

Corrigé



Chirurgie mini-invasive robotisée avec stabilisation des mouvements physiologiques

Concours Centrale Supelec PSI 2019

1 Analyse des propriétés des signaux physiologiques

Objectif Analyser les propriétés des signaux physiologiques et en déduire des éléments du cahier des charges de la loi de commande pour assurer le déplacement du robot avec le niveau de précision requis.

1.1 Analyse des propriétés des signaux des mouvements physiologiques

Objectif Proposer un algorithme permettant de mettre en évidence les propriétés des mouvements respiratoires.

Question 1

Le signal semble presque périodique même si les amplitudes des déplacements ne sont pas exactement les mêmes. L'amplitude maximale obtenue est d'environ $\frac{5+2,3}{2} = 3,65 \text{ mm}$ et l'amplitude minimale obtenue est d'environ : $\frac{4+2}{2} = 3 \text{ mm}$. La période des oscillations est d'environ $T \approx \frac{41-4}{9} \approx 4,1 \text{ s}$. Soit une pulsation de $\omega \approx 1,53 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 2 D'après la définition, $\hat{S}(f_n) = \frac{1}{N_f} \sum_{k=0}^{N_f-1} s[k T_e] e^{-i2\pi f_n T_e k}$

$$= \frac{1}{N_f} (s[0 T_e] e^{-i2\pi f_n T_e 0} + s[T_e] e^{-i2\pi f_n T_e} + \dots + s[(N_f - 1) T_e] e^{-i2\pi f_n T_e (N_f - 1)})$$

$$= \frac{1}{N_f} (s[0] + s[T_e] e^{-i2\pi f_n T_e} + \dots + s[(N_f - 1) T_e] e^{-i2\pi f_n T_e (N_f - 1)}).$$

On a donc $l_k(f_n) = \frac{1}{N_f} e^{-i2\pi f_n T_e k}$.

Question 3 On a $L_n = (l_0 f_n \quad l_1 f_n \quad l_2 f_n \quad \dots \quad l_{N-1} f_n)$. Par ailleurs, $S_p = \begin{pmatrix} \hat{S}(0) \\ \hat{S}(f_1) \\ \hat{S}(f_2) \\ \vdots \\ \hat{S}(f_{N-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_0 V_s \\ L_1 V_s \\ L_2 V_s \\ \vdots \\ L_{N-1} V_s \end{pmatrix}$.

On a donc $L_k V_s = (l_0 f_k \quad l_1 f_k \quad l_2 f_k \quad \dots \quad l_{N-1} f_k) \begin{pmatrix} s[0] \\ s[T_e] \\ s[2T_e] \\ \vdots \\ s[(N-1)T_e] \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{N-1} l_i f_k s[i T_e]$.

Ainsi la matrice M est composée de toutes les lignes L_n pour $n \in [0, N_f - 1]$. La matrice M aura donc pour forme :

$$M = \frac{1}{N_f} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i2\pi f_1 T_e} & \dots & e^{-i2\pi f_1 T_e (N-1)} \\ \vdots & e^{-i2\pi f_n T_e} & \dots & e^{-i2\pi f_n T_e (N-1)} \\ 1 & e^{-i2\pi f_{N_f-1} T_e} & \dots & e^{-i2\pi f_{N_f-1} T_e (N-1)} \end{pmatrix}.$$

Question 4 De la question précédente, on peut exprimer le terme $a_{n,m}$:

$$a_{n,m} = \frac{1}{N_f} e^{-i2\pi f_n T_e m}.$$

Question 5 En posant $X = -i2\pi \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N_f-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & T_e & 2T_e & \dots & (N-1)T_e \end{pmatrix} = -i2\pi E_f \cdot t_k$, on obtient bien, $M = \frac{1}{N_f} \exp(X)$.

Question 6

■ **Python**

```
import numpy as np
def calculSpectre(Signal,Nf,fmax,Te):
    Vs=np.transpose((np.array(Signal)))
    Ef=np.transpose((np.linspace(0,fmax,Nf)))
    tk=np.array((range(len(Signal))))*Te
    X=np.dot(Ef,tk)*(-1j*2*np.pi)
    M=1/Nf*np.exp(X)
    Sp=np.dot(M,Vs)
    An=abs(Sp)
    return An
```

1.2 Cahiers des charges partiel de la chaîne d'asservissement en position du robot esclave

Objectif Déterminer une valeur numérique pour la bande passante de l'asservissement en position du robot esclave et vérifier le cahier des charges associé.

Question 7 D'une part, $H(p) = \frac{\varepsilon(p)}{Z^*(p)}$ et d'autre part, $F(p) = \frac{Z(p)}{Z^*(p)}$. Enfin, $\varepsilon(p) = Z^*(p) - Z(p)$. On a donc $\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(p)}{H(p)} - F(p)Z^*(p) = \frac{\varepsilon(p)}{H(p)} - F(p)\frac{\varepsilon(p)}{H(p)}$. On a donc $\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(p)}{H(p)} - F(p)\frac{\varepsilon(p)}{H(p)} \Leftrightarrow H(p) = 1 - F(p) = p \frac{p + 2\xi\omega_0}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$.

En mettant cette fonction de transfert sous forme canonique, on obtient : $H(p) = \frac{2\xi\cdot p}{\omega_0} \frac{1 + \frac{2\xi\omega_0}{p}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{\omega_0^2}{p^2}}$.

- Le module de cette fonction de transfert en remplaçant p par $i\omega$ représente le rapport des amplitudes en régime permanent vis-à-vis d'une entrée $z^*(t)$ sinusoïdale : $\frac{\varepsilon_2}{A_2} = \|H(i\omega_2)\|$.
- L'argument de cette fonction de transfert en remplaçant p par $i\omega$ représente le déphasage en régime permanent vis-à-vis d'une entrée $z^*(t)$ sinusoïdale : $\Theta_2 - \Phi_2 = \arg(H(i\omega_2))$.

Ainsi on a :
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2 = A_2 \cdot \|H(i\omega_2)\| \\ \Theta_2 = \arg(H(i\omega_2)) + \Phi_2 \end{array} \right.$$

Remarque Il est peut être souhaitable de préciser avant la question aux candidats qu'on a $z_n(t) = A_n \sin(2\pi f_n t + \Phi_n) = A_n \sin(\omega_n t + \Phi_n)$.

Question 8 En considérant de faibles pulsations telles que $\omega \ll \omega_0$, on peut effectuer l'approximation : $\|H(i\omega)\| \approx \frac{2\xi\omega}{\omega_0}$. On obtient donc bien : $\|H(i\omega)\| \approx K \cdot \omega$ avec $K = \frac{2\xi}{\omega_0}$.

Question 9 D'après l'exigence 1.3.3, $\frac{\varepsilon_2}{A_2} < 10^{-2}$, on obtient alors la relation suivante : $\frac{\varepsilon_2}{A_2} \approx \frac{2\xi\omega_2}{\omega_0} < 10^{-2}$. Ce qui donne $\omega_0 > 200\xi\omega_2 \approx 603 \text{ rad s}^{-1}$

L'exigence 1.2 du cahier des charges concernant l'asservissement en position, et donc la fonction de transfert $F(p)$, impose une bande passante (que l'on suppose à 0 dB), inférieure à 30 rad s^{-1} . $F(p)$ est une fonction de transfert du second ordre de gain 1 et la bande passante à 0 dB est de l'ordre de $\omega_0 \approx 600 \text{ rad s}^{-1}$. **Le cahier des charges est donc bien respecté.**

Remarque La question devrait peut être reformulée car la formulation de la question : « En considérant ε_2 , déterminer (...) » manque de clarté.

2 Analyse géométrique et élaboration du modèle dynamique du robot esclave

Objectif Vérifier la capacité du robot esclave à respecter le cahier des charges et déterminer le modèle dynamique d'un des axes du robot esclave utilisé pour dimensionner sa commande.

2.1 Vérification de la capacité du robot esclave

Objectif Vérifier la capacité du robot esclave à respecter l'exigence de précision 1.3.3 et dimensionner les capteurs installés sur le robot en conséquence.

Question 10 D'après le cahier des charges $\varepsilon_r < 1\%$ (exigence 1.3.3). D'après la figure 4, la variation maximale des déplacement est de 7,5mm. Il faudrait donc une résolution de $s_{max} = 75 \mu\text{m}$

Question 11 On a $\lambda(t) = \lambda_0 + \frac{p}{2\pi}\theta_{83}(t)$. En conséquences, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = l_3 \overrightarrow{y_3} + \lambda(t) \overrightarrow{z_3} + l_4 \overrightarrow{z_4} = l_3 \overrightarrow{y_3} + \left(\lambda_0 + \frac{p}{2\pi}\theta_{83}(t)\right) \overrightarrow{z_3} + l_4 \overrightarrow{z_3}$.

Question 12 En projetant \overrightarrow{BD} dans la base $(\overrightarrow{x'_2}, \overrightarrow{y'_2}, \overrightarrow{z'_2})$, on a $\overrightarrow{BD} = l_3 \overrightarrow{y_3} + \left(\lambda_0 + \frac{p}{2\pi}\theta_{83}\right) \overrightarrow{z_3} + l_4 \overrightarrow{z_3} = l_3 \left(\cos \theta_{32} \overrightarrow{y'_2} - \sin \theta_{32} \overrightarrow{x'_2}\right) + \left(\lambda_0 + \frac{p}{2\pi}\theta_{83} + l_4\right) \overrightarrow{z'_2}$.

Avec l'hypothèse que θ_{32} reste petit, on a $\overrightarrow{BD} = l_3 \left(\overrightarrow{y'_2} - \theta_{32} \overrightarrow{x'_2}\right) + \left(\lambda_0 + \frac{p}{2\pi}\theta_{83} + l_4\right) \overrightarrow{z'_2}$. Ainsi, $(x_D, y_D, z_D) = \left(-l_3 \theta_{32}, l_3, \lambda_0 + \frac{p}{2\pi}\theta_{83} + l_4\right)$.

Question 13 Soit, $s_D = 3\sqrt{s_X^2 + s_Y^2 + s_Z^2}$. Par calcul différentiel :

$$\begin{cases} dx_D = -l_3 d\theta_{32} \\ dy_D = 0 \\ dz_D = \frac{p}{2\pi} d\theta_{83} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_X = \Delta x_D = l_3 \Delta \theta_{32} = l_3 s_{capteur} \\ s_Y = \Delta y_D = 0 \\ s_Z = \Delta z_D = \frac{p}{2\pi} \Delta \theta_{83} = \frac{p}{2\pi} s_{capteur} \end{cases} .$$

Ainsi, $s_D = 3 \cdot s_{capteur} \sqrt{l_3^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}$. Le cahier des charges impose la relation suivante, $s_{capteur} < \frac{75 \mu\text{m}}{3 \sqrt{l_3^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}}$.

L'application numérique donne pour résolution maximale afin de respecter le cahier des charge : $s_{capteur} = 2,72 \times 10^{-5} \mu\text{m}$.

2.2 Détermination et vérification du modèle dynamique du robot esclave

Objectif Déterminer le modèle dynamique du robot esclave en vue de l'élaboration de sa commande.

Question 14 On se place en régime permanent. Le rendement peut s'exprimer par $\eta_9 = \frac{C_{73}\dot{\theta}_{32}}{C_{m2}\dot{\theta}_{72}} = \frac{C_{73}}{C_{m2}} r_9$. On a donc, en régime permanent, $\overrightarrow{C_{73}} = C_{73} \overrightarrow{z'_2} = C_{m2} \frac{\eta_9}{r_9} \overrightarrow{z'_2}$.

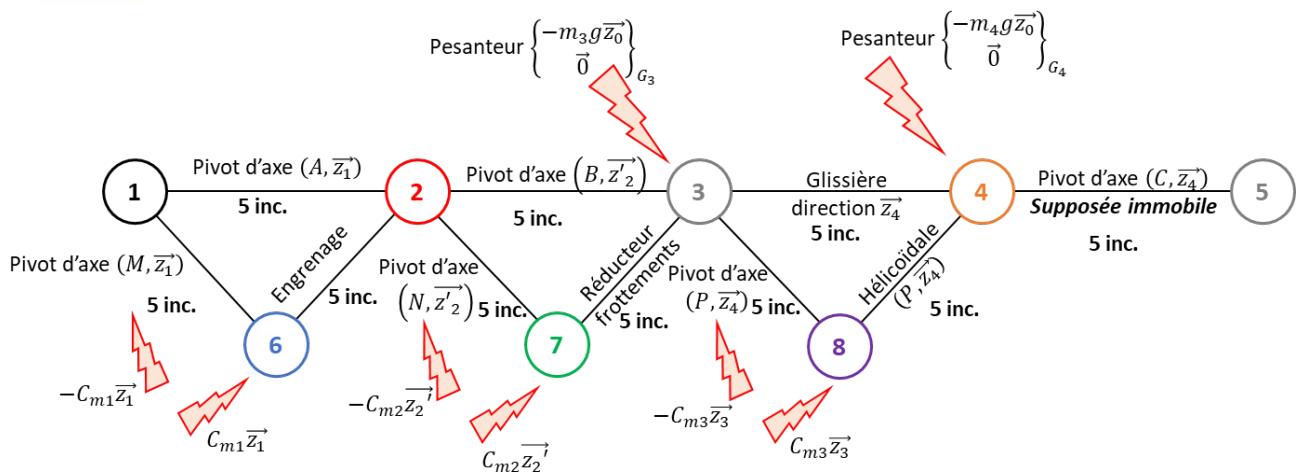
Remarque Il serait sûrement nécessaire de préciser avant la questions que le résultat attendu est en régime permanent.

Question 15 Au vu du tracé expérimental de C_{73} en fonction de C_{m2} , on peut réaliser une linéarisation sur l'intervalle $[0, 10]$ et $C_{73} \simeq 3C_{m2}$. D'après les données constructeur, on a $C_{73} = C_{m2} \frac{\eta_9}{r_9} = C_{m2} \frac{0,78}{0,25} = 3,12 \text{ Nm}$.

On peut donc valider les valeurs données par le constructeur.

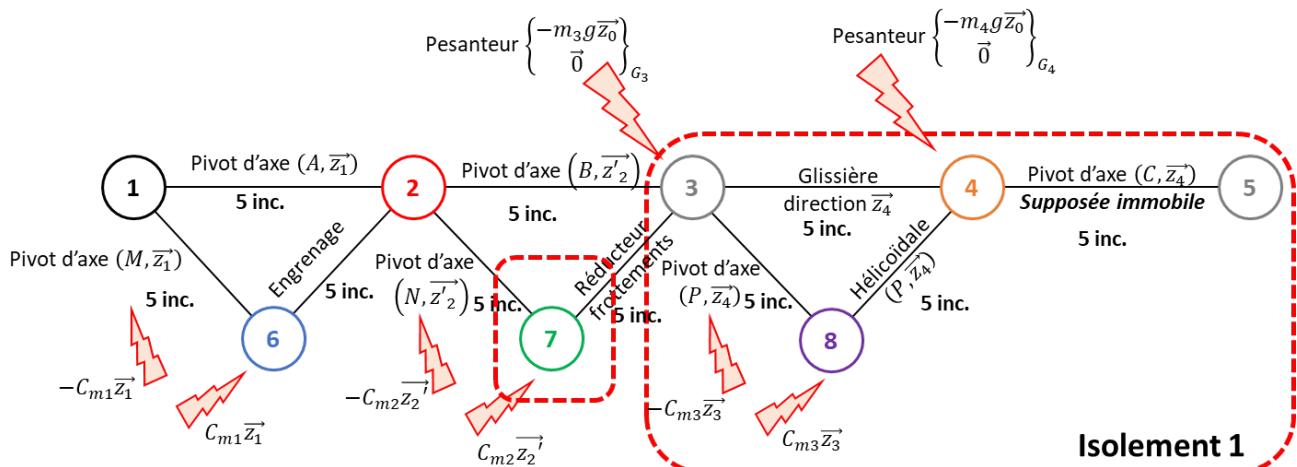
2.3 Élaboration du modèle dynamique d'un axe du robot esclave

Question 16



Remarque En ajoutant l'hypothèse en début de partie II.B.1, l'action de 7 sur 3 est modélisée par un couple. Dans ce cas, le résultat attendu est peut-être 1 inconnue entre 7 et 3.

Question 17 On cherche à déterminer le couple C_{m2} à fournir sur l'arbre 7. L'arbre 7 est en rotation autour de l'axe (N, \vec{z}'_2) . Il entraîne l'ensemble $\{3+8+4+5\}$ en rotation autour de l'axe (B, \vec{z}'_2) .



On propose donc les isolements et des théorèmes associés suivants :

- isolement de $\{3+8+4+5\}$: théorème du moment dynamique en projection sur (B, \vec{z}'_2) qui permet de relier l'action de 7 sur 3 aux paramètres de mouvement de l'ensemble $\{3+8+4+5\}$ qui représente dans le cas particulier du mouvement souhaité la même classe d'équivalence;
- isolement de 7 : théorème du moment dynamique selon (N, \vec{z}'_2) qui revient à un théorème du moment statique car l'inertie de 7 est négligeable. Cela permet de relier C_{m2} à l'action de 3 sur 7.

Cet ordonnancement des isolements permet de ne pas faire apparaître les inconnues dans les liaisons pivot entre 2 et 7 ainsi qu'entre 7 et 3.

Question 18 On cherche $\overrightarrow{V(G_4 \in 4/1)}$. On a $\overrightarrow{OG_4} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG_4} = l_0 \vec{y}_0 + l_1 \vec{y}_1 + l_2 \vec{y}_2 + l'_2 \vec{y}'_2 + l_3 \vec{y}_3 + \lambda(t) \vec{z}_3 + b_4 \vec{z}_4$. On a $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ et $\alpha_2 = -\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{On a donc } \overrightarrow{V(G_4 \in 4/1)} &= \left[\frac{d\overrightarrow{OG_4}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \left[\frac{dl_0 \vec{y}_0}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{dl_1 \vec{y}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{dl_2 \vec{y}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{dl'_2 \vec{y}'_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{dl_3 \vec{y}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{d\lambda(t) \vec{z}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{db_4 \vec{z}_4}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} + l_2 \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + l'_2 \left[\frac{d\vec{y}'_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + l_3 \left[\frac{d\vec{y}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + \lambda(t) \left[\frac{d\vec{z}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + \dot{\lambda}(t) \left[\frac{d\vec{z}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} + b_4 \left[\frac{d\vec{z}_4}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \\ &= l_2 \left[\overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \vec{y}_2 \right] + l'_2 \left[\overrightarrow{\Omega(2'/0)} \wedge \vec{y}'_2 \right] + l_3 \left[\overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \vec{y}_3 \right] + \lambda(t) \left[\overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \vec{z}_3 \right] + \dot{\lambda}(t) \vec{z}_3 + b_4 \left[\overrightarrow{\Omega(4/0)} \wedge \vec{z}_4 \right]. \end{aligned}$$

$$= l_2 [\dot{\theta}_{21} \vec{z}_2 \wedge \vec{y}_2] + l'_2 [\dot{\theta}_{21} \vec{z}_2 \wedge \vec{y}'_2] + l_3 [(\dot{\theta}_{21} \vec{z}_2 + \dot{\theta}_{32} \vec{z}_3) \wedge \vec{y}_3] + \lambda(t) [(\dot{\theta}_{21} \vec{z}_2 + \dot{\theta}_{32} \vec{z}_3) \wedge \vec{z}_3] + \dot{\lambda}(t) \vec{z}_3 + b_4 [(\dot{\theta}_{21} \vec{z}_2 + \dot{\theta}_{32} \vec{z}_3) \wedge \vec{z}_3].$$

Or $\dot{\theta}_{21} = 0$. On a donc : $V(G_4 \in 4/1) = l_3 (\dot{\theta}_{32} \vec{z}_3 \wedge \vec{y}_3) + \dot{\lambda}(t) \vec{z}_3 = -\dot{\theta}_{32} l_3 \vec{x}_3 + \dot{\lambda}(t) \vec{z}_3$.

Question 19 En utilisant l'évolution de $\dot{\theta}_{32}$, on peut déterminer le déplacement angulaire effectué en traçant l'aire sous la courbe : $\theta_{32} = \frac{1}{2} (1 + 0,5) \times 0,075 = 0,056 \text{ rad} \approx 3^\circ$.

Cet angle étant faible, on peut donc considérer que $\forall t \cos(\theta_{32}(t)) \approx 1$ et $\sin(\theta_{32}(t)) \approx 0$.

Question 20 On donne J_4 le moment d'inertie du bras 4 autour de l'axe (G_4, \vec{z}_4) .

Méthode

1. Expression de $\overline{\delta(B, 4/1)} \cdot \vec{z}_4 = \left(\overline{\delta(G_4, 4/1)} + \overline{BG_4} \wedge m_4 \overline{\Gamma(G_4 \in 4/1)} \right) \cdot \vec{z}_4$.

2. Calcul de $\overline{\delta(G_4, 4/1)}$.

$$\overline{\delta(G_4, 4/1)} \cdot \vec{z}_4 = \left[\frac{d\overline{\sigma(G_4, 4/1)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} \cdot \vec{z}_4 = \left[\frac{d\overline{\sigma(G_4, 4/1)} \cdot \vec{z}_4}{dt} \right] - \overline{\sigma(G_4, 4/1)} \cdot \left[\frac{d\vec{z}_4}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

$$\text{On a } \overline{\sigma(G_4, 4/1)} = I_{G_4}(4) \overline{\Omega(4/1)} \text{ avec } \overline{\Omega(4/1)} = \underbrace{\overline{\Omega(4/3)}}_0 + \overline{\Omega(3/2)} + \overline{\Omega(2/1)} = \dot{\theta}_{32} \vec{z}_3 + \underbrace{\dot{\theta}_{21}}_0 \vec{z}_2 = \dot{\theta}_{32} \vec{z}_4.$$

Donc, $\overline{\sigma(G_4, 4/1)} \cdot \vec{z}_4 = J_4 \dot{\theta}_{32}$.

De plus, $\left[\frac{d\vec{z}_4}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \vec{0}$. En conséquences, $\overline{\delta(G_4, 4/1)} \cdot \vec{z}_4 = J_4 \ddot{\theta}_{32}$.

$$\text{Par ailleurs, } \overline{\Gamma(G_4 \in 4/1)} = \left[\frac{d\overline{V(G_4 \in 4/1)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d(-\dot{\theta}_{32} l_3 \vec{x}_3 + \dot{\lambda}(t) \vec{z}_3)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = -\ddot{\theta}_{32} l_3 \vec{x}_3 - \dot{\theta}_{32} l_3 (\dot{\theta}_{32} \vec{z}_3 \wedge \vec{x}_3) + \dot{\lambda}(t) \vec{z}_3$$

$$= -\ddot{\theta}_{32} l_3 \vec{x}_3 - l_3 \dot{\theta}_{32}^2 \vec{y}_3 + \ddot{\lambda}(t) \vec{z}_3.$$

$$\left(\overline{BG_4} \wedge m_4 \overline{\Gamma(G_4 \in 4/1)} \right) \cdot \vec{z}_4 = m_4 ((l_3 \vec{y}_3 + \lambda(t) \vec{z}_3 + b_4 \vec{z}_4) \wedge (-\ddot{\theta}_{32} l_3 \vec{x}_3 - l_3 \dot{\theta}_{32}^2 \vec{y}_3 + \ddot{\lambda}(t) \vec{z}_3)) \cdot \vec{z}_{4,3}$$

Par simplification avec les propriétés du produit mixte et du produit vectoriel,

$$\left(\overline{BG_4} \wedge m_4 \overline{\Gamma(G_4 \in 4/1)} \right) \cdot \vec{z}_4 = m_4 ((l_3 \vec{y}_3) \wedge (-\ddot{\theta}_{32} l_3 \vec{x}_3)) \cdot \vec{z}_{4,3} = m_4 \cdot l_3^2 \ddot{\theta}_{32}$$

Au final, $\overline{\delta(B, 4/1)} \cdot \vec{z}_4 = J_4 \ddot{\theta}_{32} + \ddot{\theta}_{32} l_3^2 m_4$.

Question 21 Par analogie avec la question précédente, on a $\overline{\delta(B, 3/1)} \cdot \vec{z}_4 = J_3 \ddot{\theta}_{32} + \ddot{\theta}_{32} a_3^2 m_3$.

En conséquence, $\overline{\delta(B, 3+4+5+8/1)} \cdot \vec{z}_4 = (J_3 + J_4 + a_3^2 m_3 + l_3^2 m_4) \ddot{\theta}_{32}$.

Remarque On fait l'hypothèse ici que l'action de 3 sur 7 ou du réducteur sur 7 est bien modélisée par une action mécanique de type couple comme le suggère l'énoncé.

On isole l'ensemble {3, 4, 5, 8}.

- On réalise le bilan des actions mécaniques extérieures.

- Action de la pesanteur sur 3 (**attention, le schéma cinématique de l'énoncé est donné dans une configuration particulière; la pesanteur crée bien un moment en B suivant \vec{z}_0**) :

$$\overline{\mathcal{M}(B, \text{pes} \rightarrow 3)} \cdot \vec{z}_4 = (\overline{BG_3} \wedge (-m_3 g \vec{z}_0)) \vec{z}_4 = ((a_3 \vec{y}_3 + b_3 \vec{z}_3) \wedge (-m_3 g \vec{z}_0)) \vec{z}_4 = (a_3 \vec{y}_4 \wedge (-m_3 g \vec{z}_0)) \vec{z}_4 = (\vec{z}_4 \wedge a_3 \vec{y}_4) \cdot (-m_3 g \vec{z}_0) = a_3 m_3 g (\vec{x}_3 \cdot \vec{z}_0) = a_3 m_3 g (\cos \theta_{32} \vec{x}'_2 + \sin \theta_{32} \vec{y}'_2) \cdot \vec{z}_0.$$

$$\text{On utilise les hypothèses de linéarisation vues précédemment et on a } \overline{\mathcal{M}(B, \text{pes} \rightarrow 3)} \cdot \vec{z}_4 = a_3 m_3 g \vec{x}'_2 \cdot \vec{z}_0 = a_3 m_3 g \vec{x}_2 \cdot \vec{z}_0 = a_3 m_3 g (\cos \theta_{21} \vec{x}_1 + \sin \theta_{21} \vec{y}_1) \cdot \vec{z}_0 = a_3 m_3 g (\cos \theta_{21} \vec{x}_0 + \sin \theta_{21} (\cos \alpha_1 \vec{y}_0 + \sin \alpha_1 \vec{z}_0)) \cdot \vec{z}_0 = a_3 m_3 g \sin \theta_{21} \sin \alpha_1.$$

En faisant l'application numérique, on a donc $\overline{\mathcal{M}(B, \text{pes} \rightarrow 3)} \cdot \vec{z}_4 = a_3 m_3 g \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Action de la pesanteur sur 4 : $\overline{\mathcal{M}(B, \text{pes} \rightarrow 4)} \cdot \vec{z}_4 = (\overline{BG_4} \wedge (-m_4 g \vec{z}_0)) \vec{z}_4 = ((l_3 \vec{y}_3 + \lambda(t) \vec{z}_3 + b_4 \vec{z}_4) \wedge (-m_4 g \vec{z}_0)) \vec{z}_4$.

$$\text{Pour Emilien } (\overline{BG_4} \wedge (-m_4 g \vec{z}_0)) \vec{z}_{4,3} = \vec{z}_3 \wedge l_3 \vec{y}_3 \cdot (-m_4 \cdot g \cdot \vec{z}_0) = m_4 l_3 g \vec{x}_3 \cdot \vec{z}_0.$$

Or, $\vec{x}_3 = \cos \theta_{32} \vec{x}_{2,2'} + \sin \theta_{32} \vec{y}_{2'}$ avec $\cos \theta_{32} \approx 1$ et $\sin \theta_{32} \approx 0$.

$$\text{Donc, } \vec{x}_3 \cdot \vec{z}_0 = (\cos \theta_{21} \vec{x}_{1,0} + \sin \theta_{21} \vec{y}_1) \cdot \vec{z}_0 = \sin \theta_{21} \sin \alpha_1 = \frac{\sqrt{6}}{4}. \text{ On obtient alors, } \overline{\mathcal{M}(B, \text{pes} \rightarrow 4)} \cdot \vec{z}_4 =$$

$$l_3 m_4 g \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

- $\overline{\mathcal{M}(B, 2 \rightarrow 3)} \cdot \vec{z}_0 = 0$.

- $\overrightarrow{\mathcal{M}(B, 7 \rightarrow 3)} \cdot \overrightarrow{z_4} = C_{73}$ (Indication du sujet).

- En appliquant le théorème du moment dynamique en B en projection sur \overrightarrow{z} on a donc $C_{73} = (J_3 + J_4) \ddot{\theta}_{32} + \ddot{\theta}_{32} (a_3^2 m_3 + l_3^2 m_4) + g \frac{\sqrt{6}}{4} (a_3 m_3 + l_3 m_4)$.

Remarque Il semblerait que ce qui est attendu soit d'utiliser $C_{73} = C_{m2} \frac{\eta_9}{r_9}$, mais cette relation avait été établie en régime permanent ce qui n'est plus le cas. Continuons avec cette « hypothèse ».

$$C_{m2} \frac{\eta_9}{r_9} = (J_3 + J_4 + a_3^2 m_3 + l_3^2 m_4) \ddot{\theta}_{32} + g \sin \theta_{21} \sin \alpha_1 (a_3 m_3 + l_3 m_4).$$

Par identification, on a donc :

- $J_{eq} = J_3 + J_4 + a_3^2 m_3 + l_3^2 m_4$;
- $A = \frac{\eta_9}{r_9}$;
- $C_r(t) = -g \sin \theta_{21} \sin \alpha_1 (a_3 m_3 + l_3 m_4)$.

Par identification, on a donc :

- $J_{eq} = J_3 + J_4 + a_3^2 m_3 + l_3^2 m_4$;
- $A = \frac{\eta_9}{r_9}$;
- $C_r(t) = -g \frac{\sqrt{6}}{4} (a_3 m_3 + l_3 m_4)$.

Remarque J_{eq} dépend aussi de a_3 et m_3 , il faudrait ajouter cette précision dans la liste des constantes contenues dans l'expression.

Question 22

- Méthode 1 :** D'après l'expression donnée, on a $C_r(t) = J_{eq} \ddot{\theta}_{32}(t) - AC_{m2}(t)$. Lorsque la vitesse est constante, on a donc $C_r(t) = -AC_{m2}(t)$ avec $C_{m2}(t) = -53,25 \text{ Nm}$ et $C_r(t) = \frac{0,78}{0,25} \cdot 53,25 = 166,14 \text{ Nm}$.

À accélération constante, $\ddot{\theta}_{32} = \frac{0,075}{0,25} = 0,3 \text{ rad s}^{-2}$. On a donc $J_{eq} = \frac{C_r(t) + AC_{m2}(t)}{\ddot{\theta}_{32}(t)} = \frac{C_r(t) - A51,25}{0,3} = \frac{166,14 - 51,25}{0,3} \frac{0,78}{0,25} = 20,8 \text{ kg m}^2$.

- Méthode 2 :** soit,

- $C_{m2}^a = C_{m2}(t) \approx -51,2 \text{ Nm}$ pour $t \in [0; 0,25]$;
- $C_{m2}^b = C_{m2}(t) \approx -53 \text{ Nm}$ pour $t \in [0,25; 0,75]$;
- $C_{m2}^c = C_{m2}(t) \approx -55 \text{ Nm}$ pour $t \in [0,75; 1]$;
- $\ddot{\theta}_{32}(t) = \ddot{\theta}_{32a} = \frac{0,075}{0,25} = 0,3 \text{ rad s}^{-2}$ pour $t \in [0; 0,25]$

On obtient alors 3 équations :
$$\begin{cases} (a) & J_{eq} \ddot{\theta}_{32a} = A \cdot C_{m2}^a + C_r(t) \\ (b) & 0 = A \cdot C_{m2}^b + C_r(t) \\ (c) & -J_{eq} \ddot{\theta}_{32a} = A \cdot C_{m2}^c + C_r(t) \end{cases}.$$

En combinant les équations :

- $(b) \rightarrow C_r(t) = -A \cdot C_{m2}^b = -\frac{\eta_9}{r_9} C_{m2}^b \approx -165,67 \text{ Nm}$;
- $(a) - (c) \rightarrow 2J_{eq} \ddot{\theta}_{32a} = A \cdot (C_{m2}^a - C_{m2}^c)$.

On obtient alors, $J_{eq} = \frac{A \cdot (C_{m2}^a - C_{m2}^c)}{2\ddot{\theta}_{32a}} \approx 19,76 \text{ kg m}^2$.

Question 23 En faisant l'application numérique à partir des données de l'énoncé, on trouve :
$$\begin{cases} J_{eqth} = 18,1 \text{ kg m}^2 \\ C_{rth} = -85,57 \text{ Nm} \end{cases}.$$

Le moment d'inertie équivalent trouvé expérimentalement est supérieur au moment d'inertie théorique avec un écart de l'ordre de 10% probablement aux hypothèses concernant l'utilisation rendement.

Le couple résistant théorique est deux fois inférieur au couple résistant réel. L'hypothèse concernant l'utilisation du rendement permettrait probablement d'expliquer ces écarts. De plus les liaisons ont été supposées parfaite ici et le couple résistant théorique ne dépend que l'action de la pesanteur. Il faudrait prendre en compte les frottements secs et visqueux.

3 Définition et analyse de la chaîne d'asservissement du robot esclave

Objectif Définir le régulateur de la chaîne d'asservissement du robot esclave, analyser ses performances vis-à-vis des perturbations en se limitant à celles dues aux couples de frottement sec et compléter la chaîne d'asservissement par la compensation de ces efforts.

3.1 Calcul d'un correcteur et analyse partielle des performances de la chaîne d'asservissement

Objectif Déterminer un correcteur pour la chaîne d'asservissement de la position angulaire des articulations. Afin d'aboutir à une démarche générale (indépendante d'une articulation particulière), la loi de commande sera paramétrée par le moment d'inertie équivalent de l'articulation considérée.

Question 24 En exprimant l'équation différentielle proposée dans le domaine de Laplace, on a $J_{eq}p^2Q_j(p) = C_j(p) + C_{ext}(p)$. En utilisant le schéma-blocs, on a $Q_j(p) = (C_{ext}(p) + C_j(p))T(p)$. Par analogie, on a donc $T(p) = \frac{1}{J_{eq}p^2}C_j(p) + \frac{1}{J_{eq}p^2}C_{ext}(p)$.

$$\text{On considère que } C_{ext}(p) = 0. \text{ On peut alors exprimer } F_j(p) = \frac{\frac{K_1 T(p)}{1+T(p)K_2 p}}{1+\frac{K_1 T(p)}{1+T(p)K_2 p}} = \frac{\frac{K_1 T(p)}{1+T(p)K_2 p}}{1+\frac{K_1 T(p)}{1+T(p)K_2 p}} = \frac{K_1 T(p)}{1+T(p)K_2 p + K_1 T(p)}$$

$$= \frac{\frac{K_1}{J_{eq}p^2}}{1+\frac{1}{J_{eq}p^2}K_2 p + K_1 \frac{1}{J_{eq}p^2}} = \frac{K_1}{J_{eq}p^2 + K_2 p + K_1} = \frac{1}{\frac{K_1}{K_1}p^2 + \frac{K_2}{K_1}p + 1}.$$

$$\text{On a donc } \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{J_{eq}}{K_1} \text{ et } \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{K_2}{K_1}. \text{ On a donc } K_1 = J_{eq}\omega_0^2 \text{ et } K_2 = \frac{2\xi K_1}{\omega_0} = 2\xi J_{eq}\omega_0.$$

Question 25 On imagine ici qu'il faut considérer que $Q *_j(p) = 0$.

On a $C_j(p) = -(K_1 + K_2 p)Q_j(p)$ et $Q_j(p) = (C_j(p) + C_{ext}(p))T(p)$. On a donc

$$Q_j(p) = (-(K_1 + K_2 p)Q_j(p) + C_{ext}(p))T(p) \Leftrightarrow ((1 + (K_1 + K_2 p))T(p))Q_j(p) = C_{ext}(p) \cdot T(p) \Leftrightarrow \frac{Q_j(p)}{C_{ext}(p)} = \frac{T(p)}{1 + (K_1 + K_2 p)T(p)}$$

$$\text{En utilisant les valeurs déterminées précédemment, on a donc } D(p) = \frac{\frac{1}{J_{eq}p^2}}{1 + (J_{eq}\omega_0^2 + 2\xi J_{eq}\omega_0 p) \frac{1}{J_{eq}p^2}}$$

$$= \frac{1}{J_{eq}p^2 + 2\xi J_{eq}\omega_0 p + J_{eq}\omega_0^2} = \frac{\frac{1}{J_{eq}\omega_0^2}}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}p + 1}.$$

On a $C_{ext}(p) = \frac{C_{ext0}}{p}$. En conséquence, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$. Par ailleurs, $\varepsilon(p) = -Q_j(p) = -D(p)C_{ext}(p)$.

$$\text{On a alors } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} -pD(p)C_{ext}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -p \frac{\frac{1}{J_{eq}\omega_0^2}}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}p + 1} \cdot \frac{C_{ext0}}{p} = -\frac{C_{ext0}}{J_{eq}\omega_0^2}.$$

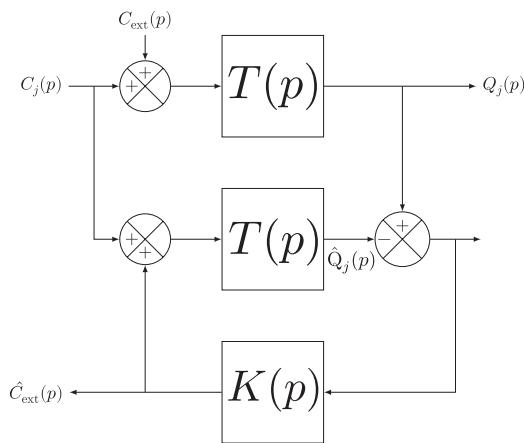
Conclusion : l'erreur ici n'est pas nulle et elle dépend de l'inertie, de la pulsation propre ω_0 et de l'amplitude de la perturbation.

3.2 Amélioration des performances par compensation du couple de perturbation

Objectif Améliorer les performances de la loi de commande vis-à-vis des couples perturbateurs extérieurs.

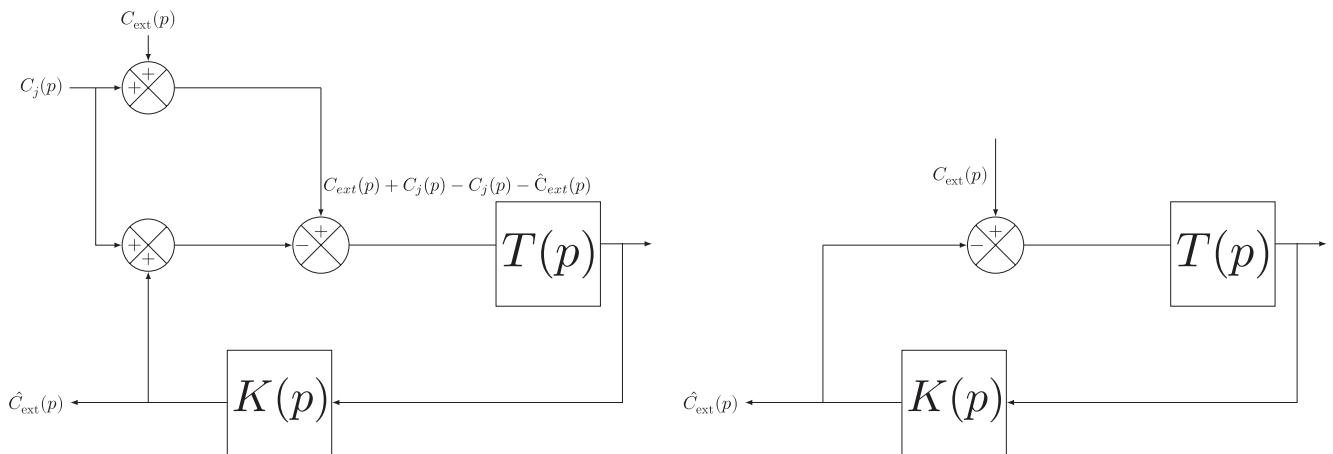
Question 26

Remarque Il semblerait qu'il manque une information concernant le schéma bloc. Il faudrait sans doute ajouter $\hat{Q}_j(p)$. Cela donnerait la figure suivante.



En permutant les blocs $T(p)$ et $K(p)$ qui sont en série on obtient la forme souhaitée.

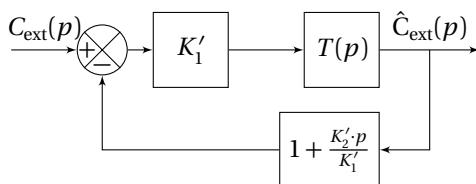
Question 27 En manipulant le schéma bloc on peut obtenir :



Question 28

Remarque On peut hésiter entre prendre la structure de la partie III.A (Méthode A) ou donner un $K(p)$ équivalent sous la forme d'un correcteur P.D. (Méthode B).

Méthode A : Ainsi en manipulant le schéma bloc on obtient :

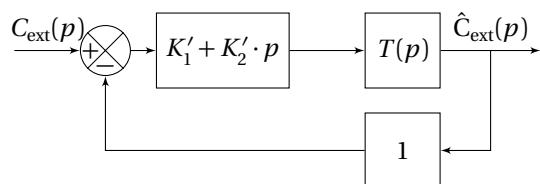


La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$\begin{aligned} H_{BF}(p) &= \frac{\frac{K'_1}{J_{eq}p^2}}{1 + \frac{K'_1}{J_{eq}p^2} \left(1 + \frac{K'_2}{K'_1}p\right)} \\ &= \frac{\frac{K'_1}{J_{eq} \cdot p^2 + K'_2 \cdot p + K'_1}}{1 + \frac{K'_2}{K'_1}p + \frac{J_{eq}}{K'_1}p^2} = \frac{1}{1 + \frac{K'_2}{K'_1}p + \frac{J_{eq}}{K'_1}p^2} \end{aligned}$$

Méthode B :

Ainsi en manipulant le schéma bloc on obtient :



La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$\begin{aligned} H_{BF}(p) &= \frac{\frac{K'_1 + K'_2 \cdot p}{J_{eq}p^2}}{1 + \frac{K'_1 + K'_2 \cdot p}{J_{eq}p^2}} = \frac{\frac{K'_1 + K'_2 \cdot p}{J_{eq} \cdot p^2 + K'_2 \cdot p + K'_1}}{1 + \frac{K'_2 \cdot p}{J_{eq}p^2}} = \\ &= \frac{1 + \frac{K'_2}{K'_1}p}{1 + \frac{K'_2}{K'_1}p + \frac{J_{eq}}{K'_1}p^2}. \end{aligned}$$

Par identification, pour les deux méthodes et avec ce qu'impose la cahier des charges.

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega'_0 = \sqrt{\frac{K'_1}{J_{eq}}} = 5\omega_0 \\ \xi = \frac{\omega'_0}{2} \frac{K'_2}{K'_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K'_1}{J_{eq}} \frac{K'_2}{K'_1}} = 1 \end{array} \right.$$

. On obtient alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} K'_1 = 25 \cdot J_{eq} \cdot \omega_0^2 \\ K'_2 = 2\sqrt{K'_1 \cdot J_{eq}} = 10 \cdot J_{eq} \cdot \omega_0 \end{array} \right.$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 2 ainsi l'erreur statique est nulle.

Question 29 Notons $H_{28}(p)$ la fonction de transfert déterminée à la question 28 : $H_{28}(p) = \frac{\hat{C}_{ext}(p)}{C_{ext}(p)} = \frac{K(p) \cdot T(p)}{1 + K(p) \cdot T(p)}$.

$$\text{Avec } Q_j^*(p) = 0, C_j(p) = \tilde{C}_j(p) - \hat{C}_{ext}(p) = -(K_1 + K_2 \cdot p)Q_j(p) - H_{28}(p)C_{ext}(p)$$

D'après la lecture du schéma bloc :

$$Q_j(p) = T(p)(C_j(p) + C_{ext}(p)) = T(p)(-(K_1 + K_2 \cdot p)Q_j(p) + (1 - H_{28}(p))C_{ext}(p)) \Leftrightarrow Q_j(p)(1 + T(p)(K_1 + K_2 \cdot p)) = C_{ext}(p)T(p)(1 - H_{28}(p)).$$

$$\text{On trouve donc : } \frac{Q_j(p)}{C_{ext}(p)} = \frac{T(p)}{(1 + K(p) \cdot T(p))(1 + T(p)(K_1 + K_2 \cdot p))}.$$

$$\text{Avec } K(p) = K'_1 + K'_2 \cdot p \text{ et } T(p) = \frac{1}{J_{eq}p^2}, \frac{Q_j(p)}{C_{ext}(p)} = \frac{J_{eq}p^2}{(J_{eq}p^2 + K'_1 + K'_2 \cdot p)(J_{eq}p^2 + K_1 + K_2 \cdot p)}.$$

$$\text{D'après les questions 24 et 27, } \frac{Q_j(p)}{C_{ext}(p)} = \frac{\frac{p^2}{J_{eq}}}{(p + \omega'_0)^2(p + \omega_0)^2}.$$

- Stabilité :** on remarque que les pôles de la FTBF sont à partie réelles strictement négatives ($-\omega_0$ et $-\omega'_0$) ce qui est une condition nécessaire et suffisante de stabilité.

- Précision :** soit $\varepsilon(p) = -Q_j(p) = -\frac{p^2}{(p + \omega'_0)^2(p + \omega_0)^2}C_{ext}(p)$. En considérant C_{ext} comme une constante,

$$C_{ext}(p) = \frac{C_0}{p}. \text{ L'erreur statique vis-à-vis d'une perturbation constante est donnée par : } \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) \\ = \lim_{p \rightarrow 0} \left[-\frac{\frac{C_0 \cdot p^2}{J_{eq}}}{(p + \omega'_0)^2(p + \omega_0)^2} \right] = 0.$$

L'erreur statique vis-à-vis d'une perturbation constante est bien nulle.

4 Analyse des performances vis-à-vis des mouvements respiratoires

Objectif Quantifier le niveau de performance de la loi de commande déterminée en considérant la consigne correspondant aux mouvements physiologiques. Une amélioration de la loi de commande est ensuite envisagée sous la forme d'une anticipation sur la consigne pour améliorer les performances.

Question 30 Pour un signal périodique en entrée d'amplitude B , l'écart sera un signal périodique d'amplitude $0,066 \cdot B \cdot \omega_i$, avec $i = \{1, 2\}$ et $\omega_i = 2\pi f_i$ ($f_1 = 0,24 Hz$ et $f_2 = 0,48 Hz$). On note ε_0 l'amplitude de l'écart en régime permanent.

f_i	f_1	f_2
ε_0	$0,066 \cdot 2\pi f_1$	$0,066 \cdot 2\pi f_2$
Application numérique sur $\frac{\varepsilon_0}{B}$	$9,95 \times 10^{-2}$	$19,91 \times 10^{-2}$

Ces valeurs ne sont pas conformes au cahier des charges car l'exigence 5.2.2 impose : $\frac{\varepsilon_j}{B_j} < 10^{-2}$.

Question 31

- Expression temporelle du couple idéal $c_j(t)$:** d'après le schéma bloc dans le domaine de Laplace : $C_j(p) = \frac{Q_j(p)}{T(p)} = J_{eq}p^2Q_j(p)$, en repassant dans le domaine temporel : $c_j(t) = J_{eq} \frac{d^2q_j(t)}{dt^2} = J_{eq} \frac{d^2q_j^*(t)}{dt^2}$;

- **Expression temporelle du couple idéal** $c_u(t)$: d'après le schéma bloc dans le domaine de Laplace : $C_u(p) = K_1 \cdot (Q_j^*(p) - Q_j(p)) - K_2 \cdot p \cdot Q_j(p) = -K_2 \cdot p \cdot Q_j^*(p)$, en repassant dans le domaine temporel : $c_u(t) = -K_2 \frac{dq_j^*(t)}{dt}$;
- au niveau du comparateur on lit : $c_a(t) = c_j(t) - c_u(t)$, ainsi $c_a(t) = J_{eq} \frac{d^2 q_j^*(t)}{dt^2} + K_2 \frac{dq_j^*(t)}{dt}$.

Question 32

- **Détermination de $K_a(p)$** : on en déduit de la question précédente (en supposant les conditions initiales nulles) :

$$K_a(p) = \frac{C_a(p)}{Q_j^*(p)} = J_{eq} \cdot p^2 + K_2 \cdot p.$$

- **Détermination de $F(p)$** :

On a $Q_j(p) = C_j(p)T(p) = (Q_j^*(p)K_a(p) + C_u(p))T(p) = (Q_j^*(p)K_a(p) + C_u(p))T(p) = (Q_j^*(p)K_a(p) + (\varepsilon(p)K_1 - K_2 p Q_j(p)))T(p)$
 $= (Q_j^*(p)K_a(p) + ((Q_j^*(p) - Q_j(p))K_1 - K_2 p Q_j(p)))T(p)$
 $\Leftrightarrow Q_j(p) = (Q_j^*(p)K_a(p) + ((Q_j^*(p) - Q_j(p))K_1 - K_2 p Q_j(p)))T(p)$
 $\Leftrightarrow Q_j(p) = T(p)Q_j^*(p)K_a(p) + T(p)((Q_j^*(p) - Q_j(p))K_1 - K_2 p Q_j(p))$
 $\Leftrightarrow Q_j(p) = T(p)Q_j^*(p)K_a(p) + T(p)K_1 Q_j^*(p) - T(p)K_1 Q_j(p) - T(p)K_2 p Q_j(p)$
 $\Leftrightarrow Q_j(p)(1 + T(p)K_1 + T(p)K_2 p) = Q_j^*(p)T(p)(K_a(p) + K_1)$

On a donc $F(p) = \frac{Q_j(p)}{Q_j^*(p)} = \frac{(K_a(p) + K_1)T(p)}{1 + T(p)K_1 + T(p)K_2 p}$. En factorisant par $T(p)$ au numérateur et au dénominateur

puis en remplaçant $T(p)$ par $\frac{1}{J_{eq}p^2}$ et $K_a(p) = J_{eq} \cdot p^2 + K_2 \cdot p$, on obtient $F(p) = \frac{J_{eq}p^2 + K_1 + K_2 \cdot p}{J_{eq}p^2 + K_1 + K_2 \cdot p} = 1$.

Ainsi quelle que soit la forme de l'entrée, $Q_j^*(p) = Q_j(p)$ et donc l'erreur est nulle en particulier vis-à-vis de signaux de consigne sinusoïdaux.

Question 33

En reprenant le résultat de la question 31 qui permet d'exprimer $c_a(t)$ dans le domaine temporel, on

$$\text{obtient, } c_a(t) = J_{eq} \frac{d^2 \delta q_j^*(t)}{dt^2} + K_2 \frac{d \delta q_j^*(t)}{dt} = -J_{eq} \omega_1^2 B_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + K_2 \omega_2 B_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2).$$

Question 34

- Sur la figure 18, on peut juger des performances liées aux exigences 1.2 (« Asservissement au point de fonctionnement ») :
 - **Précision** : La précision obtenue est optimale. La position angulaire obtenue est confondu à la consigne en régime permanent ce qui se traduira par un écart en régime permanent inférieur à $10\mu\text{m}$.
 - **Rapidité** : le temps de réponse à 5% est la durée entre l'instant de l'échelon et l'instant au delà duquel la position est comprise entre $\pm 5\%$ de la valeur finale et qui correspond ici à la durée au delà de laquelle la position est comprise entre $0,57\mu\text{m}$ et $0,63\mu\text{m}$. Sur la figure 18, on relève approximativement $0,15\text{s} < 0,2\text{s}$ comme l'exige l'exigence 1.2.2.
- Sur la figure 19, on peut juger des performances liées aux exigences 1.3 (« Suivi des mouvements physiologiques »).
 - le signal de consigne possède une fréquence d'environ $0,5\text{Hz}$ et une amplitude de consigne $0,34\text{ rad}$.
 - l'erreur relatif est égale en amplitude à environ $\frac{75 \times 10^{-6}}{0,34} \approx 2,2 \times 10^{-4} < 10^{-2}$ ce qui est bien conforme au cahier des charges.