

## TD 02



### Quille pendulaire

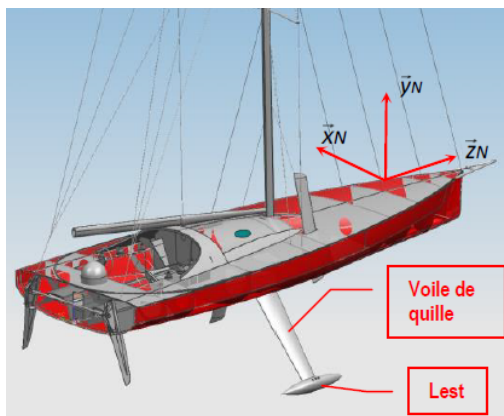
Concours Commun Mines Ponts 2014

#### Savoirs et compétences :

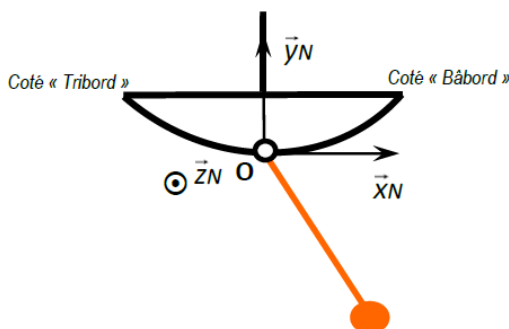
- Res1.C2.SF1 : Proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison.
- Res1.C3.SF1 : Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre.
- Res2.C18 : Principe fondamental de la statique.
- Res2.C19 : Équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides.
- Res2.C20 : Théorème des actions réciproques.

### Mise en situation

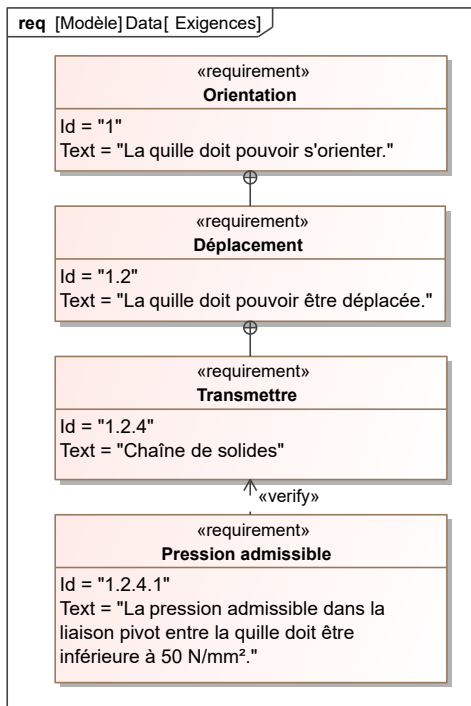
Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.



Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_N)$  avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



**Objectif** L'objectif de cette partie est de valider la solution technologique de réalisation de la liaison pivot entre la quille et la coque.



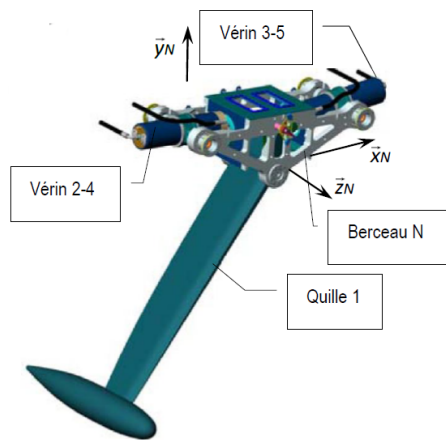
### Travail à réaliser

Le modèle de calcul est donné dans les figures suivantes.

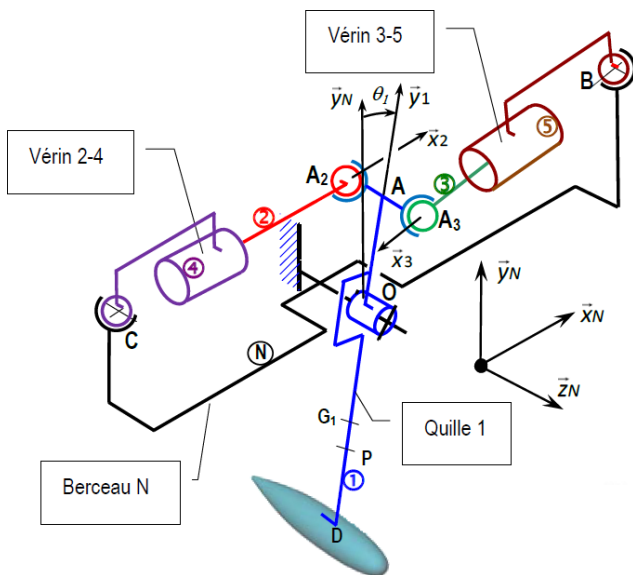
#### Hypothèses

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- **Seul le vérin 2-4 est moteur** ( $F_{h3} = 0$  – les solides 3 et 5 ne sont donc pas à prendre en compte). Le fluide (pression hydraulique) agit simultanément sur les pièces 2 et 4. L'action du fluide sur 2 est donnée par  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{matrix} F_{h2} \vec{x}_2 \\ 0 \end{matrix} \right\}_C$ .
- Les actions mécaniques de frottement visqueux provenant du déplacement du fluide dans les canalisations sont toutes négligées.
- Les actions hydrodynamiques sur le voile et le lest de quille sont également négligées.
- Les poids des éléments constitutifs des deux vérins sont négligés.
- On note  $G_1$  le centre d'inertie de la quille 1 et  $M_1$  la masse de la quille.

- Les bases  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_N$  sont considérées confondues. Cependant l'angle  $\theta_1$  est différent de zéro.
- Les conditions de déplacement rendent négligeables les effets dynamiques. Les théorèmes de la statique seront donc utilisés dans la suite.



Modèle volumique 3D



$$\overrightarrow{OA} = R \overrightarrow{y_1}, \theta_1 = (\overrightarrow{x_N}, \overrightarrow{x_1}), \overrightarrow{OG_1} = -L_1 \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{AA_2} = -d \overrightarrow{z_N}$$

$$\overrightarrow{AA_3} = d \overrightarrow{z_N}.$$

Schéma cinématique 3D

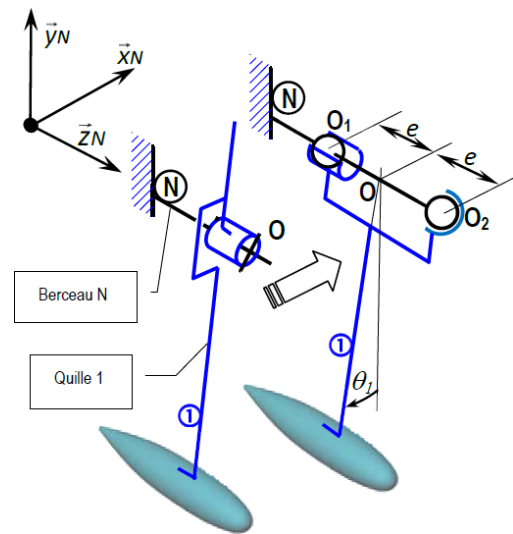
**Question 1** En isolant le bon système, montrer que l'action de 2 sur 1 en  $A_2$  est représentable par le glisseur dont la forme sera notée :  $\left\{ \begin{matrix} F_{21} \overrightarrow{x_2} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{A_2}$  ou  $\left\{ \begin{matrix} F_{21} \overrightarrow{x_N} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{A_2}$  puisque  $\mathcal{B}_N = \mathcal{B}_2$ .

**Question 2** Déterminer l'effort  $F_{21}$  nécessaire au déplacement de la quille.

**Question 3** Exprimer, en fonction de  $d$ ,  $g$ ,  $M_1$ , et  $F_{21}$ , par ses éléments de réduction en  $O$ , dans la base  $(\overrightarrow{x_N}, \overrightarrow{y_N}, \overrightarrow{z_N})$ , le torseur d'action mécanique de  $N$  sur 1,  $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{pivot}$ .

La liaison pivot de  $N$  sur 1 est composée de deux paliers modélisés par une liaison sphère-cylindre et une liaison sphérique placées en parallèle (voir figure suivante).

La géométrie de l'assemblage est telle que :  $\overrightarrow{OO_2} = e \overrightarrow{z_N}$ ;  $\overrightarrow{OO_1} = -e \overrightarrow{z_N}$  avec  $e = 350$  mm.



**Question 4** Écrire la relation liant les torseurs d'action mécanique  $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{sphère-cylindre}$ ,  $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{sphérique}$  et  $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{pivot}$ . En déduire, par ses éléments de réduction en  $O_1$ , dans la base  $\mathcal{B}_N = (\overrightarrow{x_N}, \overrightarrow{y_N}, \overrightarrow{z_N})$ , en fonction de  $d$ ,  $g$ ,  $M_1$ , et  $F_{21}$ , le torseur d'action mécanique de  $N$  sur 1 en  $O_1$ ,  $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{sphère-cylindre}$ .

### Retour sur le cahier des charges

On se place dans les conditions suivantes :

- la valeur maximale de l'action  $F_{21}$  a été estimée dans l'étude précédente :  $F_{21Maxi} = 2 \times 10^5$  N. De plus :  $M_1 g = 4,1 \times 10^4$  N,  $e = 350$  mm et  $d = 200$  mm;
- les « paliers » sont constitués côté quille de contacts cylindriques de diamètre  $d_c = 80$  mm et de longueur  $L_c = 50$  mm,  $O_1$  étant dans le plan médian du cylindre de contact. Un coussinet de nylon sert d'interface entre la quille et le navire. Ce coussinet est caractérisé par sa pression de contact maximale admissible :  $p_{adm} = 50$  N mm<sup>-2</sup>. Par ailleurs on peut montrer que lorsqu'un coussinet est chargé par une pression uniforme sur un demi-cylindre, la relation entre l'effort radial est la pression est donnée par :

$$p_{21} = \frac{F}{d_c L_c}.$$

**Question 5** Dans ces conditions, calculer la valeur de l'effort radial (perpendiculaire à l'axe géométrique du coussinet) qui sollicite ce coussinet en  $O_1$ . Valider ensuite l'usage de ce coussinet de nylon.

### Corrigé résumé

1. .
2.  $\Leftrightarrow F_{21} = -\frac{L_1}{R} M_1 g \tan \theta_1$ .
3.  $X_{N1p} = -F_{21}$ ,  $Y_{N1p} = M_1 g$ ,  $Z_{N1p} = 0$ ,  $L_{N1p} = 0$ ,  $M_{N1p} = d F_{21}$ .
4.  $X_{N1sc} = -\frac{d}{e} F_{21} - \frac{M_1 g}{2}$  et  $Y_{N1sc} = \frac{M_1 g}{2}$  (ou  $X_{N1sc} = -\frac{e+d}{2e} F_{21}$ ).
5.  $F = 136336$  N et  $p_{21} \approx 34$  MPa <  $p_{adm}$  (ou  $F = 158000$  N et  $p_{21} \approx 40$  MPa).

## TD 02



### Quille pendulaire

Concours Commun Mines Ponts 2014

#### Savoirs et compétences :

- Res1.C2.SF1 : Proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison.
- Res1.C3.SF1 : Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre.
- Res2.C18 : Principe fondamental de la statique.
- Res2.C19 : Équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides.
- Res2.C20 : Théorème des actions réciproques.

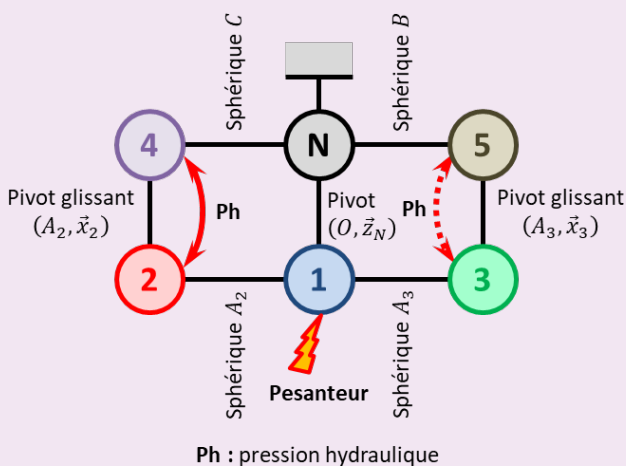
### Mise en situation

**Objectif** L'objectif de cette partie est de valider la solution technologique de réalisation de la liaison pivot entre la quille et la coque.

#### Travail à réaliser

**Question 1** En isolant le bon système, montrer que l'action de 2 sur 1 en  $A_2$  est représentable par le glisseur dont la forme sera notée :  $\left\{ \begin{array}{c} F_{21} \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_{A_2}$  ou  $\left\{ \begin{array}{c} F_{21} \vec{x}_N \\ 0 \end{array} \right\}_{A_2}$  puisque  $\mathcal{B}_N = \mathcal{B}_2$ .

**Correction** Le graphe de structure associé au modèle cinématique est donné dans la figure suivante.



On isole l'ensemble **{4+2}**. Cet ensemble est soumis à 2 glisseurs. D'après le PFS les deux actions mécaniques ont donc même direction (la droite  $(A_2C)$ , vecteur  $\vec{x}_2 = \vec{x}_N$ ), la même norme ( $|F_{21}|$ ) et le sens opposé. On a donc :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 4)\} + \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \{0\} \Leftrightarrow \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 4)\} = \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\}$  et donc  $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{21} \vec{x}_N \\ 0 \end{array} \right\}_{A_2}$ .

**Question 2** Déterminer l'effort  $F_{21}$  nécessaire au déplacement de la quille.

**Correction** On isole la quille 1.

On réalise le BAME :

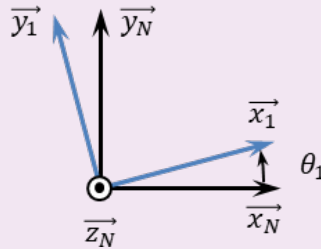
- action de 2 sur 1 :  $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{21} \vec{x}_N \\ 0 \end{array} \right\}_{A_2}$  ;
- action de 3 sur 1 :  $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 1)\} = \{0\}$  (pas d'action mécanique dans le vérin) ;
- action de N sur 1 :  $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{\text{pivot}} = \left\{ \begin{array}{c} X_{N1p} \vec{x}_N + Y_{N1p} \vec{y}_N + Z_{N1p} \vec{z}_N \\ L_{N1p} \vec{x}_N + M_{N1p} \vec{y}_N \end{array} \right\}_O$  ;
- action de la pesanteur sur 1 :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_1 g \vec{y}_N \\ 0 \end{array} \right\}_{G_1}$ .

La quille étant en pivot d'axe  $(O, \vec{z}_N)$  par rapport à **0**, réalisons le théorème du moment statique en **O** en projection sur  $\vec{z}_N$  :

$$\begin{aligned}
 & (\overrightarrow{OA_2} \wedge F_{21} \overrightarrow{x_N} + \overrightarrow{OG_1} \wedge -M_1 g \overrightarrow{y_N}) \overrightarrow{z_N} = 0 \\
 & \Leftrightarrow ((R \overrightarrow{y_1} - d \overrightarrow{z_N}) \wedge F_{21} \overrightarrow{x_N} + L_1 \overrightarrow{y_1} \wedge M_1 g \overrightarrow{y_N}) \overrightarrow{z_N} = 0 \\
 & \Leftrightarrow -F_{21} \overrightarrow{y_N} (R \overrightarrow{y_1} - d \overrightarrow{z_N}) + L_1 M_1 g (\overrightarrow{x_N} \cdot \overrightarrow{y_1}) = 0 \\
 & \Leftrightarrow -R F_{21} \cos \theta_1 - L_1 M_1 g \sin \theta_1 = 0 \\
 & \Leftrightarrow F_{21} = -\frac{L_1}{R} M_1 g \tan \theta_1.
 \end{aligned}$$

**Question 3** Exprimer, en fonction de  $d$ ,  $g$ ,  $M_1$ , et  $F_{21}$ , par ses éléments de réduction en  $O$ , dans la base  $(\overrightarrow{x_N}, \overrightarrow{y_N}, \overrightarrow{z_N})$ , le torseur d'action mécanique de  $N$  sur  $1$ ,  $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{\text{pivot}}$ .

### Correction



En conservant le même isolement et le même bilan des actions mécaniques, on réalise le PFS en  $O$  et on a :

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} F_{21} \overrightarrow{x_N} + X_{N1p} \overrightarrow{x_N} + Y_{N1p} \overrightarrow{y_N} + Z_{N1p} \overrightarrow{z_N} - M_1 g \overrightarrow{y_N} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{OA_2} \wedge F_{21} \overrightarrow{x_N} + \overrightarrow{OG_1} \wedge -M_1 g \overrightarrow{y_N} + L_{N1p} \overrightarrow{x_N} + M_{N1p} \overrightarrow{y_N} = \overrightarrow{0} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} F_{21} \overrightarrow{x_N} + X_{N1p} \overrightarrow{x_N} + Y_{N1p} \overrightarrow{y_N} + Z_{N1p} \overrightarrow{z_N} - M_1 g \overrightarrow{y_N} = \overrightarrow{0} \\ F_{21} (R \overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{x_N} - d \overrightarrow{z_N} \wedge \overrightarrow{x_N}) - L_1 M_1 g \sin \theta \overrightarrow{z_N} + L_{N1p} \overrightarrow{x_N} + M_{N1p} \overrightarrow{y_N} = \overrightarrow{0} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} F_{21} \overrightarrow{x_N} + X_{N1p} \overrightarrow{x_N} + Y_{N1p} \overrightarrow{y_N} + Z_{N1p} \overrightarrow{z_N} - M_1 g \overrightarrow{y_N} = \overrightarrow{0} \\ F_{21} (-R \cos \theta_1 \overrightarrow{z_N} - d \overrightarrow{y_N}) - L_1 M_1 g \sin \theta \overrightarrow{z_N} + L_{N1p} \overrightarrow{x_N} + M_{N1p} \overrightarrow{y_N} = \overrightarrow{0} \end{cases}
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} F_{21} + X_{N1p} = 0 \\ Y_{N1p} - M_1 g = 0 \\ Z_{N1p} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L_{N1p} = 0 \\ -d F_{21} + M_{N1p} = 0 \\ -F_{21} R \cos \theta_1 - L_1 M_1 g \sin \theta = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} X_{N1p} = -F_{21} \\ Y_{N1p} = M_1 g \\ Z_{N1p} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L_{N1p} = 0 \\ M_{N1p} = d F_{21} \\ 0 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Question 4** Écrire la relation liant les torseurs d'action mécanique  $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{\text{sphère-cylindre}}$ ,  $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{\text{sphérique}}$  et  $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{\text{pivot}}$ . En déduire, par ses éléments de réduction en  $O_1$ , dans la base  $\mathcal{B}_N = (\overrightarrow{x_N}, \overrightarrow{y_N}, \overrightarrow{z_N})$ , en fonction de  $d$ ,  $g$ ,  $M_1$ , et  $F_{21}$ , le torseur d'action mécanique de  $N$  sur  $1$  en  $O_1$ ,  $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{\text{sphère-cylindre}}$ .

### Correction

On a  $\{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{\text{sphère-cylindre}} + \{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{\text{sphérique}} = \{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{\text{pivot}}$ .

$$\begin{aligned}
 & \text{En conséquences : } \{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{\text{sphère-cylindre}} = \left\{ \begin{matrix} X_{N1sc} \overrightarrow{x_N} + Y_{N1sc} \overrightarrow{y_N} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{matrix} X_{N1sc} \overrightarrow{x_N} + Y_{N1sc} \overrightarrow{y_N} \\ -e X_{N1sc} \overrightarrow{y_N} + e Y_{N1sc} \overrightarrow{x_N} \end{matrix} \right\}_O \\
 & \text{et } \{\mathcal{T}(N \rightarrow 1)\}_{\text{sphérique}} = \left\{ \begin{matrix} X_{N1s} \overrightarrow{x_N} + Y_{N1s} \overrightarrow{y_N} + Z_{N1s} \overrightarrow{z_N} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix} \right\}_{O_2} = \left\{ \begin{matrix} X_{N1s} \overrightarrow{x_N} + Y_{N1s} \overrightarrow{y_N} + Z_{N1s} \overrightarrow{z_N} \\ e X_{N1s} \overrightarrow{y_N} - e Y_{N1s} \overrightarrow{x_N} \end{matrix} \right\}_O.
 \end{aligned}$$

Au final, on a :

$$\begin{cases} X_{N1p} = X_{N1sc} + X_{N1s} \\ Y_{N1p} = Y_{N1sc} + Y_{N1s} \\ Z_{N1p} = Z_{N1s} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} L_{N1p} = e Y_{N1sc} - e Y_{N1s} \\ M_{N1p} = -e X_{N1sc} - e Y_{N1s} \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} X_{N1p} = X_{N1sc} + X_{N1s} \\ Y_{N1p} = Y_{N1sc} + Y_{N1s} \\ Z_{N1p} = Z_{N1s} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} L_{N1p} = e Y_{N1sc} - e Y_{N1s} \\ M_{N1p} = -e X_{N1sc} - e Y_{N1s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -F_{21} = X_{N1sc} + X_{N1s} \\ M_1 g = Y_{N1sc} + Y_{N1s} \\ 0 = Z_{N1s} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 = e Y_{N1sc} - e Y_{N1s} \\ d F_{21} = -e X_{N1sc} - e Y_{N1s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -F_{21} = X_{N1sc} + X_{N1s} \\ M_1 g = 2 Y_{N1sc} \\ Z_{N1s} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y_{N1sc} = Y_{N1s} \\ d F_{21} = -e X_{N1sc} - e Y_{N1sc} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{N1sc} = -\frac{d}{e} F_{21} - \frac{M_1 g}{2} \\ Y_{N1sc} = \frac{M_1 g}{2} \end{cases}.$$

### Retour sur le cahier des charges

**Question 5** Dans ces conditions, calculer la valeur de l'effort radial (perpendiculaire à l'axe géométrique du coussinet) qui sollicite ce coussinet en  $O_1$ . Valider ensuite l'usage de ce coussinet de nylon.

**Correction** On a  $F = \sqrt{X_{N1sc}^2 + Y_{N1sc}^2} = \sqrt{\left(-\frac{d}{e} F_{21} - \frac{M_1 g}{2}\right)^2 + \left(\frac{M_1 g}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(-\frac{200}{350} 200000 - \frac{41000}{2}\right)^2 + \left(\frac{41000}{2}\right)^2} = 136336 \text{ N.}$$

Et donc,  $p_{21} = \frac{136336}{80 \cdot 50} \simeq 34 \text{ MPa} < p_{\text{adm}}$ .