NOM : ....CORRIGE...................

1

Question 1.

1) Par méthode analytique, on exprime la sortie $X_v(p)$ en fonction des entrées $F_{CS}(p)$ et $X_e^*(p)$:

$X_v(p) = \left[X_e^*(p) + H_S(p)\left(F_{CS}(p) - k_e X_v(p)\right)\right]$.

On en déduit que $X_v(p) = \dfrac{1}{1+H_S(p)k_e} X_e^*(p) + \dfrac{H_S(p)}{1+H_S(p)k_e} F_{CS}(p)$.

D'où $H_t(p) = \dfrac{1}{1+H_S(p)k_e}$ 2,5 et $H(p) = k_a \dfrac{H_S(p)}{1+H_S(p)k_e}$. 2,5

Question 2.

2) En supposant $X_e^*(p)$ nulle, la fonction de transfert globale s'obtient en appliquant la formule de Black : $F_{BF1}(p) = \dfrac{C(p)H(p)}{1+C(p)H(p)}$.

Le calcul donne :

$$F_{BF1}(p) = \frac{\dfrac{1}{m_S p^2 + b_S p + 1}}{1 + \dfrac{1}{m_S p^2 + b_S p + 1}} = \frac{1}{m_S p^2 + b_S p + 1 + k_e} = \frac{\dfrac{1}{1+k_e}}{\dfrac{m_S}{1+k_e}p^2 + \dfrac{b_S}{1+k_e}p + 1}.$$

On obtient un modèle d'ordre 2 dont on identifie les paramètres caractéristiques :

$K = \dfrac{1}{1+k_e}$ 1, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1+k_e}{m_S}}$ 2 et $z = \dfrac{1}{2}\dfrac{b_S}{\sqrt{m_S(1+k_e)}}$. 2

L'application numérique donne $K = 0{,}005$, $\omega_0 = 36{,}36\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ et $z = 0{,}13$.

Question 3.

3) L'amortissement du système n'est pas correct car aucun dépassement n'est autorisé alors que l'amortissement est inférieur à 1. 1

L'erreur en réponse à un échelon vaut $1 - \dfrac{1}{1+k_e} = 99.5\,\%$ ce qui est très loin de l'erreur de 1 % autorisée. 1

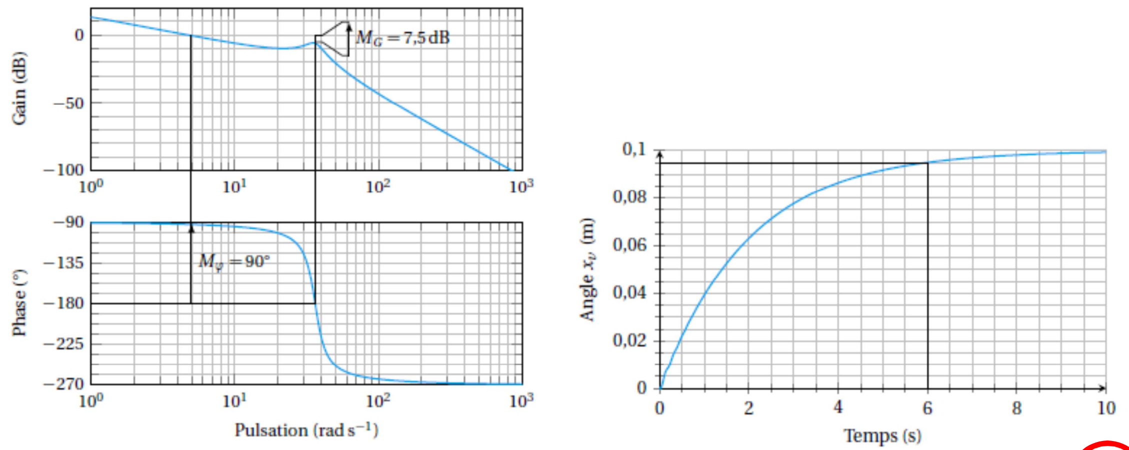
Pour la rapidité, le temps de réponse réduit vaut environ 20 pour un amortissement de 0,13. On en déduit que le temps de réponse à 5 % vaut $\dfrac{20}{36{,}36} = 0{,}55\,\text{s}$. Ce qui est beaucoup trop lent. 2

Pour conclure, aucun des critères du cahier des charges n'est respecté avec ce correcteur proportionnel à 1. 1

Question 4.

4) D'après la courbe de réponse à un échelon, il semble que la réponse ne présente aucun dépassement : le critère d'amortissement est vérifié. La réponse semble tendre vers la consigne de 0,1 m s^{-1}. Le temps de réponse à 5 % est de 6 s, la réponse est trop lente (voir construction figure 2.42).

La marge de phase est largement vérifiée. La marge de gain est tout juste vérifiée.



Temps de réponse à 5 %	6 s : KO	1
Amplitude du premier dépassement	pas de dépassement : OK	1
Erreur statique	tend vers 0 : OK	1
Marge de phase	$M_\varphi = 90°$: OK	1
Marge de gain	$M_G = 7,5$ dB : OK	1

Question 5.

5) Étant donné que la marge de gain est juste vérifiée, la valeur de $K_i = 100$ est déjà la valeur limite. On ne pourra pas respecter le critère de rapidité avec ce correcteur. 5

Question 6.

6) Les constructions sont données sur la figure 2.44. Et le bilan est donné dans le tableau de la figure 2.45.

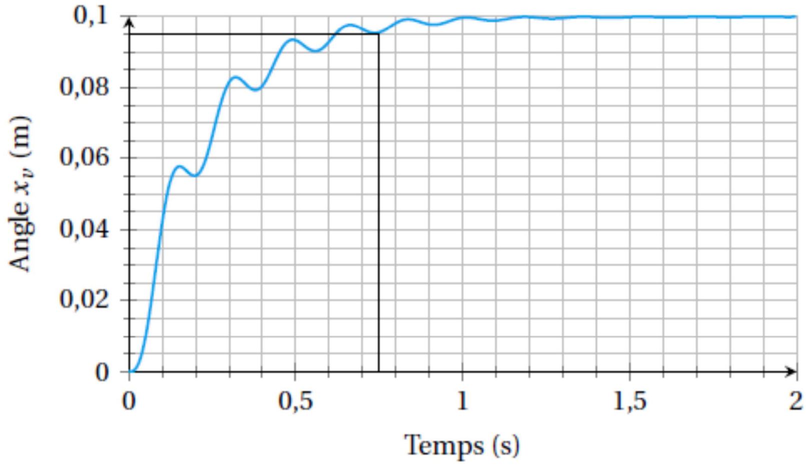


Figure 2.44. Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm avec le réglage K_{imax}.

Temps de réponse à 5 %	0,75 s : OK	2
Amplitude du premier dépassement	Pas de dépassement de la consigne : OK	1
Erreur statique	tend vers 0 : OK	1

Figure 2.45. Performance de l'asservissement avec correction PI et $K_i = K_{imax}$.

Question 7.

7) À 12,5 rad s^{-1}, le gain maximal vaut −30 dB. L'atténuation minimale sera donc de $10^{-30/20} = 0{,}03 = 3\,\%$.

Le cahier des charges demande une atténuation maximale de 1 %. On en déduit que le critère n'est pas vérifié.

5

Question 8.

8) La fonction de transfert $A(p)$ est un second ordre en régime critique car le dénominateur possède une racine réelle double.

Pour $z = 1$, d'après la figure 2.11(a), le temps de réponse réduit vaut environ 5. On en déduit que le temps de réponse à 5 % vaut $\dfrac{5}{\omega_0} = 5T$. Pour obtenir un temps de réponse de 0,8 s, T sera inférieur à 0,16 s.

5

Question 9.

9) Le diagramme asymptotique est tracé sur la figure 2.46. La première coupure se fait à $\omega = \dfrac{1}{T}$ et la seconde à $\dfrac{2}{T}$.

Pour obtenir une atténuation d'au moins 1 %, il faut que le gain soit au plus de $20\log 0{,}01 = -40\,\text{dB}$. Pour obtenir ce gain minimal, il faut décaler le diagramme en gain vers la droite en diminuant la valeur de T. On va translater le diagramme de façon à avoir un gain de -40 dB pour $\omega = 12{,}5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Il faut donc résoudre $20\log\left(\dfrac{T\omega\sqrt{4+T^2\omega^2}}{1+T^2\omega^2}\right) = -40\,\text{dB}$. Il s'agit d'une équation bicarrée dont la résolution mène à $T\omega = 0{,}005$. En fixant, la valeur de -40 dB pour $\omega = 12{,}5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, on obtient $T = 4\times 10^{-4}\,\text{s}$.

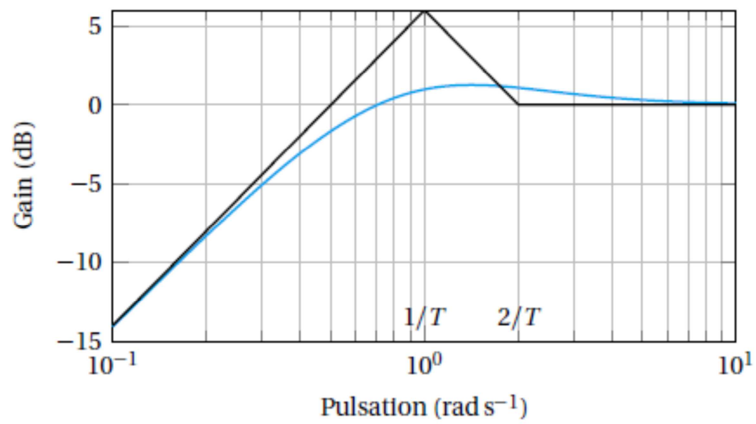


Figure 2.46. Réponse fréquentielle de $B(j\omega)$.

5

Question 10.

10) On peut lister les écarts suivants entre le modèle et la mesure :

- la fréquence et l'amplitude de la position de l'esclave sont identiques ;
- dans les deux cas, le déplacement du maître est bien linéaire ;
- l'effort est au même niveau et ne comporte que de très faibles variations. La commande permet bien de rejeter la perturbation périodique puisque l'effort reste constant.

On peut lister les écarts suivant par rapport au modèle souhaité :

- l'exigence 1.3.2.2 est bien vérifiée car l'effort ressenti paraît bien être indépendant de la position ;
- l'exigence 1.3.1.1 est bien vérifiée aussi puisque la perturbation sinusoïdale n'est plus visible sur l'effort ;
- l'effort ressenti est lui de 2 N. Il est ici du même ordre de grandeur que les 5 N, id 1.3.2.1 ;
- l'échelle est petite mais il semble que le temps de réponse de 0,1 s soit respecté id 1.1.2.1.

5

2 Moto de trial électrique

Question 11.

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{Z_{p1}}{Z_{p2}} \cdot \frac{Z_{S1}}{Z_{S2}} \cdot \frac{\pi N_{max}}{30} \cdot R_1 \\
v &\simeq \frac{20}{44} \times \frac{9}{57} \times \frac{\pi \times 4200}{30} \times 0,345 \simeq 10,9\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\ (39,2\,\mathrm{km/h})
\end{aligned}
$$

5

Le diagramme des exigences précise que la moto doit atteindre au moins 25 km/h à cette fréquence de rotation du moteur, donc cette exigence est satisfaite.

Question 12.

On suppose classiquement que les conditions initiales sont nulles. Plus précisément : $y(0) = 0$; $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$

$$
\begin{aligned}
Mp^2X(p) &= -k\,(X(p) - Y(p)) - \mu p\,(X(p) - Y(p)) \\
(Mp^2 + \mu p + k)\,X(p) &= (\mu p + k)\,Y(p)
\end{aligned}
$$

$$H(p) = \frac{1 + \frac{\mu}{k}p}{1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{M}{k}p^2}$$

5

Pour la suite on conservera donc :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{M}{k}p^2} \qquad (1)$$

Question 13.

Par identification on extrait de (1) : 2

$$1\quad K_a = 1\,;\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \text{ et } z = \frac{\mu}{2\sqrt{kM}}\quad 2$$

Question 14.

Avec ce modèle de second ordre le temps de réponse minimal est obtenu pour $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ soit :

$$\mu = \sqrt{2kM} = \sqrt{2 \times 70\,000 \times 70} \simeq 3130,5\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$$

5

Question 15.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{M} & -\dfrac{\mu}{M}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \dot{x}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{k}{M}y(t)+\dfrac{\mu}{M}\dot{y}(t)\end{pmatrix}$$

Pour évacuer la difficulté de modélisation liée au terme dérivé « $\dfrac{\mu}{M}\dot{y}(t)$ » l'auteur suggère à la question 2 de purement le supprimer — « on néglige le terme en p du numérateur ». Il reste alors :

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{M} & -\dfrac{\mu}{M}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \dot{x}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{k}{M}y_0\end{pmatrix}$$

5

Soit :

$$\ddot{x}(t)=\underbrace{-\frac{\mu}{M}}_{a}\cdot\dot{x}(t)\underbrace{-\frac{k}{M}}_{b}\cdot x(t)+\underbrace{\frac{k}{M}y_0}_{c}$$

$$a\simeq -42,857\,;\ b=1000\,;\ c=3500$$

Question 16.

2,5

$$H_1(p)=-K_1K_2\,;\ H_4(p)=\frac{1}{J_{eq}\cdot p}$$

2,5

Question 17.

2

$$H_5(p)=H_3(p)=K\ ;\ H_2(p)=\frac{1}{R_m+p\cdot L_m}$$

3

Question 18.

On applique ici le théorème de superposition :

$$\Omega_m(p)=\left.\frac{\Omega_m(p)}{U_c(p)}\right|_{C_r(p)=0}U_c(p)+\left.\frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}\right|_{U_c(p)=0}C_r(p)$$

$$H_U(p)=\left.\frac{\Omega_m(p)}{U_c(p)}\right|_{C_r(p)=0}=\frac{H_2H_3H_4}{1+H_2H_3H_4H_5}$$

2,5

$$H_{C_r}(p)=-\left.\frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}\right|_{U_c(p)=0}=\frac{H_1H_4}{1+H_2H_3H_4H_5}$$

2,5

Question 19.

$$H_U(p) = \left.\frac{\Omega_m(p)}{U_c(p)}\right|_{C_r(p)=0} = \frac{\dfrac{K}{R_m + pL_m} \cdot \dfrac{1}{J_{eq} \cdot p}}{1 + \dfrac{K^2}{R_m + pL_m} \cdot \dfrac{1}{J_{eq} \cdot p}} = \frac{K}{K^2 + (R_m + pL_m)\, J_{eq} \cdot p}$$

$$H_U(p) = \frac{\dfrac{1}{K}}{1 + \dfrac{R_m J_{eq}}{K^2} \cdot p + \dfrac{J_{eq} L_m}{K^2} \cdot p^2}$$

5

Question 20.

1 1 1

$$K_v = \frac{1}{K}\ ;\ \omega_0 = \frac{K}{\sqrt{J_{eq} L_m}}\ ;\ z = \frac{R_m}{2K}\sqrt{\frac{J_{eq}}{L_m}}$$

$$K_v \simeq \frac{1}{0,12} \simeq 8,3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1} \cdot V^{-1}}$$

1

$$\omega_0 \simeq \frac{0,12}{\sqrt{0,1 \times 60 \cdot 10^{-3}}} \simeq 1,6\,\mathrm{rad/s}$$

1

$$z \simeq \frac{0,15}{2 \times 0,12}\sqrt{\frac{0,1}{60 \cdot 10^{-3}}} \simeq 0,8$$

Question 21.

1

Pour ce modèle de deuxième ordre nous pouvons estimer le temps de réponse à 5% à l'aide de l'abaque fourni :

$$\omega_0 \mathrm{tr}_{5\%} \simeq 3,5 \Rightarrow \mathrm{tr}_{5\%} \simeq \frac{3,5}{1,55} \simeq 2,3\,\mathrm{s}$$

1,5

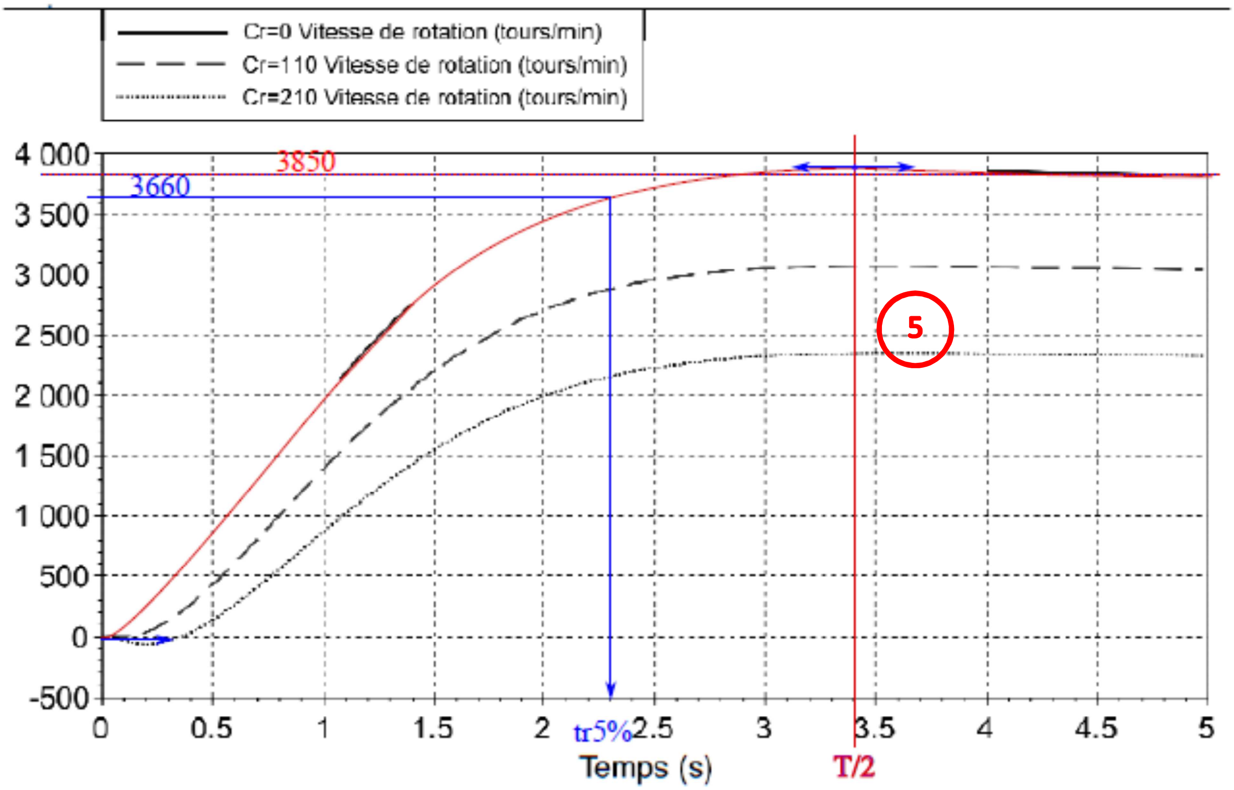
$$D_{1\%}(z = 0,8) \simeq 1,5\%$$

1,5

Le $\mathrm{tr}_{5\%}$ estimé ici est inférieur au 3 s indiqué dans le diagramme des exigences. 1

Question 22.

Question-38 Le temps du 1^{er} dépassement : $\frac{T}{2} \simeq \frac{\pi}{1,55\sqrt{1-0,8^2}} \simeq 3,4\,\text{s}$ ainsi que l'amplitude de ce premier dépassement : $D_{1\%}(z=0,8) \simeq \frac{1,5}{100} \times 3850 \simeq 58\,\text{tr/min}$ nous permet de placer un point… Le temps de réponse à 5% $(0,95 \times 3850 \simeq 3660\,\text{tr/min})$ permet de poser un second point. Le respect d'une tangente nulle à l'origine…



Question 23.

Le temps d'accélération — que j'interprète comme le temps du premier dépassement — ne semble pas modifié. Naturellement la vitesse maximale dépend fortement de la pente. La vitesse maximale pour une pente de 40% est d'environ 2350 tr/min ce qui, conformément au diagramme des exigences, reste supérieur au 50% de la vitesse maximale de 3850 tr/min atteint sur sol horizontal.

5

Question 24.

$$\frac{\Omega_A(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K_A}{RJp}}{1+\frac{K_A^2}{RJp}} = \frac{K_A}{RJp+K_A^2} = \frac{\frac{1}{K_A}}{1+\frac{RJ}{{K_A}^2}p}$$

5

Question 25.

$$\omega_{Af0} = \frac{1}{K_A}u_0$$

5

Question 26. 5

$$\frac{\Omega_A(p)}{Cm(p)} = \frac{\frac{1}{Jp}}{1+\frac{K_A^2}{RJp}} = \frac{1}{Jp+\frac{K_A^2}{R}} = \frac{\frac{R}{{K_A}^2}}{1+\frac{RJ}{{K_A}^2}p}$$

Question 27. 5

$$\Omega(p) = \frac{1}{Jp}\left(Cm_A(p)+Cm_A(p)\right) = \Omega(p) = \frac{1}{Jp}\left(\left(\frac{K_A}{R}\left(U(p)-E_A(p)\right)\right)+\left(\frac{K_B}{R}\left(U(p)-E_B(p)\right)\right)\right)$$

$$\Omega(p) = \frac{1}{Jp}\left(\left(\frac{K_A}{R}\left(U(p)-K_A\Omega(p)\right)\right)+\left(\frac{K_B}{R}\left(U(p)-K_B\Omega(p)\right)\right)\right)$$

$$\Omega(p)+\frac{1}{Jp}(\left(\frac{K_A}{R}K_A\Omega(p)\right)+\left(\frac{K_B}{R}K_B\Omega(p)\right)) = \frac{1}{Jp}(\left(\frac{K_A}{R}(U(p)\right)+\left(\frac{K_B}{R}(U(p)\right))$$

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K_A+K_B}{RJp}}{1+\frac{K_A^2+K_B^2}{RJp}} = \frac{K_A+K_B}{RJp+K_A^2+K_B^2} = \frac{\frac{K_A+K_B}{K_A^2+K_B^2}}{1+\frac{RJ}{K_A^2+K_B^2}p}$$

Question 28. 5

$$\omega_f = \frac{K_A+K_B}{K_A^2+K_B^2}u_0$$

Question 29.

Dans le domaine de Laplace :

$$M_{equ}pV_r(p) = \delta C(p)+\beta V_r(p)+\frac{\gamma g}{p}$$

$$V_r(p) = \frac{\delta C(p)}{-\beta+M_{equ}p}+\frac{1}{(-\beta+M_{equ}p)}\frac{\gamma g}{p} = \frac{-\frac{1}{r_p}C(p)}{\mu+M_{equ}p}+\frac{1}{\mu+M_{equ}p}\frac{-m_t sin\alpha g}{p}$$

$A(p) = \delta = -\frac{1}{r_p}$

2,5

$$B(p) = \frac{1}{-\beta+M_{equ}p} = \frac{1}{\mu+M_{equ}p}$$

2,5

Question 30. 5

$K_{conv}=K_{capt}$

Question 31.

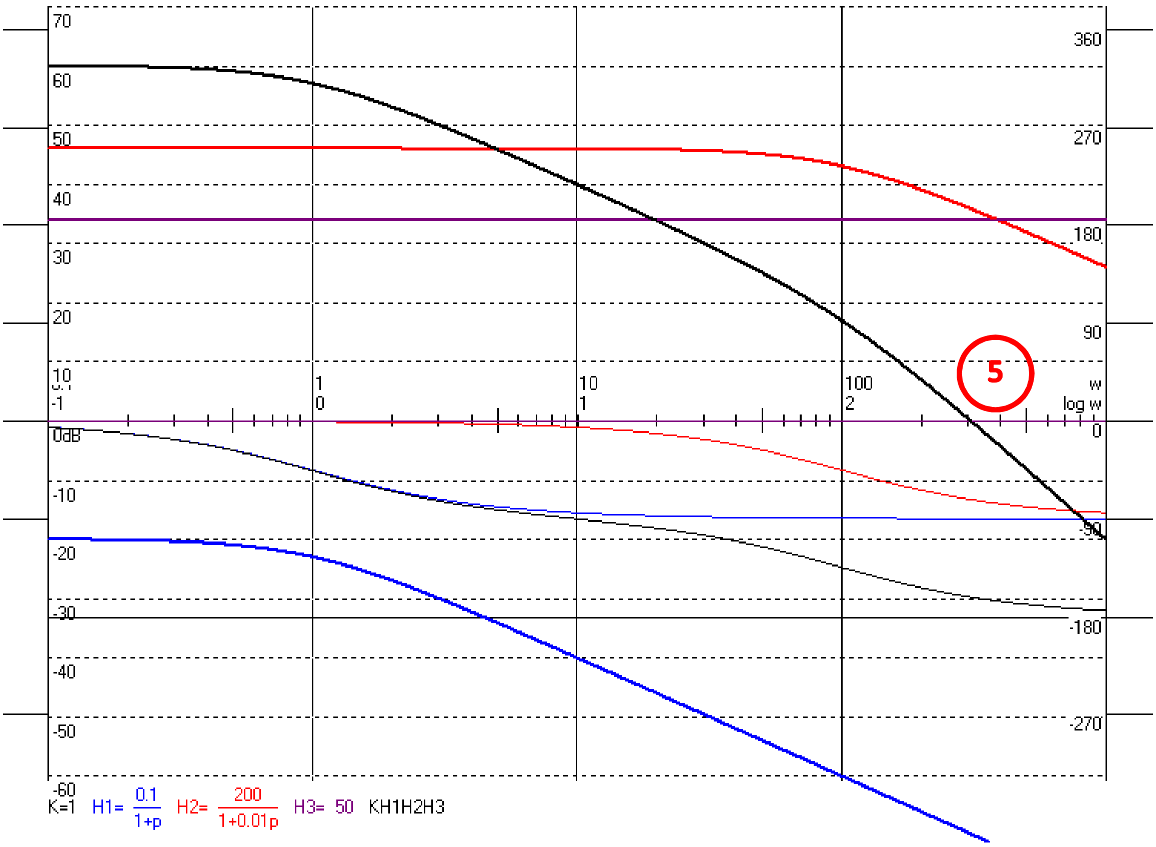
$H_1(p) = \frac{K_{conv}H(p)H_{mot}(p)G(p)}{1+K_{capt}H(p)H_{mot}(p)G(p)} = \frac{K_{conv}K_{cor}K_mK}{(1+\tau_mp)(1+\tau p)+K_{capt}K_{cor}K_mK}$ 2,5

$$H_2(p) = \frac{G(p)}{1+K_{capt}H(p)H_{mot}(p)G(p)} = \frac{K(1+\tau p)}{(1+\tau_mp)(1+\tau p)+K_{capt}K_{cor}K_mK}$$ 2,5

Question 32.

H(p)= K_{cor}
$\frac{U_r(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_{cor}K_m K K_{capt}}{(1+\tau_m.p)(1+\tau.p)}$ produit de 2 FT du premier ordre : pentes 0dB/decade, -20dB/decade à partir de 1 rd/s, -40dB/decade à partir de 100 rd/s

$$\frac{U_r(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1000}{(1+p)(1+0.01p)}$$



5

Question 33.

100rd/s est la 2^ème^ cassure.

Chute de 40db par rapport au gain statique : $gain_{10}$=60-40=20db

La valeur de la courbe réelle pour cette pulsation est 3dB en dessous de l'asymptote d'où un gain =+17dB

φ_{100}=-135°

5

Question 34.

La marge de phase de 45° correspond à ω= 100rd/s ($1/\tau_m$)

Le gain vaut +17db. Il faut donc le baisser de 17 db pour avoir un gain nul pour cette pulsation. 2,5

Ce qui fait Kcor=$10^{-17/20}$=0.1414

La marge de gain est infinie car la phase n'atteint jamais les -180°. 2,5

Question 35.

$$H_1(0) = \frac{K_{conv}K_{cor}K_m K}{1 + K_{capt}K_{cor}K_m K}$$

$H_2(0) = \frac{K}{1+K_{capt}K_{cor}K_m K}$

$$v_r = \frac{K_{conv}K_{cor}K_m K}{1 + K_{capt}K_{cor}K_m K} v_0 - \frac{K m_t sin\alpha g}{1 + K_{capt}K_{cor}K_m K}$$

5

écart statique : $K_{conv}.v_0 - K_{capt}.v_r$

Question 36.

5

$$H_1(p) = \frac{K_{conv}H(p)H_{mot}(p)G(p)}{1 + K_{capt}H(p)H_{mot}(p)G(p)}$$

$$H_1(p) = \frac{K_{conv}H(p)K_m K}{(1+\tau_m p)(1+\tau p) + K_{capt}H(p)K_m K}$$

$$H_1(p) = \frac{K_{conv}K_c K_m K}{p(1+\tau_m p)(1+\tau p) + K_{capt}K_c K_m K}$$

$H_1(p)=1$

$$H_2(p) = \frac{G(p)}{1 + K_{capt}H(p)H_{mot}(p)G(p)}$$

$$H_2(p) = \frac{pK(1+\tau p)}{p(1+\tau_m p)(1+\tau p) + K_{capt}K_c K_m K}$$

$H_2(0)=0$