

## 1 Contexte et étude préliminaire

**Objectif** Valider la pertinence de l'utilisation d'une machine spéciale appelée tour en fosse pour le reprofilage des roues ferroviaires.

### Question 1

- Pour la méthode *a* :
  - aller retour exploitation – maintenance :  $2t_1 = 30$  min ;
  - séparation – assemblage des voitures :  $2t_2 = 60$  min ;
  - montage – démontage des roues :  $2t_3 = 480$  min (le sujet est un peu ambigu) ;
  - reprofilage des roues :  $t_3 = 600$  min ;
- Pour la méthode *b* :
  - aller retour exploitation – maintenance :  $2t_1 = 30$  min ;
  - séparation – assemblage des voitures :  $2t_2 = 60$  min ;
  - reprofilage des  $6 \times 3 \times 2 = 36$  roues :  $36t_5 = 540$  min ;
  - retournement des 6 voitures (2 retournements) :  $6 \times 2 \times t_6 = 60$  min.

Au final :

- méthode *a* :  $t_{i1} = 2t_1 + 2t_2 + 2t_3 + t_4 = 1170$  min ;
- méthode *b* :  $t_{i2} = 2t_1 + 2t_2 + 36t_5 + 12t_6 = 690$  min ;

Le gain de temps  $\Delta t_i = t_{i1} - t_{i2} = 480$  min soient 8 h. C'est autant de temps gagner sur l'exploitation de la rame.

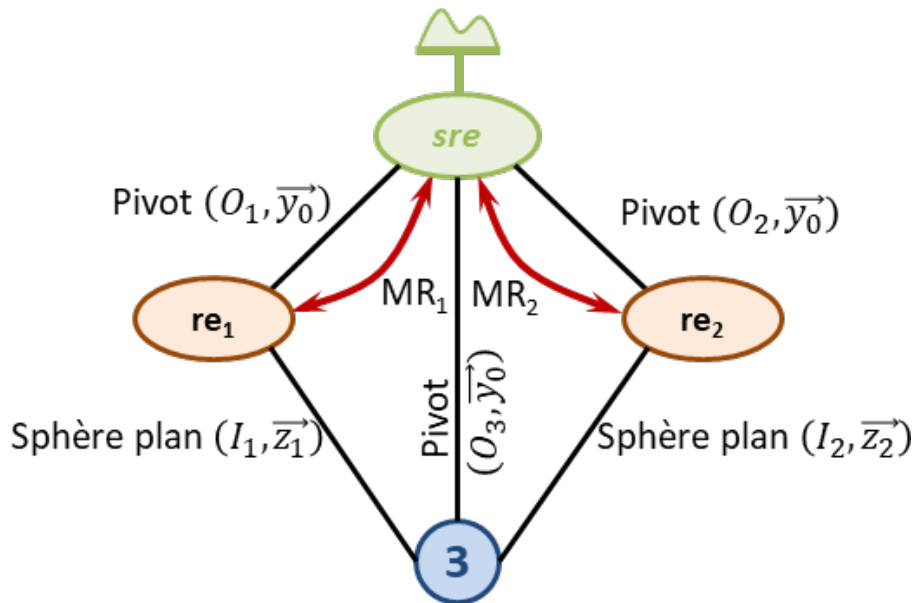
## 2 Analyse de l'entraînement en rotation d'une roue

### 2.1 Description fonctionnelle et structurelle du tour en fosse

### 2.2 Modélisation du dispositif de mise en rotation d'une roue

**Objectif** Vérifier que la modélisation et les hypothèses retenues permettent de déterminer toutes les actions mécaniques nécessaires pour dimensionner les actionneurs des chaînes d'énergie.

**Question 2** À partir des informations données, on peut réaliser le graphe de structure suivant.



### Méthode cinématique

- Nombre cyclomatique  $\gamma = L - S + 1$  avec  $L = 5$  liaisons et  $S = 4$  solides, on a donc  $\gamma = 5 - 4 + 1 = 2$  et  $E_c = 12$  équations cinématiques.
- Nombre d'inconnues cinématiques :
  - 3 liaisons pivot :  $1 \times 3 = 3$  inconnues;
  - 2 liaisons sphère-plan :  $5 \times 2 = 10$  inconnues;
  - **au total :  $I_c = 13$  inconnues cinématiques.**
- Mobilités :
  - mobilités utiles :  $m_u = 2$  : entraînement des deux moteurs;
  - mobilités internes : en considérant le glissement entre la roue et les rouleaux, la roue 3, peut tourner librement. On a donc :  $m_i = 1$ .
  - au final, selon les hypothèses,  $m = m_i + m_u = 3$ .
- On a donc  $h = m - I_c + E_c = 3 - 13 + 12 = 2$ .

### Méthode statique

- 3 solides peuvent être isolés,  $E_s = 3 \times 6 = 18$  équations statiques.
- Nombre d'inconnues statiques :
  - 3 liaisons pivot :  $5 \times 3 = 15$  inconnues;
  - 2 liaisons sphère-plan :  $1 \times 2 = 2$  inconnues;
  - **au total :  $I_s = 17$  inconnues statiques.**
- Mobilités :  $m = m_i + m_u = 3$ .
- On a donc  $h = m - E_s + I_s = 3 - 18 + 17 = 2$ .

**Question 3** Condition de roulement sans glissement en  $I_1$  :  $\overrightarrow{V(I_1 \in 3/re_1)} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{V(I_1 \in 3/0)} - \overrightarrow{V(I_1 \in re_1/0)} = \vec{0}$ .  
Par suite,

- $\overrightarrow{V(I_1 \in 3/0)} = \overrightarrow{V(O_3 \in 3/0)} + \overrightarrow{I_1 O_3} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/0)} = R \vec{z}_1 \wedge \omega_3 \vec{y}_0 = -R \omega_3 \vec{x}_1$ ;
- $\overrightarrow{V(I_1 \in re_1/0)} = \overrightarrow{V(O_1 \in 3/0)} + \overrightarrow{I_1 O_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/0)} = -R_{re} \vec{z}_1 \wedge \omega_{re_1} \vec{y}_0 = R_{re} \omega_{re_1} \vec{x}_1$ .

On a donc  $-R \omega_3 - R_{re} \omega_{re_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\omega_3}{\omega_{re_1}} = -\frac{R_{re}}{R}$ .

De même en exploitant le roulement sans glissement en  $I_2$ ,  $\frac{\omega_3}{\omega_{re_2}} = -\frac{R_{re}}{R}$ .

La condition de roulement sans glissement ajoute deux équations cinématiques. Cela supprime la mobilité de la roue 3 et impose  $\omega_{re_1} = \omega_{re_2}$ . On peut donc dire que  $m' = 1$  et  $E_c = 14$ ; donc  $h' = 1 - 13 + 14 = 2$ .

**Question 4** Dans ces conditions précédentes, on ne peut donc pas calculer  $\mathcal{C}_{m1}$  et  $\mathcal{C}_{m2}$ . Il faudrait donc ajouter des hypothèses complémentaires pour évaluer les couples moteurs (symétrie du problème par exemple).

## 2.3 Motorisation du dispositif de mise en rotation d'une roue

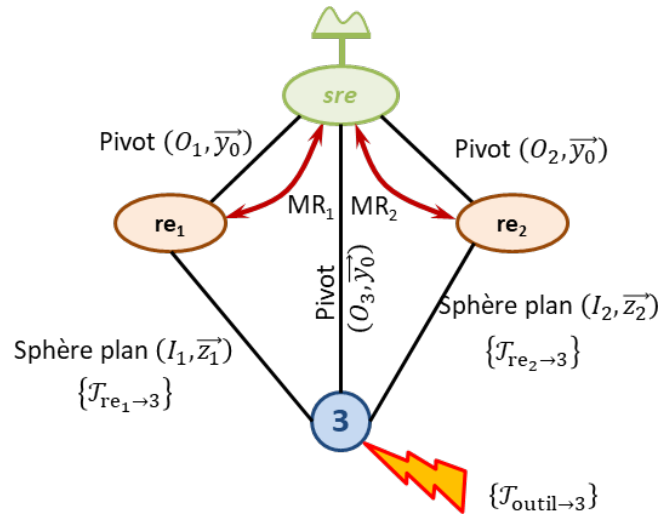
**Objectif** Analyser la chaîne d'entraînement en rotation d'une roue et vérifier le choix de la machine électrique.

**Question 5** On conserve l'hypothèse que *sre* est supposé fixe par rapport au bâti. On a  $E_1 = M_1 + R_1 + re_1$ . Ces 3 solides sont en liaison pivot par rapport au bâti. En conséquence,  $T(E_1/0) = T(M_1/0) + T(R_1/0) + T(re_1/0) =$

$$\frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_{re} \omega_{re}^2 + \frac{1}{2} J_{red} \omega_{re}^2 = \frac{1}{2} (J_m + J_{red} k^2 + J_{re} k^2) \omega_m^2.$$

On a donc  $J_{eq} = J_m + (J_{red} + J_{re}) k^2$ .

**Question 6** On prend le graphe de structure suivant :



On isole  $E_1$ .

**Bilan des puissances internes :** les liaisons internes au système considérée sont considérées sans frottement. On a donc :  $\mathcal{P}_{int}(E_1) = 0$ .

**Bilan des puissances externes :**

- la puissance développée par le moteur peut s'exprimer par  $\mathcal{P}(sre \rightarrow M_1/0) = C_m \omega_m$  ;
- puissance développée par l'action de 3 sur  $re_1$  :  $\mathcal{P}(3 \rightarrow re_1/0) = \{\mathcal{V}(re_1/0)\} \otimes \{\mathcal{T}(3 \rightarrow re_1)\} = \left\{ \begin{matrix} k \omega_m \vec{y}_0 \\ k R_{re} \omega_m \vec{x}_1 \end{matrix} \right\}_{I_1} \otimes \left\{ \begin{matrix} -F_{z1} \vec{z}_1 - F_{x1} \vec{x}_1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{I_1} = -k R_{re} F_{x1} \omega_m$ .

On applique le théorème de l'énergie cinétique et  $\frac{dT(E_1/0)}{dt} = C_m \omega_m - k R_{re} F_{x1} \omega_m \Rightarrow \dot{\omega}_m J_{eq} = C_m - k R_{re} F_{x1} \Leftrightarrow$

$$F_{x1} = \frac{C_m - \dot{\omega}_m J_{eq}}{k R_{re}}.$$

**Question 7** En isolant l'ensemble  $E_2 = \{M_2 + R_2 + re_2\}$  et en appliquant le théorème de l'énergie cinétique :  $\dot{\omega}_m J_{eq} = C_m - k R_{re} F_{x2}$ . Comme les caractéristiques des deux chaînes d'entraînement sont les mêmes, on a donc nécessairement  $F_{x1} = F_{x2}$ .

**Question 8** On a vu que  $\frac{\omega_3}{\omega_{re1}} = -\frac{R_{re}}{R}$  de plus  $\omega_{re1} = k \omega_m$  ; donc  $\omega_3 = -k \frac{R_{re}}{R} \omega_m$ . En dérivant, on a  $\dot{\omega}_3 = -k \frac{R_{re}}{R} \dot{\omega}_m$ .

**Question 9 Stratégie :** on cherche à exprimer le couple moteur en fonction des grandeurs du géométriques, inertielles, ... pour cela, la roue étant en pivot d'axe  $(O, \vec{y}_0)$  on va réaliser un théorème du moment dynamique en  $O_3$  en projection sur  $\vec{y}_0$ .

On isole la roue 3.

On réalise le bilan des actions mécaniques extérieures :

- action de la pivot en  $O_3$  (pas de moment en  $O_3$  en projection sur  $\vec{y}_0$ ) ;
- action des liaisons sphères plans :
  - $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O_3, re_1 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_0 = (\overrightarrow{O_3 I_1} \wedge (F_{x1} \vec{x}_1 + F_{z1} \vec{z}_1)) \cdot \vec{y}_0 = (-R \vec{z}_1 \wedge (F_{x1} \vec{x}_1 + F_{z1} \vec{z}_1)) \cdot \vec{y}_0 = -R F_{x1}$ .
  - $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O_3, re_2 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_0 = (\overrightarrow{O_3 I_2} \wedge (F_{x2} \vec{x}_2 + F_{z2} \vec{z}_2)) \cdot \vec{y}_0 = (-R \vec{z}_2 \wedge (F_{x2} \vec{x}_2 + F_{z2} \vec{z}_2)) \cdot \vec{y}_0 = -R F_{x2}$ .
- action de l'outil :  $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O_3, outil \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_0 = (\overrightarrow{O_3 C} \wedge R(\outil \rightarrow 3)) \cdot \vec{y}_0 = ((-\lambda(t) \vec{y}_0 - R_C(t) \vec{z}_0) \wedge R(\outil \rightarrow 3)) \cdot \vec{y}_0 = (-\lambda(t) \vec{y}_0 \wedge R(\outil \rightarrow 3) - R_C(t) \vec{z}_0 \wedge R(\outil \rightarrow 3)) \cdot \vec{y}_0 = (-R_C(t) \vec{z}_0 \wedge R(\outil \rightarrow 3)) \cdot \vec{y}_0 = -R_C(t) (\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_0) \cdot R(\outil \rightarrow 3) = -R_C(t) \vec{x}_0 \cdot R(\outil \rightarrow 3) = R_C(t) f_{ex}$ .

Enfin, la roue étant supposée équilibrée, on a  $\overrightarrow{\delta(O_3, 3/0)} \cdot \overrightarrow{y_0} = J_3 \dot{\omega}_3$ .

Le TMD appliqué en 3 en projection sur  $\overrightarrow{y_0}$  est donné par  $J_3 \dot{\omega}_3 = -2R F_{x1} + R_C(t) f_{ex}$ . De plus,  $\omega_3 = -k \frac{R_{re}}{R} \omega_m$  et

$$\dot{\omega}_m J_{eq} = C_m - k R_{re} F_{x1} \Leftrightarrow F_{x1} = \frac{C_m - \dot{\omega}_m J_{eq}}{k R_{re}}.$$

Au final :

$$-J_3 k \frac{R_{re}}{R} \dot{\omega}_m = -2R \frac{C_m - \dot{\omega}_m J_{eq}}{k R_{re}} + R_C(t) f_{ex} \Leftrightarrow C_m = \dot{\omega}_m J_{eq} + J_3 k^2 \frac{R_{re}^2}{2R^2} \dot{\omega}_m + \frac{R_C(t) k R_{re} f_{ex}}{2R}$$

et

$$C_m = \dot{\omega}_m J_{eq} + \frac{k R_{re}}{2R} \left( J_3 k \frac{R_{re}}{R} \dot{\omega}_m + R_C(t) f_{ex} \right).$$

**Question 10** En utilisant l'expression précédente, le couple est maximum lorsque  $R_C(t) = R_M$ .

**Question 11** En utilisant la décomposition du vecteur vitesse,  $\overrightarrow{V(C \in \text{outil}/3)} = \overrightarrow{V(C \in \text{outil}/0)} - \overrightarrow{V(C \in 3/0)}$ . D'après le document réponse,  $\overrightarrow{V(C \in \text{outil}/0)} = V_f(t) \overrightarrow{u} = -b \omega_3 \overrightarrow{u}$ .

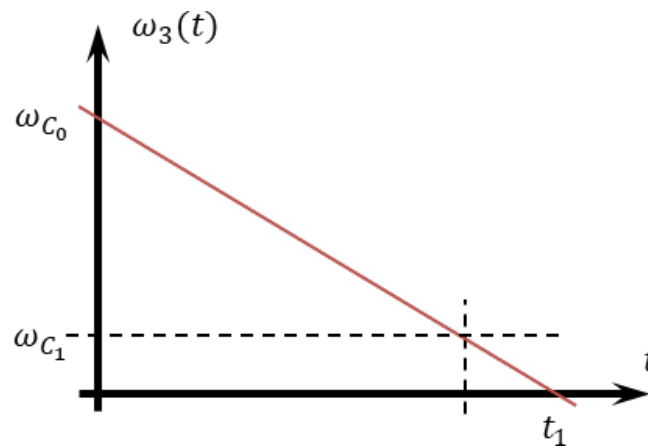
Par ailleurs,  $\overrightarrow{V(C \in 3/0)} = \overrightarrow{V(O \in 3/0)} + \overrightarrow{CO_3} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/0)} = (R_C \overrightarrow{z_0} + \star \overrightarrow{y_0}) \wedge \omega_3 \overrightarrow{y_0} = -R_C(t) \omega_3 \overrightarrow{x_0}$ .

Au final,  $\overrightarrow{V(C \in \text{outil}/3)} = V_f(t) \overrightarrow{u} + R_C(t) \omega_3 \overrightarrow{x_0}$ .

$\overrightarrow{V(C \in \text{outil}/3)} \cdot \overrightarrow{x_0} = -V_C = V_f(t) \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x_0} + R_C(t) \omega_3 = R_C(t) \omega_3$ . On a donc  $V_C = -R_C(t) \omega_3$ . Ainsi :

- $V_C = -R_C(t) \omega_3(t) = -R_M \omega_{C_0} \Rightarrow \omega_{C_0} = -\frac{V_C}{R_M}$ .
- $V_C = -R_C(t) \omega_3(t) = -R_m \omega_{C_1} \Rightarrow \omega_{C_1} = -\frac{V_C}{R_m}$ .

**Question 12**



Dans ces conditions, on a  $\omega_3(t) = \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{t_1} t + \omega_{C_0}$ .

**Question 13** On a  $l(t) = \|\overrightarrow{C_0 C}\| = \left\| \int_0^t V_f(t) \overrightarrow{u} dt \right\| = \left\| \int_0^t -b \omega_3(t) \overrightarrow{u} dt \right\| = \left\| \int_0^t -b \left( \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{t_1} t + \omega_{C_0} \right) \overrightarrow{u} dt \right\|$   
 $= b \left\| \left( \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{2t_1} t^2 + \omega_{C_0} t \right) \overrightarrow{u} \right\|.$

Au final,  $l(t) = b t \left( \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{2t_1} t + \omega_{C_0} \right).$

**Question 14** D'après la figure, on a  $l(t_1) = \|\overrightarrow{C_0 C_1}\| = \sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}$ .

On a donc  $l(t_1) = b \left( \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{2t_1} t_1^2 + \omega_{C_0} t_1 \right) = \sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2} \Leftrightarrow t_1 \left( \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{2} + \omega_{C_0} \right) = \frac{\sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}}{b}.$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{2\sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}}{b(\omega_{C_1} + \omega_{C_0})}.$$

**Question 15** En dérivant l'expression obtenue à la question 12, on a  $\dot{\omega}_3(t) = \frac{\omega_{C_1} - \omega_{C_0}}{t_1} = \frac{b(\omega_{C_1} + \omega_{C_0})(\omega_{C_1} - \omega_{C_0})}{2\sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}}$ .

$$\text{Par suite, } \dot{\omega}_3(t) = \frac{b(\omega_{C_1}^2 - \omega_{C_0}^2)}{2\sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}} = \frac{b\left(\frac{V_C^2}{R_m^2} - \frac{V_C^2}{R_M^2}\right)}{2\sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}}. \text{ Au final, } \dot{\omega}_3(t) = \frac{bV_C^2\left(\frac{1}{R_m^2} - \frac{1}{R_M^2}\right)}{2\sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}} = \frac{bV_C^2(R_M^2 - R_m^2)}{2R_m^2 R_M^2 \sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}}.$$

$$\text{Par ailleurs, } \dot{\omega}_m = -\dot{\omega}_3 \frac{R}{kR_{re}} = -\frac{R}{kR_{re}} \frac{bV_C^2(R_M^2 - R_m^2)}{2R_m^2 R_M^2 \sqrt{(R_M - R_m)^2 + e^2}}.$$

Application numérique :  $\dot{\omega}_m = -0.845 \text{ rad s}^{-2}$ .

**Question 16** D'après les annexes, on a  $R_m = 0.4 \text{ m}$  et  $V_C = 400 \text{ m min}^{-1}$ . On a donc  $N_3 = \frac{V_C}{\pi \cdot 2R_m} = \frac{400}{0.8\pi} = 159 \text{ tr min}^{-1}$ . On a donc  $N_m = N_3 \frac{R}{kR_e} = 159 \frac{0.47}{0.1 \cdot 0.175} = 4275 \text{ tr min}^{-1}$ . Le moteur doit donc pouvoir tourner au moins à cette vitesse.

On ne sait pas si le couple moteur maximum calculé (22 Nm) tient compte du rendement. S'il tient compte du rendement, le moteur ME\_10\_10 convient. Sinon, il faudra utiliser le ME\_5\_15.

### 3 Analyse de la commande du dispositif de mise en translation de l'outil

**Objectif** Analyser la chaîne d'asservissement en position et en vitesse du porte-outil afin de proposer puis de régler un correcteur permettant d'assurer le niveau de précision attendu pour le profil de la roue.

#### 3.1 Effet de la déformation de l'outil sur la forme de la roue reprofilée

**Question 17** Graphiquement on a :

- $\Delta u_1 = \Delta z_2 \approx 5 \mu\text{m}$ ;
- $R^2 + \Delta x_2^2 = (R + \Delta u_2)^2$  soit  $\Delta u_2 = \sqrt{R^2 + \Delta x_2^2} - R = \sqrt{0.47^2 + 0.0005^2} - 0.47 \approx 0.27 \mu\text{m}$ .

Il y a un rapport de 18,8 entre le défaut dû à la compression et celui dû à la flexion. On néglige donc ce dernier.

#### 3.2 Analyse d'une solution avec un porte-outil fixé au bâti

**Objectif** Déterminer les variations de position du point de contact C entre la roue et l'outil pour une variation sinusoïdale de l'effort perturbateur  $f_c(t)$ .

**Question 18**

On isole l'outil. Celui-ci est soumis :

- à l'action du ressort suivant  $\vec{z}_0 : -K z_2(t)$ ;
- à l'action de l'amortisseur  $\vec{z}_0 : -\lambda \dot{z}_2(t)$ ;
- à l'action de l'effort perturbateur  $\vec{z}_0 : f_c(t)$ .

En appliquant le théorème de la résultante dynamique suivant  $\vec{z}_0$  on obtient :  $-K z_2(t) - \lambda \dot{z}_2(t) + f_c(t) = m_2 \ddot{z}_2(t)$ .

En utilisant la transformée de Laplace, on obtient alors  $-K Z_2(p) - \lambda p Z_2(p) + F_c(p) = m_2 p^2 Z_2(p) \Leftrightarrow S(p) = \frac{Z_2(p)}{F_c(p)} =$

$$\frac{1}{K + \lambda p + m_2 p^2}.$$

En mettant cette fonction de transfert sous forme canonique, on a  $K_S = 1/K \approx 3.57 \times 10^{-8} \text{ m N}^{-1}$ ,  $\omega_{0S}^2 = \frac{K}{m_2} \Rightarrow$

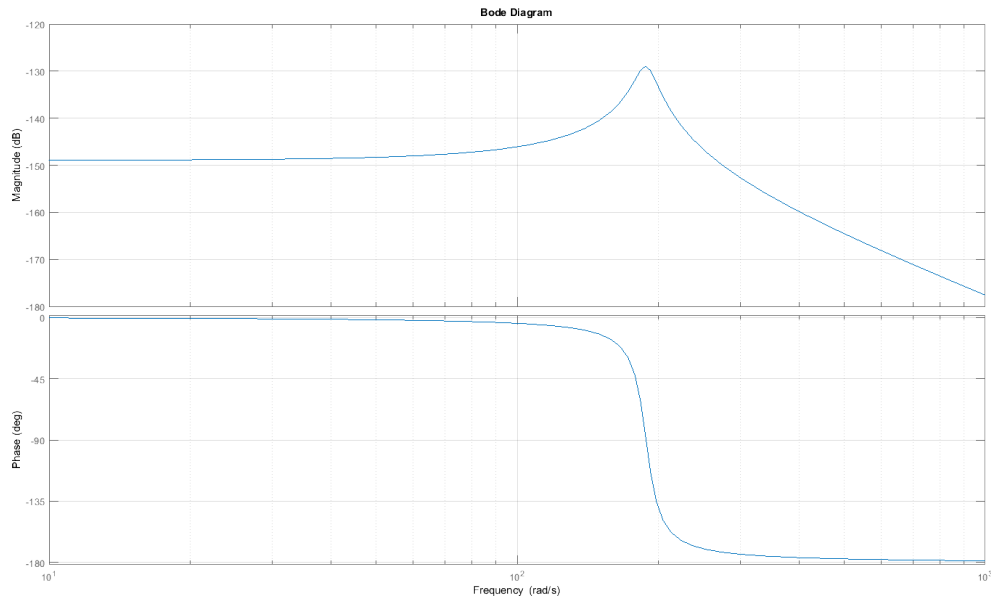
$$\omega_{0S} \approx 188.5 \text{ rad s}^{-1} \text{ et } \frac{2\xi_S}{\omega_{0S}} = \frac{\lambda}{K} \Leftrightarrow \xi_S = \frac{\lambda}{2\sqrt{K m_2}} \approx 0.05.$$

$$\text{L'amplitude maximale est donnée par : } A_{\max} = \frac{K_S}{2\xi_S \sqrt{1 - \xi_S^2}} \approx \frac{3.57 \cdot 10^{-8}}{0.2 \sqrt{1 - 0.01}} = 1.8 \cdot 10^{-7}.$$

La pulsation de résonance est donnée par  $\omega_r = \omega_{0S} \sqrt{1 - 2\xi_S^2} = 188.5 \sqrt{1 - 2 \times 0.01^2} = 188 \text{ rad s}^{-1}$ .

Pour une entrée valant  $f_c(t) = (f_{c0} + f_{c1} \sin(\omega_r t)) \mathcal{H}(t)$ , en utilisant le théorème de superposition, on obtient en régime permanent le signal suivant :  $z_2(t) = K_S f_{c0} + f_{c1} A_{\max} \sin(\omega_r t + \varphi)$  avec  $\varphi = 90^\circ$ .

Dans ces conditions on a donc  $\Delta z_2 = 2 f_{c1} A_{\max} \approx 3.6000 \times 10^{-5} \text{ m} \approx 36 \mu\text{m}$ . Le cahier des charges n'est donc pas respecté ( $\Delta u$  doit être inférieur à  $30 \mu\text{m}$ ).



### 3.3 Analyse des asservissements du porte-outil

#### 3.3.1 Modélisation du mouvement pour la commande

**Objectif** Modéliser le comportement dynamique de l'outil et du porte-outil, puis étudier une commande en position  $z_1(t)$  comprenant un correcteur proportionnel.

**Question 19** D'après le schéma-blocs  $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p))$ . D'après la première équation différentielle, on a :  $m_1 p^2 Z_1(p) + \lambda p Z_1(p) + K Z_1(p) = \lambda p Z_2(p) + K Z_2(p) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p)(m_1 p^2 + \lambda p + K) = Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p) = \frac{Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p)}{m_1 p^2 + \lambda p + K}$ . On a donc par identification  $H_2(p) = \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}$  et  $H_1(p) = \lambda p + K$ .

D'après le schéma-blocs  $Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))$ . D'après la seconde équation différentielle,  $m_2 p^2 Z_2(p) + \lambda p Z_2(p) + K Z_2(p) = \lambda p Z_1(p) + K Z_1(p) + F_c(p) \Leftrightarrow Z_2(p)(m_2 p^2 + \lambda p + K) = Z_1(p)(\lambda p + K) + F_c(p) \Leftrightarrow Z_2(p) = \frac{Z_1(p)(\lambda p + K) + F_c(p)}{m_2 p^2 + \lambda p + K}$ . On a donc par identification  $H_4(p) = \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}$  et  $H_3(p) = \lambda p + K$ .  
Au final,

$$H_1(p) = \lambda p + K \quad H_2(p) = \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K} \quad H_3(p) = \lambda p + K \quad H_4(p) = \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}$$

**Question 20** En utilisant le premier modèle, on avait :  $\begin{cases} Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p)) \\ Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)) \end{cases}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } Z_1(p) &= H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)(H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)))) \\ &= H_2(p)F_m(p) + H_1(p)H_2(p)H_4(p)F_c(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)Z_1(p) \\ &\Leftrightarrow Z_1(p)(1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)H_4(p)F_c(p)). \end{aligned}$$

En utilisant le schéma-blocs,  $Z_1(p) = (F_c(p)N_1(p) + F_m(p))N_2(p)$ . Par identification, on obtient  $N_1(p) = H_1(p)H_4(p)$  et  $N_2(p) = \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$ .

#### Question 21

$$\begin{aligned} N_2(p) &= \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)} = \frac{\frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K}}{1 - (\lambda p + K) \frac{1}{m_1 p^2 + \lambda p + K} (\lambda p + K) \frac{1}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} \\ &= \frac{1}{(m_1 p^2 + \lambda p + K) - \frac{(\lambda p + K)^2}{m_2 p^2 + \lambda p + K}} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{(m_1 p^2 + \lambda p + K)(m_2 p^2 + \lambda p + K) - (\lambda p + K)^2} \\ &= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + \lambda^2 p^2 + \lambda p K + K m_2 p^2 + K \lambda p + K^2 - \lambda^2 p^2 - K^2 - 2\lambda p K} \end{aligned}$$

$$= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + K m_2 p^2} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{p^2 (m_1 m_2 p^2 + (m_1 + m_2) \lambda p + K (m_1 + m_2))}$$

$$= \frac{m_2 \left( p^2 + \frac{\lambda}{m_2} p + \frac{K}{m_2} \right)}{p^2 m_1 m_2 \left( p^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \lambda p + K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)}$$

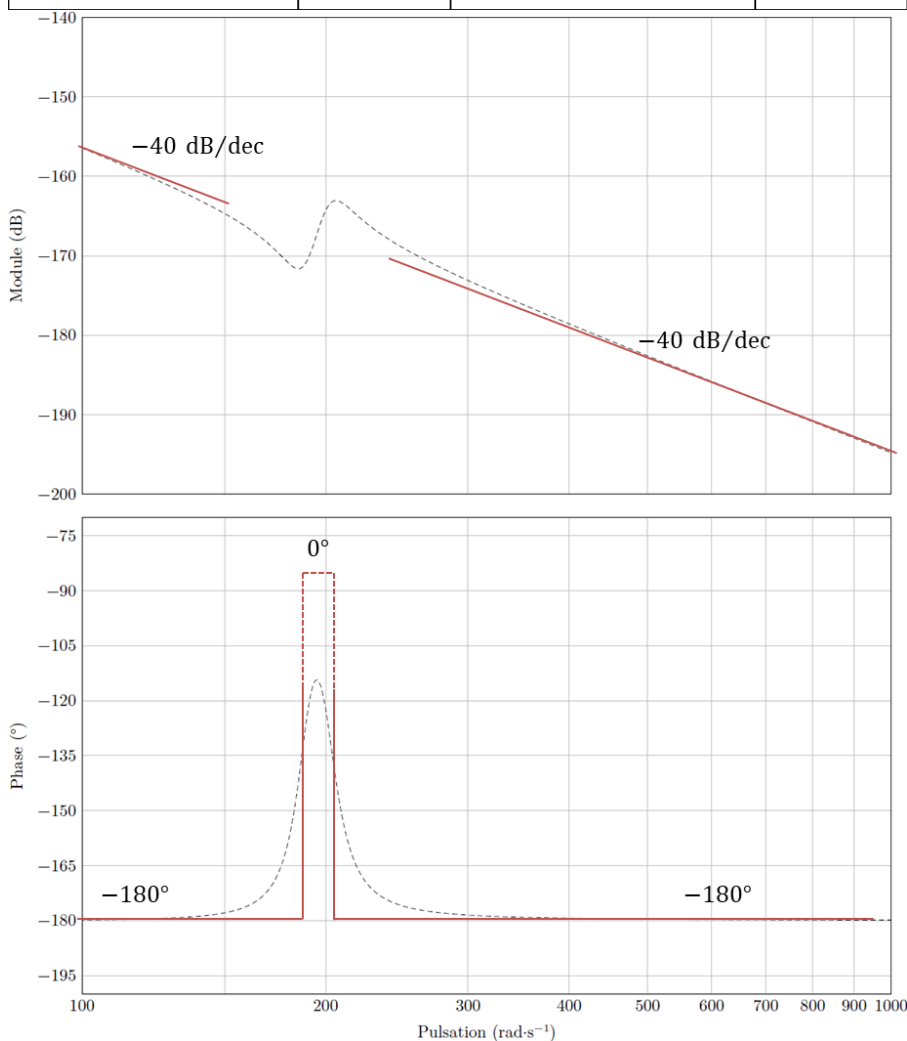
Par identification, on a :  $A = \frac{1}{m_1}$ ,  $\omega_1^2 = \frac{K}{m_2}$ ,  $2\xi_1 \omega_1 = \frac{\lambda}{m_2}$  et  $\xi_1 = \frac{\lambda}{2\omega_1 m_2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{K m_2}} =$ ,  $\omega_2^2 = K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$ ,  $2\xi_2 \omega_2 =$

$$\lambda \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \text{ et } \xi_2 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 K}}.$$

On a donc  $\xi_1 = \frac{\lambda}{2\sqrt{m_2 K}}$  et  $\xi_2 = \lambda \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{2\sqrt{K m_1 m_2}}.$

**Question 22** D'après le diagramme asymptotique donné, on a nécessairement  $\omega_1 < \omega_2$ . On peut dresser un tableau des variations à partir de la fonction de transfert  $N_2(p)$ .

	$\omega_1$		$\omega_2$
$\frac{A}{p^2}$	-40 dB/dec	-40 dB/dec	-40 dB/dec
$p^2 + 2\xi_1 \omega_1 p + \omega_1^2$	0 dB/dec	40 dB/dec	40 dB/dec
$\frac{1}{p^2 + 2\xi_2 \omega_2 p + \omega_2^2}$	0 dB/dec	0 dB/dec	-40 dB/dec
$20 \log  N_2(p) $	-40 dB/dec	0 dB/dec	-40 dB/dec
$\text{Arg}(N_2(p))$	-180°	0°	-180°



**Question 23** Si le système n'est pas sollicité par des pulsations comprises entre 150 et 250 rad s<sup>-1</sup>, on peut modéliser  $N_2(p)$  par un double intégrateur. Le gain dB est donc  $20 \log A - 20 \log \omega^2$ . Pour  $\omega = 500 \text{ rad s}^{-1}$  on a  $20 \log A - 20 \log 500^2 = -182,5 \Rightarrow \log A = \frac{20 \log 500^2 - 182,5}{20}$  et  $A = 1,87 \cdot 10^{-4}$ .

**Question 24** Dans le cas, la FTBO est de classe 2.

- **req 1.1** :  $M\varphi = 60^\circ$  : impossible à respecter la phase sera toujours de  $-180^\circ$ .
- **req 1.2** :  $\omega_{0\text{dB}} = 200 \text{ rad s}^{-1}$  : critère non respecté (cf diagramme de Bode).
- **req 1.4** : erreur en régime permanent :  $\Delta c < 40 \mu\text{m}$  pour un échelon d'amplitude  $f_{c0} = 1 \text{ kN}$  : critère non respecté (pas d'intégrateur avant la perturbation).
- **req 1.5** : défaut de la roue  $\Delta u < 30 \mu\text{m}$  lorsque la perturbation est sinusoïdale.

La correction proportionnelle ne permet donc pas de respecter tous les critères du cahier des charges.

### 3.3.2 Calcul des paramètres des correcteurs de la loi de commande

**Objectif** Déterminer les paramètres d'une loi de commande afin de valider les performances statiques et dynamiques du cahier des charges.

**Question 25** On a  $\arg(H_{\text{BO}}(j\omega)) = \arg(AK_v) + \arg\left(p + \frac{1}{T_i}\right) + \arg(p + K_p) - 3 \arg(p) = \arctan T_i \omega + \arctan \omega / K_p - 270$ .

On souhaite que la marge de phase soit de  $60^\circ$  soit  $\arg(H_{\text{BO}}(j\omega_{0\text{dB}})) = -120^\circ$ . On a donc  $-120 = \arctan T_i \omega_{0\text{dB}} + \arctan \omega_{0\text{dB}} / K_p - 270$ .

$$\text{Or } \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

$$\text{On a donc } \tan 150 = \frac{T_i \omega_{0\text{dB}} + \omega_{0\text{dB}} / K_p}{1 - T_i \omega_{0\text{dB}}^2 / K_p} \Leftrightarrow \tan 150 - \tan 150 T_i \omega_{0\text{dB}}^2 / K_p = T_i \omega_{0\text{dB}} + \omega_{0\text{dB}} / K_p$$

$$\Leftrightarrow T_i = \frac{K_p \tan 150 - \omega_{0\text{dB}}}{K_p \omega_{0\text{dB}} + \tan 150 \omega_{0\text{dB}}^2}.$$

**R** D'une part, en utilisant le schéma-blocs, on a :

$$H_{\text{BO}}(p) = \frac{K_p}{p} \frac{H_{\text{PI}(p)} p N_{\text{2app}}(p)}{1 + H_{\text{PI}(p)} p N_{\text{2app}}(p)} = \frac{K_p}{p} \frac{K_v \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) p \frac{A}{p^2}}{1 + K_v \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) p \frac{A}{p^2}} = \frac{K_p}{p} \frac{K_v (T_i p + 1) A}{T_i p^2 + K_v (T_i p + 1) A} = \frac{K_p}{p} \frac{T_i p + 1}{\frac{T_i}{AK_v} p^2 + T_i p + 1}.$$

D'autre part, en prenant la FTBO proposée, on a :

$$H_{\text{BO}}(p) = \frac{AK_v \left(p + \frac{1}{T_i}\right) (p + K_p)}{p^3} = \frac{AK_v}{T_i} \frac{T_i p^2 + T_i K_p p + p + K_p}{p^3} = \frac{AK_v}{T_i K_p} \frac{\frac{T_i}{K_p} p^2 + T_i p + p + 1}{p^3}.$$

La forme proposée par le sujet et la forme déterminée à parti du schéma-blocs sont donc différentes.

**Question 26**  $H_{\text{BO}}(j\omega) = AK_v \frac{-\omega^2 + K_p j\omega + \frac{j\omega}{T_i} + \frac{K_p}{T_i}}{-\omega^3} = -\frac{AK_v}{\omega^3} \left( \left( \frac{K_p}{T_i} - \omega^2 \right) + \left( \frac{1}{T_i} + K_p \right) j\omega \right)$

$$\text{On a donc } \log |H_{\text{BO}}(j\omega)| = \frac{AK_v}{\omega^3} \sqrt{\left( \frac{K_p}{T_i} - \omega^2 \right)^2 + \left( \frac{1}{T_i} + K_p \right)^2 \omega^2}.$$

$$\text{Pour } \omega = \omega_{0\text{dB}}, \log |H_{\text{BO}}(j\omega)| = 1. \text{ En conséquence, } \frac{AK_v}{\omega^3} \sqrt{\left( \frac{K_p}{T_i} - \omega^2 \right)^2 + \left( \frac{1}{T_i} + K_p \right)^2 \omega^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow K_v = \frac{\omega_{0\text{dB}}^3}{A \sqrt{\left( \frac{K_p}{T_i} - \omega_{0\text{dB}}^2 \right)^2 + \left( \frac{1}{T_i} + K_p \right)^2 \omega_{0\text{dB}}^2}}.$$

**Question 27**

- | Pour  $i$  allant de 0 à  $N_{K_p}$  :
- | Calcul de  $K_p = i \times \Delta K_p$
- | Calcul de  $T_i(K_p)$
- | Calcul de  $K_v(K_p)$
- | Calcul de  $|S_{K_p}|_{\text{max}} = |S(j \times 0)|$



| Pour  $j$  allant de 0 à  $N_\omega$  :  
 | Calcul de  $\omega = j \times \Delta\omega$   
 | Calcul de  $|S_{K_p}|_{\text{tmp}} = |S(j \times \omega)|$   
 | Si  $|S_{K_p}|_{\text{max}} < |S_{K_p}|_{\text{tmp}}$  :  
 |  $|S_{K_p}|_{\text{max}} = |S_{K_p}|_{\text{tmp}}$ .  
 | On stocke  $|S_{K_p}|_{\text{max}}, K_p, K_v, T_i$  dans une liste

### Question 28

| On initialise  $i_{\min}$  et  $S_{\min}$   
 | Pour  $i$  allant de 0 à  $N_{K_p}$  :  
 | Si  $S[i] < S_{\min}$  :  
 |  $i_{\min} \leftarrow i$   
 |  $S_{\min} \leftarrow S[i]$   
 | On retourne  $K_p, K_v, T_i$  associés à  $i_{\min}$ .

## 3.4 Analyse de l'influence du paramètre $b$

**Objectif** Déterminer la valeur maximale de  $b$  permettant de conserver la stabilité de l'asservissement.

**Question 29** D'après le schéma-blocs,  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$ . D'après les équations données et en utilisant le théorème du retard, on a  $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p) + Z_2(p)e^{-\tau p} = Q_c(p) - Z_2(p)(1 - e^{-\tau p})$ . En conséquence,  $H_r(p) = 1 - e^{-\tau p}$ .

**Question 30**  $\text{FTBO}(p) = b K_f S(p) H_r(p) = \frac{b K_f}{K + \lambda p + m_2 p^2} (1 - e^{-\tau p}) = H_2(p) \cdot H_r(p)$ .

On a  $G_{\text{dB}}(\omega) = G_{\text{dB}2}(\omega) + G_{\text{dB}r}(\omega)$ .

$$G_{\text{dB}r}(\omega) = 20 \log |1 - e^{-j\tau\omega}| = 20 \log \sqrt{(1 - \cos(-\tau\omega))^2 + (\sin(-\tau\omega))^2} = 20 \log \sqrt{2 - 2 \cos(\tau\omega)}.$$

On a donc :

- pour  $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$  avec  $k \in \mathbb{Z}^*$  et  $G_{\text{dB}r}(\omega) \rightarrow -\infty$  ;
- pour  $\omega = \frac{\pi + k2\pi}{\tau}$  avec  $k \in \mathbb{Z}^*$  et  $G_{\text{dB}r}(\omega) = 20 \log 2$ .

Le diagramme en gain montre alors l'addition d'un gain du second ordre et d'un gain périodique. Les « zéros de transmission » correspondent aux pulsations  $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$ .

Pour la phase,  $\varphi_{\text{BO}}(\omega) = \varphi_2(\omega) + \arg(1 - \cos(-\tau\omega) - j \sin(-\tau\omega))$ . Or  $1 - \cos(-\tau\omega) = 1 - \cos(\tau\omega) \geq 0$ . On a donc  $\varphi_{\text{BO}} = \varphi_2(\omega) + \arctan\left(\frac{\sin(\tau\omega)}{1 - \cos(\tau\omega)}\right)$ .

### Question 31

## 4 Synthèse

### Question 32

- Graphiquement on mesure  $\Delta z_2 = 0.02 \text{ mm} = 20 \mu\text{m} < 30 \mu\text{m}$ . CDC OK.
  - $\Delta e = 40 \mu\text{m}$ . CDC juste OK.
  - La marge de phase du CDC est respectée pour  $N_2(p)$  uniquement.
- Le tour permet d'générer un profil de roue satisfaisant.