

## 1 Contexte et étude préliminaire

**Objectif** Valider la pertinence de l'utilisation d'une machine spéciale appelée tour en fosse pour le reprofilage des roues ferroviaires.

### Question 1

- Pour la méthode  $a$  :
  - aller retour exploitation – maintenance :  $2t_1 = 30$  min ;
  - séparation – assemblage des voitures :  $2t_2 = 60$  min ;
  - montage – démontage des roues :  $2t_3 = 480$  min (le sujet est un peu ambigu) ;
  - reprofilage des roues :  $t_3 = 600$  min ;
- Pour la méthode  $b$  :
  - aller retour exploitation – maintenance :  $2t_1 = 30$  min ;
  - séparation – assemblage des voitures :  $2t_2 = 60$  min ;
  - reprofilage des  $6 \times 3 \times 2 = 36$  roues :  $36t_5 = 540$  min ;
  - retournement des 6 voitures (2 retournements) :  $6 \times 2 \times t_6 = 60$  min.

Au final :

- méthode  $a$  :  $t_{i1} = 2t_1 + 2t_2 + 2t_3 + t_4 = 1170$  min ;
- méthode  $b$  :  $t_{i2} = 2t_1 + 2t_2 + 36t_5 + 12t_6 = 690$  min ;

Le gain de temps  $\Delta t_i = t_{i1} - t_{i2} = 480$  min soient 8 h. C'est autant de temps gagner sur l'exploitation de la rame.

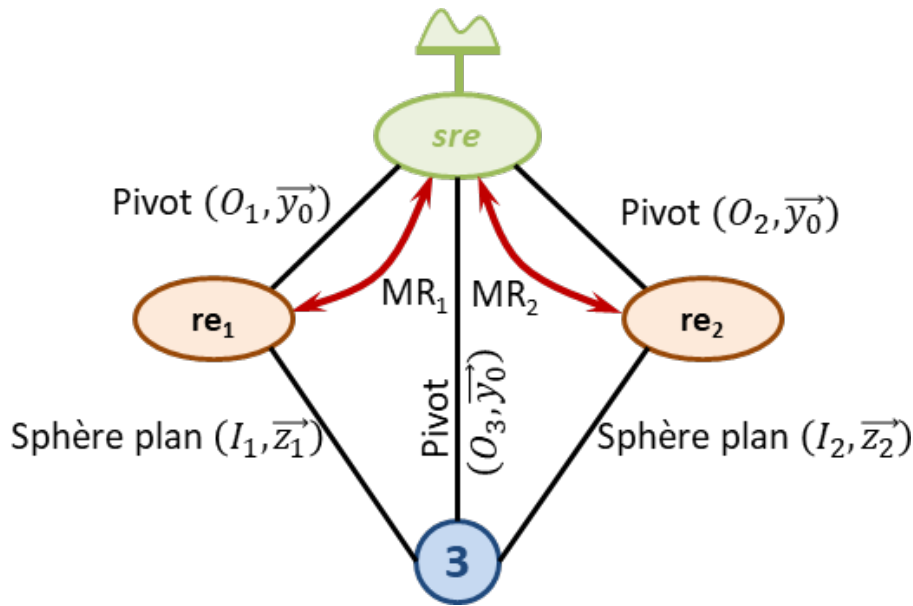
## 2 Analyse de l'entraînement en rotation d'une roue

### 2.1 Description fonctionnelle et structurelle du tour en fosse

### 2.2 Modélisation du dispositif de mise en rotation d'une roue

**Objectif** Vérifier que la modélisation et les hypothèses retenues permettent de déterminer toutes les actions mécaniques nécessaires pour dimensionner les actionneurs des chaînes d'énergie.

**Question 2** À partir des informations données, on peut réaliser le graphe de structure suivant.



### Méthode cinématique

- Nombre cyclomatique  $\gamma = L - S + 1$  avec  $L = 5$  liaisons et  $S = 4$  solides, on a donc  $\gamma = 5 - 4 + 1 = 2$  et  $E_c = 12$  équations cinématiques.
- Nombre d'inconnues cinématiques :
  - 3 liaisons pivot :  $1 \times 3 = 3$  inconnues;
  - 2 liaisons sphère-plan :  $5 \times 2 = 10$  inconnues;
  - **au total :  $I_c = 13$  inconnues cinématiques.**
- Mobilités :
  - mobilités utiles :  $m_u = 2$  : entraînement des deux moteurs;
  - mobilités internes : en considérant le glissement entre la roue et les rouleaux, la roue 3, peut tourner librement. On a donc :  $m_i = 1$ .
  - au final, selon les hypothèses,  $m = m_i + m_u = 3$ .
- On a donc  $h = m - I_c + E_c = 3 - 13 + 12 = 2$ .

### Méthode statique

- 3 solides peuvent être isolés,  $E_s = 3 \times 6 = 18$  équations statiques.
- Nombre d'inconnues statiques :
  - 3 liaisons pivot :  $5 \times 3 = 15$  inconnues;
  - 2 liaisons sphère-plan :  $1 \times 2 = 2$  inconnues;
  - **au total :  $I_s = 17$  inconnues statiques.**
- Mobilités :  $m = m_i + m_u = 3$ .
- On a donc  $h = m - E_s + I_s = 3 - 18 + 17 = 2$ .

**Question 3** Condition de roulement sans glissement en  $I_1$  :  $\overrightarrow{V}(I_1 \in 3/re_1) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{V}(I_1 \in 3/0) - \overrightarrow{V}(I_1 \in re_1/0) = \vec{0}$ . Par suite,

- $\overrightarrow{V}(I_1 \in 3/0) = \overrightarrow{V}(O_3 \in 3/0) + \overrightarrow{I_1 O_3} \wedge \overrightarrow{\Omega}(3/0) = R \vec{z}_1 \wedge \omega_3 \vec{y}_0 = -R \omega_3 \vec{x}_1$ ;
- $\overrightarrow{V}(I_1 \in re_1/0) = \overrightarrow{V}(O_1 \in 3/0) + \overrightarrow{I_1 O_1} \wedge \overrightarrow{\Omega}(3/0) = -R_{re} \vec{z}_1 \wedge \omega_{re_1} \vec{y}_0 = R_{re} \omega_{re_1} \vec{x}_1$ .

$$\text{On a donc } -R \omega_3 - R_{re} \omega_{re_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\omega_3}{\omega_{re_1}} = -\frac{R_{re}}{R}.$$

De même en exploitant le roulement sans glissement en  $I_2$ ,  $\frac{\omega_3}{\omega_{re_2}} = -\frac{R_{re}}{R}$ .

La condition de roulement sans glissement ajoute deux équations cinématiques. Cela supprime la mobilité de la roue 3 et impose  $\omega_{re_1} = \omega_{re_2}$ . On peut donc dire que  $m' = 1$  et  $E_c = 14$ ; donc  $h' = 1 - 13 + 14 = 2$ .

**Question 4** Dans ces conditions précédentes, on ne peut donc pas calculer  $\mathcal{C}_{m1}$  et  $\mathcal{C}_{m2}$ . Il faudrait donc ajouter des hypothèses complémentaires pour évaluer les couples moteurs (symétrie du problème par exemple).

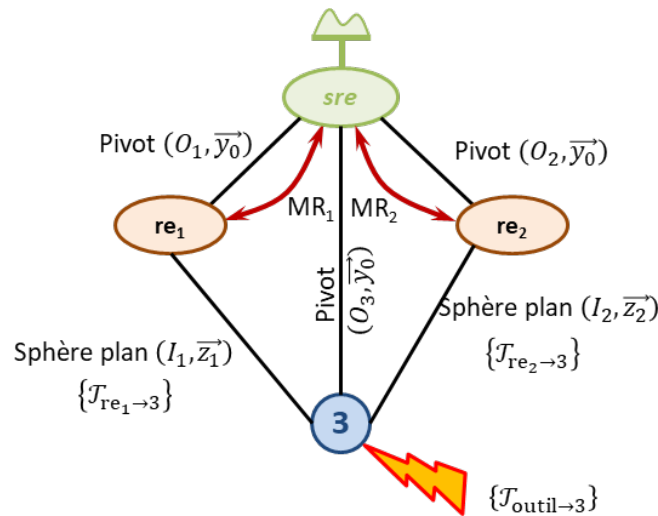
## 2.3 Motorisation du dispositif de mise en rotation d'une roue

**Objectif** Analyser la chaîne d'entraînement en rotation d'une roue et vérifier le choix de la machine électrique.

**Question 5** On conserve l'hypothèse que  $sre$  est supposé fixe par rapport au bâti. On a  $E_1 = M_1 + R_1 + re_1$ . Ces 3 solides sont en liaison pivot par rapport au bâti. En conséquence,  $T(E_1/0) = T(M_1/0) + T(R_1/0) + T(re_1/0) = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_{re} \omega_{re}^2 + \frac{1}{2} J_{re} \omega_{re}^2 = \frac{1}{2} (J_m + J_{red} k^2 + J_{re} k^2) \omega_m^2$ .

On a donc  $J_{eq} = J_m + (J_{red} + J_{re})k^2$ .

**Question 6** On prend le graphe de structure suivant :



On isole  $E_1$ .

**Bilan des puissances internes :** les liaisons internes au système considérée sont considérées sans frottement. On a donc :  $\mathcal{P}_{int}(E_1) = 0$ .

**Bilan des puissances externes :**

- la puissance développée par le moteur peut s'exprimer par  $\mathcal{P}(sre \rightarrow M_1/0) = C_m \omega_m$ ;
- puissance développée par l'action de 3 sur  $re_1$  :  $\mathcal{P}(3 \rightarrow re_1/0) = \{\mathcal{V}(re_1/0)\} \otimes \{\mathcal{T}(3 \rightarrow re_1)\} = \left\{ \begin{matrix} k \omega_m \vec{y}_0 \\ k R_{re} \omega_m \vec{x}_1 \end{matrix} \right\}_{I_1} \otimes \left\{ \begin{matrix} -F_{z1} \vec{z}_1 - F_{x1} \vec{x}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{I_1} = -k R_{re} F_{x1} \omega_m$ .

On applique le théorème de l'énergie cinétique et  $\frac{dT(E_1/0)}{dt} = C_m \omega_m - k R_{re} F_{x1} \omega_m \Rightarrow \dot{\omega}_m J_{eq} = C_m - k R_{re} F_{x1} \Leftrightarrow F_{x1} = \frac{C_m - \dot{\omega}_m J_{eq}}{k R_{re}}$ .

**Question 7** En isolant l'ensemble  $E_2 = \{M_2 + R_2 + re_2\}$  et en appliquant le théorème de l'énergie cinétique :  $\dot{\omega}_m J_{eq} = C_m - k R_{re} F_{x2}$ . Comme les caractéristiques des deux chaînes d'entraînement sont les mêmes, on a donc nécessairement  $F_{x1} = F_{x2}$ .

**Question 8** On a vu que  $\frac{\omega_3}{\omega_{re1}} = -\frac{R_{re}}{R}$  de plus  $\omega_{re1} = k \omega_m$ ; donc  $\omega_3 = -k \frac{R_{re}}{R} \omega_m$ . En dérivant, on a  $\dot{\omega}_3 = -k \frac{R_{re}}{R} \dot{\omega}_m$ .

**Question 9 Stratégie :** on cherche à exprimer le couple moteur en fonction des grandeurs du géométriques, inertielles, ... pour cela, la roue étant en pivot d'axe  $(O, \vec{y}_0)$  on va réaliser un théorème du moment dynamique en  $O_3$  en projection sur  $\vec{y}_0$ .

On isole la roue 3.

On réalise le bilan des actions mécaniques extérieures :

- action de la pivot en  $O_3$  (pas de moment en  $O_3$  en projection sur  $\vec{y}_0$ );
- action des liaisons sphères plans :
  - $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O_3, re_1 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_0 = (\vec{O_3 I_1} \wedge (F_{x1} \vec{x}_1 + F_{z1} \vec{z}_1)) \cdot \vec{y}_0 = (-R \vec{z}_1 \wedge (F_{x1} \vec{x}_1 + F_{z1} \vec{z}_1)) \cdot \vec{y}_0 = -R F_{x1}$ .
  - $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O_3, re_2 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_0 = (\vec{O_3 I_2} \wedge (F_{x2} \vec{x}_2 + F_{z2} \vec{z}_2)) \cdot \vec{y}_0 = (-R \vec{z}_2 \wedge (F_{x2} \vec{x}_2 + F_{z2} \vec{z}_2)) \cdot \vec{y}_0 = -R F_{x2}$ .
- action de l'outil :  $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O_3, outil \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_0 = (\vec{O_3 C} \wedge \overrightarrow{R(outil \rightarrow 3)}) \cdot \vec{y}_0 = ((-\lambda(t) \vec{y}_0 - R_C(t) \vec{z}_0) \wedge \overrightarrow{R(outil \rightarrow 3)}) \cdot \vec{y}_0 = (-\lambda(t) \vec{y}_0 \wedge \overrightarrow{R(outil \rightarrow 3)} - R_C(t) \vec{z}_0 \wedge \overrightarrow{R(outil \rightarrow 3)}) \cdot \vec{y}_0 = (-R_C(t) \vec{z}_0 \wedge \overrightarrow{R(outil \rightarrow 3)}) \cdot \vec{y}_0 = -R_C(t) (\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_0) \cdot \overrightarrow{R(outil \rightarrow 3)} = -R_C(t) \vec{x}_0 \cdot \overrightarrow{R(outil \rightarrow 3)} = R_C(t) f_{ex}$ .

Enfin, la roue étant supposée équilibrée, on a  $\delta(O_3, 3/0) \cdot \vec{y}_0 = J_3 \dot{\omega}_3$ .

Le TMD appliqué en 3 en projection sur  $\vec{y}_0$  est donné par  $J_3 \dot{\omega}_3 = -2R F_{x1} + R_C(t) f_{ex}$ . De plus,  $\omega_3 = -k \frac{R_{re}}{R} \omega_m$  et

$$\dot{\omega}_m J_{eq} = C_m - k R_{re} F_{x1} \Leftrightarrow F_{x1} = \frac{C_m - \dot{\omega}_m J_{eq}}{k R_{re}}$$

Au final :

$$-J_3 k \frac{R_{re}}{R} \dot{\omega}_m = -2R \frac{C_m - \dot{\omega}_m J_{eq}}{k R_{re}} + R_C(t) f_{ex} \Leftrightarrow C_m = \dot{\omega}_m J_{eq} + J_3 k^2 \frac{R_{re}^2}{2R^2} \dot{\omega}_m + \frac{R_C(t) k R_{re} f_{ex}}{2R}$$

et

$$C_m = \dot{\omega}_m J_{eq} + \frac{k R_{re}}{2R} \left( J_3 k \frac{R_{re}}{R} \dot{\omega}_m + R_C(t) f_{ex} \right).$$

**Question 10** En utilisant l'expression précédente, le couple est maximum lorsque  $R_C(t) = R_M$ .

**Question 11** En utilisant la décomposition du vecteur vitesse,  $\overrightarrow{V}(C \in \text{outil}/3) = \overrightarrow{V}(C \in \text{outil}/0) - \overrightarrow{V}(C \in 3/0)$ . D'après le document réponse,  $\overrightarrow{V}(C \in \text{outil}/0) = V_f(t) \vec{u} = -b \omega_3 \vec{u}$ .

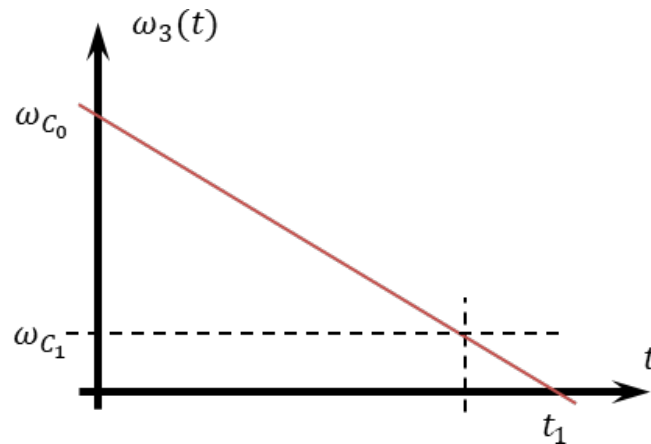
Par ailleurs,  $\overrightarrow{V}(C \in 3/0) = \overrightarrow{V}(O \in 3/0) + \overrightarrow{CO_3} \wedge \vec{\Omega}(3/0) = (R_C \vec{z}_0 + \star \vec{y}_0) \wedge \omega_3 \vec{y}_0 = -R_C(t) \omega_3 \vec{x}_0$ .

Au final,  $\overrightarrow{V}(C \in \text{outil}/3) = V_f(t) \vec{u} + R_C(t) \omega_3 \vec{x}_0$ .

$\overrightarrow{V}(C \in \text{outil}/3) \cdot \vec{x}_0 = -V_C = V_f(t) \vec{u} \cdot \vec{x}_0 + R_C(t) \omega_3 = R_C(t) \omega_3$ . On a donc  $V_C = -R_C(t) \omega_3$ . Ainsi :

- $V_C = -R_C(t) \omega_3(t) = -R_M \omega_{C_0} \Rightarrow \omega_{C_0} = -\frac{V_C}{R_M}$ .
- $V_C = -R_C(t) \omega_3(t) = -R_m \omega_{C_1} \Rightarrow \omega_{C_1} = -\frac{V_C}{R_m}$ .

**Question 12**



Dans ces conditions, on a  $\omega_3(t) = \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{t_1} t + \omega_{C_0}$ .

**Question 13** On a  $l(t) = \|\overrightarrow{C_0 C}\| = \left\| \int_0^t V_f(t) \vec{u} dt \right\| = \left\| \int_0^t -b \omega_3(t) \vec{u} dt \right\| = \left\| \int_0^t -b \left( \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{t_1} t + \omega_{C_0} \right) \vec{u} dt \right\|$

$$= b \left\| \left( \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{2t_1} t^2 + \omega_{C_0} t \right) \vec{u} \right\|.$$

$$\text{Au final, } l(t) = b t \left( \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{2t_1} t + \omega_{C_0} \right).$$

**Question 14** D'après la figure, on a  $l(t_1) = \|\overrightarrow{C_0 C_1}\| = \sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}$ .

$$\text{On a donc } l(t_1) = b \left( \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{2t_1} t_1^2 + \omega_{C_0} t_1 \right) = \sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2} \Leftrightarrow t_1 \left( \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{2} + \omega_{C_0} \right) = \frac{\sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}}{b}.$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{2\sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}}{b(\omega_{C_1} + \omega_{C_0})}.$$

**Question 15** En dérivant l'expression obtenue à la question 12, on a  $\dot{\omega}_3(t) = \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{t_1} = \frac{b(\omega_{C_1} + \omega_{C_0})(\omega_{C_1} - \omega_{C_0})}{2\sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}}$ .

$$\text{Par suite, } \dot{\omega}_3(t) = \frac{b(\omega_{C_1}^2 - \omega_{C_0}^2)}{2\sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}} = \frac{b \left( \frac{V_C^2}{R_m^2} - \frac{V_C^2}{R_M^2} \right)}{2\sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}}. \text{ Au final, } \dot{\omega}_3(t) = \frac{b V_C^2 \left( \frac{1}{R_m^2} - \frac{1}{R_M^2} \right)}{2\sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}} = \frac{b V_C^2 (R_M^2 - R_m^2)}{2 R_m^2 R_M^2 \sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}}.$$

Par ailleurs,  $\dot{\omega}_m = -\dot{\omega}_3 \frac{R}{k R_{re}} = -\frac{R}{k R_{re}} \frac{b V_C^2 (R_M^2 - R_m^2)}{2 R_m^2 R_M^2 \sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}}$ .

Application numérique :  $\dot{\omega}_m = -0.845 \text{ rad s}^{-2}$ .

**Question 16** D'après les annexes, on a  $R_m = 0.4 \text{ m}$  et  $V_C = 400 \text{ m min}^{-1}$ . On a donc  $N_3 = \frac{V_C}{\pi \cdot 2 R_m} = \frac{400}{0.8 \pi} = 159 \text{ tr min}^{-1}$ . On a donc  $N_m = N_3 \frac{R}{k R_e} = 159 \frac{0.47}{0.1 \cdot 0.175} = 4275 \text{ tr min}^{-1}$ . Le moteur doit donc pouvoir tourner au moins à cette vitesse.

Le couple moteur maximal étant de  $22 \text{ Nm}$ , on a donc une puissance développée  $P_{\max} = 22 \times 4275 \simeq 9848 \text{ W}$ .

On ne sait pas si le couple moteur maximum calculé ( $22 \text{ Nm}$ ) tient compte du rendement. S'il tient compte du rendement, le moteur ME\_10\_10 convient (juste). Sinon, il faudra utiliser le ME\_5\_15.

### 3 Analyse de la commande du dispositif de mise en translation de l'outil

**Objectif** Analyser la chaîne d'asservissement en position et en vitesse du porte-outil afin de proposer puis de régler un correcteur permettant d'assurer le niveau de précision attendu pour le profil de la roue.

#### 3.1 Effet de la déformation de l'outil sur la forme de la roue reprofilée

**Question 17** Graphiquement on a :

- $\Delta u_1 = \Delta z_2 \simeq 5 \mu\text{m}$ ;
- $R^2 + \Delta x_2^2 = (R + \Delta u_2)^2$  soit  $\Delta u_2 = \sqrt{R^2 + \Delta x_2^2} - R = \sqrt{0.47^2 + 0.0005^2} - 0.47 \simeq 0.27 \mu\text{m}$ .

Il y a un rapport de 18,8 entre le défaut dû à la compression et celui dû à la flexion. On néglige donc ce dernier.

#### 3.2 Analyse d'une solution avec un porte-outil fixé au bâti

**Objectif** Déterminer les variations de position du point de contact  $C$  entre la roue et l'outil pour une variation sinusoïdale de l'effort perturbateur  $f_c(t)$ .

**Question 18**

On isole l'outil. Celui-ci est soumis :

- à l'action du ressort suivant  $\vec{z}_0 : -K z_2(t)$ ;
- à l'action de l'amortisseur  $\vec{z}_0 : -\lambda \dot{z}_2(t)$ ;
- à l'action de l'effort perturbateur  $\vec{z}_0 : f_c(t)$ .

En appliquant le théorème de la résultante dynamique suivant  $\vec{z}_0$  on obtient :  $-K z_2(t) - \lambda \dot{z}_2(t) + f_c(t) = m_2 \ddot{z}_2(t)$ .

En utilisant la transformée de Laplace, on obtient alors  $-K Z_2(p) - \lambda p Z_2(p) + F_c(p) = m_2 p^2 Z_2(p) \Leftrightarrow S(p) = \frac{Z_2(p)}{F_c(p)} =$

$$\frac{1}{K + \lambda p + m_2 p^2}.$$

En mettant cette fonction de transfert sous forme canonique, on a  $K_S = 1/K \simeq 3.57 \times 10^{-8} \text{ m N}^{-1}$ ,  $\omega_{0S}^2 = \frac{K}{m_2} \Rightarrow$

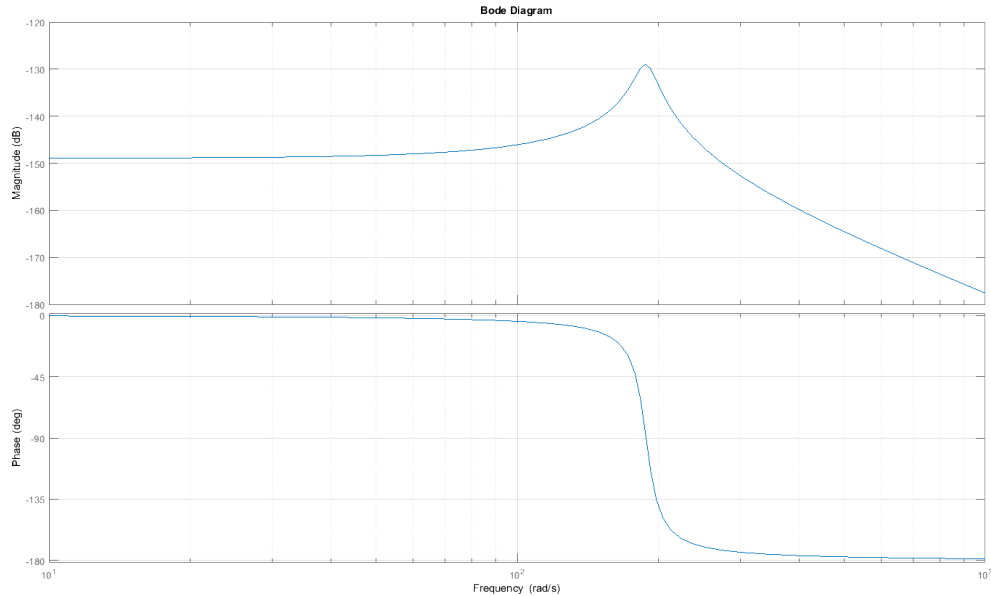
$$\omega_{0S} \simeq 188.5 \text{ rad s}^{-1} \text{ et } \frac{2\xi_S}{\omega_{0S}} = \frac{\lambda}{K} \Leftrightarrow \xi_S = \frac{\lambda}{2\sqrt{K m_2}} \simeq 0.05.$$

L'amplitude maximale est donnée par :  $A_{\max} = \frac{K_S}{2\xi_S \sqrt{1 - \xi_S^2}} \simeq \frac{3.57 \cdot 10^{-8}}{0.2 \sqrt{1 - 0.01}} = 1.8 \cdot 10^{-7}.$

La pulsation de résonance est donnée par  $\omega_r = \omega_{0S} \sqrt{1 - 2\xi_S^2} = 188.5 \sqrt{1 - 2 \times 0.01^2} = 188 \text{ rad s}^{-1}.$

Pour une entrée valant  $f_c(t) = (f_{c0} + f_{c1} \sin(\omega t)) \mathcal{H}(t)$ , en utilisant le théorème de superposition, on obtient en régime permanent le signal suivant :  $z_2(t) = K_S f_{c0} + f_{c1} A_{\max} \sin(\omega_r t + \varphi)$  avec  $\varphi = 90^\circ$ .

Dans ces conditions on a donc  $\Delta z_2 = 2 f_{c1} A_{\max} \simeq 3.6000 \times 10^{-5} \text{ m} \simeq 36 \mu\text{m}$ . Le cahier des charges n'est donc pas respecté ( $\Delta u$  doit être inférieur à  $30 \mu\text{m}$ ).



### 3.3 Analyse des asservissements du porte-outil

#### 3.3.1 Modélisation du mouvement pour la commande

**Objectif** Modéliser le comportement dynamique de l'outil et du porte-outil, puis étudier une commande en position  $z_1(t)$  comprenant un correcteur proportionnel.

**Question 19** D'après le schéma-blocs  $Z_1(p) = H_2(p) (F_m(p) + H_1(p)Z_2(p))$ . D'après la première équation différentielle, on a :  $m_1 p^2 Z_1(p) + \lambda p Z_1(p) + K Z_1(p) = \lambda p Z_2(p) + K Z_2(p) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p) (m_1 p^2 + \lambda p + K) = Z_2(p) (\lambda p + K) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p) = \frac{Z_2(p) (\lambda p + K) + F_m(p)}{m_1 p^2 + \lambda p + K}$ . On a donc par identification  $H_2(p) = \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}$  et  $H_1(p) = \lambda p + K$ .

D'après le schéma-blocs  $Z_2(p) = H_4(p) (F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))$ . D'après la seconde équation différentielle,  $m_2 p^2 Z_2(p) + \lambda p Z_2(p) + K Z_2(p) = \lambda p Z_1(p) + K Z_1(p) + F_c(p) \Leftrightarrow Z_2(p) (m_2 p^2 + \lambda p + K) = Z_1(p) (\lambda p + K) + F_c(p) \Leftrightarrow Z_2(p) = \frac{Z_1(p) (\lambda p + K) + F_c(p)}{m_2 p^2 + \lambda p + K}$ .

On a donc par identification  $H_4(p) = \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}$  et  $H_3(p) = \lambda p + K$ .

Au final,

$$H_1(p) = \lambda p + K \quad H_2(p) = \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K} \quad H_3(p) = \lambda p + K \quad H_4(p) = \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}$$

**Question 20** En utilisant le premier modèle, on avait :  $\begin{cases} Z_1(p) = H_2(p) (F_m(p) + H_1(p)Z_2(p)) \\ Z_2(p) = H_4(p) (F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)) \end{cases}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } Z_1(p) &= H_2(p) (F_m(p) + H_1(p) (H_4(p) (F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)))) \\ &= H_2(p) F_m(p) + H_1(p) H_2(p) H_4(p) F_c(p) + H_1(p) H_2(p) H_3(p) H_4(p) Z_1(p) \\ &\Leftrightarrow Z_1(p) (1 - H_1(p) H_2(p) H_3(p) H_4(p)) = H_2(p) (F_m(p) + H_1(p) H_4(p) F_c(p)). \end{aligned}$$

En utilisant le schéma-blocs,  $Z_1(p) = (F_c(p)N_1(p) + F_m(p))N_2(p)$ . Par identification, on obtient  $N_1(p) = H_1(p)H_4(p)$  et  $N_2(p) = \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$ .

#### Question 21

$$\begin{aligned} N_2(p) &= \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)} = \frac{\frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}}{1 - (\lambda p + K) \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K} (\lambda p + K) \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} \\ &= \frac{1}{(m_1 p^2 + \lambda p + K) - \frac{(\lambda p + K)^2}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} = \frac{1}{(m_1 p^2 + \lambda p + K) (m_2 p^2 + \lambda p + K) - (\lambda p + K)^2} \\ &= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + \lambda^2 p^2 + \lambda p K + K m_2 p^2 + K \lambda p + K^2 - \lambda^2 p^2 - K^2 - 2 \lambda p K} \end{aligned}$$

$$= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + K m_2 p^2} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{p^2 (m_1 m_2 p^2 + (m_1 + m_2) \lambda p + K (m_1 + m_2))}$$

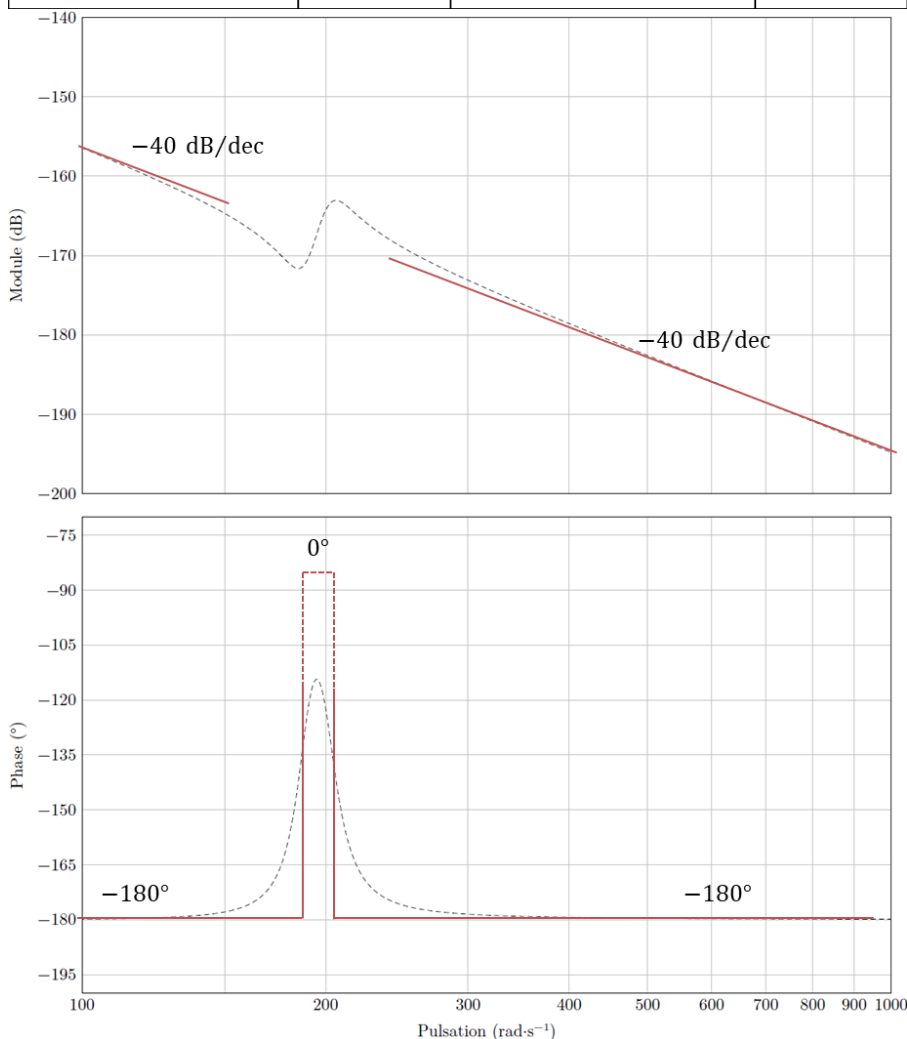
$$= \frac{m_2 \left( p^2 + \frac{\lambda}{m_2} p + \frac{K}{m_2} \right)}{p^2 m_1 m_2 \left( p^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \lambda p + K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)}$$

Par identification, on a :  $A = \frac{1}{m_1}$ ,  $\omega_1^2 = \frac{K}{m_2}$ ,  $2\xi_1 \omega_1 = \frac{\lambda}{m_2}$  et  $\xi_1 = \frac{\lambda}{2\omega_1 m_2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{K m_2}}$ ,  $\omega_2^2 = K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$ ,  $2\xi_2 \omega_2 = \lambda \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$  et  $\xi_2 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 K}}$ .

On a donc  $\xi_1 = \frac{\lambda}{2\sqrt{m_2 K}}$  et  $\xi_2 = \lambda \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{2\sqrt{K m_1 m_2}}$ .

**Question 22** D'après le diagramme asymptotique donné, on a nécessairement  $\omega_1 < \omega_2$ . On peut dresser un tableau des variations à partir de la fonction de transfert  $N_2(p)$ .

	$\omega_1$		$\omega_1$
$\frac{A}{p^2}$	-40 dB/dec	-40 dB/dec	-40 dB/dec
$p^2 + 2\xi_1 \omega_1 p + \omega_1^2$	0 dB/dec	40 dB/dec	40 dB/dec
$\frac{1}{p^2 + 2\xi_2 \omega_2 p + \omega_2^2}$	0 dB/dec	0 dB/dec	-40 dB/dec
$20 \log  N_2(p) $	-40 dB/dec	0 dB/dec	-40 dB/dec
$\text{Arg}(N_2(p))$	-180°	0°	-180°



**Question 23** Si le système n'est pas sollicité par des pulsations comprises entre 150 et 250 rad s<sup>-1</sup>, on peut modéliser  $N_2(p)$  par un double intégrateur. Le gain dB est donc  $20 \log A - 20 \log \omega^2$ . Pour  $\omega = 500 \text{ rad s}^{-1}$  on a  $20 \log A - 20 \log 500^2 = -182,5 \Rightarrow \log A = \frac{20 \log 500^2 - 182,5}{20}$  et  $A = 1,87 \cdot 10^{-4}$ .

**Question 24** Dans le cas, la FTBO est de classe 2.

- **req 1.1** :  $M\varphi = 60^\circ$  : impossible à respecter la phase sera toujours de  $-180^\circ$ .
- **req 1.2** :  $\omega_{0\text{dB}} = 200 \text{ rad s}^{-1}$  : critère non respecté (cf diagramme de Bode).
- **req 1.4** : erreur en régime permanent :  $\Delta c < 40 \mu\text{m}$  pour un échelon d'amplitude  $f_{c0} = 1 \text{ kN}$  : critère non respecté (pas d'intégrateur avant la perturbation).
- **req 1.5** : défaut de la roue  $\Delta u < 30 \mu\text{m}$  lorsque la perturbation est sinusoïdale.

La correction proportionnelle ne permet donc pas de respecter tous les critères du cahier des charges.

### 3.3.2 Calcul des paramètres des correcteurs de la loi de commande

**Objectif** Déterminer les paramètres d'une loi de commande afin de valider les performances statiques et dynamiques du cahier des charges.

**Question 25** On a  $\arg(H_{\text{BO}}(j\omega)) = \arg(AK_v) + \arg\left(p + \frac{1}{T_i}\right) + \arg(p + K_p) - 3 \arg(p) = \arctan T_i \omega + \arctan \omega / K_p - 270$ .

On souhaite que la marge de phase soit de  $60^\circ$  soit  $\arg(H_{\text{BO}}(j\omega_{0\text{dB}})) = -120^\circ$ . On a donc  $-120 = \arctan T_i \omega_{0\text{dB}} + \arctan \omega_{0\text{dB}} / K_p - 270 \Leftrightarrow \arctan T_i \omega_{0\text{dB}} + \arctan \omega_{0\text{dB}} / K_p = 150$ .

$$\text{Or } \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

$$\text{On a donc } \tan 150 = \frac{T_i \omega_{0\text{dB}} + \omega_{0\text{dB}} / K_p}{1 - T_i \omega_{0\text{dB}}^2 / K_p} \Leftrightarrow \tan 150 - \tan 150 T_i \omega_{0\text{dB}}^2 / K_p = T_i \omega_{0\text{dB}} + \omega_{0\text{dB}} / K_p$$

$$\Leftrightarrow T_i = \frac{K_p \tan 150 - \omega_{0\text{dB}}}{K_p \omega_{0\text{dB}} + \tan 150 \omega_{0\text{dB}}^2}.$$

**R** D'une part, en utilisant le schéma-blocs, on a :

$$H_{\text{BO}}(p) = \frac{K_p}{p} \frac{H_{\text{PI}(p)} p N_{2\text{app}}(p)}{1 + H_{\text{PI}(p)} p N_{2\text{app}}(p)} = \frac{K_p}{p} \frac{K_v \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) p \frac{A}{p^2}}{1 + K_v \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) p \frac{A}{p^2}} = \frac{K_p}{p} \frac{K_v (T_i p + 1) A}{T_i p^2 + K_v (T_i p + 1) A} = \frac{K_p}{p} \frac{T_i p + 1}{\frac{T_i}{AK_v} p^2 + T_i p + 1}.$$

D'autre part, en prenant la FTBO proposée, on a :

$$H_{\text{BO}}(p) = \frac{AK_v \left(p + \frac{1}{T_i}\right) (p + K_p)}{p^3} = \frac{AK_v}{T_i} \frac{T_i p^2 + T_i K_p p + p + K_p}{p^3} = \frac{AK_v}{T_i K_p} \frac{T_i p^2 + T_i p + p + 1}{p^3}.$$

La forme proposée par le sujet et la forme déterminée à parti du schéma-blocs sont donc différentes.

**Question 26**  $H_{\text{BO}}(j\omega) = AK_v \frac{-\omega^2 + K_p j\omega + \frac{j\omega}{T_i} + \frac{K_p}{T_i}}{-\omega^3} = -\frac{AK_v}{\omega^3} \left( \left( \frac{K_p}{T_i} - \omega^2 \right) + \left( \frac{1}{T_i} + K_p \right) j\omega \right)$

$$\text{On a donc } \log |H_{\text{BO}}(j\omega)| = \frac{AK_v}{\omega^3} \sqrt{\left( \frac{K_p}{T_i} - \omega^2 \right)^2 + \left( \frac{1}{T_i} + K_p \right)^2 \omega^2}.$$

$$\text{Pour } \omega = \omega_{0\text{dB}}, \log |H_{\text{BO}}(j\omega)| = 1. \text{ En conséquence, } \frac{AK_v}{\omega_{0\text{dB}}^3} \sqrt{\left( \frac{K_p}{T_i} - \omega_{0\text{dB}}^2 \right)^2 + \left( \frac{1}{T_i} + K_p \right)^2 \omega_{0\text{dB}}^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow K_v = \frac{\omega_{0\text{dB}}^3}{A \sqrt{\left( \frac{K_p}{T_i} - \omega_{0\text{dB}}^2 \right)^2 + \left( \frac{1}{T_i} + K_p \right)^2 \omega_{0\text{dB}}^2}}.$$

**Question 27**

- | Pour  $i$  allant de 0 à  $N_{K_p}$  :
- | Calcul de  $K_p = i \times \Delta K_p$
- | Calcul de  $T_i(K_p)$
- | Calcul de  $K_v(K_p)$
- | Calcul de  $|S_{K_p}|_{\text{max}} = |S(j \times 0)|$
- | Pour  $j$  allant de 0 à  $N_\omega$  :
- | Calcul de  $\omega = j \times \Delta \omega$



| Calcul de  $|S_{K_p}|_{\text{tmp}} = |S(j \times \omega)|$   
 | Si  $|S_{K_p}|_{\text{max}} < |S_{K_p}|_{\text{tmp}}$  :  
 |  $|S_{K_p}|_{\text{max}} = |S_{K_p}|_{\text{tmp}}$ .  
 | On stocke  $|S_{K_p}|_{\text{max}}, K_p, K_v, T_i$  dans une liste

### Question 28

| On initialise  $i_{\min}$  et  $S_{\min}$   
 | Pour  $i$  allant de 0 à  $N_{K_p}$  :  
 | Si  $S[i] < S_{\min}$  :  
 |  $i_{\min} \leftarrow i$   
 |  $S_{\min} \leftarrow S[i]$   
 | On retourne  $K_p, K_v, T_i$  associés à  $i_{\min}$ .

## 3.4 Analyse de l'influence du paramètre $b$

**Objectif** Déterminer la valeur maximale de  $b$  permettant de conserver la stabilité de l'asservissement.

**Question 29** D'après le schéma-blocs,  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$ . D'après les équations données et en utilisant le théorème du retard, on a  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p) + Z_2(p)e^{-\tau p} = Q_c(p) - Z_2(p)(1 - e^{-\tau p})$ . En conséquence,  $H_r(p) = 1 - e^{-\tau p}$ .

**Question 30**  $FTBO(p) = bK_f S(p)H_r(p) = \frac{bK_f}{K + \lambda p + m_2 p^2} (1 - e^{-\tau p}) = H_2(p) \cdot H_r(p)$ .

On a  $G_{dB}(\omega) = G_{dB2}(\omega) + G_{dBr}(\omega)$ .

$$G_{dBr}(\omega) = 20 \log |1 - e^{-j\tau\omega}| = 20 \log \sqrt{(1 - \cos(-\tau\omega))^2 + (\sin(-\tau\omega))^2} = 20 \log \sqrt{2 - 2\cos(\tau\omega)}.$$

On a donc :

- pour  $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$  avec  $k \in \mathbb{Z}^*$  et  $G_{dBr}(\omega) \rightarrow -\infty$ ;
- pour  $\omega = \frac{\pi + k2\pi}{\tau}$  avec  $k \in \mathbb{Z}^*$  et  $G_{dBr}(\omega) = 20 \log 2$ .

Le diagramme en gain montre alors l'addition d'un gain du second ordre et d'un gain périodique. Les « zéros de transmission » correspondent aux pulsations  $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$ .

Pour la phase,  $\varphi_{BO}(\omega) = \varphi_2(\omega) + \arg(1 - \cos(-\tau\omega) - j\sin(-\tau\omega))$ . Or  $1 - \cos(-\tau\omega) = 1 - \cos(\tau\omega) \geq 0$ . On a donc  $\varphi_{BO} = \varphi_2(\omega) + \arctan\left(\frac{\sin(\tau\omega)}{1 - \cos(\tau\omega)}\right)$ .

Le diagramme de phase est la somme d'une phase d'un système du second ordre et d'un signal  $\frac{2\pi}{\tau}$  périodique.

**Question 31** Pour garantir la stabilité en BF, il faut assurer un gain négatif en BO. D'après le diagramme de gain, le gain maximal relevé est de 45 dB. Il faudrait donc ajouter un gain supplémentaire  $b'$  tel que  $20 \log b' = 45$  soit  $b' = 10^{45/20} = 177$ . Au bilan, on aurait donc  $b_{\lim} = b'b = 177 \times \frac{5 \cdot 10^{-2}}{\pi} = 2.83 \text{ mm rad}^{-1}$ .

Il faudrait déterminer si une augmentation de  $b$  réduit l'amortissement de l'asservissement.

## 4 Synthèse

### Question 32

- Graphiquement on mesure  $\Delta z_2 = 0.02 \text{ mm} = 20 \mu\text{m} < 30 \mu\text{m}$ . CDC OK.
- $\Delta e = 40 \mu\text{m}$ . CDC juste OK.
- La marge de phase du CDC est respectée pour  $N_2(p)$  uniquement.

Le tour permet de générer un profil de roue satisfaisant.