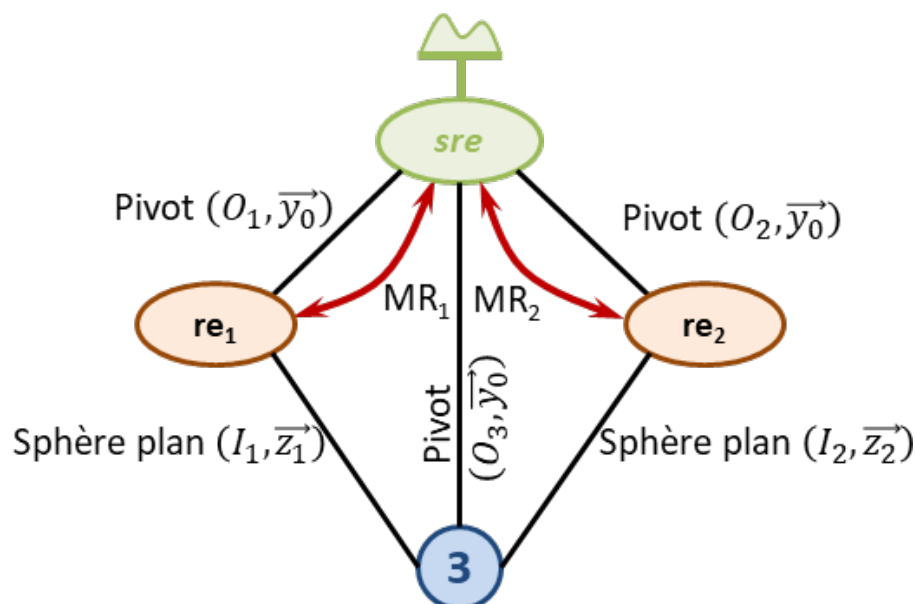
## 2 Analyse de l'entraînement en rotation d'une roue

### 2.1 Description fonctionnelle et structurelle du tour en fosse

### 2.2 Modélisation du dispositif de mise en rotation d'une roue

**Objectif** Vérifier que la modélisation et les hypothèses retenues permettent de déterminer toutes les actions mécaniques nécessaires pour dimensionner les actionneurs des chaînes d'énergie.

**Question 2** À partir des informations données, on peut réaliser le graphe de structure suivant.



### Méthode cinématique

- Nombre cyclomatique  $\gamma = L - S + 1$  avec  $L = 5$  liaisons et  $S = 4$  solides, on a donc  $\gamma = 5 - 4 + 1 = 2$  et

$E_c = 12$  équations cinématiques.

- Nombre d'inconnues cinématiques :  
– 3 liaisons pivot :  $1 \times 3 = 3$  inconnues;

- 2 liaisons sphère-plan :  $5 \times 2 = 10$  inconnues ;
- **au total :  $I_c = 13$  inconnues cinématiques.**
- Mobilités :
  - mobilités utiles :  $m_u = 2$  : entraînement des deux moteurs ;
  - mobilités internes : en considérant le glissement entre la roue et les rouleaux, la roue 3, ainsi que  $re_1$  et  $re_2$  les rouleaux peuvent tourner librement. On a donc :  $m_i = 3$ .
  - au final, selon les hypothèses,  $m = m_i + m_u = 5$ .
- On a donc  $h = m - I_c + E_c = 5 - 13 + 12 = 4$ .

### Méthode statique

- 3 solides peuvent être isolés,  $E_s = 3 \times 6 = 18$  équations statiques.
- Nombre d'inconnues statiques :
  - 3 liaisons pivot :  $5 \times 3 = 15$  inconnues ;
  - 2 liaisons sphère-plan :  $1 \times 2 = 2$  inconnues ;
  - **au total :  $I_s = 17$  inconnues statiques.**
- Mobilités :  $m = m_i + m_u = 5$ .
- On a donc  $h = m - E_s + I_s = 5 - 18 + 17 = 4$ .

**Question 3** Condition de roulement sans glissement en  $I_1$  :  $\overrightarrow{V}(I_1 \in 3/re_1) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{V}(I_1 \in 3/0) - \overrightarrow{V}(I_1 \in re_1/0) = \vec{0}$ .  
Par suite,

- $\overrightarrow{V}(I_1 \in 3/0) = \overrightarrow{V}(O_3 \in 3/0) + \overrightarrow{I_1 O_3} \wedge \overrightarrow{\Omega}(3/0) = R \overrightarrow{z_1} \wedge \omega_3 \overrightarrow{y_0} = -R \omega_3 \overrightarrow{x_1}$  ;
- $\overrightarrow{V}(I_1 \in re_1/0) = \overrightarrow{V}(O_1 \in 3/0) + \overrightarrow{I_1 O_1} \wedge \overrightarrow{\Omega}(3/0) = -R_{re} \overrightarrow{z_1} \wedge \omega_{re_1} \overrightarrow{y_0} = R_{re} \omega_{re_1} \overrightarrow{x_1}$ .

On a donc  $-R \omega_3 - R_{re} \omega_{re_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\omega_3}{\omega_{re_1}} = -\frac{R_{re}}{R}$ .

De même en exploitant le roulement sans glissement en  $I_2$ ,  $\frac{\omega_3}{\omega_{re_2}} = -\frac{R_{re}}{R}$ .

La condition de roulement sans glissement supprime les 3 mobilités internes ; donc  $m' = 2$  et  $h' = 1$ .

**Question 4** Dans les conditions précédentes, les couples  $\mathcal{C}_{mi}$  ne peuvent pas être déterminés. Il faudrait imposer un taux de rotation rigoureusement identique pour  $\omega_{re_1}$  et  $\omega_{re_2}$ .

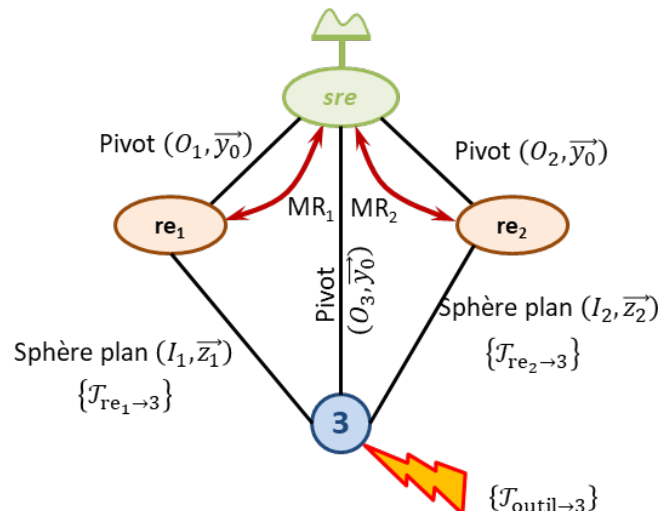
## 2.3 Motorisation du dispositif de mise en rotation d'une roue

**Objectif** Analyser la chaîne d'entraînement en rotation d'une roue et vérifier le choix de la machine électrique.

**Question 5** On conserve l'hypothèse que  $sre$  est supposé fixe par rapport au bâti. On a  $E_1 = M_1 + R_1 + re_1$ . Ces 3 solides sont en liaison pivot par rapport au bâti. En conséquence,  $T(E_1/0) = T(M_1/0) + T(R_1/0) + T(re_1/0) = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_{re} \omega_{re}^2 + \frac{1}{2} J_{re} \omega_{re}^2 = \frac{1}{2} \left( J_m + J_{red} k^2 + J_{re} k^2 \left( \frac{R_{re}}{R} \right)^2 \right) \omega_m^2$ .

On a donc  $J_{eq} = J_m + J_{red} k^2 + J_{re} k^2 \left( \frac{R_{re}}{R} \right)^2$ .

**Question 6** On prend le graphe de structure suivant :



On isole  $E_1$ . Bilan des puissances internes : les liaisons internes au système considérée sont considérées sans frottement. On a donc :  $\mathcal{P}_{int}(E_1) = 0$ .

Bilan des puissances externes :

- la puissance développée par le moteur peut s'exprimer par  $\mathcal{P}(sre \rightarrow M_1/0) = C_m \omega_m$  ;

- puissance développée par l'action de 3 sur  $re_1$  :  $\mathcal{P}(3 \rightarrow re_1/0) = \{\mathcal{V}(re_1/0)\} \otimes \{\mathcal{T}(3 \rightarrow re_1)\} = \left\{ \begin{matrix} k\omega_m \vec{y}_0 \\ kR_{re}\omega_m \vec{x}_1 \end{matrix} \right\}_{I_1} \otimes \left\{ \begin{matrix} -F_{z1}\vec{z}_1 - F_{x1}\vec{x}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{I_1} = -kR_{re}F_{x1}\omega_m.$

On applique le théorème de l'énergie cinétique et  $\frac{dT(E_1/0)}{dt} = C_m\omega_m - kR_{re}F_{x1}\omega_m \Rightarrow \dot{\omega}_m J_{eq} = C_m - kR_{re}F_{x1}.$

**Question 7** En isolant l'ensemble  $E_2 = \{M_2 + R_2 + re_2\}$  et en appliquant le théorème de l'énergie cinétique :  $\dot{\omega}_m J_{eq} = C_m - kR_{re}F_{x2}$ . Comme les caractéristiques des deux chaînes d'entraînement sont les mêmes, on a donc nécessairement  $F_{x1} = F_{x2}$ .

**Question 8** On a vu que  $\frac{\omega_3}{\omega_{re1}} = -\frac{R_{re}}{R}$  de plus  $\omega_{re1} = k\omega_m$ ; donc  $\omega_3 = -k\frac{R_{re}}{R}\omega_m$ . En dérivant, on a  $\dot{\omega}_3 = -k\frac{R_{re}}{R}\dot{\omega}_m$ .

**Question 9 Stratégie :** on cherche à exprimer le couple moteur en fonction des grandeurs du géométriques, inertielles, ... pour cela, la roue étant en pivot d'axe  $(O, \vec{y}_0)$  on va réaliser un théorème du moment dynamique en  $O_3$  en projection sur  $\vec{y}_0$ .

On isole la roue 3.

On réalise le bilan des actions mécaniques extérieures :

- action de la pivot en  $O_3$  (pas de moment en  $O_3$  en projection sur  $\vec{y}_0$ );
- action des liaisons sphères plans :
  - $\overline{\mathcal{M}}(O_3, re_1 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_0 = (\overline{O_3 I_1} \wedge (F_{x1}\vec{x}_1 + F_{z1}\vec{z}_1)) \cdot \vec{y}_0 = (-R\vec{z}_1 \wedge (F_{x1}\vec{x}_1 + F_{z1}\vec{z}_1)) \cdot \vec{y}_0 = -RF_{x1}.$
  - $\overline{\mathcal{M}}(O_3, re_2 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_0 = (\overline{O_3 I_2} \wedge (F_{x2}\vec{x}_2 + F_{z2}\vec{z}_2)) \cdot \vec{y}_0 = (-R\vec{z}_2 \wedge (F_{x2}\vec{x}_2 + F_{z2}\vec{z}_2)) \cdot \vec{y}_0 = -RF_{x2}.$
- action de l'outil :  $\overline{\mathcal{M}}(O_3, \text{outil} \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_0 = (\overline{O_3 C} \wedge R(\text{outil} \rightarrow 3)) \cdot \vec{y}_0 = ((-\lambda(t)\vec{y}_0 - R_C(t)\vec{z}_0) \wedge R(\text{outil} \rightarrow 3)) \cdot \vec{y}_0 = (-\lambda(t)\vec{y}_0 \wedge R(\text{outil} \rightarrow 3) - R_C(t)\vec{z}_0 \wedge R(\text{outil} \rightarrow 3)) \cdot \vec{y}_0 = (-R_C(t)\vec{z}_0 \wedge R(\text{outil} \rightarrow 3)) \cdot \vec{y}_0 = -R_C(t)(\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_0) \cdot R(\text{outil} \rightarrow 3) = -R_C(t)\vec{x}_0 \cdot R(\text{outil} \rightarrow 3) = R_C(t)f_{ex}.$

Enfin, la roue étant supposée équilibrée, on a  $\delta(O_3, 3/0) \cdot \vec{y}_0 = J_3\ddot{\omega}_3$ .

Le TMD appliqué en 3 en projection sur  $\vec{y}_0$  est donné par  $J_3\ddot{\omega}_3 = -2RF_{x1} + R_C(t)f_{ex}$ . De plus,  $\omega_3 = -k\frac{R_{re}}{R}\omega_m$  et

$$\dot{\omega}_m J_{eq} = C_m - kR_{re}F_{x1} \Leftrightarrow F_{x1} = \frac{C_m - \dot{\omega}_m J_{eq}}{kR_{re}}.$$

Au final :

$$-J_3k\frac{R_{re}}{R}\dot{\omega}_m = -2R\frac{C_m - \dot{\omega}_m J_{eq}}{kR_{re}} + R_C(t)f_{ex} \Leftrightarrow C_m = \dot{\omega}_m J_{eq} + J_3k^2\frac{R_{re}^2}{2R^2}\dot{\omega}_m + \frac{R_C(t)kR_{re}f_{ex}}{2R}.$$

**Question 10** En utilisant l'expression précédente, le couple est maximum lorsque  $R_C(t) = R_M$ .

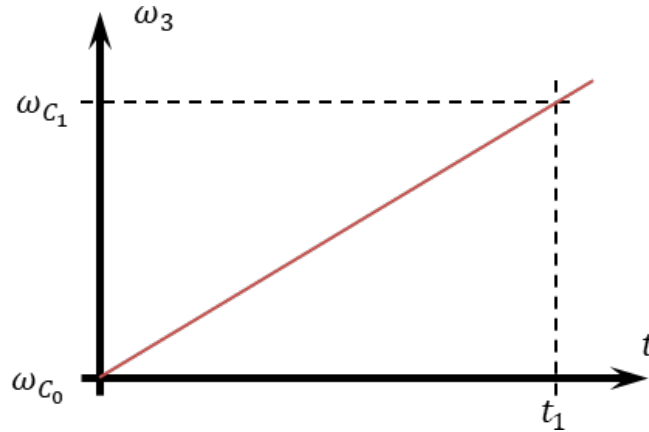
**Question 11** En utilisant la décomposition du vecteur vitesse,  $\overline{V(C \in \text{outil}/3)} = \overline{V(C \in \text{outil}/0)} - \overline{V(C \in 3/0)}$ . D'après le document réponse,  $\overline{V(C \in \text{outil}/0)} = V_f(t)\vec{u} = -b\omega_3\vec{u}$ . Par ailleurs,  $\overline{V(C \in 3/0)} = R_C(t)\omega_3\vec{x}_0$ .

Au final,  $\overline{V(C \in \text{outil}/3)} = V_f(t)\vec{u} - R_C(t)\omega_3\vec{x}_0$ .

$\overline{V(C \in \text{outil}/3)} \cdot \vec{x}_0 = -V_C = V_f(t)\vec{u} \cdot \vec{x}_0 - R_C(t)\omega_3 = -R_C(t)\omega_3$ . On a donc  $V_C = R_C(t)\omega_3$ . Ainsi :

- $V_C = R_C(t)\omega_3(t) = R_M\omega_{C_0} \Rightarrow \omega_{C_0} = \frac{V_C}{R_M}.$
- $V_C = R_C(t)\omega_3(t) = R_m\omega_{C_1} \Rightarrow \omega_{C_1} = \frac{V_C}{R_m}.$

**Question 12**



Dans ces conditions, on a  $\omega_3(t) = \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{t_1} t + \omega_{C_0}$ .

Question 13

Question 14

Question 15

Question 16

Question 17

### 3 Analyse de la commande du dispositif de mise en translation de l'outil

**Objectif** Analyser la chaîne d'asservissement en position et en vitesse du porte-outil afin de proposer puis de régler un correcteur permettant d'assurer le niveau de précision attendu pour le profil de la roue.

#### 3.1 Effet de la déformation de l'outil sur la forme de la roue reprofilée

#### 3.2 Analyse d'une solution avec un porte-outil fixé au bâti

**Objectif** Déterminer les variations de position du point de contact  $C$  entre la roue et l'outil pour une variation sinusoïdale de l'effort perturbateur  $f_c(t)$ .

Question 18

#### 3.3 Analyse des asservissements du porte-outil

##### 3.3.1 Modélisation du mouvement pour la commande

**Objectif** Modéliser le comportement dynamique de l'outil et du porte-outil, puis étudier une commande en position  $z_1(t)$  comprenant un correcteur proportionnel.

**Question 19** D'après le schéma-blocs  $Z_1(p) = H_2(p) (F_m(p) + H_1(p)Z_2(p))$ . D'après la première équation différentielle, on a :  $m_1 p^2 Z_1(p) + \lambda p Z_1(p) + K Z_1(p) = \lambda p Z_2(p) + K Z_2(p) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p) (m_1 p^2 + \lambda p + K) = Z_2(p) (\lambda p + K) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p) = \frac{Z_2(p) (\lambda p + K) + F_m(p)}{m_1 p^2 + \lambda p + K}$ . On a donc par identification  $H_2(p) = \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}$  et  $H_1(p) = \lambda p + K$ .

D'après le schéma-blocs  $Z_2(p) = H_4(p) (F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))$ . D'après la seconde équation différentielle,  $m_2 p^2 Z_2(p) + \lambda p Z_2(p) + K Z_2(p) = \lambda p Z_1(p) + K Z_1(p) + F_c(p) \Leftrightarrow Z_2(p) (m_2 p^2 + \lambda p + K) = Z_1(p) (\lambda p + K) + F_c(p) \Leftrightarrow Z_2(p) = \frac{Z_1(p) (\lambda p + K) + F_c(p)}{m_2 p^2 + \lambda p + K}$ .

On a donc par identification  $H_4(p) = \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}$  et  $H_3(p) = \lambda p + K$ .

**Question 20** En utilisant le premier modèle, on avait :  $\begin{cases} Z_1(p) = H_2(p) (F_m(p) + H_1(p)Z_2(p)) \\ Z_2(p) = H_4(p) (F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)) \end{cases}$ .

Ainsi,  $Z_1(p) = H_2(p) (F_m(p) + H_1(p) (H_4(p) (F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))))$   
 $= H_2(p) F_m(p) + H_1(p) H_2(p) H_4(p) F_c(p) + H_1(p) H_2(p) H_3(p) H_4(p) Z_1(p)$

$$\Leftrightarrow Z_1(p) (1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)) = H_2(p) (F_m(p) + H_1(p)H_4(p)F_c(p)).$$

En utilisant le schéma-blocs,  $Z_1(p) = (F_c(p)N_1(p) + F_m(p))N_2(p)$ . Par identification, on obtient  $N_1(p) = H_1(p)H_4(p)$  et  $N_2(p) = \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$ .

$$\begin{aligned} \text{Question 21 } N_2(p) &= \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)} = \frac{\frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}}{1 - (\lambda p + K) \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K} (\lambda p + K) \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} \\ &= \frac{1}{(m_1 p^2 + \lambda p + K) - (\lambda p + K)^2 \frac{m_1 p^2 + \lambda p + K}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} \\ &= \frac{1}{(m_1 p^2 + \lambda p + K)(m_2 p^2 + \lambda p + K) - (\lambda p + K)^2 (m_1 p^2 + \lambda p + K)} \\ &= \frac{1}{(m_1 p^2 + \lambda p + K)(m_2 p^2 + \lambda p + K) - (\lambda p + K)^2 (m_1 p^2 + \lambda p + K)} \\ &= \frac{1}{m_1 p^2 (m_2 p^2 + \lambda p + K) + \lambda p (m_2 p^2 + \lambda p + K) + K (m_2 p^2 + \lambda p + K) - \lambda^2 p^2 (m_1 p^2 + \lambda p + K) - K^2 (m_1 p^2 + \lambda p + K) - 2\lambda p K (m_1 p^2 + \lambda p + K)} \\ &= \frac{1}{(m_1 m_2 p^4 + m_1 p^3 \lambda + K m_1 p^2) + (\lambda m_2 p^3 + \lambda^2 p^2 + K \lambda p) + (K m_2 p^2 + K \lambda p + K^2) - (\lambda^2 m_1 p^4 + \lambda^2 p^3 \lambda + \lambda^2 p^2 K) - (K^2 m_1 p^2 + K^2 \lambda p + K^3) - (2\lambda K m_1 p^3 + 2\lambda K \lambda p^2 + 2\lambda p K^2)} \\ &= \frac{1}{m_1 m_2 p^4 + m_1 p^3 \lambda + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + \lambda^2 p^2 + 2K \lambda p + K m_2 p^2 + K^2 - \lambda^2 m_1 p^4 - \lambda^3 p^3 - \lambda^2 p^2 K - K^2 m_1 p^2 - K^2 \lambda p - K^3 - 2\lambda K m_1 p^3 - 2K \lambda^2 p^2 - 2\lambda p K^2} \end{aligned}$$

Question 22

Question 23

Question 24

Question 25

- req 1.1 :  $M\varphi = 60^\circ$ .
- req 1.2 :  $\omega_{0\text{dB}} = 200 \text{ rad s}^{-1}$ .
- req 1.4 : erreur en régime permanent :  $\Delta c < 40 \mu\text{m}$  pour un échelon d'amplitude  $f_{c0} = 1 \text{ kN}$ .
- req 1.5 : défaut de la roue  $\Delta u < 30 \mu\text{m}$  lorsque la perturbation est sinusoïdale.

### 3.3.2 Calcul des paramètres des correcteurs de la loi de commande

**Objectif** Déterminer les paramètres d'une loi de commande afin de valider les performances statiques et dynamiques du cahier des charges.

Question 26 On a  $\arg(H_{\text{BO}}(j\omega)) = \arg(AK_v) + \arg\left(p + \frac{1}{T_i}\right) + \arg(p + K_p) - 3\arg(p) = \arctan T_i \omega + \arctan \omega/K_p - 270^\circ$ .

On souhaite que la marge de phase soit de  $60^\circ$  soit  $\arg(H_{\text{BO}}(j\omega_{0\text{dB}})) = -120^\circ$ . On a donc  $-120 = \arctan T_i \omega_{0\text{dB}} + \arctan \omega_{0\text{dB}}/K_p - 270 \Leftrightarrow \arctan T_i \omega_{0\text{dB}} + \arctan \omega_{0\text{dB}}/K_p = 150$ .

$$\text{Or } \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

$$\text{On a donc } \tan 150 = \frac{T_i \omega_{0\text{dB}} + \omega_{0\text{dB}}/K_p}{1 - T_i \omega_{0\text{dB}}^2/K_p} \Leftrightarrow \tan 150 - \tan 150 T_i \omega_{0\text{dB}}^2/K_p = T_i \omega_{0\text{dB}} + \omega_{0\text{dB}}/K_p$$

$$\Leftrightarrow T_i = \frac{K_p \tan 150 - \omega_{0\text{dB}}}{K_p \omega_{0\text{dB}} + \tan 150 \omega_{0\text{dB}}^2}$$

$$\text{Question 27 } H_{\text{BO}}(j\omega) = AK_v \frac{-\omega^2 + K_p j\omega + \frac{j\omega}{T_i} + \frac{K_p}{T_i}}{-\omega^3} = -\frac{AK_v}{\omega^3} \left( \left( \frac{K_p}{T_i} - \omega^2 \right) + \left( \frac{1}{T_i} + K_p \right) j\omega \right)$$

$$\text{On a donc } \log|H_{\text{BO}}(j\omega)| = \frac{AK_v}{\omega^3} \sqrt{\left( \frac{K_p}{T_i} - \omega^2 \right)^2 + \left( \frac{1}{T_i} + K_p \right)^2} \omega^2.$$

$$\text{Pour } \omega = \omega_{0\text{dB}}, \log|H_{\text{BO}}(j\omega)| = 1. \text{ En conséquence, } \frac{AK_v}{\omega^3} \sqrt{\left( \frac{K_p}{T_i} - \omega^2 \right)^2 + \left( \frac{1}{T_i} + K_p \right)^2} \omega^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow K_v = \frac{\omega_{0\text{dB}}^3}{A \sqrt{\left(\frac{K_p}{T_i} - \omega_{0\text{dB}}^2\right)^2 + \left(\frac{1}{T_i} + K_p\right)^2 \omega_{0\text{dB}}^2}}$$

### 3.4 Analyse de l'influence du paramètre $b$

**Objectif** Déterminer la valeur maximale de  $b$  permettant de conserver la stabilité de l'asservissement.

**Question 28** D'après le schéma-blocs,  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$ .