

## DS 2

Escalier mécanique  
Téléphérique Vanoise Express

CCP MP 2014 &amp; E3A PSI 2014

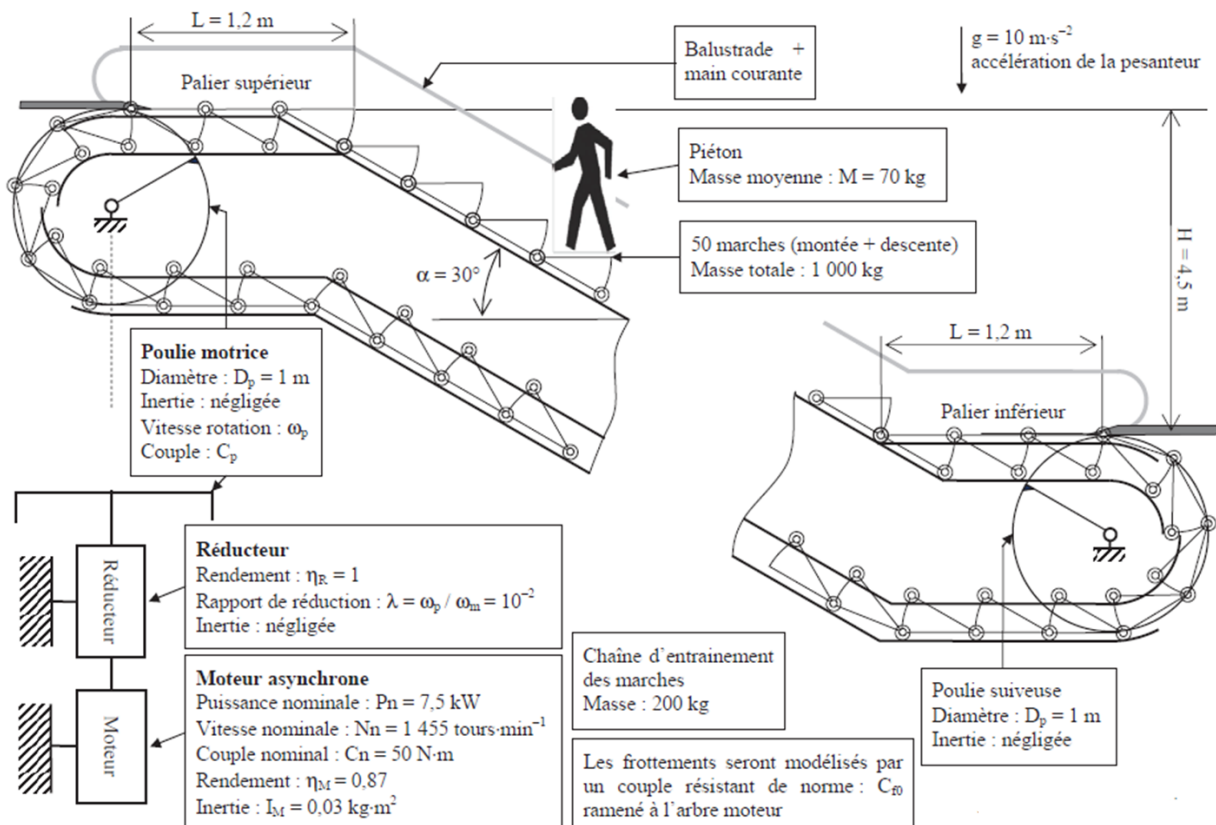
Savoirs et compétences :

## 1 Escalier mécanique

## 1.1 Présentation

Un escalier mécanique, appelé aussi escalier roulant ou Escalator (nom déposé par la société Otis), est un élévateur adapté au transport de personnes. Sa fonction principale est de faciliter le déplacement des piétons entre deux points de différentes hauteurs.

Depuis son invention en 1892 (à New York) par l'américain Jesse W. Reno, le système n'a pas cessé d'évoluer pour s'adapter aux nouvelles contraintes économiques, environnementales et sécuritaires.

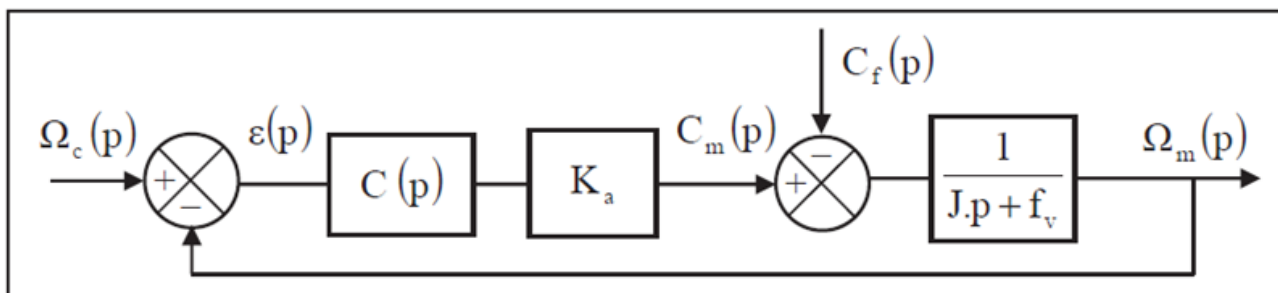


Le système doit répondre aux exigences suivantes

Exigences	Critères	Valeurs
Req1 : transporter les piétons entre deux niveaux	C1. Vitesse de déplacement	$0,65 \text{ ms}^{-1}$
	C2. Capacité horaire	7 300 personnes / heure maximum
	C3. Inclinaison	$30^\circ$
	C4. Dénivelé	4,5 m
	C5. Rapidité de l'asservissement de vitesse	Temps de stabilisation à 5 % de la vitesse finale = 3 s maximum (avec consigne en trapèze de vitesse)
	C6. Amortissement de l'asservissement de vitesse	Dépassement transitoire de la vitesse finale = 20 % maximum
	C7. Stabilité de l'asservissement de vitesse	Marge de phase = $45^\circ$ minimum
	C8. Précision de l'asservissement de vitesse	Insensible aux variations de charge en régime permanent
	C9. Facteur de confort	$\geq 6$

**Objectif** La maîtrise de la vitesse permet d'économiser de l'énergie mais cela ne doit pas se faire au détriment du confort et de la sécurité. L'objectif de cette partie est d'identifier les paramètres et de régler l'asservissement en vitesse afin d'avoir un comportement conforme au cahier des charges.

La commande vectorielle du moteur asynchrone peut être modélisée autour du point de fonctionnement par l'asservissement en vitesse illustré par le schéma-blocs suivant.



$\omega_c(t)$	Vitesse de consigne ( $\text{rad. s}^{-1}$ )
$K_a$	Raideur de l'asservissement ( $K_a = 0,122 \text{ N.m.s}$ )
$c_m(t)$	Couple disponible sur l'arbre de sortie du moteur ( $\text{N.m}$ )
$c_f(t)$	Couple de frottement ramené sur l'arbre du moteur ( $\text{N.m}$ )
$J$	Inertie équivalente ramenée à l'arbre moteur ( $\text{kg.m}^2$ )
$f_v$	Frottement visqueux ( $\text{N.m.s}$ ) ramené à l'arbre moteur

## 1.2 Identification des caractéristiques : $c_f(t)$ , $J$ et $f_v$

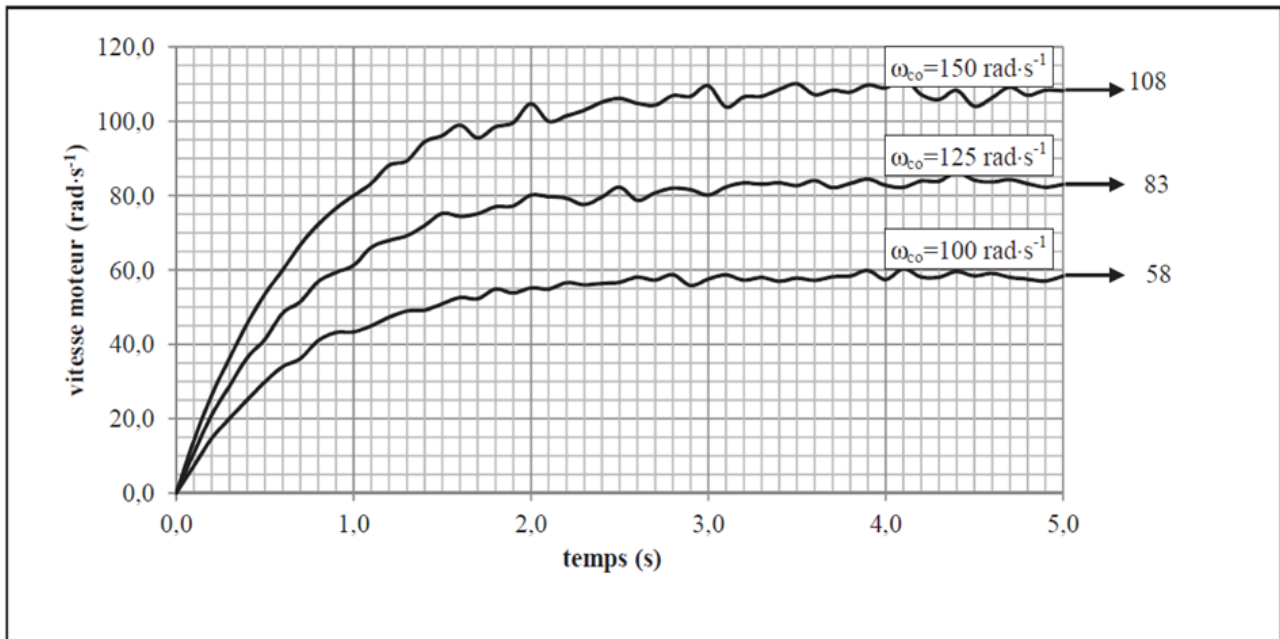
On prendra  $C(p) = 1$ .

**Question 1** Exprimer la vitesse du rotor  $\Omega_m(p)$  en fonction de la consigne  $\Omega_c(p)$  et du couple de frottement  $C_f(p)$ .

**Question 2** Donner l'expression de la constante de temps  $\tau$  du système en fonction de  $J$ ,  $K_a$ , et  $f_v$ .

**Question 3** Déterminer  $\omega_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega_m(t)$  pour un échelon de consigne  $\omega_c(t) = \omega_{c0}$  et un couple résistant supposé constant :  $c_f(t) = C_{f0}$ .

**Question 4** À partir des trois essais à vide donnés sur la figure suivante, tracer les graphes  $\omega_\infty = g_1(\omega_{c0})$  et  $\tau = g_2(\omega_{c0})$ . Proposer un modèle d'identification pour les fonctions  $g_1$  et  $g_2$ . En déduire les valeurs de  $C_{f0}$ ,  $f_v$  et  $J$ .



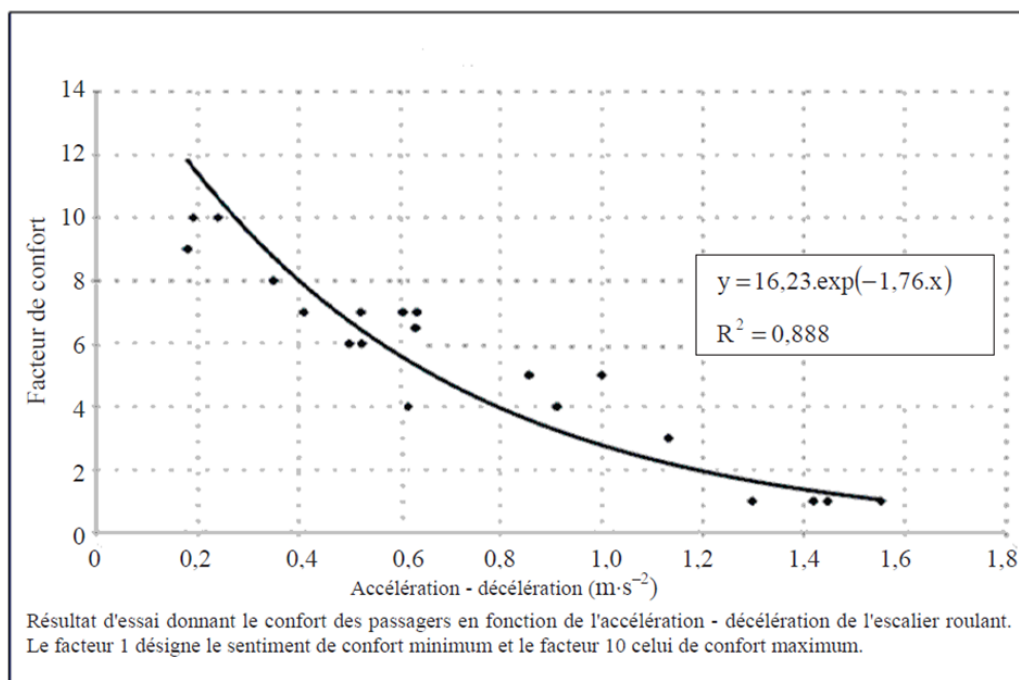
On prendra  $J = 0.08 \text{ kg.m}^2$  et  $f_v = 0 \text{ N.m.s}$  pour la suite du sujet.

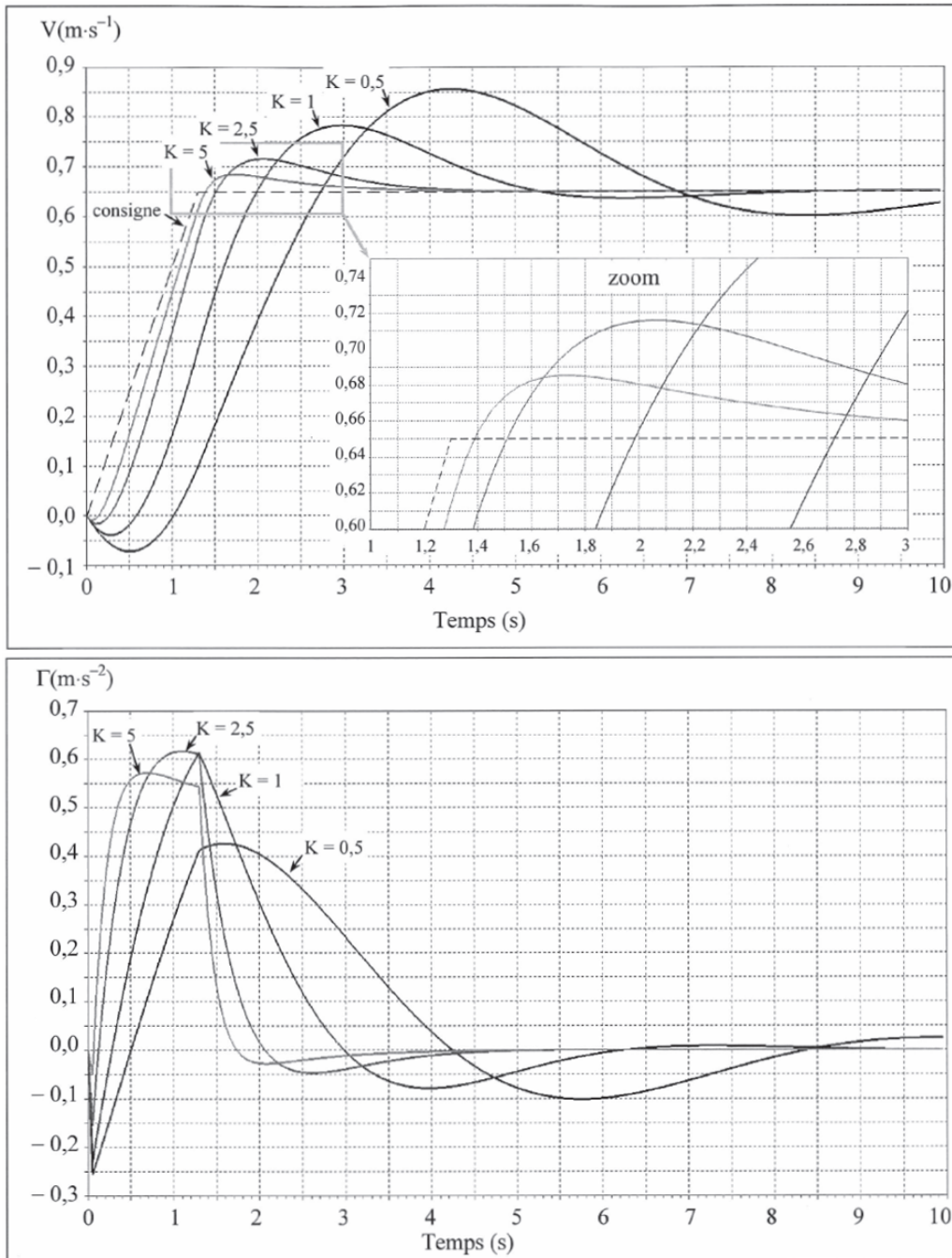
### 1.3 Réglage du correcteur Proportionnel Intégral (PI)

On choisit d'utiliser un correcteur Proportionnel Intégral modélisable par la fonction de transfert :  $C(p) = K \frac{1+p}{p}$  avec  $K \in \mathbb{R}^+$ .

**Question 5** Justifier, vis-à-vis du cahier des charges, l'utilisation d'un correcteur Proportionnel Intégral.

**Question 6** Une simulation pour différentes valeurs du gain  $K$  est représentée sur les figures suivantes. Compléter le tableau du document réponse à l'aide des différentes courbes. Donner la valeur de  $K$  permettant de valider l'ensemble des critères : « rapidité », « amortissement », « précision », « facteur de confort ».





**Question 7** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte :  $H_{BO}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\varepsilon(p)}$ .

**Question 8** Tracer sur le document réponse la réponse fréquentielle dans le plan de Bode de  $H_{BO}(p)$  (diagrammes asymptotiques + courbes réelles) pour la valeur de  $K$  déterminée à la question 6. Faire apparaître, la marge de phase de l'asservissement puis conclure sur la capacité de l'asservissement à respecter le critère de stabilité du cahier des charges.

## 2 Étude du téléphérique Vanoise Express

### 2.1 Présentation

Noël 2003, le téléphérique Vanoise Express relie enfin les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs, donnant naissance à paradisiski, un domaine skiable de 425 km, le troisième plus grand de France.

Le Vanoise Express est une prouesse technologique de 16.5 millions €. C'est le plus grand téléphérique de ce type jamais construit au monde. Il est réalisé par la société POMAGALSKI. C'est un téléphérique sans pylônes, d'une seule portée de gare à gare, ce qui permet de diminuer l'impact sur l'environnement et de préserver la beauté du paysage. L'utilisation de cabines à deux étages permet de réduire le volume des cabines et des gares, améliorant l'esthétique de l'ensemble.

La solution retenue est constituée de deux lignes parallèles portant chacune une seule cabine. Contrairement à la plupart des téléphériques, les deux lignes sont entièrement indépendantes, ce qui signifie qu'une cabine n'est pas le contrepoids de l'autre. Ainsi, en cas de problème sur une cabine, la liaison entre les deux stations n'est pas interrompue.



Dans ce qui suit, on désire respecter les critères suivants du cahier des charges partiel :

Exigences	Critère	Niveau
Contrôler l'énergie	<b>Ecart statique</b> en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\varepsilon_s = 0$
	<b>Ecart de traînage</b> (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations	$\varepsilon_v = 0$
	<b>Marge de phase</b>	$M\varphi \geq 45^\circ$
	<b>Pulsation de coupure en boucle ouverte</b> (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0dB)	$\omega_{0dB} \geq 1 \text{ rd/s}$

En effet, afin de respecter les consignes de vitesse pour un trajet entre « Les Arcs » et « La Plagne », il est nécessaire que l'asservissement de vitesse des moteurs à courant continu ait des qualités en précision, stabilité et rapidité.

### 2.2 Modélisation du moteur à courant continu

Hypothèses et données :

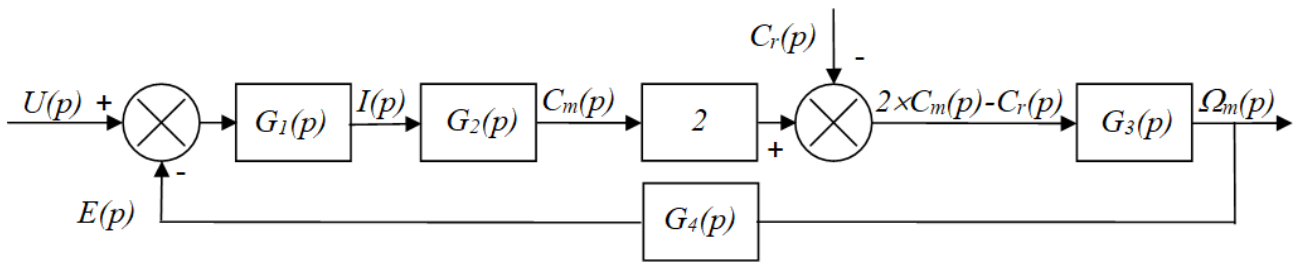
- on suppose les conditions initiales nulles ;
- les deux moteurs sont et fonctionnent de manière parfaitement identique ;
- $L = 0.59 \text{ mH}$  inductance d'un moteur ;
- $R = 0.0386 \Omega$  résistance interne d'un moteur ;
- $f = 6 \text{ Nm.s/rad}$  coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'axe des moteurs ;
- $J = 800 \text{ kg.m}^2$  moment d'inertie total des pièces en rotation, ramené sur l'axe des moteurs ;
- $c_m(t) = k_T i(t)$  avec  $k_T = 5.67 \text{ Nm/A}$  (constante de couple d'un moteur) ;
- $e(t) = k_E \omega_m(t)$  avec  $k_E = 5.77 \text{ Vs/rad}$  (constante électrique d'un moteur)
- équations de la dynamique :  $2c_m(t) - c_r(t) = J\dot{\omega}_m(t) + f\omega_m(t)$  ;
- loi des mailles :  $u(t) - e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ .

Notations :

- on notera  $F(p)$  la transformée de Laplace d'une fonction du temps  $f(t)$  ;
- $u(t)$  tension d'alimentation des moteurs ;
- $i(t)$  intensité traversant un moteur ;
- $e(t)$  force contre électromotrice d'un moteur ;
- $\omega_m(t)$  vitesse de rotation d'un moteur ;
- $c_m(t)$  couple d'un seul moteur ;
- $c_r(t)$  couple de perturbation engendré par le poids du téléphérique dans une pente et par l'action du vent, ramené sur l'axe des moteurs.

**Question 9** Le schéma-blocs de la double motorisation étant fourni ci-après, déterminez les fonctions de transfert  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$  écrites dans le domaine de Laplace.

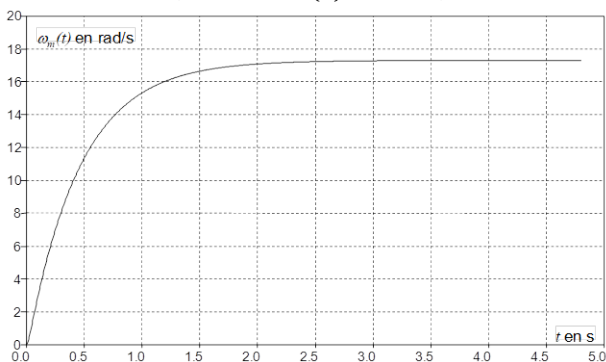




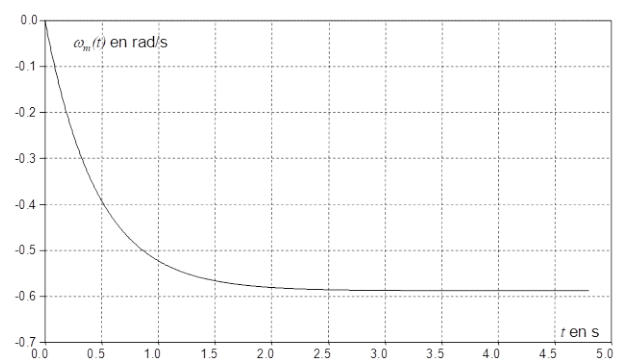
**Question 10**  $\Omega_m(p)$  peut se mettre sous la forme :  $\Omega_m(p) = F_1(p)U(p) - F_2(p)C_r(p)$ . Exprimer les fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  en fonction de  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$ ,  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$ .

On donne les résultats d'une simulation réalisée sur l'ensemble de la motorisation, constituée des deux moteurs à courant continu :

- la première courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V (le couple de perturbation  $c_r(t)$  est nul) ;
- la seconde courbe représente la réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m (la tension  $u(t)$  est nulle).



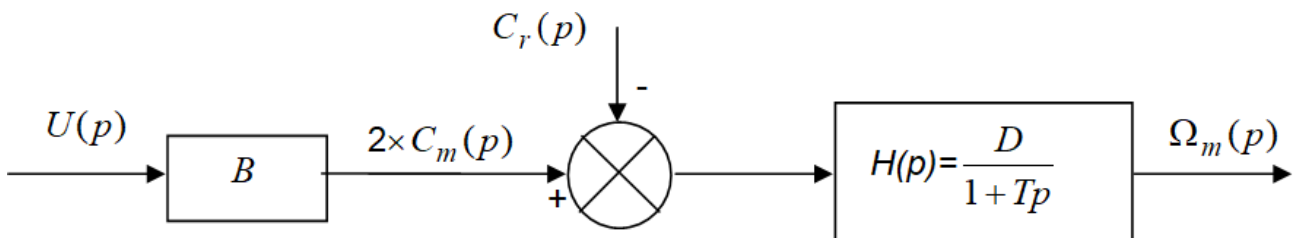
Réponse en vitesse à un échelon de tension  $u(t)$  d'amplitude 100 V.



Réponse en vitesse à un échelon de couple de perturbation  $c_r(t)$  d'amplitude 1000 N m.

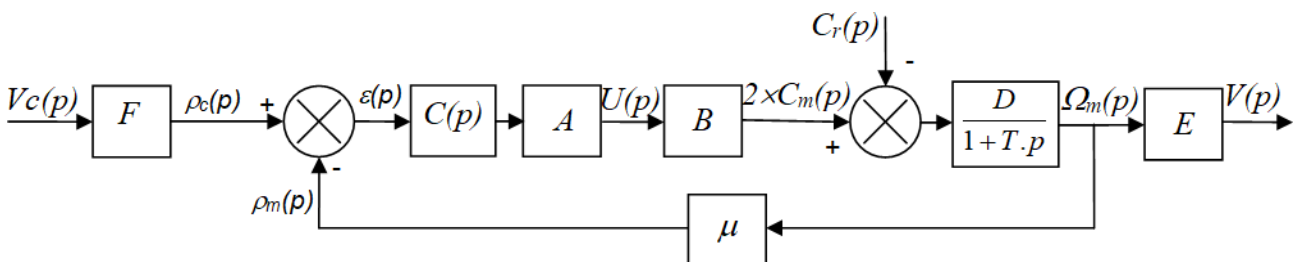
**Question 11** Choisissez et justifiez un modèle d'identification de ces fonctions (premier ordre, second ordre etc...). Déterminez numériquement les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  par identification.

En faisant l'approximation que les deux fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  ont sensiblement le même dénominateur, le schéma bloc ci-dessus peut se mettre sous la forme suivante :



**Question 12** Donnez la valeur numérique des trois constantes  $B$ ,  $D$  et  $T$ .

La motorisation modélisée ci-dessus est insérée dans une boucle d'asservissement de vitesse.



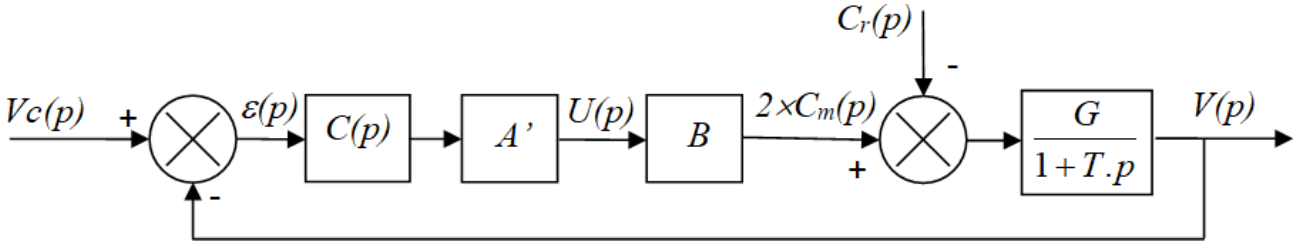
- La consigne de vitesse  $v_c(t)$  est donnée en entrée. Elle est convertie en une tension  $\rho_c(t)$  avec le gain  $F$ .
- Une génératrice tachymétrique de gain  $\mu = 0.716 \text{ V/s/rad}$  transforme la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  du moteur en une tension  $\rho_m(t)$ .
- Un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  corrige la différence  $\epsilon(t) = \rho_c(t) - \rho_m(t)$  et l'envoie à un amplificateur de gain  $A$ , qui alimente les deux moteurs électriques.

- La vitesse de rotation des moteurs  $\omega_m(t)$  est transformée en vitesse du téléphérique  $v(t)$  avec le gain  $E$ .

**Question 13** Déterminez l'expression du gain  $E$ . Faire une application numérique.

**Question 14** Déterminez l'expression du gain  $F$  pour que  $\varepsilon(t) = 0$  entraîne  $v_c(t) = v(t)$ . Faire une application numérique.

Par transformation du schéma bloc, le système est mis en retour unitaire. On obtient le résultat ci-dessous :



Les coefficients  $E$  et  $F$  calculés précédemment sont intégrés dans les nouveaux coefficients  $A'$  et  $G$ . Pour la suite, on continuera avec les valeurs suivantes :  $A' \cdot B = 3 \cdot 10^{-4} \text{ sN}$ ;  $G = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m/(sNm)}$  et  $T = 0.47 \text{ s}$ .

On se propose de tester successivement 3 correcteurs, et de retenir celui qui permet de respecter le cahier des charges.

### 2.3 Utilisation d'un correcteur proportionnel

$$C(p) = C_0 = 1.$$

**Question 15** Justifiez en quelques mots que le système est stable avec ce correcteur.

**Question 16** On suppose  $C_r(p) = 0$ . Calculez en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $V_0$  l'expression de l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12 \text{ m/s}$ . Faire l'application numérique.

On suppose  $V_c(p) = 0$ .

**Question 17** Calculez en fonction de  $C_0$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $G$  et  $C_{r0}$  l'expression de l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation en échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270 \text{ Nm}$  qui modéliserait la descente des Arcs. Faire l'application numérique.

**Question 18** Faire également une application numérique si  $C_{r0} = 7460 \text{ Nm}$  qui modéliserait la montée vers La Plagne.

**Question 19** Donnez numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$  dans les deux cas suivants : descente des Arcs et montée vers La Plagne.

**Question 20** Existe-t-il une valeur réaliste de  $C_0$  pour laquelle le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » serait vérifié ? Justifiez.

### 2.4 Utilisation d'un correcteur intégral

$$\text{On choisit maintenant le correcteur } C(p) = \frac{C_i}{p}.$$

**Question 21** Donnez l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée  $FTBO(p)$ . Faire l'application numérique pour  $C_i = 1$ .

**Question 22** Tracez le diagramme asymptotique de Bode de  $FTBO(p)$ . Tracez également l'allure des courbes.

**Question 23** Quelles valeurs numériques de  $C_i$  permettent de respecter le critère de « Marge de phase » du cahier des charges ?

**Question 24** Ces valeurs numériques de  $C_i$  permettent-elles de respecter le critère de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges ? Justifiez.

**Question 25** On suppose  $C_r(p) = 0$ . Calculez numériquement l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 12 \text{ m/s}$ .

**Question 26** On suppose  $V_c(p) = 0$ . Calculez numériquement l'écart statique en régulation  $\varepsilon_s''$  engendré par une perturbation échelon d'amplitude  $C_{r0} = -7270 \text{ N m}$  qui modéliserait la descente des « Arcs ».

**Question 27** Donnez numériquement l'écart statique total  $\varepsilon_s = \varepsilon_s' + \varepsilon_s''$ . Le critère « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbations échelon » est-il vérifié? Justifiez.

On suppose  $C_r(p) = 0$ .

**Question 28** Calculez l'expression de l'écart de traînage  $\varepsilon_v$  engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de réaliste qui permette de vérifier le critère « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations »? Justifiez.

## 2.5 Utilisation d'un double correcteur intégral et d'un correcteur à avance de phase

On décide d'utiliser le correcteur  $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$ , produit de la fonction  $C_a(p) = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$  avec  $a > 1$  (correcteur dont la fonction est d'ajouter de la phase) et d'un double intégrateur. On donne en fin de document réponse le diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{A'BG}{p^2(1 + Tp)}$ , qui est la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans  $C_a(p)$  (c'est-à-dire pour  $C_a(p) = 1$ ).

**Question 29** Montrez que le système n'est pas stable sans la fonction  $C_a(p)$ ?

La fonction  $C_a(p)$  va nous permettre de stabiliser le système et de respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte ». Pour cela, il faut suivre la démarche suivante.

**Question 30** Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation  $1 \text{ rad/s}$  pour obtenir une phase de  $-135^\circ$ ?

**Question 31** Tracez en fonction de  $a$ ,  $\tau$  et  $K$  les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur  $C_a(p) = K \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$  avec  $a > 1$ . Précisez clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Précisez de même les pulsations des points particuliers.

**Question 32** La phase maximum  $\varphi_{\max}$  ajoutée par  $C_a(p)$  peut être calculée par la formule :  $\sin \varphi_{\max} = \frac{a-1}{a+1}$ . Calculez numériquement  $a$  pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode à la question 30.

Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

**Question 33** Donnez l'expression en fonction de  $a$  et  $\tau$  de la pulsation  $\omega$  pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

**Question 34** En déduire la valeur numérique de  $\tau$  pour que  $\varphi_{\max}$  soit ajoutée à la pulsation  $1 \text{ rad/s}$ .

**Question 35** Calculez numériquement la valeur à donner à  $K$  pour respecter les critères de « Marge de phase » et de « Pulsation de coupure en boucle ouverte » du cahier des charges? Précisez la démarche utilisée.

**Question 36** Les critères « Écart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon » et « Écart de traînage (ou écart dynamique) en vitesse en l'absence de perturbations » sont-ils vérifiés? Justifiez.

**Question 37** Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges? Justifiez.