Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [1]		Mach 0,89 593.40 kt [2]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

B La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

C La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

D Toutes les réponses conviennent.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

B $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

B $C = \dfrac{A+B}{2}$.

C $A+B+C = 2A$.

D $C = A+B$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

C $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

D $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

C Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

D Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse.
- B La même incidence.
- C La même inclinaison.
- D La même vitesse et le même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- B $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=24$.

C $I_c=22$.

D $I_c=16$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 7$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 4$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 5$.
B $m_c = 2$.
C $m_c = 0$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 13$.
B $h = 9$.
C $h = 18$.
D $h = 17$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
D Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des couples pivot glissant / appui-plan.
B Des liaisons sphériques.
C Des sphères-cylindres.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
B $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
C $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
C $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $2m_t + C_3$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{ext}} = \delta N_0 \dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = -\delta N_0 \dot{\delta}$.

C $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [3]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 0.25 s.
- B 4 ms.
- C 40 ms.
- D 7 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- B Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D Toutes les vitesses conviennent.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- C À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- D Non défini.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Aucune des réponses n'est bonne.
- B Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 4.
- C alphavote = 5,5.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[u(t) - u(t-19)]$.
- C $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- D $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 7 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A non définie.
- B négative ;
- C 20 ° ;
- D nulle ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et intégral.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel intégral et dérivé.
- D Proportionnel et à retard de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- B $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 0,5
- C 10
- D 4

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CdC non respecté car ε_S est non nul.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- B Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- C Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- D Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- B Tous les criètres.
- C $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- D $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [4]		Mach 0,89 593.40 kt [5]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

- A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.
- B Toutes les réponses conviennent.
- C La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.
- D La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)} \end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a}$.

B $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b} \end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} Mg\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = \dfrac{A+B}{2}$.

B $A+B+C = 2A$.

C $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

D $C = A+B$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

C $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- B Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse et le même inclinaison.
- B La même incidence.
- C La même inclinaison.
- D La même vitesse.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- B $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=16$.

C $I_c=22$.

D $I_c=24$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 8$.
C $\mu = 7$.
D $\mu = 4$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 5$.
B $m_c = 0$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 18$.
B $h = 9$.
C $h = 17$.
D $h = 13$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
B Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
C Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
D Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des pivots glissants.
B Des sphères-cylindres.
C Des couples pivot glissant / appui-plan.
D Des liaisons sphériques.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
C $\lambda\tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

B $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

C $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

D $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

B $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

D $2m_t + C_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

B $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

C $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [6]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 40 ms.
- B 4 ms.
- C 7 ms.
- D 0.25 s.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- B Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A Non défini.
- B $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 5.
- D alphavote = 4.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- B $\dfrac{10}{p}(1-e^{-19p})$.
- C $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p})$.
- D $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p})$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 7 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 2.
- C Ordre 12 – Classe 1.
- D Ordre 9 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A nulle ;
- B négative ;
- C 20 ° ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel et à avance de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- B $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- C $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- D $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 0,5
- C 4
- D 10

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CdC non respecté car ε_S est non nul.
- C CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- C Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- D Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- C $t_{r5\%}$.
- D Tous les criètres.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [7]		Mach 0,89 593.40 kt [8]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

- A La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.
- B La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.
- C Toutes les réponses conviennent.
- D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)} \end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a}$.

C $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b} \end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} Mg\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

B $C = A+B$.

C $A+B+C = 2A$.

D $C = \dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

D $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

C $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

D $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

B Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

C Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

D Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- B Vol en palier : $\gamma = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même incidence.
- B La même vitesse et le même inclinaison.
- C La même vitesse.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=24$.

B $I_c=20$.

C $I_c=22$.

D $I_c=16$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 8$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 4$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 2$.
B $m_c = 1$.
C $m_c = 5$.
D $m_c = 0$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 9$.
B $h = 13$.
C $h = 17$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des sphères-cylindres.
C Des pivots glissants.
D Des couples pivot glissant / appui-plan.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
B $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
C $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
D $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
B $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
C $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

D $2m_t + C_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

B $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

D $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [9]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 0.25 s.
- B 7 ms.
- C 40 ms.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- D La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- B À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- C Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- C $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- B Non défini.
- C $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Aucune des réponses n'est bonne.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 5,5.
- D alphavote = 4.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60^\circ$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,^\circ\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10^\circ$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- B $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- C $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- D $10[u(t) - u(t-19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1-p\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1-e^{-p}-e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p}\left(1-e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 1.
- B Ordre 7 – Classe 1.
- C Ordre 9 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A non définie.
- B 20 ° ;
- C nulle ;
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\frac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à avance de phase.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel intégral et dérivé.
- D Proportionnel et à retard de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 0,5
- C 10
- D 4

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CdC non respecté car ε_S est non nul.
- B CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- C CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- D CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- C Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- D Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A Tous les criètres.
- B $t_{r5\%}$.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [10]		Mach 0,89 593.40 kt [11]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

B La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

C La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

D Toutes les réponses conviennent.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\vec{x_0}, \vec{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\vec{x_0}, \vec{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\vec{x_a}, \vec{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\vec{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a}$.

B $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = A + B$.

B $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

C $A + B + C = 2A$.

D $C = \dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

D $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

B Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

C Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse.
- B La même inclinaison.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même incidence.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=24$.

C $I_c=22$.

D $I_c=16$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 8$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 7$.
D $\mu = 4$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 5$.
B $m_c = 0$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 18$.
B $h = 9$.
C $h = 17$.
D $h = 13$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des sphères-cylindres.
B Des liaisons sphériques.
C Des pivots glissants.
D Des couples pivot glissant / appui-plan.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
B $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
C $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
D $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

– Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  – Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  – On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  – ρ : masse volumique de l'air ;
  – S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  – V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  – ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  – C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  – δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  – Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

B $2m_t + C_3$.

C $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

B $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

B $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [12]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 40 ms.
- B 4 ms.
- C 7 ms.
- D 0.25 s.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- B Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- C Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- D Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- C $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A Non défini.
- B $\varepsilon_t = 3^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- C alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 4.
- C alphavote = 5,5.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- B $10[u(t) - u(t-19)]$.
- C $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- D $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p})$.
- C $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p})$.
- D $\dfrac{10}{p}(1-e^{-19p})$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 2.
- C Ordre 12 – Classe 1.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A 20 ° ;
- B non définie.
- C nulle ;
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et à retard de phase.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel et à avance de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- B $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- C $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 0,5
- C 4
- D 10

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CdC non respecté car ε_S est non nul.
- C CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- C Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- D Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- C Tous les crièstres.
- D $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [13]		Mach 0,89 593.40 kt [14]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A Toutes les réponses conviennent.

B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

C La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

B $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

D $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = \dfrac{A+B}{2}$.

B $C = A+B$.

C $A+B+C = 2A$.

D $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

C $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol en palier : $\gamma = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse.
- B La même inclinaison.
- C La même incidence.
- D La même vitesse et le même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=24$.

B $I_c=22$.

C $I_c=16$.

D $I_c=20$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 4$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 5$.
B $m_c = 1$.
C $m_c = 0$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 18$.
B $h = 9$.
C $h = 17$.
D $h = 13$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
B Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
C Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
D Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des pivots glissants.
B Des couples pivot glissant / appui-plan.
C Des sphères-cylindres.
D Des liaisons sphériques.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
C $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
D $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
C $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

– Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  – Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  – On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  – ρ : masse volumique de l'air ;
  – S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  – V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  – ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  – C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  – δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  – Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

C $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

D $2m_t + C_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

C $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

D $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{L s^{-1} A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{A\,rad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [15]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 7 ms.
- B 0.25 s.
- C 40 ms.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- B Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- C Toutes les vitesses conviennent.
- D La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- B À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- C $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- B Non défini.
- C $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- B alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 5.
- C alphavote = 4.
- D alphavote = 5,5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- B $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 1.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A négative ;
- B nulle ;
- C 20 ° ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\frac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et intégral.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel intégral et dérivé.
- D Proportionnel et à retard de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- D $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 10
- B 4
- C 0,5
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CdC non respecté car ε_S est non nul.
- B CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- C CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- D CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- B Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- C Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- D Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B Tous les criètres.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [16]		Mach 0,89 593.40 kt [17]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

B La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

C Toutes les réponses conviennent.

D La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

B $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = \dfrac{A+B}{2}$.

B $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

C $A+B+C = 2A$.

D $C = A+B$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

D $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

D Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol en palier : $\gamma = 0$.
- D Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même incidence.
- B La même vitesse et le même inclinaison.
- C La même vitesse.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=24$.

B $I_c=20$.

C $I_c=16$.

D $I_c=22$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 4$.
B $\mu = 8$.
C $\mu = 5$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 5$.
B $m_c = 1$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 0$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 9$.
B $h = 18$.
C $h = 13$.
D $h = 17$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
B Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des sphères-cylindres.
C Des couples pivot glissant / appui-plan.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
B $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
C $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

D $2m_t + C_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

B $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [18]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 0.25 s.
- B 4 ms.
- C 7 ms.
- D 40 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- C La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A Non défini.
- B $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Aucune des réponses n'est bonne.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- C alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 4.
- B alphavote = 5.
- C alphavote = 3.
- D alphavote = 5,5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- B $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- B $\dfrac{10}{p}(1-e^{-19p})$.
- C $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p})$.
- D $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p})$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 2.
- B Ordre 9 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 1.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A 20 ° ;
- B négative ;
- C nulle ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à retard de phase.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel intégral et dérivé.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- B $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- C $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- D $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 10
- B 0,5
- C 4
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- B CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- C CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- D CdC non respecté car ε_S est non nul.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- D Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $t_{r5\%}$.
- B Tous les criètres.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [19]		Mach 0,89 593.40 kt [20]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

B Toutes les réponses conviennent.

C La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

B $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = A + B$.

B $A + B + C = 2A$.

C $C = \dfrac{A+B}{2}$.

D $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

B $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

D $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

C Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

D Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol en palier : $\gamma = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse et le même inclinaison.
- B La même vitesse.
- C La même incidence.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=24$.

B $I_c=20$.

C $I_c=16$.

D $I_c=22$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 7$.
B $\mu = 4$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 5$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 5$.
B $m_c = 0$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 9$.
B $h = 13$.
C $h = 18$.
D $h = 17$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
B Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
C Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des couples pivot glissant / appui-plan.
B Des sphères-cylindres.
C Des pivots glissants.
D Des liaisons sphériques.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
C $\lambda\tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
C $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $2m_t + C_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

D $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

C $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

D $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

C $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [21]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 0.25 s.
- B 4 ms.
- C 40 ms.
- D 7 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- D La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- B Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 3^\circ$.
- C Non défini.
- D $\varepsilon_t = 8^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- B Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Aucune des réponses n'est bonne.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5,5.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 5.
- D alphavote = 4.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60^\circ$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,^\circ\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10^\circ$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p})$.
- C $\dfrac{10}{p}(1-e^{-19p})$.
- D $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p})$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 2.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A non définie.
- B 20 ° ;
- C nulle ;
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à avance de phase.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel intégral et dérivé.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- B $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 10
- C 0,5
- D 4

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CdC non respecté car ε_S est non nul.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- D CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- D Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A Tous les criètres.
- B ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- C $t_{r5\%}$.
- D $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [22]		Mach 0,89 593.40 kt [23]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

B La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

C La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

D Toutes les réponses conviennent.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\vec{x_a}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

B $A+B+C = 2A$.

C $C = \dfrac{A+B}{2}$.

D $C = A+B$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

B $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

B Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

C Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

D Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- B Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse et le même inclinaison.
- B La même incidence.
- C La même vitesse.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- B $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=22$.

B $I_c=16$.

C $I_c=20$.

D $I_c=24$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 8$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 4$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 2$.
B $m_c = 1$.
C $m_c = 0$.
D $m_c = 5$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 13$.
C $h = 9$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des sphères-cylindres.
B Des couples pivot glissant / appui-plan.
C Des liaisons sphériques.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
C $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
D $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $2m_t + C_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

D $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{ext}} = \delta N_0 \dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = -\delta N_0 \dot{\delta}$.

C $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{L s^{-1} A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{A\,rad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [24]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 7 ms.
- B 0.25 s.
- C 40 ms.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- B Toutes les vitesses conviennent.
- C Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- D La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- B Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- C À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- D Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 3^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- D Non défini.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Aucune des réponses n'est bonne.
- B Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- C Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- D Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 4.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t)-(t-1)u(t-1)-(t-19)u(t-19)+(t-20)u(t-20)]$.
- B $10[t\,u(t)+u(t)-t\,u(t)]$.
- C $10[u(t)-u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t)-t\,u(t+1)-u(t+19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p}\left(1-e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1-p\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1-e^{-p}-e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 7 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 2.
- C Ordre 12 – Classe 1.
- D Ordre 9 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A non définie.
- B négative ;
- C 20 ° ;
- D nulle ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\frac{1+aT_dp}{1+T_dp}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel et à retard de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- B $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- C $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- D $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 0,5
- B 4
- C 10
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CdC non respecté car ε_S est non nul.
- B CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- C CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- D CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- C Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- D Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- C $t_{r5\%}$.
- D Tous les criètres.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [25]		Mach 0,89 593.40 kt [26]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

- A Toutes les réponses conviennent.
- B La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.
- C La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.
- D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a}$.

C $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = A + B$.

B $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

C $A + B + C = 2A$.

D $C = \dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

B $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol en palier : $\gamma = 0$.
- B Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même incidence.
- B La même vitesse.
- C La même inclinaison.
- D La même vitesse et le même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=22$.

B $I_c=16$.

C $I_c=24$.

D $I_c=20$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 4$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 7$.
D $\mu = 8$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 18$.
B $h = 13$.
C $h = 9$.
D $h = 17$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des couples pivot glissant / appui-plan.
C Des sphères-cylindres.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
B $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
C $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

C $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

D $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

B $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

B $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [27]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 0.25 s.
- B 40 ms.
- C 7 ms.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- B Toutes les vitesses conviennent.
- C La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- B Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- C Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- C Non défini.
- D $\varepsilon_t = 3^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Aucune des réponses n'est bonne.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 4.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 3.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- B $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- C $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- D $10[u(t) - u(t-19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 2.
- B Ordre 9 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 1.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A négative ;
- B 20 ° ;
- C nulle ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et intégral.
- B Proportionnel et à retard de phase.
- C Proportionnel intégral et dérivé.
- D Proportionnel et à avance de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- B $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- C $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- D $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 0,5
- B 2
- C 4
- D 10

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- B CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- C CdC non respecté car ε_S est non nul.
- D CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- C Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- D Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B Tous les criètres.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [28]		Mach 0,89 593.40 kt [29]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

C La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

D Toutes les réponses conviennent.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

B $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

C $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a

$$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = A + B$.

B $A + B + C = 2A$.

C $C = \dfrac{A+B}{2}$.

D $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

B Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

C Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- B Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse.
- B La même vitesse et le même inclinaison.
- C La même incidence.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=16$.

C $I_c=24$.

D $I_c=22$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 8$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 7$.
D $\mu = 4$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 2$.
B $m_c = 0$.
C $m_c = 5$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 18$.
B $h = 17$.
C $h = 13$.
D $h = 9$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
B Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
C Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
D Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des sphères-cylindres.
B Des couples pivot glissant / appui-plan.
C Des pivots glissants.
D Des liaisons sphériques.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
B $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
C $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
D $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

B $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

C $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

D $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

D $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{ext}} = \delta N_0 \dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = -\delta N_0 \dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [30]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 40 ms.
- B 7 ms.
- C 0.25 s.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- C La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- B À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- C Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- D Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- C Non défini.
- D $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Aucune des réponses n'est bonne.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- D Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 4.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 5,5.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[u(t) - u(t-19)]$.
- B $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- C $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- D $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- C $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 2.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 9 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A nulle ;
- B non définie.
- C 20 ° ;
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel et intégral.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 10
- B 4
- C 0,5
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- C CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- D CdC non respecté car ε_S est non nul.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- C Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- D Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B $t_{r5\%}$.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D Tous les criètres.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [31]		Mach 0,89 593.40 kt [32]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

- A La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.
- B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.
- C Toutes les réponses conviennent.
- D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)} \end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

C $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b} \end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} Mg\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = A + B$.

B $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

C $A + B + C = 2A$.

D $C = \dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

B $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

B Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

C Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

D Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol en palier : $\gamma = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même incidence.
- B La même vitesse.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=16$.

B $I_c=22$.

C $I_c=24$.

D $I_c=20$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 7$.
B $\mu = 4$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 5$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 1$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 13$.
C $h = 9$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
B Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
C Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
D Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des pivots glissants.
B Des couples pivot glissant / appui-plan.
C Des liaisons sphériques.
D Des sphères-cylindres.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
B $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
C $\lambda\tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
B $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
C $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

D $2m_t + C_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{L s^{-1} A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{A\,rad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h Sp}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S(r_h + N_0 A_0^2)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S(r_h + N_0 A_0^2)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [33]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 4 ms.
- B 0.25 s.
- C 7 ms.
- D 40 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- B La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- C Toutes les vitesses conviennent.
- D La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- B Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- C Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- D À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- D $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- C Non défini.
- D $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Aucune des réponses n'est bonne.
- B Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- C alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 5.
- D alphavote = 4.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[u(t) - u(t-19)]$.
- B $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- C $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- D $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 7 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 1.
- C Ordre 9 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A nulle ;
- B 20 ° ;
- C négative ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à retard de phase.
- B Proportionnel intégral et dérivé.
- C Proportionnel et à avance de phase.
- D Proportionnel et intégral.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \to \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- B $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- C $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- D $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 0,5
- C 4
- D 10

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CdC non respecté car ε_S est non nul.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- B Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- C Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- D Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $t_{r5\%}$.
- B Tous les criètres.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [34]		Mach 0,89 593.40 kt [35]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

B Toutes les réponses conviennent.

C La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

D La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)} \end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

C $\dot{V}\vec{x_a}$.

D $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b} \end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} Mg\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

B $A+B+C = 2A$.

C $C = A+B$.

D $C = \dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

D $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

B Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

C Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol en palier : $\gamma = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même inclinaison.
- B La même vitesse.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même incidence.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=22$.

B $I_c=24$.

C $I_c=20$.

D $I_c=16$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 7$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 4$.
D $\mu = 8$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 2$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 1$.
D $m_c = 0$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 13$.
B $h = 17$.
C $h = 9$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
B Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
C Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
D Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des pivots glissants.
B Des sphères-cylindres.
C Des liaisons sphériques.
D Des couples pivot glissant / appui-plan.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
B $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
C $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

D $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [36]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 40 ms.
- B 7 ms.
- C 0.25 s.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- B Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D Toutes les vitesses conviennent.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- B Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- D Non défini.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- B Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5,5.
- B alphavote = 5.
- C alphavote = 3.
- D alphavote = 4.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 2.
- C Ordre 9 – Classe 1.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A non définie.
- B 20 ° ;
- C négative ;
- D nulle ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à retard de phase.
- B Proportionnel intégral et dérivé.
- C Proportionnel et à avance de phase.
- D Proportionnel et intégral.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- B $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- C $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 4
- B 0,5
- C 10
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- D CdC non respecté car ε_S est non nul.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- C Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- D Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A Tous les criètres.
- B $t_{r5\%}$.
- C $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- D ε_s, $D\alpha_{\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [37]		Mach 0,89 593.40 kt [38]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A Toutes les réponses conviennent.

B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

C La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

D La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)} \end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

C $\dot{V}\vec{x_a}$.

D $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b} \end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} Mg\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = A + B$.

B $A + B + C = 2A$.

C $B = \dfrac{A + 2C}{2}$.

D $C = \dfrac{A + B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

D $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

B Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

C Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol en palier : $\gamma = 0$.
- B Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse et le même inclinaison.
- B La même inclinaison.
- C La même incidence.
- D La même vitesse.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- B $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=16$.

B $I_c=20$.

C $I_c=24$.

D $I_c=22$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 8$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 7$.
D $\mu = 4$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 1$.
B $m_c = 2$.
C $m_c = 5$.
D $m_c = 0$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 9$.
C $h = 13$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
B Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des pivots glissants.
B Des liaisons sphériques.
C Des couples pivot glissant / appui-plan.
D Des sphères-cylindres.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
B $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
C $\lambda\tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
B $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\,\vec{x_1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

B $2m_t + C_3$.

C $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

B $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [39]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 40 ms.
- B 0.25 s.
- C 4 ms.
- D 7 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- C La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- D La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- C Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- D À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- B Non défini.
- C $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- B Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 5,5.
- D alphavote = 4.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- B $10[u(t) - u(t-19)]$.
- C $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- D $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 2.
- B Ordre 9 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 1.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A non définie.
- B nulle ;
- C négative ;
- D 20 ° ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel et à retard de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- B $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- C $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- D $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 4
- B 0,5
- C 2
- D 10

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- B CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- C CdC non respecté car ε_S est non nul.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- B Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- C Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- D Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- C $t_{r5\%}$.
- D Tous les criètres.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [40]		Mach 0,89 593.40 kt [41]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

B La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

C La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

D Toutes les réponses conviennent.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)} \end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

B $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b} \end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a

$$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $A+B+C=2A$.

B $C=A+B$.

C $B=\dfrac{A+2C}{2}$.

D $C=\dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin\alpha-Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2+F\cos(\alpha+\varepsilon)-Mg\sin\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin\varepsilon-Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin(\alpha+\varepsilon)-Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin\gamma+Mg\cos\alpha$.

B $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin(\alpha+\varepsilon)+Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin\alpha+Mg\cos\alpha$.

D $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\cos\gamma+Mg\sin\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2-F(b\cos\varepsilon+a\sin\varepsilon)$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+Fb\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+F(b\cos\varepsilon-a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+Fb\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F}=F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{moteurs}\rightarrow\text{avion})}=\overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma\simeq 1$ et $\sin\gamma\simeq\gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol en palier : $\gamma = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même incidence.
- B La même vitesse.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=16$.

B $I_c=22$.

C $I_c=24$.

D $I_c=20$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 4$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 1$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 0$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 9$.
B $h = 17$.
C $h = 13$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
B Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des couples pivot glissant / appui-plan.
B Des pivots glissants.
C Des liaisons sphériques.
D Des sphères-cylindres.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
B $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
C $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

B $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

C $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

D $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

D $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [42]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 0.25 s.
- B 40 ms.
- C 4 ms.
- D 7 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- B Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- D $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 3^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- D Non défini.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- B alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 4.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 5,5.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- C $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- D $10[u(t) - u(t-19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- B $\dfrac{10}{p}(1-e^{-19p})$.
- C $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p})$.
- D $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p})$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 1.
- B Ordre 9 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 2.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A nulle ;
- B 20 ° ;
- C négative ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à retard de phase.
- B Proportionnel intégral et dérivé.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel et à avance de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \to \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- B $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 10
- B 4
- C 0,5
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CdC non respecté car ε_S est non nul.
- B CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- C CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- D CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- C Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- D Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- B $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- C Tous les crièstres.
- D $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [43]		Mach 0,89 593.40 kt [44]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

C Toutes les réponses conviennent.

D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\vec{x_0}, \vec{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\vec{x_0}, \vec{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\vec{x_a}, \vec{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\vec{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

C $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b}\right)$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = \dfrac{A+B}{2}$.

B $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

C $C = A+B$.

D $A+B+C = 2A$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

D $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

B Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

C Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

D Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même inclinaison.
- B La même vitesse.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même incidence.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=24$.
B $I_c=16$.
C $I_c=22$.
D $I_c=20$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 4$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 1$.
B $m_c = 0$.
C $m_c = 5$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 9$.
C $h = 13$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des pivots glissants.
B Des couples pivot glissant / appui-plan.
C Des sphères-cylindres.
D Des liaisons sphériques.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
B $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
C $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
B Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

B $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

C $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

D $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\,\vec{x_1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

D $2m_t + C_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

C $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

D $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

D $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [45]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 0.25 s.
- B 4 ms.
- C 7 ms.
- D 40 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- B Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D Toutes les vitesses conviennent.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- B Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- C À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 3^\circ$.
- D Non défini.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- B Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- D alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 4.
- D alphavote = 3.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t)-(t-1)u(t-1)-(t-19)u(t-19)+(t-20)u(t-20)]$.
- B $10[t\,u(t)+u(t)-t\,u(t)]$.
- C $10[u(t)-u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t)-t\,u(t+1)-u(t+19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p})$.
- C $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p})$.
- D $\dfrac{10}{p}(1-e^{-19p})$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 2.
- B Ordre 7 – Classe 1.
- C Ordre 9 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A négative ;
- B non définie.
- C nulle ;
- D 20 ° ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel et intégral.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- B $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- C $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- D $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 10
- B 4
- C 0,5
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CdC non respecté car ε_S est non nul.
- C CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- D Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B $t_{r5\%}$.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D Tous les criètres.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [46]		Mach 0,89 593.40 kt [47]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

- A La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.
- B Toutes les réponses conviennent.
- C La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.
- D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a}$.

C $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

B $C = \dfrac{A+B}{2}$.

C $C = A+B$.

D $A+B+C = 2A$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

D $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

C $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

D $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol en palier : $\gamma = 0$.
- D Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même inclinaison.
- B La même vitesse et le même inclinaison.
- C La même vitesse.
- D La même incidence.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- B $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=22$.

B $I_c=16$.

C $I_c=20$.

D $I_c=24$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 7$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 4$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 2$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 0$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 9$.
C $h = 18$.
D $h = 13$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
D Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des pivots glissants.
C Des couples pivot glissant / appui-plan.
D Des sphères-cylindres.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
C $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

B $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

C $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

D $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

B $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

B $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

D $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h Sp}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [48]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 40 ms.
- B 4 ms.
- C 0.25 s.
- D 7 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D Toutes les vitesses conviennent.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- B Non défini.
- C $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- B alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- C alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 5.
- D alphavote = 4.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[u(t) - u(t-19)]$.
- B $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- C $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- D $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 7 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A négative ;
- B non définie.
- C nulle ;
- D 20 ° ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à avance de phase.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel intégral et dérivé.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- B $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- C $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- D $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 0,5
- B 4
- C 2
- D 10

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- D CdC non respecté car ε_S est non nul.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- D Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B Tous les criètres.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [49]		Mach 0,89 593.40 kt [50]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A Toutes les réponses conviennent.

B La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

C La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

D La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\vec{x_a}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = A + B$.

B $C = \dfrac{A+B}{2}$.

C $A + B + C = 2A$.

D $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

B $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

D Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même inclinaison.
- B La même incidence.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même vitesse.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=22$.

B $I_c=24$.

C $I_c=20$.

D $I_c=16$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 8$.
C $\mu = 4$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 1$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 5$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 18$.
C $h = 13$.
D $h = 9$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des couples pivot glissant / appui-plan.
B Des liaisons sphériques.
C Des sphères-cylindres.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
C $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
D $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
C Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
B $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{ext}} = \delta N_0 \dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

C $P_{\text{int}} = -\delta N_0 \dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [51]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 40 ms.
- B 0.25 s.
- C 7 ms.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C Toutes les vitesses conviennent.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- C Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- D À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 3^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- D Non défini.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 4.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- C $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- D $10[u(t) - u(t-19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 2.
- B Ordre 12 – Classe 1.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 9 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A non définie.
- B nulle ;
- C négative ;
- D 20 ° ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\frac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à avance de phase.
- B Proportionnel intégral et dérivé.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel et intégral.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- B $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 4
- B 2
- C 10
- D 0,5

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- B CdC non respecté car ε_S est non nul.
- C CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- D CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- D Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B Tous les criètres.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [52]		Mach 0,89 593.40 kt [53]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

C Toutes les réponses conviennent.

D La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = A + B$.

B $C = \dfrac{A+B}{2}$.

C $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

D $A + B + C = 2A$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

B $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

C $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

C Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

D Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse.
- B La même vitesse et le même inclinaison.
- C La même incidence.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- B $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=16$.

C $I_c=22$.

D $I_c=24$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 7$.
B $\mu = 8$.
C $\mu = 5$.
D $\mu = 4$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 1$.
B $m_c = 2$.
C $m_c = 0$.
D $m_c = 5$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 9$.
B $h = 13$.
C $h = 17$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
B Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
C Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
D Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des sphères-cylindres.
B Des pivots glissants.
C Des liaisons sphériques.
D Des couples pivot glissant / appui-plan.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
B $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
C $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{ext}} = \delta N_0 \dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

C $P_{\text{int}} = -\delta N_0 \dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

C $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [54]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 7 ms.
- B 4 ms.
- C 0.25 s.
- D 40 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- C La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- C Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- B Non défini.
- C $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Aucune des réponses n'est bonne.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- B alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 4.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 3.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t)-(t-1)u(t-1)-(t-19)u(t-19)+(t-20)u(t-20)]$.
- B $10[u(t)-u(t-19)]$.
- C $10[t\,u(t)-t\,u(t+1)-u(t+19)]$.
- D $10[t\,u(t)+u(t)-t\,u(t)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p}\left(1-e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1-e^{-p}-e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1-p\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 7 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 1.
- C Ordre 9 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A négative ;
- B 20 ° ;
- C nulle ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à avance de phase.
- B Proportionnel intégral et dérivé.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel et intégral.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 0,5
- C 4
- D 10

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- B CdC non respecté car ε_S est non nul.
- C CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- D CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- C Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- D Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $t_{r5\%}$.
- B $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D Tous les criètres.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [55]		Mach 0,89 593.40 kt [56]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

B La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

C La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

D Toutes les réponses conviennent.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

C $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $A+B+C=2A$.

B $C=A+B$.

C $C=\dfrac{A+B}{2}$.

D $B=\dfrac{A+2C}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

B $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

C $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol en palier : $\gamma = 0$.
- C Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- D Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse et le même inclinaison.
- B La même vitesse.
- C La même incidence.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- D $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=24$.

B $I_c=16$.

C $I_c=22$.

D $I_c=20$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 4$.
C $\mu = 7$.
D $\mu = 8$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 5$.
B $m_c = 2$.
C $m_c = 1$.
D $m_c = 0$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 13$.
C $h = 18$.
D $h = 9$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
B Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
C Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des couples pivot glissant / appui-plan.
B Des sphères-cylindres.
C Des liaisons sphériques.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
C $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
D $\lambda\tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
D Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\,\vec{x_1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

B $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{ext}} = \delta N_0 \dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = -\delta N_0 \dot{\delta}$.

C $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

B $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [57]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 0.25 s.
- B 4 ms.
- C 40 ms.
- D 7 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- B Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- C La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- D Toutes les vitesses conviennent.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- C À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- D Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A Non défini.
- B $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Aucune des réponses n'est bonne.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 4.
- D alphavote = 5,5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60^\circ$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,^\circ\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10^\circ$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[u(t) - u(t-19)]$.
- C $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- D $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 2.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A non définie.
- B 20 ° ;
- C négative ;
- D nulle ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et intégral.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel intégral et dérivé.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- B $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 0,5
- B 4
- C 10
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- B CdC non respecté car ε_S est non nul.
- C CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- D CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- C Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- D Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- B $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- C Tous les crièstres.
- D $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [58]		Mach 0,89 593.40 kt [59]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

B Toutes les réponses conviennent.

C La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

D La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a}$.

B $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = \dfrac{A+B}{2}$.

B $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

C $A+B+C = 2A$.

D $C = A+B$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

D $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

C Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

D Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- B Vol en palier : $\gamma = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse et le même inclinaison.
- B La même vitesse.
- C La même inclinaison.
- D La même incidence.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=16$.

C $I_c=22$.

D $I_c=24$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 8$.
B $\mu = 7$.
C $\mu = 4$.
D $\mu = 5$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 1$.
B $m_c = 0$.
C $m_c = 5$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 9$.
C $h = 13$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
B Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
C Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
D Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des couples pivot glissant / appui-plan.
C Des sphères-cylindres.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
B $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
C $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
D $\lambda\tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\,\vec{x_1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

B $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

D $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [60]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 40 ms.
- B 0.25 s.
- C 4 ms.
- D 7 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- B Toutes les vitesses conviennent.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- C À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- D Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- C Non défini.
- D $\varepsilon_t = 3^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- B alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 4.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 5.
- D alphavote = 5,5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- B $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- C $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- D $10[u(t) - u(t-19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- C $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche	Fonction de transfert du correcteur	Fonction de transfert des gouvernes
$H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	$H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	$H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion	Fonction de transfert de la pente	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout »
$H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	$H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	$H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon
$H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	$H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 2.
- B Ordre 9 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 1.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A non définie.
- B nulle ;
- C négative ;
- D 20 ° ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\frac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel et à retard de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- B $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- C $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 4
- C 0,5
- D 10

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CdC non respecté car ε_S est non nul.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- D CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- B Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- C Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- D Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- B $t_{r5\%}$.
- C $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- D Tous les criètres.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [61]		Mach 0,89 593.40 kt [62]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

C La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

D Toutes les réponses conviennent.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\vec{x_0}, \vec{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\vec{x_0}, \vec{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\vec{x_a}, \vec{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\vec{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

C $\dot{V}\vec{x_a}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = A + B$.

B $A + B + C = 2A$.

C $B = \dfrac{A + 2C}{2}$.

D $C = \dfrac{A + B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

B $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

C $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

C $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

B Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

C Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol en palier : $\gamma = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même inclinaison.
- B La même incidence.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même vitesse.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- D $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=16$.

B $I_c=22$.

C $I_c=24$.

D $I_c=20$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 7$.
B $\mu = 8$.
C $\mu = 4$.
D $\mu = 5$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 1$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 13$.
B $h = 17$.
C $h = 9$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des couples pivot glissant / appui-plan.
B Des sphères-cylindres.
C Des liaisons sphériques.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
B $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
C $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [63]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 7 ms.
- B 4 ms.
- C 0.25 s.
- D 40 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- C La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- D La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- B Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- C Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- B Non défini.
- C $\varepsilon_t = 3^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 8^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Aucune des réponses n'est bonne.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- D Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 5.
- C alphavote = 4.
- D alphavote = 5,5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60^\circ$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,^\circ\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10^\circ$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[u(t) - u(t-19)]$.
- B $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- C $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- D $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.
- D $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 1.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A négative ;
- B nulle ;
- C non définie.
- D 20 ° ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à retard de phase.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel et à avance de phase.
- D Proportionnel intégral et dérivé.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 10
- B 0,5
- C 4
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- B CdC non respecté car ε_S est non nul.
- C CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- D CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- C Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- D Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B Tous les criètres.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [64]		Mach 0,89 593.40 kt [65]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

B La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

C Toutes les réponses conviennent.

D La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\vec{x_0}, \vec{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\vec{x_0}, \vec{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\vec{x_a}, \vec{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\vec{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\vec{x_a}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = A + B$.

B $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

C $A + B + C = 2A$.

D $C = \dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

D $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

B Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

C Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

D Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- B Vol en palier : $\gamma = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même incidence.
- B La même vitesse et le même inclinaison.
- C La même inclinaison.
- D La même vitesse.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- D $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=24$.

C $I_c=16$.

D $I_c=22$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 8$.
B $\mu = 7$.
C $\mu = 4$.
D $\mu = 5$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 1$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 0$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 18$.
B $h = 13$.
C $h = 17$.
D $h = 9$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
D Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des sphères-cylindres.
C Des couples pivot glissant / appui-plan.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
B $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
C $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
D $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [66]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 7 ms.
- B 40 ms.
- C 4 ms.
- D 0.25 s.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- D La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- B Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- D Non défini.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5,5.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 4.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- B $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- C $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- D $10[u(t) - u(t-19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p})$.
- C $\dfrac{10}{p}(1-e^{-19p})$.
- D $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p})$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 2.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A nulle ;
- B 20 ° ;
- C non définie.
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à avance de phase.
- B Proportionnel intégral et dérivé.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel et à retard de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- B $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- C $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- D $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 4
- B 10
- C 2
- D 0,5

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1{,}2°$.
- C CdC non respecté car ε_S est non nul.
- D CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- B Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- C Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- D Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A Tous les crièstres.
- B $t_{r5\%}$.
- C $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- D ε_s, $D\alpha_{\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [67]		Mach 0,89 593.40 kt [68]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

B La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

C La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

D Toutes les réponses conviennent.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

B $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

D $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = A + B$.

B $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

C $A + B + C = 2A$.

D $C = \dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

B $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

C $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

B $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

D $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

B Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

C Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

D Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol en palier : $\gamma = 0$.
- D Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même incidence.
- B La même inclinaison.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même vitesse.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=16$.

B $I_c=24$.

C $I_c=22$.

D $I_c=20$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 4$.
B $\mu = 8$.
C $\mu = 7$.
D $\mu = 5$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 1$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 13$.
B $h = 17$.
C $h = 9$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des couples pivot glissant / appui-plan.
C Des pivots glissants.
D Des sphères-cylindres.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
B $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
C $\lambda\tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{L s^{-1} A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $0.25\,\mathrm{L s^{-1}}$.
C $2.5\,\mathrm{L s^{-1}}$.
D $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{L s^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{L s^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

B $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

C $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [69]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 7 ms.
- B 4 ms.
- C 40 ms.
- D 0.25 s.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- D La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- B À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- B Non défini.
- C $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5,5.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 4.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[u(t) - u(t-19)]$.
- B $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- C $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- D $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 1.
- B Ordre 9 – Classe 1.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A nulle ;
- B 20 ° ;
- C non définie.
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel et à avance de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- B $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- C $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- D $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 10
- B 2
- C 0,5
- D 4

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CdC non respecté car ε_S est non nul.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- C Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- D Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- B $t_{r5\%}$.
- C Tous les criètres.
- D $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [70]		Mach 0,89 593.40 kt [71]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

- A La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.
- B Toutes les réponses conviennent.
- C La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.
- D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

B $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $A+B+C=2A$.

B $C=\dfrac{A+B}{2}$.

C $B=\dfrac{A+2C}{2}$.

D $C=A+B$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F}=F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{moteurs}\rightarrow\text{avion})}=\overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

C Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

D Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- B Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse et le même inclinaison.
- B La même inclinaison.
- C La même vitesse.
- D La même incidence.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=22$.

B $I_c=24$.

C $I_c=16$.

D $I_c=20$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 7$.
B $\mu = 4$.
C $\mu = 5$.
D $\mu = 8$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 1$.
B $m_c = 2$.
C $m_c = 0$.
D $m_c = 5$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 9$.
C $h = 13$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
D Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des sphères-cylindres.
B Des liaisons sphériques.
C Des couples pivot glissant / appui-plan.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
C $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
D $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
B $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
C $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

D $2m_t + C_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

C $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h Sp}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S(r_h + N_0 A_0^2)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S(r_h + N_0 A_0^2)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [72]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 40 ms.
- B 0.25 s.
- C 4 ms.
- D 7 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- B Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D Toutes les vitesses conviennent.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- B Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- C À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- D Non défini.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- B Aucune des réponses n'est bonne.
- C Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- D Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- B alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- D alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 4.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 5,5.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60^\circ$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,^\circ\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10^\circ$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t)-(t-1)u(t-1)-(t-19)u(t-19)+(t-20)u(t-20)]$.
- B $10[t\,u(t)-t\,u(t+1)-u(t+19)]$.
- C $10[t\,u(t)+u(t)-t\,u(t)]$.
- D $10[u(t)-u(t-19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1-e^{-p}-e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p}\left(1-e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 7 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 2.
- C Ordre 9 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A 20 ° ;
- B négative ;
- C nulle ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à avance de phase.
- B Proportionnel et à retard de phase.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel intégral et dérivé.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- B $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- C $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- D $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 10
- B 4
- C 2
- D 0,5

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CdC non respecté car ε_S est non nul.
- C CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- D Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $t_{r5\%}$.
- B Tous les criètres.
- C $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- D ε_s, $D\alpha_{\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [73]		Mach 0,89 593.40 kt [74]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

B La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

C La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

D Toutes les réponses conviennent.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\vec{x_0}, \vec{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\vec{x_0}, \vec{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\vec{x_a}, \vec{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\vec{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

C $\dot{V}\vec{x_a}$.

D $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = \dfrac{A+B}{2}$.

B $A+B+C = 2A$.

C $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

D $C = A+B$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

B $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

B Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

C Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- B Vol en palier : $\gamma = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse.
- B La même incidence.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- D $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=22$.

B $I_c=24$.

C $I_c=16$.

D $I_c=20$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 4$.
C $\mu = 7$.
D $\mu = 8$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 13$.
C $h = 18$.
D $h = 9$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
B Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
C Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
D Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des couples pivot glissant / appui-plan.
B Des sphères-cylindres.
C Des pivots glissants.
D Des liaisons sphériques.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
B $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
C $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

B $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

C $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

D $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

D $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

D $2m_t + C_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{ext}} = \delta N_0 \dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = -\delta N_0 \dot{\delta}$.

C $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

B $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [75]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 7 ms.
- B 40 ms.
- C 4 ms.
- D 0.25 s.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- B Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- C Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- C Non défini.
- D $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Aucune des réponses n'est bonne.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- D Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- B alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5,5.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 5.
- D alphavote = 4.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t)-(t-1)u(t-1)-(t-19)u(t-19)+(t-20)u(t-20)]$.
- B $10[t\,u(t)+u(t)-t\,u(t)]$.
- C $10[u(t)-u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t)-t\,u(t+1)-u(t+19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p}\left(1-e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1-e^{-p}-e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1-p\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 2.
- C Ordre 9 – Classe 1.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A nulle ;
- B négative ;
- C 20 ° ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et intégral.
- B Proportionnel et à retard de phase.
- C Proportionnel intégral et dérivé.
- D Proportionnel et à avance de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 4
- C 10
- D 0,5

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CdC non respecté car ε_S est non nul.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- C Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- D Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B $t_{r5\%}$.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D Tous les criètres.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [76]		Mach 0,89 593.40 kt [77]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

B Toutes les réponses conviennent.

C La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

D La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a}$.

C $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

D $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = A + B$.

B $C = \dfrac{A+B}{2}$.

C $A + B + C = 2A$.

D $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

B Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

C Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- B Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol en palier : $\gamma = 0$.
- D Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse.
- B La même vitesse et le même inclinaison.
- C La même incidence.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- B $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=22$.

C $I_c=24$.

D $I_c=16$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 8$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 7$.
D $\mu = 4$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 13$.
B $h = 17$.
C $h = 18$.
D $h = 9$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
B Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
C Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
D Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des couples pivot glissant / appui-plan.
B Des sphères-cylindres.
C Des pivots glissants.
D Des liaisons sphériques.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
B $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
C $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
D $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

B $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

C $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

D $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

C $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $2m_t + C_3$.

B $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

C $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

D $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}.$$

B $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}.$$

C $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}.$$

D $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}.$$

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [78]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 40 ms.
- B 0.25 s.
- C 4 ms.
- D 7 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- D Toutes les vitesses conviennent.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- B Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- C À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- D Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A Non défini.
- B $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Aucune des réponses n'est bonne.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5,5.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 4.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[u(t) - u(t-19)]$.
- B $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- C $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- D $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 1.
- B Ordre 7 – Classe 1.
- C Ordre 9 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A 20 ° ;
- B négative ;
- C nulle ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel et intégral.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- B $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 0,5
- C 10
- D 4

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CdC non respecté car ε_S est non nul.
- C CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- D CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- D Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A Tous les criètres.
- B ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- C $t_{r5\%}$.
- D $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [79]		Mach 0,89 593.40 kt [80]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

C Toutes les réponses conviennent.

D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\vec{x_0}, \vec{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\vec{x_0}, \vec{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\vec{x_a}, \vec{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\vec{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

D $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b}\right)$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $A+B+C=2A$.

B $B=\dfrac{A+2C}{2}$.

C $C=\dfrac{A+B}{2}$.

D $C=A+B$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin\varepsilon-Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin(\alpha+\varepsilon)-Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2+F\cos(\alpha+\varepsilon)-Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin\alpha-Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin\gamma+Mg\cos\alpha$.

B $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin(\alpha+\varepsilon)+Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin\alpha+Mg\cos\alpha$.

D $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\cos\gamma+Mg\sin\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2-F(b\cos\varepsilon+a\sin\varepsilon)$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+F(b\cos\varepsilon-a\sin\varepsilon)$.

C $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+Fb\cos\varepsilon$.

D $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+Fb\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F}=F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{moteurs}\rightarrow\text{avion})}=\overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma\simeq 1$ et $\sin\gamma\simeq\gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- B Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse et le même inclinaison.
- B La même vitesse.
- C La même inclinaison.
- D La même incidence.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- D $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=24$.

C $I_c=16$.

D $I_c=22$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 8$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 4$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 5$.
B $m_c = 0$.
C $m_c = 1$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 13$.
B $h = 18$.
C $h = 17$.
D $h = 9$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
B Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
C Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
D Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des sphères-cylindres.
C Des couples pivot glissant / appui-plan.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
B $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
C $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
B $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
C $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

  - Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [81]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 0.25 s.
- B 4 ms.
- C 7 ms.
- D 40 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C Toutes les vitesses conviennent.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- B Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- C Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- D Non défini.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Aucune des réponses n'est bonne.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- D Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 5.
- D alphavote = 4.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- C $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 2.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A non définie.
- B nulle ;
- C 20 ° ;
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\frac{1+aT_dp}{1+T_dp}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à retard de phase.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel intégral et dérivé.
- D Proportionnel et à avance de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- B $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- C $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- D $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 4
- B 2
- C 10
- D 0,5

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CdC non respecté car ε_S est non nul.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- B Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- C Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- D Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $t_{r5\%}$.
- B $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- C Tous les crièstres.
- D ε_s, $D\alpha_{\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [82]		Mach 0,89 593.40 kt [83]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

C La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

D Toutes les réponses conviennent.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)} \end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a}$.

C $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b} \end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} Mg\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = A + B$.

B $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

C $A + B + C = 2A$.

D $C = \dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

D $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

B $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

B Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

C Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

D Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol en palier : $\gamma = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse et le même inclinaison.
- B La même vitesse.
- C La même inclinaison.
- D La même incidence.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- D $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=22$.

B $I_c=20$.

C $I_c=24$.

D $I_c=16$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 7$.
C $\mu = 4$.
D $\mu = 8$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 5$.
B $m_c = 2$.
C $m_c = 0$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 13$.
B $h = 9$.
C $h = 17$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
B Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
C Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des sphères-cylindres.
B Des liaisons sphériques.
C Des couples pivot glissant / appui-plan.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
C $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

B $2m_t + C_3$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

D $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{ext}} = \delta N_0 \dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

C $P_{\text{int}} = -\delta N_0 \dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

D $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S(r_h + N_0 A_0^2)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S(r_h + N_0 A_0^2)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [84]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 40 ms.
- B 0.25 s.
- C 7 ms.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- B Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D Toutes les vitesses conviennent.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- B Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- C À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- D $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- B Non défini.
- C $\varepsilon_t = 3^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 8^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Aucune des réponses n'est bonne.
- B Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 4.
- C alphavote = 5.
- D alphavote = 5,5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 7 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 2.
- D Ordre 12 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A nulle ;
- B négative ;
- C non définie.
- D 20 ° ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à avance de phase.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel intégral et dérivé.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 0,5
- B 4
- C 10
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CdC non respecté car ε_S est non nul.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- D Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B Tous les criètres.
- C $t_{r5\%}$.
- D ε_s, $D\alpha_{\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [85]		Mach 0,89 593.40 kt [86]. $305.27\,\mathrm{m\,s^{-1}}$	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A Toutes les réponses conviennent.

B La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

C La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

D La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)} \end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

C $\dot{V}\vec{x_a}$.

D $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b} \end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} Mg\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $A+B+C=2A$.

B $B=\dfrac{A+2C}{2}$.

C $C=A+B$.

D $C=\dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin\alpha-Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin(\alpha+\varepsilon)-Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2+F\cos(\alpha+\varepsilon)-Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin\varepsilon-Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin(\alpha+\varepsilon)+Mg\cos\gamma$.

B $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\cos\gamma+Mg\sin\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin\alpha+Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin\gamma+Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+Fb\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2-F(b\cos\varepsilon+a\sin\varepsilon)$.

C $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+Fb\cos\varepsilon$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+F(b\cos\varepsilon-a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F}=F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{moteurs}\rightarrow\text{avion})}=\overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma\simeq 1$ et $\sin\gamma\simeq\gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

B Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

C Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol en palier : $\gamma = 0$.
- D Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse.
- B La même vitesse et le même inclinaison.
- C La même incidence.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- B $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=16$.

B $I_c=20$.

C $I_c=22$.

D $I_c=24$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 4$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 5$.
B $m_c = 0$.
C $m_c = 1$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 9$.
C $h = 13$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
B Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
C Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
D Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des sphères-cylindres.
B Des liaisons sphériques.
C Des pivots glissants.
D Des couples pivot glissant / appui-plan.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
C $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
D $\lambda\tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

C $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

D $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\,\vec{x_1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

B $P_{\text{ext}} = \delta N_0 \dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = -\delta N_0 \dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

C $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S(r_h + N_0 A_0^2)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S(r_h + N_0 A_0^2)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [87]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 4 ms.
- B 7 ms.
- C 0.25 s.
- D 40 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- C La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- C À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- D Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- C Non défini.
- D $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- B Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- C alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- D alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5.
- B alphavote = 4.
- C alphavote = 5,5.
- D alphavote = 3.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- B $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.
- D $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 1.
- B Ordre 9 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 2.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A non définie.
- B 20 ° ;
- C négative ;
- D nulle ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel et à retard de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 10
- B 2
- C 4
- D 0,5

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- B CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- C CdC non respecté car ε_S est non nul.
- D CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- B Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- C Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- D Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- B $t_{r5\%}$.
- C $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- D Tous les criètres.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [88]		Mach 0,89 593.40 kt [89]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

B La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

C Toutes les réponses conviennent.

D La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\vec{x_0}, \vec{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\vec{x_0}, \vec{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\vec{x_a}, \vec{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\vec{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

B $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

B $C = \dfrac{A+B}{2}$.

C $A+B+C = 2A$.

D $C = A+B$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

D $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

D Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- B Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse.
- B La même inclinaison.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même incidence.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=16$.

C $I_c=24$.

D $I_c=22$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 4$.
C $\mu = 7$.
D $\mu = 8$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 2$.
C $m_c = 5$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 9$.
C $h = 13$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
B Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
C Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
D Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des pivots glissants.
B Des sphères-cylindres.
C Des liaisons sphériques.
D Des couples pivot glissant / appui-plan.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
B $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
C $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
D $\lambda\tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

D $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

D $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{L s^{-1} A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{A\,rad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [90]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 0.25 s.
- B 7 ms.
- C 40 ms.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- B Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- D $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 3^\circ$.
- D Non défini.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- B Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Aucune des réponses n'est bonne.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- B alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 4.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 5.
- D alphavote = 5,5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60^\circ$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,^\circ\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10^\circ$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- B $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.
- D $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 2.
- B Ordre 9 – Classe 1.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A 20 ° ;
- B non définie.
- C nulle ;
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel et à retard de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- D $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 4
- C 10
- D 0,5

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CdC non respecté car ε_S est non nul.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- D CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- C Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- D Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $t_{r5\%}$.
- B $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- C Tous les criètres.
- D ε_s, $D\alpha_{\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [91]		Mach 0,89 593.40 kt [92]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

- A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.
- B Toutes les réponses conviennent.
- C La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.
- D La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)} \end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

C $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b} \end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} Mg\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $A+B+C=2A$.

B $C=\dfrac{A+B}{2}$.

C $C=A+B$.

D $B=\dfrac{A+2C}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

B $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

C $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

B Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

C Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

D Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol en palier : $\gamma = 0$.
- D Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse.
- B La même incidence.
- C La même inclinaison.
- D La même vitesse et le même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=16$.

C $I_c=24$.

D $I_c=22$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 7$.
B $\mu = 4$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 5$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 2$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 0$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 9$.
C $h = 13$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
B Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des pivots glissants.
B Des sphères-cylindres.
C Des couples pivot glissant / appui-plan.
D Des liaisons sphériques.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
B $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
C $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
D $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.

B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.

C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

B $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

C $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

D $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\,\vec{x_1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $2m_t + C_3$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [93]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 40 ms.
- B 7 ms.
- C 4 ms.
- D 0.25 s.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- B La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- C Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- D Toutes les vitesses conviennent.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 3^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- D Non défini.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Aucune des réponses n'est bonne.
- B Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- C Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- D Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5,5.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 5.
- D alphavote = 4.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- B $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- C $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- D $10[u(t) - u(t-19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p})$.
- C $\dfrac{10}{p}(1 - e^{-19p})$.
- D $\dfrac{10}{p^2}(1 - e^{-p} - e^{-19p})$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 7 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A nulle ;
- B 20 ° ;
- C non définie.
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel et à avance de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- D $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 0,5
- C 10
- D 4

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- B CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- C CdC non respecté car ε_S est non nul.
- D CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- B Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- C Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- D Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B Tous les criètres.
- C $t_{r5\%}$.
- D ε_s, $D\alpha_{\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [94]		Mach 0,89 593.40 kt [95]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

B Toutes les réponses conviennent.

C La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

D La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a}$.

C $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

B $A+B+C = 2A$.

C $C = A+B$.

D $C = \dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

B $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

D $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

D Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- B Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol en palier : $\gamma = 0$.
- D Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse et le même inclinaison.
- B La même vitesse.
- C La même inclinaison.
- D La même incidence.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- D $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p) = \dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p) = \dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p) = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2 + \frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha} p - \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p) = \dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p) = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2 + \frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha} p - \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p) = \dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p) = \dfrac{1}{Bp^2 + \frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha} p - \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p) = \dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p) = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2 + \frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha} p + \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p) = \dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c = 16$.

B $I_c = 20$.

C $I_c = 24$.

D $I_c = 22$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 8$.
B $\mu = 4$.
C $\mu = 7$.
D $\mu = 5$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 1$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 5$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 9$.
C $h = 18$.
D $h = 13$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
D Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des pivots glissants.
B Des sphères-cylindres.
C Des couples pivot glissant / appui-plan.
D Des liaisons sphériques.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
B $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
C $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

B $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

C $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

D $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

B $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

D $2m_t + C_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

D $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

C $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [96]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 0.25 s.
- B 40 ms.
- C 7 ms.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- B Toutes les vitesses conviennent.
- C Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- D La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- B Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- C Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- D Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A Non défini.
- B $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5.
- B alphavote = 3.
- C alphavote = 4.
- D alphavote = 5,5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60^\circ$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,^\circ\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10^\circ$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- B $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.
- D $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 7 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 1.
- C Ordre 9 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A nulle ;
- B négative ;
- C 20 ° ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel et à avance de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \to \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- B $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- C $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- D $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 10
- B 0,5
- C 4
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CdC non respecté car ε_S est non nul.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- C Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- D Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $t_{r5\%}$.
- B ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- C $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- D Tous les criètres.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [97]		Mach 0,89 593.40 kt [98]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

C La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

D Toutes les réponses conviennent.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

C $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = \dfrac{A+B}{2}$.

B $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

C $C = A+B$.

D $A+B+C = 2A$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

D $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

B Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

C Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

D Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol en palier : $\gamma = 0$.
- C Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- D Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse.
- B La même vitesse et le même inclinaison.
- C La même inclinaison.
- D La même incidence.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=24$.

B $I_c=20$.

C $I_c=22$.

D $I_c=16$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 8$.
C $\mu = 7$.
D $\mu = 4$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 1$.
B $m_c = 2$.
C $m_c = 0$.
D $m_c = 5$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 9$.
B $h = 13$.
C $h = 18$.
D $h = 17$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
B Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
C Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
D Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des couples pivot glissant / appui-plan.
B Des sphères-cylindres.
C Des pivots glissants.
D Des liaisons sphériques.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
B $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
C $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
D $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
B $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
C $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $2m_t + C_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [99]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 0.25 s.
- B 7 ms.
- C 40 ms.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- B La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- C Toutes les vitesses conviennent.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- B Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- C Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- C Non défini.
- D $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Aucune des réponses n'est bonne.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- D Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 4.
- B alphavote = 5.
- C alphavote = 5,5.
- D alphavote = 3.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 7 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 2.
- C Ordre 12 – Classe 1.
- D Ordre 9 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A non définie.
- B négative ;
- C 20 ° ;
- D nulle ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à avance de phase.
- B Proportionnel intégral et dérivé.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel et intégral.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- B $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- C $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- D $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 10
- B 2
- C 4
- D 0,5

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- B CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- C CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- D CdC non respecté car ε_S est non nul.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- C Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- D Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $t_{r5\%}$.
- B $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- C Tous les criètres.
- D ε_s, $D\alpha_{\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [100]		Mach 0,89 593.40 kt [101]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

B La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

C Toutes les réponses conviennent.

D La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\vec{x_0}, \vec{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\vec{x_0}, \vec{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\vec{x_a}, \vec{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\vec{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a}$.

B $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b}\right)$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = \dfrac{A+B}{2}$.

B $A+B+C = 2A$.

C $C = A+B$.

D $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

D $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

D $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

B Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

C Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

D Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même inclinaison.
- B La même vitesse et le même inclinaison.
- C La même incidence.
- D La même vitesse.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- D $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=22$.

B $I_c=16$.

C $I_c=24$.

D $I_c=20$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 8$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 7$.
D $\mu = 4$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 1$.
C $m_c = 5$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 13$.
B $h = 18$.
C $h = 9$.
D $h = 17$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
B Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
C Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
D Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des couples pivot glissant / appui-plan.
C Des pivots glissants.
D Des sphères-cylindres.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
B $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
C $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
D $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
C Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

C $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

D $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

C $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $2m_t + C_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

C $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [102]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 7 ms.
- B 40 ms.
- C 4 ms.
- D 0.25 s.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D Toutes les vitesses conviennent.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- B Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- C À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- D Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A Non défini.
- B $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- B Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Aucune des réponses n'est bonne.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 4.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60^\circ$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10^\circ\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10^\circ$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[u(t) - u(t-19)]$.
- C $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- D $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- B $\dfrac{10}{p}(1-e^{-19p})$.
- C $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p})$.
- D $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p})$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 2.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A négative ;
- B nulle ;
- C 20 ° ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à avance de phase.
- B Proportionnel et à retard de phase.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel intégral et dérivé.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- B $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- C $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- D $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 10
- C 0,5
- D 4

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CdC non respecté car ε_S est non nul.
- C CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- D CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- D Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- B $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- C $t_{r5\%}$.
- D Tous les criètres.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [103]		Mach 0,89 593.40 kt [104]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A Toutes les réponses conviennent.

B La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

C La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

D La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $A+B+C=2A$.

B $B=\dfrac{A+2C}{2}$.

C $C=A+B$.

D $C=\dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin\varepsilon-Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2+F\cos(\alpha+\varepsilon)-Mg\sin\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin\alpha-Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin(\alpha+\varepsilon)-Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin\gamma+Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin\alpha+Mg\cos\alpha$.

C $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin(\alpha+\varepsilon)+Mg\cos\gamma$.

D $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\cos\gamma+Mg\sin\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+F(b\cos\varepsilon-a\sin\varepsilon)$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2-F(b\cos\varepsilon+a\sin\varepsilon)$.

C $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+Fb\cos\varepsilon$.

D $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+Fb\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F}=F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{moteurs}\rightarrow\text{avion})}=\overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma\simeq 1$ et $\sin\gamma\simeq\gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

C Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

D Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol en palier : $\gamma = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même inclinaison.
- B La même incidence.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même vitesse.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- B $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=22$.

B $I_c=16$.

C $I_c=20$.

D $I_c=24$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 4$.
B $\mu = 8$.
C $\mu = 5$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 2$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 1$.
D $m_c = 0$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 13$.
B $h = 9$.
C $h = 18$.
D $h = 17$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
B Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des pivots glissants.
C Des couples pivot glissant / appui-plan.
D Des sphères-cylindres.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
C $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
D $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

B $2m_t + C_3$.

C $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h Sp}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [105]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 4 ms.
- B 7 ms.
- C 0.25 s.
- D 40 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- B Toutes les vitesses conviennent.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A Non défini.
- B $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- B Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- C Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- D Aucune des réponses n'est bonne.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- C alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 4.
- B alphavote = 5.
- C alphavote = 5,5.
- D alphavote = 3.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- B $10[u(t) - u(t-19)]$.
- C $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- D $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 1.
- B Ordre 7 – Classe 1.
- C Ordre 9 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A nulle ;
- B 20 ° ;
- C non définie.
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à retard de phase.
- B Proportionnel intégral et dérivé.
- C Proportionnel et à avance de phase.
- D Proportionnel et intégral.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 0,5
- B 10
- C 2
- D 4

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CdC non respecté car ε_S est non nul.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- D Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- B $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- C Tous les crièstres.
- D $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [106]		Mach 0,89 593.40 kt [107]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

- A La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.
- B Toutes les réponses conviennent.
- C La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.
- D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

D $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $A+B+C=2A$.

B $B=\dfrac{A+2C}{2}$.

C $C=A+B$.

D $C=\dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

B $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

C $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

C Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

D Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol en palier : $\gamma = 0$.
- D Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même incidence.
- B La même vitesse et le même inclinaison.
- C La même inclinaison.
- D La même vitesse.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=24$.

B $I_c=16$.

C $I_c=20$.

D $I_c=22$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 8$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 4$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 2$.
C $m_c = 1$.
D $m_c = 5$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 13$.
B $h = 9$.
C $h = 18$.
D $h = 17$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
B Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des couples pivot glissant / appui-plan.
B Des sphères-cylindres.
C Des liaisons sphériques.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
C $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
D $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1 + \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
C $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $2m_t + C_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

D $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

D $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

B $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [108]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 40 ms.
- B 7 ms.
- C 4 ms.
- D 0.25 s.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- B Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- C À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A Non défini.
- B $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Aucune des réponses n'est bonne.
- B Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- C Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- D Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5,5.
- B alphavote = 4.
- C alphavote = 3.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- C $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- D $10[u(t) - u(t-19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 1.
- B Ordre 9 – Classe 1.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A 20 ° ;
- B non définie.
- C nulle ;
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et intégral.
- B Proportionnel intégral et dérivé.
- C Proportionnel et à avance de phase.
- D Proportionnel et à retard de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \to \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- B $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- C $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- D $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 10
- B 2
- C 0,5
- D 4

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CdC non respecté car ε_S est non nul.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- D CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- D Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- B $t_{r5\%}$.
- C Tous les criètres.
- D $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [109]		Mach 0,89 593.40 kt [110]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A Toutes les réponses conviennent.

B La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

C La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

B $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

C $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $A+B+C=2A$.

B $B=\dfrac{A+2C}{2}$.

C $C=A+B$.

D $C=\dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin\alpha-Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin\varepsilon-Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2-F\sin(\alpha+\varepsilon)-Mg\cos\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2+F\cos(\alpha+\varepsilon)-Mg\sin\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin(\alpha+\varepsilon)+Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin\alpha+Mg\cos\alpha$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\cos\gamma+Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2-F\sin\gamma+Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2-F(b\cos\varepsilon+a\sin\varepsilon)$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+Fb\cos\varepsilon$.

C $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+Fb\cos\varepsilon$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2+F(b\cos\varepsilon-a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F}=F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{moteurs}\rightarrow\text{avion})}=\overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma\simeq 1$ et $\sin\gamma\simeq\gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

D Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol en palier : $\gamma = 0$.
- B Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- D Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même incidence.
- B La même vitesse.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=22$.

B $I_c=20$.

C $I_c=24$.

D $I_c=16$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 7$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 4$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 1$.
B $m_c = 0$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 5$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 18$.
B $h = 17$.
C $h = 13$.
D $h = 9$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
B Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des pivots glissants.
C Des sphères-cylindres.
D Des couples pivot glissant / appui-plan.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
B $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
C $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
C $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

B $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

B $P_{\text{ext}} = \delta N_0 \dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = -\delta N_0 \dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

B $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}.$$

B $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}.$$

C $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}.$$

D $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}.$$

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [111]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 4 ms.
- B 7 ms.
- C 0.25 s.
- D 40 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- B Toutes les vitesses conviennent.
- C La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- B Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- C Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- D À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- D $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- B Non défini.
- C $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 3^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- D Aucune des réponses n'est bonne.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5,5.
- B alphavote = 5.
- C alphavote = 4.
- D alphavote = 3.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- B $10[u(t) - u(t-19)]$.
- C $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- D $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 2.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 9 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A nulle ;
- B non définie.
- C 20 ° ;
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\frac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et intégral.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel intégral et dérivé.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \to \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- B $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 4
- B 0,5
- C 10
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- B CdC non respecté car ε_S est non nul.
- C CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- D CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- B Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- C Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- D Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- B $t_{r5\%}$.
- C $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- D Tous les criètres.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [112]		Mach 0,89 593.40 kt [113]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A Toutes les réponses conviennent.

B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

C La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

B $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

D $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = A + B$.

B $A + B + C = 2A$.

C $B = \dfrac{A + 2C}{2}$.

D $C = \dfrac{A + B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

D $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

D $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol en palier : $\gamma = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse.
- B La même incidence.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=16$.

C $I_c=22$.

D $I_c=24$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 4$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 1$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 18$.
C $h = 9$.
D $h = 13$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des sphères-cylindres.
B Des liaisons sphériques.
C Des couples pivot glissant / appui-plan.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
B $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
C $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
B $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $2m_t + C_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

C $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [114]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 4 ms.
- B 7 ms.
- C 0.25 s.
- D 40 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- D La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- B À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- C Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- D Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- C Non défini.
- D $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- B Aucune des réponses n'est bonne.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- B alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- D alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 5.
- D alphavote = 4.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60^\circ$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10^\circ\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10^\circ$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 2.
- B Ordre 12 – Classe 1.
- C Ordre 9 – Classe 1.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A 20 ° ;
- B négative ;
- C non définie.
- D nulle ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à avance de phase.
- B Proportionnel et à retard de phase.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel intégral et dérivé.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \to \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- D $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 4
- B 2
- C 10
- D 0,5

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- B CdC non respecté car ε_S est non nul.
- C CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- D CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- D Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A Tous les crièstres.
- B $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

+38/24/49+

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [115]		Mach 0,89 593.40 kt [116]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

C Toutes les réponses conviennent.

D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a}$.

C $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

B $C = \dfrac{A+B}{2}$.

C $C = A+B$.

D $A+B+C = 2A$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

B $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

D $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

D $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse et le même inclinaison.
- B La même inclinaison.
- C La même vitesse.
- D La même incidence.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p) = \dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p) = \dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p) = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2 + \frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha} p + \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p) = \dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p) = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2 + \frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha} p - \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p) = \dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p) = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2 + \frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha} p - \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p) = \dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p) = \dfrac{1}{Bp^2 + \frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha} p - \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p) = \dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c = 22$.

B $I_c = 16$.

C $I_c = 20$.

D $I_c = 24$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 4$.
C $\mu = 7$.
D $\mu = 8$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 1$.
B $m_c = 0$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 5$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 17$.
B $h = 13$.
C $h = 9$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
B Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
C Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
D Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des pivots glissants.
C Des couples pivot glissant / appui-plan.
D Des sphères-cylindres.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
B $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
C $\lambda\tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\,\vec{x_1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{L s^{-1} A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{A\,rad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [117]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 0.25 s.
- B 40 ms.
- C 4 ms.
- D 7 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- B Toutes les vitesses conviennent.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- C Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- D À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- D Non défini.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Aucune des réponses n'est bonne.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- D Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 5.
- C alphavote = 5,5.
- D alphavote = 4.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- B $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 1.
- B Ordre 7 – Classe 1.
- C Ordre 9 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A non définie.
- B 20 ° ;
- C nulle ;
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\frac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel et à retard de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- B $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- C $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- D $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 10
- C 4
- D 0,5

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CdC non respecté car ε_S est non nul.
- D CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- D Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B Tous les criètres.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [118]		Mach 0,89 593.40 kt [119]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

- A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.
- B Toutes les réponses conviennent.
- C La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.
- D La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\\ \overrightarrow{V(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G\in\text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a}$.

C $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air}\to\text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{air}\to\text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur}\to\text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $A+B+C=2A$.

B $B=\dfrac{A+2C}{2}$.

C $C=A+B$.

D $C=\dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

B $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

D Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- B Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même inclinaison.
- B La même vitesse et le même inclinaison.
- C La même vitesse.
- D La même incidence.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=22$.

C $I_c=16$.

D $I_c=24$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 7$.
B $\mu = 5$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 4$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 2$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 0$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 9$.
B $h = 18$.
C $h = 13$.
D $h = 17$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
B Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
C Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
D Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des pivots glissants.
B Des liaisons sphériques.
C Des sphères-cylindres.
D Des couples pivot glissant / appui-plan.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
B $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
C $\lambda\tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
B Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{L s^{-1} A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.25\,\mathrm{L s^{-1}}$.
B $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
C $2.5\,\mathrm{L s^{-1}}$.
D $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{L s^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{L s^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $2m_t + C_3$.

B $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

D $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

D $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [120]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 7 ms.
- B 0.25 s.
- C 4 ms.
- D 40 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- B La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- C Toutes les vitesses conviennent.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A Non défini.
- B $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 3^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Aucune des réponses n'est bonne.
- D Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 4.
- C alphavote = 5.
- D alphavote = 5,5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[u(t) - u(t-19)]$.
- C $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- D $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 2.
- B Ordre 9 – Classe 1.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A nulle ;
- B négative ;
- C non définie.
- D 20 ° ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à avance de phase.
- B Proportionnel intégral et dérivé.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel et intégral.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- B $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 10
- B 4
- C 0,5
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- C CdC non respecté car ε_S est non nul.
- D CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- D Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A Tous les criètres.
- B $t_{r5\%}$.
- C ε_s, $D\alpha_\%$.
- D $D\alpha_\%$, $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [121]		Mach 0,89 593.40 kt [122]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

- A La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.
- B La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.
- C Toutes les réponses conviennent.
- D La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)} \end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

B $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

C $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b} \end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l} Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

B $C = \dfrac{A+B}{2}$.

C $A+B+C = 2A$.

D $C = A+B$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

B $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

B Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

C Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol en palier : $\gamma = 0$.
- C Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- D Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même inclinaison.
- B La même incidence.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même vitesse.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- B $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=24$.

B $I_c=20$.

C $I_c=22$.

D $I_c=16$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 4$.
B $\mu = 7$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 5$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 1$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 9$.
B $h = 13$.
C $h = 18$.
D $h = 17$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
D Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des pivots glissants.
B Des sphères-cylindres.
C Des couples pivot glissant / appui-plan.
D Des liaisons sphériques.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
B $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
C $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
D $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
C Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

B $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{ext}} = \delta N_0 \dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = -\delta N_0 \dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

B $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [123]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 7 ms.
- B 4 ms.
- C 40 ms.
- D 0.25 s.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- B Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- C La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- D Toutes les vitesses conviennent.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- C Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- D $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A Non défini.
- B $\varepsilon_t = 3^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Aucune des réponses n'est bonne.
- C Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- D Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 3.
- B alphavote = 4.
- C alphavote = 5,5.
- D alphavote = 5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60^\circ$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,^\circ\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10^\circ$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- B $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 2.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A 20 ° ;
- B non définie.
- C nulle ;
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à retard de phase.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel intégral et dérivé.
- D Proportionnel et à avance de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 2
- B 10
- C 0,5
- D 4

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CdC non respecté car ε_S est non nul.
- B CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- C CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- D CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- B Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- C Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- D Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- B Tous les criètres.
- C $t_{r5\%}$.
- D $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [124]		Mach 0,89 593.40 kt [125]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A Toutes les réponses conviennent.

B La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

C La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)} \end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

B $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

D $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b} \end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c} Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $A+B+C=2A$.

B $B=\dfrac{A+2C}{2}$.

C $C=A+B$.

D $C=\dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

C $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

B Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

C Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- B Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même incidence.
- B La même inclinaison.
- C La même vitesse et le même inclinaison.
- D La même vitesse.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- B $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=16$.

C $I_c=24$.

D $I_c=22$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 7$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 4$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 5$.
B $m_c = 1$.
C $m_c = 0$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 13$.
B $h = 9$.
C $h = 17$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
B Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des couples pivot glissant / appui-plan.
B Des pivots glissants.
C Des sphères-cylindres.
D Des liaisons sphériques.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
C $\lambda\tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
B $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{ext}} = \delta N_0 \dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = -\delta N_0 \dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

C $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [126]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 4 ms.
- B 7 ms.
- C 40 ms.
- D 0.25 s.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- C La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- D La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- B À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- D Non défini.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Aucune des réponses n'est bonne.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- D Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 4.
- B alphavote = 5.
- C alphavote = 3.
- D alphavote = 5,5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60^\circ$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,^\circ\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10^\circ$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- B $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- C $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- D $10[u(t) - u(t-19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 2.
- B Ordre 12 – Classe 1.
- C Ordre 9 – Classe 1.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A 20 ° ;
- B nulle ;
- C non définie.
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\frac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel et à avance de phase.
- D Proportionnel et à retard de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- B $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- C $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- D $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 4
- B 0,5
- C 2
- D 10

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- B CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- C CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- D CdC non respecté car ε_S est non nul.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- D Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A Tous les criètres.
- B $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [127]		Mach 0,89 593.40 kt [128]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

- A La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.
- B La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.
- C Toutes les réponses conviennent.
- D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

B $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = \dfrac{A+B}{2}$.

B $A+B+C = 2A$.

C $C = A+B$.

D $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

B $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S \ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

B Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

C Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

D Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol en palier : $\gamma = 0$.
- D Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse.
- B La même vitesse et le même inclinaison.
- C La même incidence.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\dfrac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\dfrac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=24$.

B $I_c=20$.

C $I_c=16$.

D $I_c=22$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 7$.
C $\mu = 4$.
D $\mu = 8$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 1$.
B $m_c = 0$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 5$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 18$.
B $h = 9$.
C $h = 17$.
D $h = 13$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
B Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
C Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
D Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des sphères-cylindres.
C Des pivots glissants.
D Des couples pivot glissant / appui-plan.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
C $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
D $\lambda\tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
D $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

B $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

B $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [129]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 7 ms.
- B 4 ms.
- C 0.25 s.
- D 40 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- B La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- C Toutes les vitesses conviennent.
- D Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- C $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A Non défini.
- B $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Aucune des réponses n'est bonne.
- B Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- D alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 4.
- D alphavote = 3.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- C $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- D $10[u(t) - u(t-19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche	Fonction de transfert du correcteur	Fonction de transfert des gouvernes
$H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	$H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	$H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion	Fonction de transfert de la pente	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout »
$H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	$H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	$H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon
$H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	$H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 2.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A 20 ° ;
- B négative ;
- C non définie.
- D nulle ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\frac{1+aT_dp}{1+T_dp}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à avance de phase.
- B Proportionnel intégral et dérivé.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel et à retard de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- B $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- C $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- D $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 4
- B 10
- C 0,5
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- D CdC non respecté car ε_S est non nul.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- C Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- D Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- B Tous les criètres.
- C $t_{r5\%}$.
- D $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [130]		Mach 0,89 593.40 kt [131]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

- A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.
- B Toutes les réponses conviennent.
- C La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.
- D La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

C $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

D $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

B $A+B+C = 2A$.

C $C = A+B$.

D $C = \dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

B $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

C Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol en palier : $\gamma = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même incidence.
- B La même vitesse et le même inclinaison.
- C La même inclinaison.
- D La même vitesse.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- B $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- D $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=22$.

B $I_c=20$.

C $I_c=16$.

D $I_c=24$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 7$.
B $\mu = 4$.
C $\mu = 5$.
D $\mu = 8$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 1$.
C $m_c = 5$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 9$.
B $h = 18$.
C $h = 13$.
D $h = 17$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
B Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
C Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
D Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des couples pivot glissant / appui-plan.
C Des sphères-cylindres.
D Des pivots glissants.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
B $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
C $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
D $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
C Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
C $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

B $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

D $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}.$$

B $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}.$$

C $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}.$$

D $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}.$$

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [132]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 7 ms.
- B 0.25 s.
- C 40 ms.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- D Toutes les vitesses conviennent.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- B Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- C $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- B Non défini.
- C $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 3^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- B Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- C Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- D Aucune des réponses n'est bonne.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- D alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 4.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 5.
- D alphavote = 3.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60^\circ$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,^\circ\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10^\circ$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t)-(t-1)u(t-1)-(t-19)u(t-19)+(t-20)u(t-20)]$.
- B $10[u(t)-u(t-19)]$.
- C $10[t\,u(t)-t\,u(t+1)-u(t+19)]$.
- D $10[t\,u(t)+u(t)-t\,u(t)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1-e^{-p}-e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p}\left(1-e^{-19p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1-p\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 1.
- B Ordre 9 – Classe 1.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A 20 ° ;
- B négative ;
- C nulle ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à retard de phase.
- B Proportionnel et à avance de phase.
- C Proportionnel et intégral.
- D Proportionnel intégral et dérivé.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- D $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 10
- B 4
- C 0,5
- D 2

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- B CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- C CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- D CdC non respecté car ε_S est non nul.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- B Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- C Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- D Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- C $t_{r5\%}$.
- D Tous les criètres.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [133]		Mach 0,89 593.40 kt [134]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A Toutes les réponses conviennent.

B La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

C La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

D La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $\dot{V}\vec{x_a}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $C = \dfrac{A+B}{2}$.

B $A+B+C = 2A$.

C $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

D $C = A+B$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

B $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

C $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

C $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

D $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

B Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

C Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

D Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol en palier : $\gamma = 0$.
- C Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- D Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même inclinaison.
- B La même vitesse.
- C La même incidence.
- D La même vitesse et le même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- C $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- D $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=16$.

B $I_c=20$.

C $I_c=24$.

D $I_c=22$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 4$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 0$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 1$.
D $m_c = 2$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 9$.
B $h = 18$.
C $h = 13$.
D $h = 17$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
B Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
C Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
D Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des sphères-cylindres.
B Des liaisons sphériques.
C Des pivots glissants.
D Des couples pivot glissant / appui-plan.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
B $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
C $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
D $\lambda\sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12°, 12°]$ et pour la position au repos ($\delta = 0°$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12° = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0°$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
B Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
C Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34^\circ\,\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
C $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $2m_t + C_3$.

B $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{ext}} = \delta N_0 \dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = -\delta N_0 \dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

D $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}.$$

B $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}.$$

C $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}.$$

D $$H_{\text{gouv}}(p) = \frac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}.$$

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [135]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 7 ms.
- B 0.25 s.
- C 40 ms.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- B Toutes les vitesses conviennent.
- C Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- D La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- B Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- C Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- D À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A Non défini.
- B $\varepsilon_t = 3^\circ$.
- C $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 8^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Aucune des réponses n'est bonne.
- C Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- D Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 4.
- D alphavote = 3.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- C $10[u(t) - u(t-19)]$.
- D $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.
- D $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 7 – Classe 1.
- B Ordre 9 – Classe 1.
- C Ordre 12 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A 20 ° ;
- B nulle ;
- C non définie.
- D négative ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et à retard de phase.
- C Proportionnel et à avance de phase.
- D Proportionnel et intégral.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- B $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- C $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- D $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 0,5
- B 2
- C 10
- D 4

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- B CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- C CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- D CdC non respecté car ε_S est non nul.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- B Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- C Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- D Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- C Tous les crièstres.
- D $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [136]		Mach 0,89 593.40 kt [137]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A Toutes les réponses conviennent.

B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

C La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

D La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\vec{x_0}, \vec{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\vec{x_0}, \vec{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\vec{x_a}, \vec{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\vec{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

C $\dot{V}\vec{x_a}$.

D $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

B $C = A+B$.

C $C = \dfrac{A+B}{2}$.

D $A+B+C = 2A$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

B Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

C Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

D Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol en palier : $\gamma = 0$.
- C Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même incidence.
- B La même inclinaison.
- C La même vitesse.
- D La même vitesse et le même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=16$.

B $I_c=22$.

C $I_c=20$.

D $I_c=24$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 8$.
C $\mu = 4$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 1$.
B $m_c = 5$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 0$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 9$.
B $h = 17$.
C $h = 13$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
B Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des pivots glissants.
B Des couples pivot glissant / appui-plan.
C Des sphères-cylindres.
D Des liaisons sphériques.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
B $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
C $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.

B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^{\circ}\mathrm{s^{-1}}$.

C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

B $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

C $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

D $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

C $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

B $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

C $2m_t + C_3$.

D $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

B $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

C $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [138]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 40 ms.
- B 7 ms.
- C 0.25 s.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A Toutes les vitesses conviennent.
- B La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- C Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- D La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- C Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.
- D À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\,\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- C $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- C Non défini.
- D $\varepsilon_t = 3^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- B Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.
- C Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- D Aucune des réponses n'est bonne.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 3.
- D alphavote = 4.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[u(t) - u(t-19)]$.
- B $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- C $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- D $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.
- D $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 2.
- B Ordre 12 – Classe 1.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 9 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A nulle ;
- B 20 ° ;
- C négative ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\dfrac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel intégral et dérivé.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel et à retard de phase.
- D Proportionnel et à avance de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- D $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 4
- B 10
- C 2
- D 0,5

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- B CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- C CdC non respecté car ε_S est non nul.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- B Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- C Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- D Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- B $t_{r5\%}$.
- C Tous les criètres.
- D ε_s, $D\alpha_{\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [139]		Mach 0,89 593.40 kt [140]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

C Toutes les réponses conviennent.

D La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\overrightarrow{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\overrightarrow{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}\right)$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\overrightarrow{x_\varepsilon}$ de poussée et $\overrightarrow{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_b}\right)$;
- α : incidence $\alpha = \left(\overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{x_b}\right)$

Remarques :

- $\left(O, F\overrightarrow{x_\varepsilon}\right)$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{x_b} - b\overrightarrow{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = \left(O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

D $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\overrightarrow{z_a}$.

B $\dot{V}\overrightarrow{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $m\dot{V}\overrightarrow{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\overrightarrow{x_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\overrightarrow{x_a} + R_z\overrightarrow{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\overrightarrow{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_\varepsilon} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\overrightarrow{x_b} - \sin\varepsilon\,\overrightarrow{z_b}$ (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\overrightarrow{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = \left(\overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$. On a $I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $A+B+C=2A$.

B $C=A+B$.

C $B=\dfrac{A+2C}{2}$.

D $C=\dfrac{A+B}{2}$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

B $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

D $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

B $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

C $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

D $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F b\cos\varepsilon$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

B Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

C Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

D Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.
- B Vol en palier : $\gamma = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même vitesse et le même inclinaison.
- B La même incidence.
- C La même vitesse.
- D La même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- C $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- D $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=24$.

B $I_c=16$.

C $I_c=22$.

D $I_c=20$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 5$.
B $\mu = 7$.
C $\mu = 8$.
D $\mu = 4$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 5$.
B $m_c = 0$.
C $m_c = 2$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 9$.
B $h = 18$.
C $h = 17$.
D $h = 13$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
B Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
C Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.
D Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des pivots glissants.
B Des sphères-cylindres.
C Des liaisons sphériques.
D Des couples pivot glissant / appui-plan.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.
B $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
C $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
D $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25\,\text{m}$.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.
B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
B $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.
C $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.
D $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.
B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.
C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.
D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_t d^2)\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}(C_3 + m_3(d^2 + e^2))\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $2m_t + C_3$.

B $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3(d^2 + e^2)$.

D $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{ext}} = \delta N_0 \dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

C $P_{\text{int}} = -\delta N_0 \dot{\delta}$.

D $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.

A $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

B $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ $(i \in \{5,6,7\})$.

A $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

B $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

C $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h Sp}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq}p^2 + \dfrac{f}{A_0^2}p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h}\right)p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p + \left(\dfrac{J_{eq}A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right)p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [141]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 7 ms.
- B 40 ms.
- C 4 ms.
- D 0.25 s.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- B La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- C Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- D Toutes les vitesses conviennent.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- B Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- C À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = 0^\circ$ car le gain est unitaire.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 0.2^\circ$.
- B $\varepsilon_t = 8^\circ$.
- C Non défini.
- D $\varepsilon_t = 3^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- D Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Aucune des réponses n'est bonne.
- C Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- D Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.
- B alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- C alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- D alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 5.
- B alphavote = 4.
- C alphavote = 3.
- D alphavote = 5,5.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60^\circ$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,^\circ\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10^\circ$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t)-(t-1)u(t-1)-(t-19)u(t-19)+(t-20)u(t-20)]$.
- B $10[u(t)-u(t-19)]$.
- C $10[t\,u(t)-t\,u(t+1)-u(t+19)]$.
- D $10[t\,u(t)+u(t)-t\,u(t)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p^2}(1-p)$.
- B $\dfrac{10}{p}(1-e^{-19p})$.
- C $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p}+e^{-20p})$.
- D $\dfrac{10}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-19p})$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 12 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 2.
- C Ordre 9 – Classe 1.
- D Ordre 7 – Classe 1.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A négative ;
- B nulle ;
- C 20 ° ;
- D non définie.

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\frac{1+a\,T_d\,p}{1+T_d\,p}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à retard de phase.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel et à avance de phase.
- D Proportionnel intégral et dérivé.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- B $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- C $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.
- D $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 0,5
- B 2
- C 10
- D 4

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CdC non respecté car ε_S est non nul.
- B CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- C CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- D CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.
- C Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- D Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A Tous les criètres.
- B $t_{r5\%}$.
- C $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.
- D ε_s, $D\alpha_{\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D

Le sujet porte sur la modélisation de la loi de commande en protection d'incidence dans le cas du vol longitudinal d'un avion de type Airbus A350 XWB.

Ce biréacteur gros porteur et moyen-long courrier, dernier né de la famille du constructeur européen Airbus et mis en service en janvier 2015, a été baptisé « A350 XWB », pour eXtraWide Body (fuselage extra large).

Cette nouvelle génération d'avion comporte 3 versions passagers qui ont un rayon d'action complémentaire :

Spécifications	A350-800	A350-900	A350-1000
Longueur	60.54 m	66.89 m	73.78 m
Envergure	64.75 m	64.91 m	64.75 m
Largeur fuselage	5.96 m	5.96 m	5.96 m
Hauteur	17.05 m	17.05 m	17.08 m
Capacité en sièges	276	315	369
Distance franchissable	15 300 km	14 350 km	14 800 km
Masse au décollage	248 t	268 t	308 t
Capacité des réservoirs	138 000 L	138 000 L	156 000 L
Poussée des moteurs	337 kN	374 kN	442 kN
Vitesse maximale en Mach [142]		Mach 0,89 593.40 kt [143]. 305.27 m s^{-1}	

La principale prouesse technologique réside dans la réduction de consommation de kérosène de plus de 25% par rapport à la gamme A340. Ceci grâce à l'emploi de matériaux composite innovant plus légers (fibre de carbone renforcée de plastique – voilure et fuselage).

Présentation et plan de l'étude

L'étude fera référence à des termes définis dans les documents DOC 1 et DOC 2 des. Il est vivement conseillé de consulter ces documents avant de commencer le sujet.

Le schéma de la Figure 1, illustre les différentes boucles de commande rencontrées sur la commande de vol de l'A350 XWB.

Les lois de commande de vol, linéaires ou non, doivent être robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Nous nous intéresserons dans ce sujet à une phase de vol longitudinal, exigeante car en transitoire et à proximité du sol : manœuvre d'évitement instinctive (avoidance carefree maneuver).

Le sujet comporte 3 parties indépendantes.

Pour commencer, la partie A s'intéresse à la description du modèle avion rigide afin d'appréhender les lois de pilotage d'un avion.

Le contrôle de l'avion suivant l'axe de tangage s'effectue en contrôlant trois surfaces mobiles horizontales à l'arrière de l'appareil : 2 gouvernes de profondeur et 1 plan horizontal réglable PHR. Les gouvernes de profondeur assurent la commande longitudinale à court terme, alors que le PHR assure la commande longitudinale à long terme (constante de temps de l'ordre de 14 s) permettant de conserver un braquage de la profondeur en moyenne nulle. Dans le but de contrôler l'avion dans une phase dynamique, nous analyserons le comportement des gouvernes de profondeur dans la partie B.

L'état de l'avion est mesuré par les ADIRS (*Air Data and Inertial Reference System*). Le calculateur embarqué reçoit trois valeurs redondantes pour chaque paramètre de vol et doit élaborer une seule et unique valeur pour le calcul des commandes. Ce point sera abordé en introduction de la partie C, dans le cas particulier des capteurs d'incidence (sondes). L'étude se poursuivra, par la mise en place d'un correcteur pour l'ensemble des boucles d'asservissements (boucles 1 à 5). La conclusion de cette partie C permettra de vérifier les performances attendues en termes de qualité de vol.

Partie A – Conduite de vol longitudinal

I – Vol symétrique

Objectif Mettre en place les conditions du vol longitudinal pur afin de proposer un paramétrage simplifié.

Figure 1 : les différentes boucles de contrôle mises en jeu dans la commande de vol.

Pour mettre en œuvre les équations du vol, nous définirons trois repères (voir DOC 2). Le repère terrestre supposé galiléen, le repère avion ainsi que le repère aérodynamique.

Vol symétrique

Un vol sera qualifié de symétrique lorsque l'écoulement de l'air est parallèle au plan de symétrie de l'avion $(G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{z_b})$.

Supposons que l'avion en vol symétrique subisse une rafale provenant de la gauche. Cette situation amène l'axe longitudinal de l'avion à se

placer dans le lit du vent correspondant à la rafale. L'avion est alors dit en dérapage à droite (voir Figure 2).

Figure 2 Avion en dérapage à droite

Question 1 Quelle est la conséquence d'un dérapage à droite sur l'attitude du vol ?

A La portance ainsi que la traînée de la demi-aile gauche vont diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de tangage positif, l'assiette de l'avion augmentera.

B La portance de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de roulis positif donc l'avion s'inclinera à droite.

C Toutes les réponses conviennent.

D La traînée de la demi-aile gauche va diminuer en raison d'une zone « masquée » par le fuselage. La conséquence immédiate sera la création d'un moment de lacet positif donc l'avion retrouvera son vol symétrique.

Dans le cadre de notre étude, nous traiterons le cas du vol longitudinal pur, c'est-à-dire un vol dans le plan vertical. Ainsi, l'avion n'aura ni angle de dérapage ($\beta = 0$), ni angle de gîte ($\phi =$).

II – Modèle avion : linéarisation autour d'un point de vol

Objectif Définir le modèle avion pour déterminer les équations de la dynamique du vol. Nous aborderons les notions de pilotage autour d'un point d'équilibre pour introduire une proposition de loi de commande qui sera détaillée en partie C.

Une des principales difficultés de la modélisation du comportement de l'avion réside sur la prise en compte des variations des paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique de l'appareil sont :

- la masse M ;
- le centrage (position du centre de poussée par rapport au centre de gravité) ;
- le point de vol (vitesse et altitude) ;
- la configuration (présence de becs, volets, spoilers...).

Une première approche de la commande de vol reposerait sur l'élaboration d'un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé par un ensemble de paramètres distincts. La zone de variation des paramètres physique serait ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires différents.

Cette approche n'est pas acceptable car elle nécessite d'embarquer une loi de commande différente pour chaque modèle. En effet, outre une mémoire importante du calculateur, il faudrait une logique de sélection de la loi de commande adaptée qui représente un risque d'erreur suivant les mauvaises estimations de certains paramètres.

Dans ce cadre, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de lois de commandes différentes, de manière à ce qu'elles soient valables sur une plage de fonctionnement la plus large possible.

Ainsi dans cette partie, nous déterminerons une commande valable localement autour d'un point de fonctionnement. Dans ce modèle, les forces extérieures appartiennent au plan de symétrie avion et les moments sont perpendiculaires à ce plan.

L'étude sera alors menée dans les conditions suivantes :

- angle de gîte nul, soit $\phi = 0$;
- forces aérodynamiques dans le plan de symétrie donc dérapage nul, soit $\beta = 0$;
- force de propulsion (poussée) parallèle au plan de symétrie ;
- moment aérodynamique perpendiculaire au plan de symétrie donc les vitesses de roulis et lacet sont nulles, soit $p = r = 0$;
- moment de propulsion perpendiculaire au plan de symétrie.

1. Modélisation et paramétrage

Les repères et le paramétrage associés à l'avion ainsi que la modélisation des actions mécaniques appliquées à l'avion sont définis sur la Figure 3.

Figure 3 Modélisation cinématique et mécanique dans le cas du vol longitudinal

On note :

- γ la pente (angle entre l'horizontale $\vec{x_0}$ et le vecteur vitesse $V\vec{x_a}$ de l'avion) et $\gamma = (\vec{x_0}, \vec{x_a})$;
- ε : angle de calage des moteurs (angle entre le vecteur $F\vec{x_\varepsilon}$ de poussée et $\vec{x_b}$) et $\varepsilon = \left(\vec{x_b}, \vec{x_\varepsilon}\right)$;
- θ : assiette longitudinale $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_b})$;
- α : incidence $\alpha = (\vec{x_a}, \vec{x_b})$

Remarques :

- $(O, F\vec{x_\varepsilon})$, ne passe pas par G. La position de O est définie par $\overrightarrow{OG} = a\vec{x_b} - b\vec{z_b}$;
- les actions aérodynamiques sont modélisables par un torseur exprimé en G dont le moment de tangage prend en compte l'ensemble des moments (ailes / fuselage / PHR / gouvernes).

Paramétrage du mouvement de l'avion par rapport au repère galiléen $\mathscr{R}_0 = (O_T, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

Le torseur cinématique de l'avion par rapport au sol est donné par $\{\mathscr{V}(\text{avion}/\mathscr{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{avion}/\mathscr{R}_0)} \\ \overrightarrow{V(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}\end{array}\right\}_G$ avec :

- q est la vitesse de rotation de tangage ;
- on supposera en première approximation que la vitesse de l'avion et la vitesse relative par rapport à l'air sont confondus (vol sans vent).

Question 2 Exprimer la vitesse de tangage q en fonction du paramétrage proposé.

A $q = \dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} + \dot{\gamma}$.

B $q = \dfrac{d\beta}{dt} - \dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\beta} - \dot{\gamma} + \dot{\theta}$.

C $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \theta$.

D $q = \dfrac{d\theta}{dt}$ noté également $q = \dot{\theta}$.

Question 3 Calculer l'accélération du centre d'inertie G de l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$, noté $\overrightarrow{\Gamma(G \in \text{avion}/\mathscr{R}_0)}$.

A $\dot{V}\vec{x_a}$.

B $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

C $m\dot{V}\vec{x_a} - m\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\overrightarrow{OG}$.

D $\dot{V}\vec{x_a} - V\dfrac{d\gamma}{dt}\vec{z_a}$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées à l'avion

- **Actions aérodynamiques :** $\{\mathscr{T}(\text{air} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R(\text{air} \to \text{avion})} = R_x\vec{x_a} + R_z\vec{z_a} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{air} \to \text{avion})} = M_y\vec{y_b}\end{array}\right\}_G$ avec
  - R_x est appelée la traînée ;
  - R_z est appelée la portance ;
  - M_y est appelé le moment de tangage.

  Toutes les composantes des actions aérodynamiques sont proportionnelles à la pression cinétique définie par $p_c = \dfrac{\rho V^2}{2}$ (où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse propre) et également à la surface ailaire S (surface totale de la voilure).
  On définit les coefficients aérodynamiques C_x et C_z qui sont respectivement les coefficients de proportionnalité de R_x et R_z avec $p_c S$. On définit également C_m, le coefficient de proportionnalité du moment M_y avec $p_c S\ell$ (ℓ étant la longueur de la corde de l'aile). Ces différentes actions mécaniques s'écriront alors : $R_x = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2$, $R_z = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2$ et $M_y = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2$.
- **Actions de propulsion :** $\{\mathscr{T}(\text{moteurs} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F} = F\vec{x_\varepsilon} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_O$ avec $\vec{x_\varepsilon} = \cos\varepsilon\,\vec{x_b} - \sin\varepsilon\,\vec{z_b}$
  (ε est l'angle de calage des moteurs par rapport à l'axe longitudinal $\vec{x_b}$).
- **Action de la pesanteur :** $\{\mathscr{T}(\text{pesanteur} \to \text{avion})\} = \left\{\begin{array}{c}Mg\vec{z_0} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_G$ avec $\vec{z_0}$ vecteur vertical ascendant, g accélération de la pesanteur ($g \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).
- **Grandeurs inertielles :** Matrice d'inertie de l'avion en son centre d'inertie G exprimée dans la base avion $\mathscr{B}_b = (\vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$. On a
  $$I_{\text{avion}}(G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}.$$

Question 4 D'après la propriété de symétrie de l'avion, indiquer la forme de la matrice d'inertie $I_{\text{avion}}(G)$.

A $\begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

B $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

C $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

D $\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_b}$.

Question 5 De plus, en supposant que la dimension de l'avion suivant l'axe $\overrightarrow{z_b}$ est faible devant les autres, quelle relation existe-t-il entre les trois moments d'inertie A, B et C ?

A $B = \dfrac{A+2C}{2}$.

B $C = \dfrac{A+B}{2}$.

C $C = A+B$.

D $A+B+C = 2A$.

2. Équations longitudinales

Question 6 **Équation de propulsion –** Déterminer l'équation de propulsion (Eq.P), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\varepsilon - Mg\cos\alpha$.

B $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin\alpha - Mg\cos\alpha$.

C $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 + F\cos(\alpha+\varepsilon) - Mg\sin\gamma$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_x V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) - Mg\cos\gamma$.

Question 7 **Équation de sustentation –** Déterminer l'équation de sustentation (Eq.S), en appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{z_a}$.

A $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\alpha + Mg\cos\alpha$.

B $-MV\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin(\alpha+\varepsilon) + Mg\cos\gamma$.

C $-M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\cos\gamma + Mg\sin\alpha$.

D $M\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S C_z V^2 - F\sin\gamma + Mg\cos\alpha$.

Question 8 **Équation de moment –** Déterminer l'équation de moment (Eq.S), en appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en G dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ galiléen, en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$.

A $B\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + F(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)$.

B $A\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

C $C\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 + Fb\cos\varepsilon$.

D $B\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\rho S\ell C_m V^2 - F(b\cos\varepsilon + a\sin\varepsilon)$.

3. Hypothèses simplificatrices de découplage

Trois hypothèses simplificatrices sont couramment utilisées :

- le vecteur poussée $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V}$, soit $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{x_a}$;
- le moment en G de la force de poussée est nul, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathscr{M}(G, \text{moteurs} \to \text{avion})} = \overrightarrow{0}$;
- la pente γ est modérée, soit $\cos\gamma \simeq 1$ et $\sin\gamma \simeq \gamma$.

Question 9 Indiquer les découplages provoqués par ces hypothèses sur les équations longitudinales (Eq.P, Eq.S et Eq.M).

A Hypothèse (3) : découplage de Eq.S et Eq.M par rapport à γ.

B Hypothèse (1) et hypothèse (2) : découplage de Eq.M et Eq.P par rapport à F et γ.

C Hypothèse (1) : découplage de Eq.P et Eq.S par rapport à F.

D Hypothèse (2) : découplage de Eq.P et Eq.M par rapport à F.

4. Équilibres longitudinaux

Question 10 À l'équilibre, les dérivées temporelles étant nulles, indiquer la nature du vol longitudinal en vous appuyant sur les valeurs prises par les paramètres α, γ et q.

- A Vol en palier : $\gamma = 0$.
- B Vol rectiligne : $\alpha = \text{cte}$ et $q = 0$.
- C Vol rectiligne uniformément accéléré : $\ddot{\gamma} = 0$.
- D Vol de montée ou de descente à vitesse constante : $\ddot{\gamma} = 0$.

Modèle du coefficient aérodynamique C_z : Le coefficient de portance C_z est une fonction linéaire de l'incidence (voir Figure 4) tant que l'on n'a pas atteint le décrochage (perte de contrôle de l'avion).

Figure 4 : Coefficient de portance C_z en fonction de l'incidence α.

$$C_Z = C_Z(\alpha) = C_{Z\alpha}(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } C_{Z\alpha} = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} \simeq 5$$

pour un avion type A350.

Question 11 D'après la figure 4, le décrochage se produit toujours à :

- A La même inclinaison.
- B La même vitesse.
- C La même incidence.
- D La même vitesse et le même inclinaison.

Question 12 D'après l'équation de sustentation (Eq.S), à l'équilibre avec l'hypothèse de découplage, calculer le facteur de charge N_Z défini par $N_Z = \dfrac{\text{Portance}}{\text{Poids}} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho S C_z V^2}{Mg}$.

- A $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.
- B $N_Z = \dfrac{\dot{V}\gamma}{g} \simeq 0$.
- C $N_Z = \cos\gamma \simeq 1$.
- D $N_Z = 1 + \dfrac{\dot{V}\gamma}{g}$.

III – Calcul approché de la fonction de transfert du modèle avion

Objectif Déterminer un modèle de connaissance du contrôle de l'incidence et de la pente de l'avion. Cette modélisation sera rendue possible à partir des équations de la mécanique du vol linéarisées autour d'un point de vol.

Le point de vol considéré est caractérisé par :

- vitesse de vol : $V \simeq V_0 = \text{cte}$;
- l'angle d'incidence α varie autour de l'incidence d'équilibre a_e avec $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e \in [0°, 15°]$;
- l'avion est en vol longitudinal pur (la pente γ est modérée).

Le modèle de coefficient de moment C_m, pris au centre d'inertie G de l'avion est : $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_e) + C_{\delta m}\delta$. Avec :

- C_{m0} , le coefficient de moment constant à l'équilibre ;
- $C_{m\alpha} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'incidence α ;
- $C_{\delta m} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \delta} < 0$, le gradient de coefficient de moment C_m vis-à-vis d'une variation d'angle de gouverne δ.

En linéarisant les équations de moment et de sustentation autour du point de vol, on aboutit aux équations différentielles linéaires :

$$B\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\rho S \ell V_0^2 (\alpha C_{m\alpha} + \delta C_{\delta m}) \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2M}\rho S V_0 \alpha C_{z\alpha} \quad (2)$$

Question 13 En se plaçant dans les conditions initiales nulles, déterminer les fonctions de transfert $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\alpha(p)}{\delta(p)}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{\gamma(p)}{\alpha(p)}$.

A $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

B $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p+\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{2Mp}{\rho S V_0 C_{z\alpha}}$.

C $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{1}{Bp^2+\frac{1}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

D $H_{\text{inc}}(p)=\dfrac{\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{\delta m}}{Bp^2+\frac{B}{2M}\rho S V_0 C_{z\alpha}p-\frac{1}{2}\rho S\ell V_0^2 C_{m\alpha}}$ et $H_{\text{pente}}(p)=\dfrac{1}{2Mp}\rho S V_0 C_{z\alpha}$.

Partie B – Modèle des servo-gouvernes

I – Modèle cinématique des gouvernes de profondeur

Objectif Les sollicitations aérodynamiques importantes, subies par la gouverne, conduisent à prendre en compte un montage suffisamment rigide pour le guidage en rotation de la gouverne par rapport au PHR.

Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Par contre, pour des conditions évidentes de sécurité, les actionneurs ainsi que les barres de renfort, ne devront pas supportés des sollicitations parasites alternées au niveau des ancrages. Nous proposerons alors dans un second temps, une modification des liaisons concernées afin de réduire le degré d'hyperstatisme.

Les gouvernes de profondeur sont reliées au PHR par des liaisons pivots et manœuvrées par :

- une servocommande hydraulique (SCH), actionneur principal ;
- un actionneur électro-hydraulique (EHA), utilisé en cas de défaillance.

L'actionneur EHA est alimenté électriquement et l'énergie hydraulique nécessaire à son fonctionnement est produite localement par l'intermédiaire d'une pompe électrique. En mode normal, cet actionneur fonctionne en amortisseur.

Figure 5 Représentation du mécanisme de commande et photographies des principaux constituants

Le schéma cinématique du mécanisme ainsi que le graphe des liaisons (sans la désignation des liaisons) sont représentés sur la Figure 6.

Figure 6 Schéma cinématique de la commande de gouverne et graphe des liaisons associé sans la désignation des liaisons.

Question 14 Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques I_c.

A $I_c=20$.

B $I_c=22$.

C $I_c=16$.

D $I_c=24$.

Question 15 Déterminer le nombre cyclomatique μ.

A $\mu = 8$.
B $\mu = 4$.
C $\mu = 5$.
D $\mu = 7$.

Question 16 Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme m_c.

A $m_c = 5$.
B $m_c = 2$.
C $m_c = 0$.
D $m_c = 1$.

Question 17 En déduire le degré d'hyperstatisme h.

A $h = 9$.
B $h = 17$.
C $h = 13$.
D $h = 18$.

Question 18 Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme fortement hyperstatique.

A Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.
B Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.
C Inconvénient : le mécanisme ne fonctionnera pas.
D Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.

Question 19 Comment modifier les liaisons pivots des vérins et des barres de renfort (en O, A, B, C et O', A', B', C') afin de réduire le degré d'hyperstatisme tout en supprimant les sollicitations « indésirables » ? Il faut les remplacer par :

A Des liaisons sphériques.
B Des pivots glissants.
C Des sphères-cylindres.
D Des couples pivot glissant / appui-plan.

Le modèle retenu pour la suite de l'étude est représenté Figure 7. On fait l'hypothèse d'un mécanisme plan et ne comportant que l'actionneur principal.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{x_1}$	$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{y_3}$	$\overrightarrow{CB} = b\,\overrightarrow{x_0}$	$\overrightarrow{OC} = c\,\overrightarrow{y_0}$
$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$	$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}) = \delta$	$a = c = 0{,}17\ m$	$b = 0{,}25\ m$

Figure 7 Schéma cinématique d'une servo-gouverne et paramétrage

Question 20 Déterminer la loi entrée-sortie géométrique $\lambda = f(\delta, a, b, c)$.

A $\lambda \sin\delta = c - a\cos\delta + a\sin\delta - b$.
B $\lambda = \sqrt{(a\sin\delta + b)^2 + (c - a\cos\delta)^2}$.
C $\lambda \tan\alpha = \dfrac{a\sin\delta + b}{c - a\cos\delta}$.
D $\lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\sin\delta$.

Les angles de braquage $\delta \in [-12^\circ, 12^\circ]$ et pour la position au repos ($\delta = 0^\circ$) donne $\lambda = \lambda_0 = 0.25$ m.

Pour les débattements angulaires maximaux, soit $\delta_{\max} = 12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rad, nous remarquerons que :

$$\frac{\sin\delta_{\max} - \delta_{\max}}{\sin\delta_{\max}} \simeq 0{,}7\,\% \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos\delta_{\max}}{\cos\delta_{\max}} \simeq 2\,\%.$$

Question 21 Justifier la possibilité de linéariser la loi entrée-sortie autour du point de fonctionnement $\delta = 0^\circ$ et $\lambda = \lambda_0$ (rappel $a = c$). En déduire, un modèle linéarisé sous la forme $\delta = A_0\lambda + B_0$.

A Possible car $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} + \dfrac{b}{a}$.
B Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}} + \dfrac{b}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2}$.
C Possible car $a = c$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{2a} - \dfrac{b}{a}$.
D Possible car $\sin\delta \simeq \delta$ et $\cos\delta \simeq 1$ alors $\delta = \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{b}{a}$.

Pour la suite de l'étude, la loi entrée-sortie linéarisée s'écrit : $\delta = 6\lambda - 1{,}5$ avec λ en mètre et δ en radian. La commande en vitesse de l'angle de braquage de la gouverne obéit à une loi trapézoïdale (voir Figure 8).

Figure 8 Loi de vitesse en déplacement de la tige du vérin de la servo-commande.

Question 22 La course du vérin étant de 7 cm, déterminer alors la vitesse maximale à imposer $|\dot{\lambda}_{\max}|$. En déduire alors $|\dot{\delta}_{\max}|$.

A $|\dot{\lambda}_{\max}| = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 34\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

B $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

C $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 3.4\,^\circ\mathrm{s^{-1}}$.

D $|\dot{\lambda}_{\max}| = 0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $|\dot{\delta}_{\max}| = 0.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Afin de justifier le choix de la servo-valve pour l'actionneur EHA de secours, on souhaite comparer son débit nominal Q_{nom} devant le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire pour la manœuvre de la gouverne. En première approximation, les hypothèses suivantes sont retenues :

- fluide incompressible ;
- fuites négligées ;
- débit constant assuré par la pompe électrique.

Les données techniques relatives à la transmission hydraulique sont :

Vérin	Servo-valve
Vérin hydraulique double effet symétrique. Section utile $S = 25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$.	Gain pur : $K_S = 20\,\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$. Intensité nominale $I_{\text{nom}} = 40\,\mathrm{mA}$.

Question 23 À partir de la loi de commande de la gouverne, calculer le débit maximum $Q_{\max}$ nécessaire.

A $0.25\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

B $0.001\,25\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

C $2.5\,\mathrm{Ls^{-1}}$.

D $0.0125\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Pour ne pas altérer la sécurité et la durée de vie de la transmission hydraulique, la servo-valve ne doit pas travailler à pleine puissance.

Ainsi, le débit nominal sera majoré en vérifiant que $Q_{\max} \leq 65\% Q_{\max}$, cela permet de prendre en compte les pertes par frottements sec et visqueux, les pertes de charges, les fuites ainsi qu'une utilisation à moyenne puissance de la servo-valve.

Question 24 Déterminer le débit nominal Q_{nom} de la servo-valve choisie. Préciser si ce choix est correct vis-à-vis de la recommandation ci-dessus.

A $Q_{\text{nom}} \simeq 4\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix incorrect.

B $Q_{\text{nom}} \simeq 0.04\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix incorrect.

C $Q_{\text{nom}} \simeq 0.8\,\mathrm{Ls^{-1}}$. Choix validé.

D $Q_{\text{nom}} \simeq 0.02\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Choix validé.

III – Fonction de transfert de la servo-gouverne

Objectif Déterminer un modèle de connaissance de la servo-commande qui pourra être utilisé dans la chaîne d'asservissement étudiée en partie C.

L'objectif étant de déterminer l'expression de la fonction de transfert de la servo-gouverne, on adoptera la représentation cinématique et mécanique proposée sur la Figure 9.

Le vérin hydraulique (SCH) est utilisé en tant qu'actionneur alors que le vérin (EHA) est utilisé en tant qu'amortisseur.

Hypothèses :

- on considère que les deux tiges des vérins ont la même masse m_t ;
- le débattement angulaire α étant faible, on néglige la rotation des corps des vérins (d'où la forme des torseurs cinématiques proposés). Ainsi, l'énergie cinétique de 1/0 sera négligée, $T_{1/0} \simeq 0$;
- on néglige les forces de pesanteur devant les actions mécaniques mises en jeu.

Figure 9 Modélisation de la servo-gouverne.

Solide 2 :

- Torseurs des actions mécaniques :
  - Frottement visqueux : $\{\mathcal{T}(f \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -f\dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$ avec f le coefficient de frottement visqueux.

- Actions hydrauliques : $\{\mathscr{T}(h \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_h \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_E$.

- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \simeq \overrightarrow{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_A$.
- Grandeurs inertielles : les deux tiges des vérins ont la même masse m_t soit : $m_2 = 2m_t$.
- Données :
  - Force exercée par le vérin hydraulique : $F_h = (p_1 - p_2)S$ avec S, section utile du vérin, p_i pression dans la chambre i (avec $i = 1$ ou 2).
  - On définit également V_i, volume de le chambre i, Q_i, débit la chambre i (avec $i = 1$ ou 2), B, module de compressibilité du fluide.

Solide 3 :

- Torseurs des actions mécaniques : actions aérodynamiques : $\{\mathscr{T}(\text{air} \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{air} \to 3)} \\ M_C \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_B$ M_C est le moment de la charnière de la gouverne. Remarque : $M_c < 0$ si $\delta > 0$ (moment à cabrer).
- Torseurs cinématiques : $\{\mathscr{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\delta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B$.
- Grandeurs inertielles : la gouverne, de masse m_3, a pour matrice d'inertie exprimée en son centre d'inertie G suivant la base $\mathscr{B}_3 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$: $I_3(G) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & 0 \\ -F_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.
- Données : $M_c = \dfrac{1}{2}\rho S_G V^2 \ell_c C_m$:
  - ρ : masse volumique de l'air ;
  - S_G : surface aérodynamique de la gouverne ;
  - V : vitesse de l'air par rapport à l'avion ;
  - ℓ_C : longueur de la corde de la gouverne ;
  - C_m : coefficient de charnière. Dans les conditions de vol définies précédemment, nous admettrons la relation simplifiée $C_m = -1,5\delta$;
  - δ : angle de braquage de la gouverne exprimé en radian.
  - Afin d'alléger l'écriture on adoptera la notation suivante : $M_C = -\delta N_0$ avec : $N_0 = \dfrac{3}{4}\rho S_G V^2 \ell_C$.

Question 25 Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_0 = (O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen, que l'on notera $T_{\Sigma/0}$.

A $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}B_3\dot{\delta}^2$.

B $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}C_3\dot{\delta}^2$.

C $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)\right)\dot{\delta}^2$.

D $\dfrac{1}{2}2m_t\dot{\lambda}^2 + \dfrac{1}{2}\left(C_3 + m_t d^2\right)\dot{\delta}^2$.

Question 26 On rappelle que le modèle linéarisé de la loi entrée-sortie de la servo-gouverne s'écrit $\delta = A_0\lambda + B_0$. Déterminer le moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble mobile $\Sigma = \{2+3\}$ ramené sur l'axe de charnière $(B, \overrightarrow{z_0})$.

A $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + 2m_t d^2$.

B $2m_t + C_3$.

C $\dfrac{2m_t}{A_0^2} + C_3 + m_3\left(d^2 + e^2\right)$.

D $\dfrac{m_t}{A_0} + B_3$.

Question 27 Calculer les puissances galiléennes, développées par les efforts extérieurs et les intereffors, appliquées sur l'ensemble mobile $\Sigma = \{1+2+3\}$ et notées respectivement P_{ext} et P_{int}.

A $P_{\text{int}} = -f\dot{\lambda}^2 + (p_1 - p_2)S\dot{\lambda}$.

B $P_{\text{int}} = f\dot{\alpha}^2 + (p_2 - p_1)S\dot{\delta}$.

C $P_{\text{int}} = -\delta N_0\dot{\delta}$.

D $P_{\text{ext}} = \delta N_0\dot{\lambda}$.

Question 28 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile Σ, déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de braquage de la gouverne.

A $\dfrac{1}{2}J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{2f}{A_0^2}\dot{\delta} + \dfrac{N_0}{A_0^2}\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0^2}$.

B $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{A_0^2}\dot{\delta} + N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}$.

C $J_{eq}\ddot{\delta} + \dfrac{f}{B_0^2}\dot{\delta} - N_0\delta = \dfrac{(p_1 - p_2)S}{A_0}\dot{\delta}$.

D $J_{eq}\ddot{\delta} + f\dot{\delta} + N_0\delta = (p_1 - p_2)S$.

Modélisation du vérin hydraulique de la servo-gouverne (SCH) Les équations des débits du vérin sont les suivantes :

- $Q_1(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} + \dfrac{V_1}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$;
- $Q_2(t) = S\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} - \dfrac{V_2}{B} \times \dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$.

Hypothèses :

- Conservation des débits (débit de fuite négligé), soit $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$;
- Servo-valve à commande proportionnelle, soit $Q(t) = K_S i(t)$ avec :
  - K_S, gain de la servo-valve $\mathrm{Ls^{-1}A^{-1}}$;
  - $i(t)$, intensité du courant de commande de la servo-valve A.

Par convention, la fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Le modèle de connaissance de la servo-valve ainsi que du vérin peut être représenté par le schéma-blocs ci-après.

Question 29 Déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{1,2,3,4\}$).

A $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{B}{V_1 p}$, $H_3(p) = \dfrac{B}{V_2 p}$, $H_4(p) = Sp$.

B $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{S}$.

C $H_1(p) = \dfrac{1}{K_S}$, $H_2(p) = \dfrac{V_1 p}{B}$, $H_3(p) = \dfrac{V_2 p}{B}$, $H_4(p) = \dfrac{1}{Sp}$.

D $H_1(p) = K_S$, $H_2(p) = \dfrac{Bp}{V_1}$, $H_3(p) = \dfrac{Bp}{V_2}$, $H_4(p) = S$.

Le modèle complet de la servo-gouverne est proposé ci-dessous.

Avec :

- K_L, un gain pur en $\mathrm{Arad^{-1}}$ permettant l'adaptation de la commande d'incidence $\alpha_{cd}(p)$ en intensité du courant électrique $I(p)$;
- $\Delta P(p)$, la différence de pression : $\Delta P(p) = P_1(p) - P_2(p)$.

Par ailleurs, on introduit la raideur hydraulique $r_h = \left(\dfrac{B}{V_1} + \dfrac{B}{V_2}\right) S^2$ et on rappelle la relation $\delta = A_0 \lambda + B_0$.

Question 30 À partir des résultats des questions précédentes, déterminer les fonctions de transferts $H_i(p)$ ($i \in \{5,6,7\}$).

A $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S^2}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

B $H_5(p) = \dfrac{r_h}{pS^2}$, $H_6(p) = \dfrac{\dfrac{S}{A_0}}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

C $H_5(p) = r_h$, $H_6(p) = \dfrac{Sp}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{1}{A_0}$.

D $H_5(p) = \dfrac{1}{S}$, $H_6(p) = \dfrac{r_h S p}{J_{eq} p^2 + \dfrac{f}{A_0^2} p + N_0}$ et $H_7(p) = \dfrac{Sp}{A_0}$.

Question 31 Donner la fonction de transfert de la servo-gouverne $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\delta(p)}{\alpha_{cd}(p)}$.

A $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

B $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

C $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 K_1 K_S}{S}}{\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h}\right) p^2\right)}$.

D $H_{\text{gouv}}(p) = \dfrac{\dfrac{A_0 r_h K_1 K_S}{S\left(r_h + N_0 A_0^2\right)}}{p\left(1 + \left(\dfrac{f}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p + \left(\dfrac{J_{eq} A_0^2}{r_h + N_0 A_0^2}\right) p^2\right)}$.

Partie C – Loi de commande

I – Sonde d'incidence

Objectif Concevoir la chaîne d'asservissement de la loi de commande en incidence. Pour cela, un modèle de comportement des capteurs (sondes) d'incidence sera étudié dans un premier temps. Nous verrons dans un second temps, comment introduire une méthode de protection d'incidence (triplex) permettant d'écarter le risque de décrochage.

Les sondes d'incidence permettent de mesurer l'angle d'attaque de l'avion, nommé alpha : α. Elles sont au nombre de trois et disposées sur le nez de l'avion (voir Figure 10).

Figure 10 Positionnement des capteurs A350 XWB

Leur fonctionnement est identique à celui d'une girouette. Une pale s'oriente automatiquement dans le flux d'air, permettant ainsi de relever l'angle d'inclinaison de l'appareil (voir Figure 11).

Figure 11 Sonde d'incidence - vue éclatée

1. Modèle de comportement des sondes d'incidence

Essais en soufflerie

Des essais en soufflerie jusqu'à la vitesse de l'air de 210 kt (108 m s^{-1}) ont été effectués par l'équipementier. Les réponses fréquentielles indiquent que les sondes ont toutes un modèle de comportement du second ordre (voir Figure 12).

Figure 12 Diagrammes de Bode (Gain/Phase) d'une sonde d'incidence à la vitesse $V = 150$ kt

fonction de tranfert de la sonde d'incidence sera notée : $H_{\text{cap}} = \dfrac{1}{1+2\xi_c \dfrac{p}{\omega_c} \dfrac{p^2}{\omega_c^2}}$ avec ξ_c le coefficient d'amortissement et ω_c la pulsation propre non amortie de la sonde.

Le Tableau 2 donne les résultats d'identification obtenus en soufflerie pour différentes vitesses de l'air.

Vitesse air (kt) [144]	Vitesse air (m s^{-1})	ω_c rad s^{-1}	ξ_c	$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ Hz	$T_C = \dfrac{1}{f_c}$ s
90	46.3	54,1	0,559	8,61	0,12
110	56.6	59,6	0,484	9,49	0,11
130	66.9	65,2	0,424	10,38	0,10
150	77.2	73,5	0,354	11,70	0,09
170	87.5	87,5	0,276	13,93	0,07
190	97.8	101,4	0,228	16,14	0,06
210	108.0	115,4	0,2	18,37	0,05

Tableau 2 Résultats d'identification des sondes d'incidence

Échantillonnage : vérification de la fréquence d'échantillonnage

Le traitement et l'utilisation de l'angle d'incidence mesurée par les sondes, sont effectués par le calculateur principal FCPC (Flight Control Primary Computer, voir Figure 13) qui est cadencé à 25 Hz.

Figure 13 Calculateur principal FCPC.

Question 32 Déterminer le pas de calcul du calculateur.

- A 0.25 s.
- B 40 ms.
- C 7 ms.
- D 4 ms.

On rappelle que la réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti possède une pseudopériode T qui s'exprime en fonction du coefficient d'amortissement ξ_c : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}$ soit une fréquence $f = \dfrac{\omega_c\sqrt{1-\xi_c^2}}{2\pi}$.

Comme nous sommes en présence d'un système du second ordre faiblement amorti (surtensif), la fréquence de coupure à -3 dB n'a pas beaucoup de signification. On regardera donc la fréquence propre des sondes pour quantifier la bande passante.

Ainsi la fréquence maximum du signal de sortie en incidence α sera telle que $f_{\max} \simeq \dfrac{\omega_c}{2\pi} = f_c$.

On admettra que le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e impose que le signal ne doit pas comporter de composante de fréquence supérieure à $\dfrac{f_e}{2}$ (Théorème de Shannon).

Question 33 Indiquer la plage de vitesse pour laquelle la règle d'échantillonnage est vérifiée, c'est-à-dire telle que $f_{\max} < \dfrac{f_e}{2}$.

- A La vitesse air doit être comprise entre 90 kt et 150 kt.
- B La vitesse air doit être supérieure à 150 kt.
- C Aucune car $\xi_c < 1$ donc il y aura du dépassement.
- D Toutes les vitesses conviennent.

Question 34 Pourquoi la dynamique des sondes à haute vitesse ne présente-t-elle pas d'intérêt significatif ?

- A À haute vitesse, le gain très faible annule complètement la mesure du capteur. Les sondes ne sont donc plus utilisables.
- B Aucun intérêt, car un avion de transport ne dépasse jamais la vitesse de 170 kt.
- C Les hautes vitesses se retrouvent pour des vols en croisière au-dessus de 10 000 m (40 000 ft). À cette altitude, il n'y a pas d'obstacle donc la dynamique sera faiblement sollicitée.
- D Les vitesses de vol réclamant une forte dynamique en incidence sont en dessous de 150 kt.

Les réponses temporelles mesurées lors des essais en soufflerie (voir Figure 14) correspondent à une sollicitation de consigne de type trapézoïdale. La pente de la rampe imposée de $10\,^\circ\,\mathrm{s}^{-1}$ est au-delà du domaine de variation classique de l'incidence afin d'assurer un facteur de sécurité supplémentaire.

Figure 14 Réponses temporelles des sondes d'incidence pour différentes vitesses air (1) consigne entrée trapézoïdale et réponses (2) Zoom sur la transition poursuite-échelon (3) Zoom pour la réponse ($V = 90$ kt)

On définit l'erreur telle que $\varepsilon(t) = \alpha_c(t) - \alpha(t)$.

Question 35 Pour une entrée de type rampe $\alpha_c(t) = \dot{\alpha}_{\max}\, t\, u(t)$, exprimer l'erreur de traînage notée $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}$ en fonction de $\dot{\alpha}_{\max}$, ε_c et ω_c (on note $u(t)$ la fonction échelon unitaire).

- A $\varepsilon_t = \dfrac{2\xi_c}{\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.
- B $\varepsilon_t \to \infty$ car la pente de la rampe n'est pas unitaire.
- C $\varepsilon_t = 0\,^\circ$ car le gain est unitaire.
- D $\varepsilon_t = \dfrac{1}{\xi_c\omega_c}\dot{\alpha}_{\max}$.

Question 36 Dans le cas le plus défavorable pour une vitesse air de 90 kt, déterminer la valeur de l'erreur de traînage.

- A $\varepsilon_t = 8\,^\circ$.
- B Non défini.
- C $\varepsilon_t = 0.2\,^\circ$.
- D $\varepsilon_t = 3\,^\circ$.

Question 37 Déterminer le retard de traînage $T_{\alpha t}$. Est-il compatible vis-à-vis du pas de calcul du calculateur FCPC ?

- A Compatible car : $T_{\alpha t} = 20$ ms < pas de calcul du FCPC.
- B Incompatible car : $T_{\alpha t} = 10$ ms > pas de calcul du FCPC.
- C Compatible car : $T_{\alpha t} = 2$ ms < pas de calcul du FCPC.
- D Incompatible car : $T_{\alpha t} = 40$ ms > pas de calcul du FCPC.

Question 38 La valeur de l'incidence utilisée par le calculateur, dans la loi de protection (prot α) est filtrée par un premier ordre de constante de temps 0.1 s (10 Hz). Indiquer l'intérêt de ce filtrage.

- A Ce filtrage permet d'améliorer la rapidité.
- B Aucune des réponses n'est bonne.
- C Ce filtrage permet de s'affranchir des bruits de mesure.
- D Ce filtrage permet d'augmenter la fréquence d'échantillonnage.

La criticité dans les lois de contrôle de la commande de vol nécessite d'utiliser 3 sources indépendantes (3 sondes sur l'A350 XWB, voir Figure 10), pour élaborer la valeur retenue de l'angle d'incidence.

Le vote permet de calculer une valeur unique à partir des trois valeurs mesurées par les sondes, on parle de méthode « triplex ». Cette méthode de calcul dépend du nombre de sources de mesure valides et diffère selon les avionneurs.

Le constructeur Airbus a opté pour une méthode « triplex » définie selon le sous-programme Python proposé Figure 15, permettant la passivation d'une mesure erronée.

```
# Test du voteur triplex :

alpha1=5;
alpha2=1;
alpha3=6;

print (triplex(alpha1,alpha2,alpha3))
```

```
def triplex(alpha1,alpha2,alpha3):
    alpha=[alpha1,alpha2,alpha3]
    n = len(alpha)
    alphavote=0

    for i in range(n):
        imin=i
        for k in range(imin+1, n):
            if alpha[k] < alpha[imin]:
                imin=k
        alpha[i], alpha[imin] = alpha[imin], alpha[i]

    p=int(n/2)
    if n == p:
        alphavote=(alpha[p-1]+alpha[p])/2.0
    else:
        alphavote=alpha[p]
    return alphavote
```

Figure 15 Méthode « triplex » - Sous-programme du vote d'incidence alphavote

Question 39 En vous appuyant sur le programme ci-dessus calculant l'angle d'incidence alphav ote àpartir des 3 mesures des sondes (notées alpha1, alpha2 et alpha3), indiquer la méthode « triplex » retenue par le constructeur Airbus pour le vote de l'angle d'incidence.

- A alphavote correspond à la médiane des 3 angles mesurés.
- B alphavote correspond à la moyenne des 3 angles mesurés.
- C alphavote correspond à la moyenne des 2 angles les plus élevés (passivation de l'angle faible).
- D alphavote correspond à la moyenne de la médiane des 3 angles mesurés avec la valeur de l'angle minimum.

Question 40 Indiquer la valeur du vote calculé lors du test de la fonction triplex pour (alpha1, alpha2 alpha3)=(5, 2, 6).

- A alphavote = 4.
- B alphavote = 5,5.
- C alphavote = 5.
- D alphavote = 3.

II Loi de protection en incidence

Objectif Pour conclure, une modélisation complète de l'asservissement sera proposée pour déterminer un correcteur adapté aux exigences du cahier des charges.

Figure 16 Loi de commande en protection d'incidence, nommée Prot Alpha

Le cahier des charges de la loi de commande en protection d'incidence impose :

- marge de gain : $M_g > 6\,\text{dB}$;
- marge de phase : $M_\varphi > 60°$;
- dépassement : $D\alpha_{\%} < 10\%$;
- temps de réponse : $t_{5\%} < 5\,\text{s}$;
- écart statique : ε_S nul.

Nous allons vérifier les performances attendues d'une telle loi à partir d'une modélisation simplifiée des différentes boucles de commandes.

Paramètres de vol :

Vitesse	77 m.s^{-1} soit 278 km.h^{-1} ou encore 150 kt	Vitesse limite de variation d'incidence $\dot{\alpha}_{max}$	10°/s
Incidence max α_{max}	12°	Poussée des moteurs	Pleine poussée (TO/GA[4]) sous 200 ft
Incidence de protection α_{prot}	10°	Centrage A350	41.7%
Altitude	200 ft soit 61 m	Masse maximum	167 t
Pente	$\gamma = -3°$	Manche pilote	Manche bloqué en position arrière (*full back stick*)

L'avion se place en phase d'atterrissage mais, sous la barre des 200 ft soit 61 m, la manœuvre d'approche doit être annulée. Le pilote commande alors une pleine poussée des moteurs et un ordre d'incidence maximum avec le manche bloqué en position arrière.

La loi de commande passe donc en protection d'incidence et nous souhaitons qu'elle élabore la consigne d'incidence trapézoïdale notée α_c définie ci-dessous.

Les pentes suivent une rampe maximum à$\dot{\alpha}_{\max} = 10\,°\,\text{s}^{-1}$, le palier étant bloqué à la valeur de protection d'incidence soit $\alpha_{\text{prot}} = 10°$. On fixe la durée de la consigne $t_2 = 20\,\text{s}$.

Question 41 Déterminer la fonction causale $\alpha_c(t)$. On note $u(t)$ la fonction échelon unitaire.

- A $10[t\,u(t) - t\,u(t+1) - u(t+19)]$.
- B $10[t\,u(t) + u(t) - t\,u(t)]$.
- C $10[t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - (t-19)u(t-19) + (t-20)u(t-20)]$.
- D $10[u(t) - u(t-19)]$.

Question 42 En déduire la transformée de Laplace de cette consigne notée $\alpha_c(p)$.

- A $\dfrac{10}{p}\left(1 - e^{-19p}\right)$.
- B $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p}\right)$.
- C $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - e^{-p} - e^{-19p} + e^{-20p}\right)$.
- D $\dfrac{10}{p^2}\left(1 - p\right)$.

Asservissement d'incidence

L'asservissement proposé repose sur la modélisation suivante.

Les différentes fonctions de transfert issues des études précédentes sont définies en utilisant les notations suivantes.

Fonction de transfert du manche $H_{ma}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{ma}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{ma})	Fonction de transfert du correcteur $H_{cor}(p)$ La synthèse du correcteur sera étudiée dans cette partie.	Fonction de transfert des gouvernes $H_{gouv}(p) = \frac{K_e}{p\left(1+2\xi_e\frac{p}{\omega_e}+\frac{p^2}{\omega_e^2}\right)}$
Fonction de transfert avion $H_{inc}(p) = \frac{K_i}{1+2\xi_i\frac{p}{\omega_i}+\frac{p^2}{\omega_i^2}}$	Fonction de transfert de la pente $H_{pente}(p) = \frac{K_\gamma}{p}$	Fonction de transfert du filtre passe-haut type « washout » $H_{wo}(p) = \frac{p}{1+\frac{p}{\omega_{wo}}}$ (pulsation ω_{wo})
Fonction de transfert capteur sonde d'incidence $H_{cap}(p) = \frac{1}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\frac{p^2}{\omega_c^2}}$	Fonction de transfert du filtre passe-bas de 10 Hz $H_{fil}(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega_{fil}}}$ (1er ordre, pulsation ω_{fil})	Consigne : $\alpha_c(p)$ • échelon (créneau de 20s) Ou • trapèze Perturbation : $\alpha_{pert}(p)$ • nulle Ou • échelon

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle de gain K ainsi que l'absence de perturbation.

Question 43 Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\alpha_{\text{mes}}(p)}{\varepsilon(p)}$ de l'asservissement d'incidence.

- A Ordre 9 – Classe 1.
- B Ordre 12 – Classe 1.
- C Ordre 7 – Classe 1.
- D Ordre 12 – Classe 2.

La Figure 22 (DOC 3) représente les diagrammes de Bode de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée ($K = 1$).

Question 44 Indiquer pour ce système si la marge de phase est :

- A non définie.
- B négative ;
- C 20 ° ;
- D nulle ;

Afin de satisfaire le critère de stabilité du cahier des charges, le choix de la correction se porte vers un correcteur dont la fonction de transfert est la suivante : $H_{\text{cor}}(p) = K\frac{1+aT_dp}{1+T_dp}$ avec $a > 1$.

Question 45 Nommer le type de correcteur choisi.

- A Proportionnel et à retard de phase.
- B Proportionnel et intégral.
- C Proportionnel intégral et dérivé.
- D Proportionnel et à avance de phase.

Le diagramme de Bode (gain et phase) de ce correcteur est donné sur le DOC 4. Afin d'assurer un gain significatif de phase, nous décidons de placer la pulsation ω_m du correcteur sur la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé, soit à la pulsation $\omega_m = \omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 46 En vous aidant du DOC 4 (diagrammes de Bode et courbe représentant la fonction $a : \varphi_m \rightarrow \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$), déterminer la valeur du paramètre a pour que le correcteur permette d'assurer la marge de phase du cahier des charges. En déduire la valeur de T_d.

- A $a = 9$ et $T_d = 80\,\text{ms}$.
- B $a = 4$ et $T_d = 0.125\,\text{s}$.
- C $a = 2$ et $T_d = 0.06\,\text{s}$.
- D $a = 6$ et $T_d = 12\,\text{s}$.

Question 47 Déterminer la valeur du gain K pour que la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé ne soit pas modifiée, c'est-à-dire $\omega_{0\,\text{dB}} \simeq 4\,\text{rad/s}$.

- A 0,5
- B 10
- C 2
- D 4

La réponse indicielle pour une consigne créneau de 10°et une perturbation de 2°du système corrigé est donnée Figure 24 du DOC 3. Par ailleurs, le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est donné Figure 25 du DOC 3.

Question 48 Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

- A CDC non respecté car le système est instable ($M_g = -10\,\text{dB}$, $M_\varphi = -120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 5\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 1,2°$.
- B CDC respecté car ($M_g = 20\,\text{dB}$, $M_\varphi = 120°$, $D\alpha\% = 0$, $t_{r5\%} = 2\,\text{s}$ et ε_s négatif.
- C CDC respecté car ($M_g = 6\,\text{dB}$, $M_\varphi = 60°$, $D\alpha\% < 10\%$, $t_{r5\%} = 4.8\,\text{s}$ et $\varepsilon_s = 0$.
- D CdC non respecté car ε_S est non nul.

Question 49 Quel constat peut-on faire sur la valeur du temps de réponse.

- A Le temps de réponse du système corrigé est inchangé car la bande passante à 0 dB en boucle ouverte n'a pas été modifiée.
- B Le temps de réponse du système corrigé est nettement amélioré grâce à l'action du correcteur.
- C Le temps de réponse du système corrigé est fortement dégradé car la marge de phase est trop faible.
- D Le temps de réponse n'est pas acceptable car le système n'est pas précis.

La sécurité de vol ne permet pas l'utilisation d'une consigne de commande en échelon, on la remplace alors par une commande trapézoïdale définie à la Question 41.

Par ailleurs, pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles, une correction prédictive (feedforward) de gain pur K_{ff} est mise en place. Le modèle numérique Scilab ainsi que les réponses en incidence α, facteur de charge N_Z et en vitesse verticale V_z sont donnés sur le DOC 5.

Question 50 Indiquer les critères du cahier des charges améliorés, par la mise en place de la correction prédictive.

- A Tous les criètres.
- B $t_{r5\%}$.
- C ε_s, $D\alpha_{\%}$.
- D $D\alpha_{\%}$, $t_{r5\%}$.

DOC 1 STRUCTURE GÉNÉRALE D'UN AVION

La Figure 17 présente la structure générale d'un avion.

Figure 17 Structure générale d'un avion

Rôles des principaux constituants intervenant dans le pilotage d'un avion :

Fuselage : partie massive permettant le transport de la charge (passager, fret, courrier …).

Moteurs : leur rôle est de fournir l'énergie propulsive nécessaire au vol (poussée).

Les éléments de contrôle :

Les commandes de vol permettent de contrôler les évolutions de l'avion suivant trois directions ou axes dans l'espace : lacet, roulis et tangage (voir Figure 18 page 33).

Surfaces à manœuvrer :

Voilure :
La voilure est constituée d'une paire d'ailes qui sont les éléments constituant le système sustentateur principal de l'avion.

- les ailerons localisés sur le bord de fuite pivotent de façon asymétrique sur chacune des ailes permettant d'incliner l'avion selon l'axe de roulis afin d'engager un virage ;
- les volets hypersustentateurs (volets et becs) dont le rôle est d'augmenter la portance à faible vitesse ;
- les spoilers, situés sur l'extrados de l'aile, se soulèvent afin d'assurer la descente de l'avion et permettent également le rôle d'aérofreins.

Empennage :
L'empennage, situé en partie arrière du fuselage, permet d'assurer la stabilité de l'avion et d'effectuer les différentes manœuvres de pilotage. On distingue :

- l'empennage vertical, constitué de la dérive (partie fixe) et de la gouverne de direction contrôlant l'axe de lacet ;
- l'empennage horizontal, constitué du plan horizontal réglable (PHR) ainsi que des gouvernes de profondeur contrôlant l'axe de tangage.

DOC 2 MÉCANIQUE DU VOL

Repères utilisés pour la mise en place des équations de la mécanique du vol.

Commandes primaires : utilisées pendant tout le vol pour contrôler l'avion.
Commandes secondaires : utilisées pendant les phases d'atterrissage et décollage.

Figure 18 Surfaces de contrôle de l'A350XWB

Le repère terrestre ayant pour origine O_T un point fixe sur la surface de la Terre, avec :

- $R_0 = (O_T, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ supposé **galiléen** et tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{z_0}}$ représente la **verticale descendante** de la force de gravitation locale en G et usuellement $\overrightarrow{x_0}$ orienté selon le nord magnétique.

Les angles d'EULER permettent la définition de la position du repère avion par rapport au repère terrestre. Les angles sont appelés : ψ pour le cap (azimut), θ pour l'assiette longitudinale et ϕ pour l'assiette latérale (gîte). (Voir Figure 19)

Figure 19 Changements de bases - Repère terrestre R_0 vers repère avion R_b

Les deux repères suivants ont pour origine le centre de gravité G de l'avion, avec :

- Un repère avion, $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ avec :
  - $\overrightarrow{x_b}$ appartient au plan de symétrie, orienté vers l'avant et parallèle à une génératrice du fuselage de l'avion ;
  - $\overrightarrow{z_b}$ est dans le plan de symétrie avion et orienté vers l'intrados (« ventre » de l'avion) ;
  - $\overrightarrow{y_b}$ est perpendiculaire au plan de symetrie avion et orienté vers la droite (« sens pilote » de l'avion).
- Un repère aérodynamique, $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$ avec $\overrightarrow{x_a}$ tel que la vitesse aérodynamique de l'avion soit $\vec{V} = V\,\overrightarrow{x_a}$.

Le repère aérodynamique est défini par rapport au repère avion à l'aide des angles : α pour l'incidence et β pour le dérapage (Voir Figure 20 et Figure 21).

Figure 20 Changement de bases - Repère aérodynamique R_a vers repère avion R_b

Mouvement de l'avion R_b par rapport au sol R_0 :

Le torseur cinématique de l'avion par rapport sol en G aura alors pour expression :

$$\{V_{avion/R_0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{avion/R_0} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}.\vec{\mathrm{v}} + \dot{\phi}.\overrightarrow{x_b} = \boldsymbol{p}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_b}} + \boldsymbol{q}\,\overrightarrow{\boldsymbol{y_b}} + \boldsymbol{r}\,\overrightarrow{\boldsymbol{z_b}} \\ \vec{\mathrm{V}}_{G,avion/R_0} = \boldsymbol{V}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_a}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{G}}$$

Par habitude, on exprime le vecteur taux de rotation dans la base associée au repère avion avec *p*, *q*, *r*, respectivement les vitesses de rotation de roulis, tangage, lacet.

Le vecteur vitesse de l'avion par rapport au sol est naturellement exprimé dans le trièdre aérodynamique.

Figure 21 Passage du repère avion vers le repère aérodynamique : $R_b = (G, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b})$ à $R_a = (G, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$

Angle de dérapage	Assiette longitudinale	Angle de gîte (assiette latérale)

Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO non corrigée (*K*=1)

Figure 23 Réponse temporelle du système en boucle fermée non corrigé pour une consigne créneau

Figure 24 Réponse temporelle du système en boucle fermée corrigé pour une consigne créneau

Figure 25 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO corrigée

DOC 4 SYNTHÈSE DU CORRECTEUR

DOC 5 ANNEXE – AMÉLIORATION DU CORRECTEUR

Modification du correcteur par ajout d'une boucle de correction prédictive (*feedforward*). Les réponses temporelles du système ainsi corrigé sont données ci-dessous.

Figure 26 Modification du correcteur - Réponses temporelles avec la mise en place de la boucle prédictive.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Question 1 : A B C D
Question 2 : A B C D
Question 3 : A B C D
Question 4 : A B C D
Question 5 : A B C D
Question 6 : A B C D
Question 7 : A B C D
Question 8 : A B C D
Question 9 : A B C D
Question 10 : A B C D
Question 11 : A B C D
Question 12 : A B C D
Question 13 : A B C D
Question 14 : A B C D
Question 15 : A B C D
Question 16 : A B C D
Question 17 : A B C D
Question 18 : A B C D
Question 19 : A B C D
Question 20 : A B C D
Question 21 : A B C D
Question 22 : A B C D
Question 23 : A B C D
Question 24 : A B C D
Question 25 : A B C D
Question 26 : A B C D
Question 27 : A B C D
Question 28 : A B C D
Question 29 : A B C D
Question 30 : A B C D
Question 31 : A B C D
Question 32 : A B C D
Question 33 : A B C D
Question 34 : A B C D
Question 35 : A B C D
Question 36 : A B C D
Question 37 : A B C D
Question 38 : A B C D
Question 39 : A B C D
Question 40 : A B C D
Question 41 : A B C D
Question 42 : A B C D
Question 43 : A B C D
Question 44 : A B C D
Question 45 : A B C D
Question 46 : A B C D
Question 47 : A B C D
Question 48 : A B C D
Question 49 : A B C D
Question 50 : A B C D