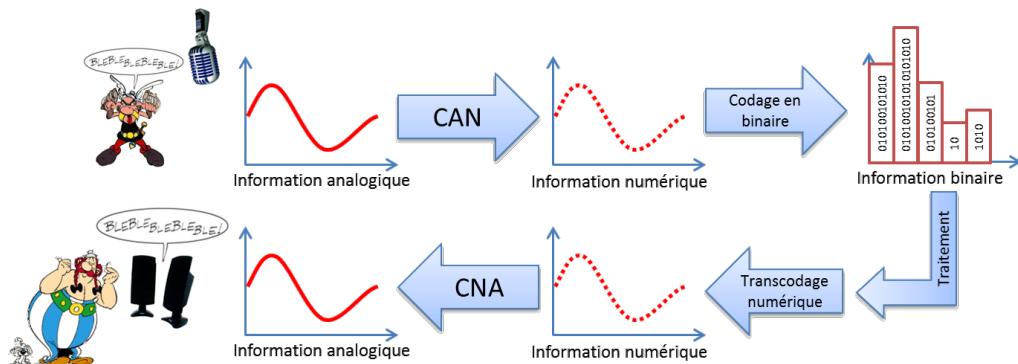


## 1 Définitions

## Définition Informations analogiques et numériques

- ❑ Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue. Les grandeurs physiques (température, vitesse, position, tension, ...) sont des informations analogiques.
  - ❑ Une information numérique sous la forme d'un mot binaire est constituée de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique. On parle de conversion analogique numérique (CAN).

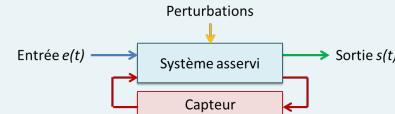


## Définition Systèmes automatiques ou asservis

Un système asservi est commandé par **une (ou des) entrée(s)** qu'il transforme en **grandeur(s) de sortie**. Les entrées sont de deux types :

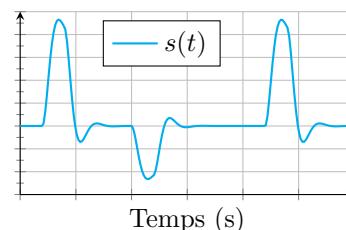
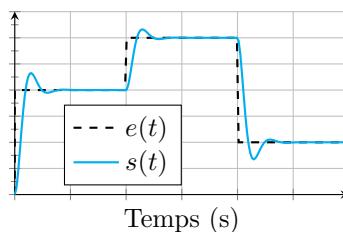
- la loi de consigne  $e(t)$  est une grandeur de commande qui est modifiable;
  - la perturbation : c'est une entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système. On ne peut pas modifier les perturbations.

La sortie  $s(t)$  est une grandeur **observable** (par des capteurs) qui permet de juger de la qualité de la tâche accomplie.



## Définition Systèmes suiveurs et régulateurs

- ❑ Pour un système suiveur la consigne  $e(t)$  fluctue au cours du temps. Le système doit faire son possible pour qu'à chaque instant la cible soit suivie.
  - ❑ Pour un système régulateur la consigne  $e(t)$  est constante. Les perturbations font varier la position du système. Il doit donc de façon automatique revenir à la position commandée.



## 2 Performance des systèmes – Critères graphiques

### Définition Précision en position – Écart statique $\varepsilon_S$

Le système est piloté par un échelon. On définit alors l'écart statique  $\varepsilon_s$  comme l'écart entre la consigne fixe et la réponse  $s(t)$  en régime permanent.

**Définition Précision en vitesse  $\varepsilon_v$** 

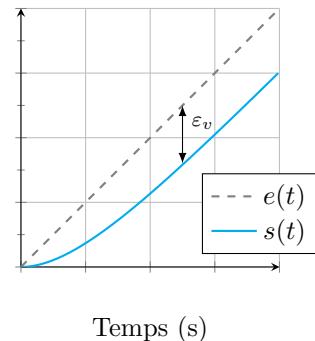
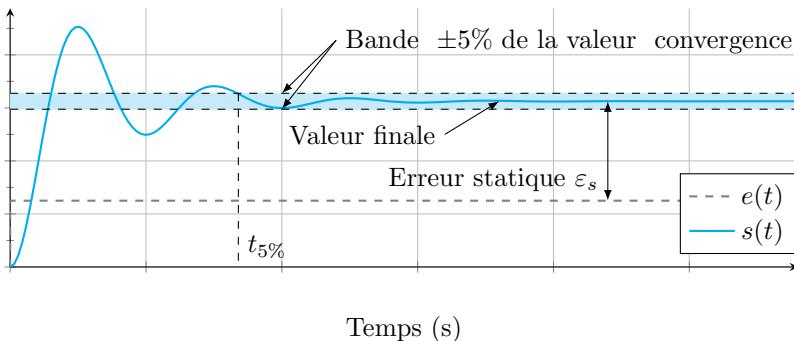
Encore appelé écart de traînage ou écart de poursuite, il représente la différence entre une consigne variable de type rampe et la réponse en régime permanent.

**Définition Rapidité**

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la notion de précision dynamique.

**Méthode Détermination du temps de réponse à  $n\%$  (En pratique  $n = 5$ ).**

1. Tracer sur le même graphe la consigne  $e(t)$  et la réponse du système  $s(t)$ .
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de  $s(t)$ .
3. Tracer la bande correspondant à une variation de  $\pm n\%$  de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle  $s(t)$  coupe la bande et n'en sort plus.


**Définition Stabilité**

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre.

## 1 Définitions

### Définition Conditions de Heaviside – Fonction causale – Conditions initiales nulles

Une fonction temporelle  $f(t)$  vérifie les conditions de Heaviside lorsque les dérivées successives nécessaires à la résolution de l'équation différentielle sont nulles pour  $t = 0^+$  :

$$f(0^+) = 0 \quad \frac{df(0^+)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2f(0^+)}{dt^2} = 0 \dots$$

On parle de conditions initiales nulles.

### Définition Transformée de Laplace

À toute fonction du temps  $f(t)$ , nulle pour  $t \leq 0$  (fonction causale), on fait correspondre une fonction  $F(p)$  de la variable complexe  $p$  telle que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

On note  $\mathcal{L}[f(t)]$  la transformée directe et  $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$  la transformée inverse.

De manière générale on note  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ ,  $\mathcal{L}[e(t)] = E(p)$ ,  $\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$ ,  $\mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(p)$ ,  $\mathcal{L}[\theta(t)] = \Theta(p) \dots$

### Résultat Dérivation

Dans les conditions de Heaviside :  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$     $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p)$     $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n F(p)$ .

En dehors des conditions de Heaviside, la transformée de Laplace d'une dérivée première est donnée par  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0^+)$ .

### Définition Transformées usuelles

Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$	Domaine temporel $f(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$
Dirac $\delta(t)$	$F(p) = 1$	Échelon $u(t) = k$	$U(p) = \frac{k}{p}$
Fonction linéaire $f(t) = t$	$F(p) = \frac{1}{p^2}$	Puissances $f(t) = t^n \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
$f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = e^{-at} \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{1}{p + a}$	$f(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$F(p) = \frac{\omega_0}{(p + a)^2 + \omega_0^2}$
$f(t) = t^n e^{-at} u(t)$	$F(p) = \frac{n!}{(p + a)^{n+1}}$		

## 2 Théorèmes

### Théorème Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow \infty} pF(p)$$

### Théorème Théorème du retard

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$$

### Théorème Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \rightarrow 0} pF(p)$$

### Théorème Théorème de l'amortissement

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$

## 1 Définitions

### Définition Fonction de transfert – Transmittance

Soit un système linéaire continu linéaire invariant dont on note le signal d'entrée  $e$  et le signal de sortie  $s$ , régit par une équation différentielle à coefficient constants. Dans le domaine de Laplace et sous les conditions de Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par la fonction  $H$  telle que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

### Définition Classe, ordre, pôles et zéros

$H(p)$  est une fonction rationnelle en  $p$ . En factorisant le numérateur et le dénominateur,  $H(p)$  peut s'écrire sous cette forme :

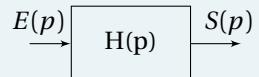
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

- Les  $z_i$  sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- Les  $p_i$  sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes).
- **Le degré de  $D(p)$  est appelé ordre  $n$  du système ( $n \geq m$  pour les systèmes physiques).**
- L'équation  $D(p) = 0$  est appelée équation caractéristique.
- S'il existe une (ou des) racines nulles d'ordre  $\alpha$  de  $D(p)$ , un terme  $p^\alpha$  apparaît au dénominateur.  $\alpha$  est la **classe (ou type) de la fonction de transfert**. Il correspond au nombre d'intégrations pures du système.

### Définition Modélisation d'un bloc

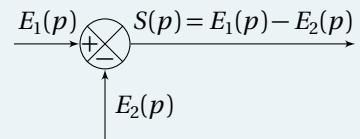
Soit un système d'entrée  $E(p)$ , de sortie  $S(p)$ , caractérisé par une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce système est alors représenté par le schéma bloc ci-contre. La relation entrée – sortie du système se met alors sous la forme :

$$S(p) = E(p) \cdot H(p).$$



### Définition Modélisation d'un comparateur

Soit l'équation  $S(p) = E_1(p) - E_2(p)$ . Cette équation se traduit par le schéma ci-contre.



## 2 Algèbre de blocs

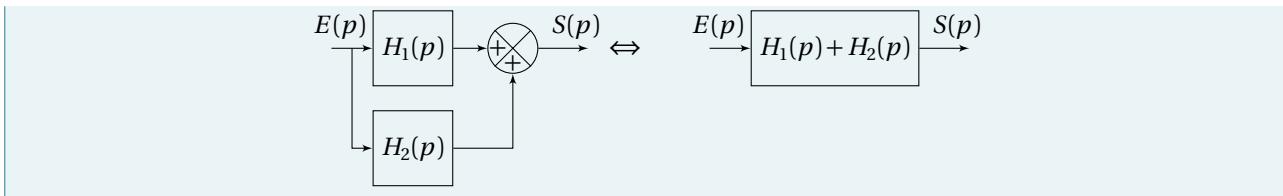
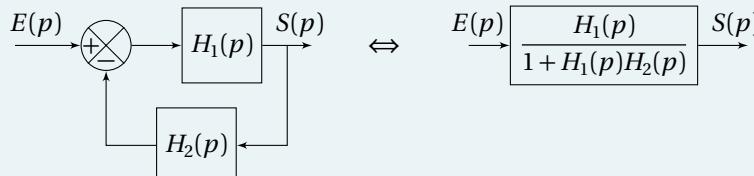
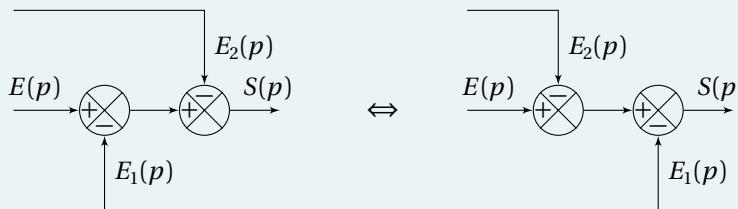
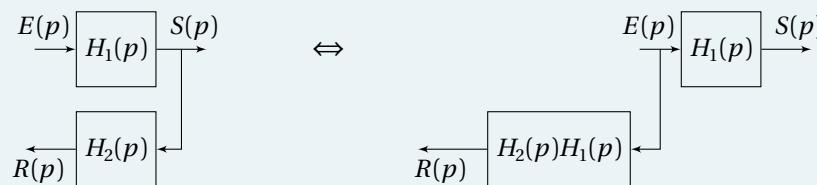


Pour modifier un schéma-blocs, il faut s'assurer que lorsque on modifie une partie du schéma, les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques avant et après la transformation.

### Résultat Blocs en série

$$E(p) \xrightarrow{H_1(p)} H_1(p) \xrightarrow{H_2(p)} H_2(p) \xrightarrow{S(p)} \Leftrightarrow E(p) \xrightarrow{H_1(p)H_2(p)} H_1(p)H_2(p) \xrightarrow{S(p)}$$

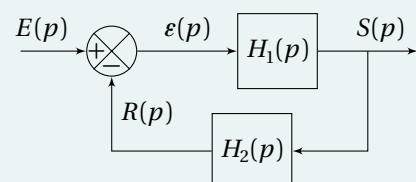
### Résultat Blocs en parallèle


**Résultat Réduction de boucle – À MAITRISER PARFAITEMENT**

**Résultat Comparateurs en série**

**Résultat Point de prélèvement**


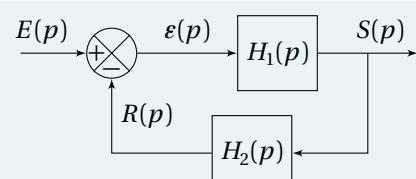
### 3 Fonctions usuelles

**Définition Fonction de transfert en boucle fermée – FTBF**
*Formule de Black*

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$


**Définition Fonction de transfert en boucle ouverte – FTBO**

$$\text{FTBO}(p) = \frac{R(p)}{\epsilon(p)} = H_1(p)H_2(p)$$


**Définition Théorème de superposition**

Soit un système d'entrées  $E_1$  et  $E_2$  et de sortie  $S$ . On note  $H_1 = \frac{S}{E_1}$  lorsque  $E_2$  est nulle et  $H_2 = \frac{S}{E_2}$  lorsque  $E_1$  est nulle. En superposant, on a alors :  $S = H_1 E_1 + H_2 E_2$ .

## 1 Systèmes d'ordre 1

**Définition** Les systèmes du premier ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

$$\xrightarrow{E(p)} \boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}} \xrightarrow{S(p)}$$

On note :

- $\tau$  la constante de temps en secondes ( $\tau > 0$ );
- $K$  le gain statique du système ( $K > 0$ ).

### Résultat – Réponse à un échelon d'un système du premier ordre

On appelle réponse à un échelon, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à un échelon d'amplitude  $E_0$ . Lorsque  $E_0 = 1$  ( $1/p$  dans le domaine de Laplace) on parle de **réponse indicielle**. Ainsi, dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

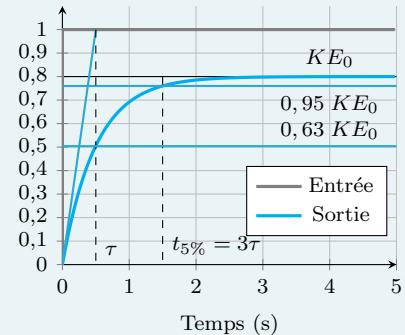
Analytiquement, on montre que  $s(t) = K E_0 u(t) (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ .

Si la réponse indicielle d'un système est caractéristique d'un modèle du premier ordre (pente à l'origine non nulle et pas d'oscillation), on détermine :

- le gain à partir de l'asymptote  $KE_0$ ;
- la constante de temps à partir de  $t_{5\%}$  ou du temps pour 63 % de la valeur finale.

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- valeur finale  $s_\infty = KE_0$ ;
- pente à l'origine **non nulle**;
- $t_{5\%} = 3\tau$ ;
- pour  $t = \tau$ ,  $s(\tau) = 0,63 s_\infty$ .



### Résultat – Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

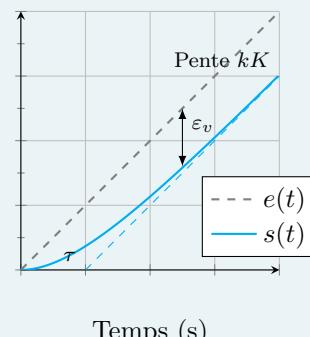
On appelle réponse à une rampe, l'expression de la sortie  $s$  lorsque on soumet le système à une fonction linéaire de pente  $k$  :

$$S(p) = E(p)H(p) = \frac{k}{p^2} \frac{K}{1 + \tau p}.$$

Analytiquement, on montre que  $s(t) = K k (t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}) u(t)$ .

Les caractéristiques de la courbe sont les suivantes :

- pente de l'asymptote  $Kk$ ;
- intersection de l'asymptote avec l'axe des abscisses :  $t = \tau$ ;
- $\varepsilon_v = kK\tau$ .



## 2 Systèmes d'ordre 2

**Définition** Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t).$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \quad \xrightarrow{E(p)} \boxed{\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} \xrightarrow{S(p)}$$

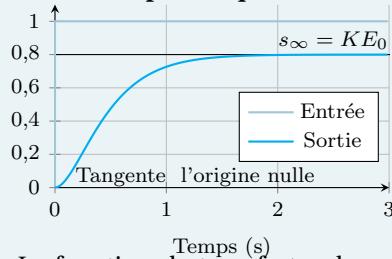
On note :

- $K$  est appelé le gain statique du système (rapport des unités de  $S$  et de  $E$ );
- $\xi$  (lire  $\xi$ ) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité);
- $\omega_0$  pulsation propre du système (rad/s ou  $s^{-1}$ ).

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement, l'allure de la réponse temporelle est différente.

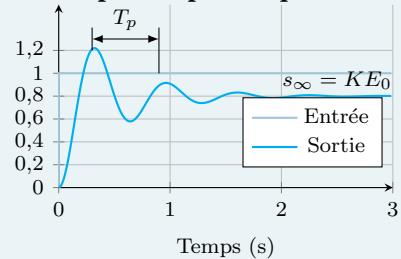
## Résultat

$\xi \geq 1$  : système non oscillant et amorti (apériodique)



- La fonction de transfert a deux pôles réels.
- La tangente à l'origine est nulle.

$\xi < 1$  : système oscillant et amorti (pseudo périodique)



- La fonction de transfert a deux pôles complexes.
- La tangente à l'origine est nulle.
- La pseudo-période est de la forme  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$ .
- La valeur du premier dépassement vaut :  $D_1 = \frac{-\pi \xi}{K E_0 e \sqrt{1-\xi^2}}$ .

## Résultat

- Pour  $\xi = 0$  le système n'est pas amorti (oscillateur harmonique) la réponse à un échelon est une sinusoïde d'amplitude  $K E_0$  (2 $K E_0$  crête à crête).
- Pour  $\xi \approx 0,69$  on obtient le système du second ordre le plus rapide **avec dépassement**. Le temps de réponse à 5% est donné par  $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$ .
- Pour  $\xi = 1$  on obtient le système du second ordre le plus rapide **sans dépassement**.

## 1 Définitions

On peut définir un signal sinusoïdal sous la forme  $f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  et on note :

On a par ailleurs :

- $A$  : l'amplitude de la sinusoïde;
- $\omega$  : la pulsation en rad/s;
- $\varphi$  : la phase à l'origine en rad.

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$  : la période de la sinusoïde en s;
- $f = \frac{1}{T}$  : fréquence de la sinusoïde en Hz.

Une étude harmonique consiste en solliciter le système par des sinusoïdes de pulsations différentes et d'observer son comportement en régime permanent. Le diagramme de Bode est constitué d'un diagramme de gain (rapport des amplitudes des sinus en régime permanent) et d'un diagramme de phase (déphasage des sinus en régime permanent).

**Définition** Soit  $H(p)$  une fonction de transfert. On pose  $p = j\omega$  et on note :

- $H_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$  le gain décibel de la fonction de transfert;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$ .

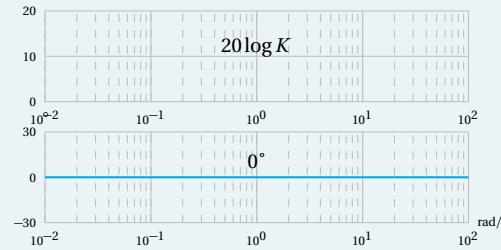
**Propriété** On note  $H(p) = G_1(p)G_2(p)$ . On a :

- $H_{dB}(\omega) = G_{1dB}(\omega) + G_{2dB}(\omega)$ ;
- $\varphi(\omega) = \text{Arg}(G_{1dB}(\omega)) + \text{Arg}(G_{2dB}(\omega))$ .

## 2 Gain

**Résultat** – Diagramme de Bode d'un gain pur

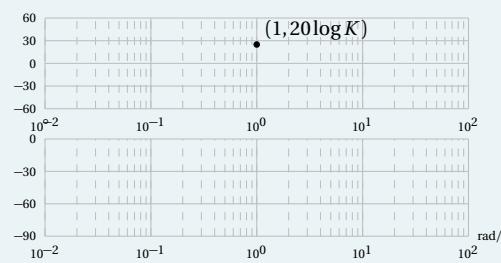
- Fonction de transfert :  $H(p) = K$ .
- Diagramme de gain : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ .
- Diagramme de phase : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ .



## 3 Intégrateur

**Résultat** – Diagramme de Bode d'un intégrateur

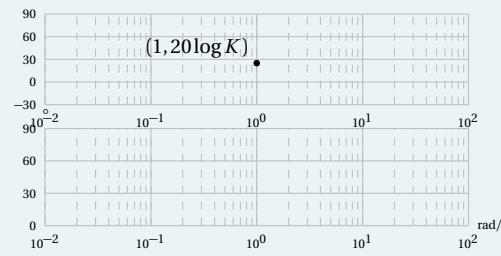
- Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{p}$ .
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $-20 \text{ dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .



## 4 Dérivateur

**Résultat** – Diagramme de Bode d'un dérivateur

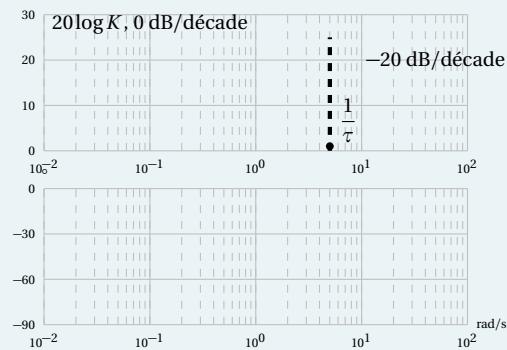
- Fonction de transfert :  $H(p) = Kp$ .
- Diagramme de gain asymptotique : droite de pente  $20 \text{ dB/decade}$  passant par le point  $(1, 20 \log K)$ .
- Diagramme de phase asymptotique : droite horizontale d'ordonnée  $+90^\circ$ .



## 5 Systèmes d'ordre 1

### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

- Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ .
- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite de pente  $-20 \text{ dB/decade}$ .
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ ;
  - pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$  : droite horizontale d'ordonnée  $-90^\circ$ .



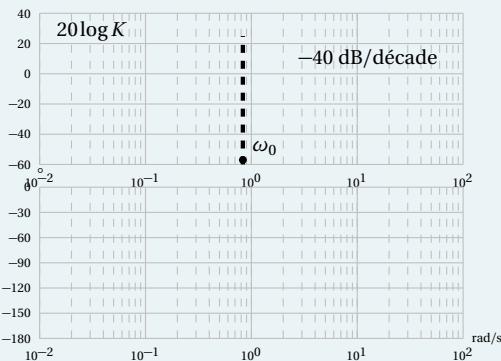
## 6 Systèmes d'ordre 2

### Résultat – Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre

- Fonction de transfert :  $H(p) = \frac{2\xi}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ .

Cas où  $\xi < 1$ .

- Diagramme de gain asymptotique :
  - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $20 \log K$ ;
  - pour  $\omega > \omega_0$  : droite de pente  $-40 \text{ dB/decade}$ .
- Diagramme de phase asymptotique :
  - pour  $\omega < \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $0^\circ$ ;
  - pour  $\omega > \omega_0$  : droite horizontale d'ordonnée  $-180^\circ$ .



Dans le cas où  $\xi > 1$ , le dénominateur admet deux racines (à partie réelle négative) et peut se mettre sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$ . On se ramène alors au tracé du produit de deux premiers ordre.

### Résultat Phénomène de résonance

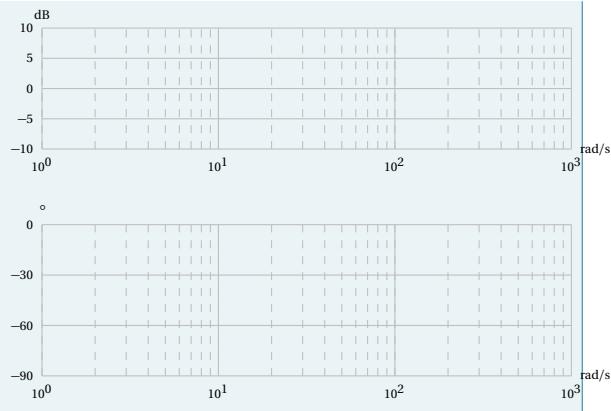
Le phénomène de résonance s'observe lorsque  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . La pulsation de résonance est inférieure à la pulsation propre du système :  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ .

À la résonance, l'amplitude maximale est de  $A_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ . (Attention, sur le diagramme de Bode, on lit  $20 \log A_{\max}$  lorsque  $\omega = \omega_r$ .)

## 7 Retard

### Résultat – Diagramme de Bode d'un retard pur

- Fonction de transfert :  $H(p) = e^{-Tp}$ .
- Diagramme de gain asymptotique : gain nul.
- Diagramme de phase asymptotique :  $\arg(H(p)) = -\tau\omega$   
... à tracer.



## 8 Tracé du diagramme de Bode

### Méthode

#### Méthode 1 : sommation dans le diagramme de Bode

1. décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus);
2. tracer chacune des fonctions de transfert;
3. sommer les tracés dans le diagramme de gain et dans le diagramme des phases.

#### Méthode 2 : tableau de variation

1. décomposer la fonction de transfert à tracer en fonction de transfert élémentaire (fonctions de transfert élémentaires vues ci-dessus);
2. réaliser un tableau de variation : pour chacune des fonctions élémentaires, donner les pulsations de coupure et les pentes;
3. sommer les pentes;
4. tracer le diagramme de Bode.

## TD 01

## Banc d'essai BTP

Concours CCINP-TSI 20??

## Savoirs et compétences :



## Mise en situation

Airbus Helicopters commercialise des hélicoptères civils et militaires. Le déplacement des hélicoptères est assuré par un rotor principal permettant la sustentation et la translation de l'appareil. Un rotor arrière permet de compenser le couple de réaction engendré par le rotor principal et de contrôler les mouvements de lacet de l'appareil (figure 1). La puissance est délivrée par deux turboréacteurs (certains hélicoptères ne sont équipés que d'un turboréacteur). Ces turboréacteurs entraînent en rotation une boîte de transmission principale (BTP) qui elle-même entraîne d'une part le rotor principal et d'autre part le rotor arrière, par l'intermédiaire d'un arbre de transmission et d'une boîte de transmission arrière (BTA). La BTP assure aussi l'entraînement d'une série d'accessoires permettant le fonctionnement de l'appareil (alternateur, pompe hydraulique ...). Pour chaque association hélicoptère - turboréacteur, un banc d'essai permet de vérifier que la BTP répond au cahier des charges. La figure 2 présente la structure du banc d'essai.

**Objectif** Valider Req 1.1.1.

«requirement»	Pécision de la régulation
Id = "1.1.1"	Text = "L'écart statique de la régulation en vitesse doit être nul."

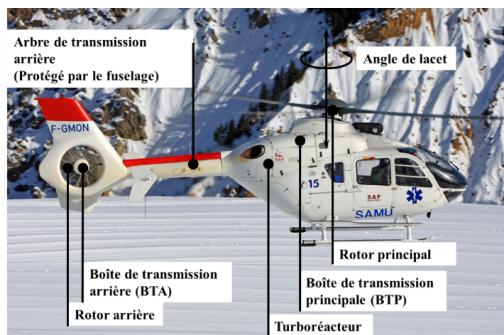


Figure 1 – Hélicoptère.

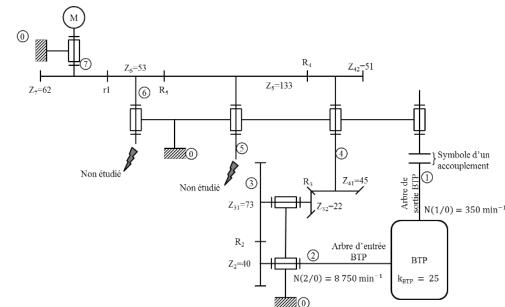


Figure 2 – Structure du banc d'essai.

## Le moteur à courant continu

Le banc d'essai est équipé d'un dispositif permettant de générer un couple résistant sur le rotor de sortie de la BTP. Cela permet de simuler les actions aérodynamiques sur les pales. Il faut donc évaluer l'impact de ce couple sur la vitesse du moteur. La modélisation adoptée pour le moteur à courant continu est celle de la figure 3.

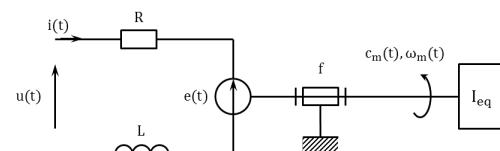


Figure 3 – Schéma équivalent du moteur à courant continu.

On note :

- $u(t)$  : la tension appliquée aux bornes de l'induit;
- $i(t)$  : le courant absorbé par l'induit;
- $e(t)$  : la force contre-électromotrice;
- $R$  : la résistance de l'induit;
- $L$  : l'inductance de l'induit;
- $\omega_m(t)$  : la vitesse de rotation de l'arbre moteur;
- $c_m(t)$  : le couple moteur;
- $c_r(t)$  : le couple résistant sur l'arbre moteur dû à la génération d'un couple résistant en sortie de BTP;
- $f$  : le coefficient de frottement, qui génère un couple résistant proportionnel à  $\omega_m(t)$ ;
- $I_{eq}$  : l'inertie équivalente du banc d'essai ramené à l'arbre moteur;
- $K_c$  : la constante de couple définie telle que  $c_m(t) = K_c i(t)$  (équation 1);
- $K_e$  : la constante de force contre-électromotrice définie telle que  $e(t) = K_e \omega_m(t)$  (équation 2).

Hypothèses :

- le comportement de chacun des composants sera considéré comme linéaire, continu et invariant;
- les conditions de Heaviside sont considérées comme vérifiées;
- on note  $p$  la variable de Laplace. La transformée de Laplace d'une fonction temporelle  $f(t)$  sera notée  $F(p)$  (la transformée de  $\omega(t)$  sera notée  $\Omega(p)$ ).

## Modélisation de l'asservissement en vitesse

Hypothèses :

- on néglige l'inductance du moteur à courant continu ainsi que l'effet du coefficient de frottement;
- on fait l'hypothèse que  $K_c = K_e = K$ ;
- pour simplifier l'étude, la boucle de courant n'a pas été modélisée.

Le schéma-blocs de l'asservissement en vitesse du moteur à courant continu est donné sur la figure 10.

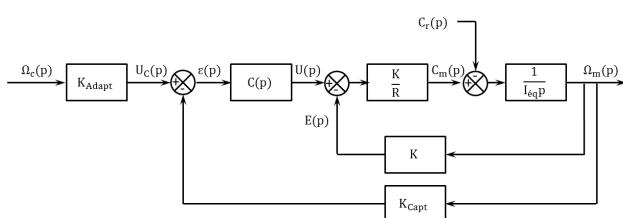


Figure 10 – Régulation en vitesse du banc d'essai.

**Question 1** Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour? Comment déterminer la valeur du gain  $K_{Adapt}$ ?

**Hypothèse 1 : on considère que  $C_r(p) = 0$  et  $\Omega_c(p) \neq 0$ .**

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$  puis la fonction de transfert en boucle fermée  $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_c(p))$ . On considère que  $C(p) = K_P$ ,  $K_P$  étant constante. Mettre  $H_1(p)$

sous la forme  $K_1/(1 + \tau_1 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_1$  et  $\tau_1$ .

**Hypothèse 2 : on considère que  $\Omega_c(p) = 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 3** Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$ . On considère que  $C(p) = K_P$ ,  $K_P$  étant constante. Mettre  $H_2(p)$  sous la forme  $-K_2/(1 + \tau_2 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_2$  et  $\tau_2$ .

**Hypothèse 3 : on considère maintenant que  $\Omega_c(p) \neq 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 5** En utilisant le théorème de superposition, exprimer  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $\Omega_c(p)$  et  $C_r(p)$ .

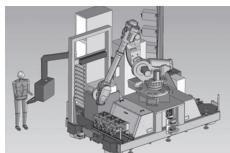
À une fréquence de rotation de  $350 \text{ min}^{-1}$  en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de  $1928 \text{ min}^{-1}$  soit environ  $202 \text{ rad/s}$ . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à  $990 \text{ Nm}$ . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude  $202 \text{ rad/s}$  et à un couple résistant de  $990 \text{ Nm}$ .

**Question 6** Après avoir exprimé la consigne  $\Omega_c(p)$  puis le couple résistant  $C_r(p)$ , calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Question 7** Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain  $K_I$  de la forme  $C(p) = K_I/p$ ?

**Question 8** En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée?

## TD 02



## Cellule d'assemblage pour avion Falcon

Concours E3A – PSI 2015.

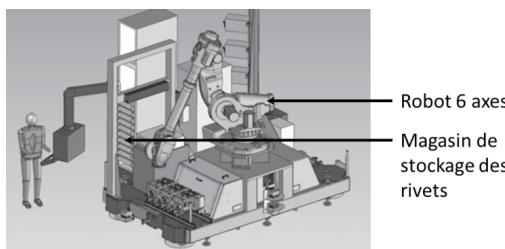
## Savoirs et compétences :



## Mise en situation

## Présentation

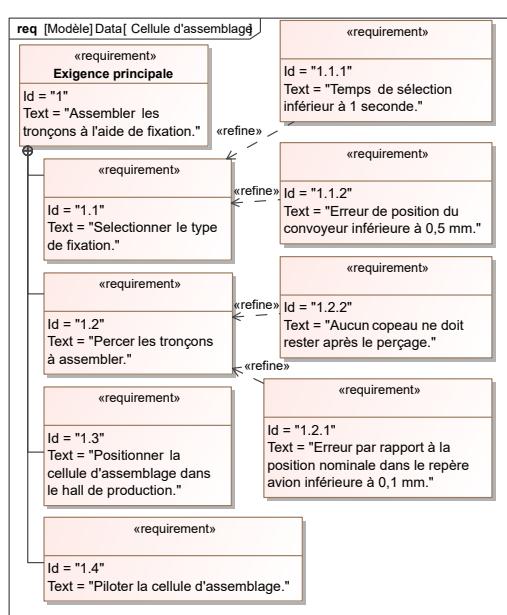
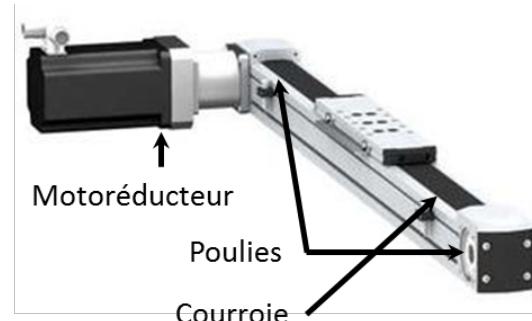
Le tronçon central du fuselage du Falcon 7X est assemblé par rivetage grâce à un robot 6 axes. Les rivets sont stockés dans des cassettes rangées verticalement. Un chariot de sélection se déplace verticalement pour déplacer une buse d'aspiration qui permettra d'acheminer les rivets contenus dans la cassette vers l'effecteur (robot). Le chariot fait l'objet de cette étude.



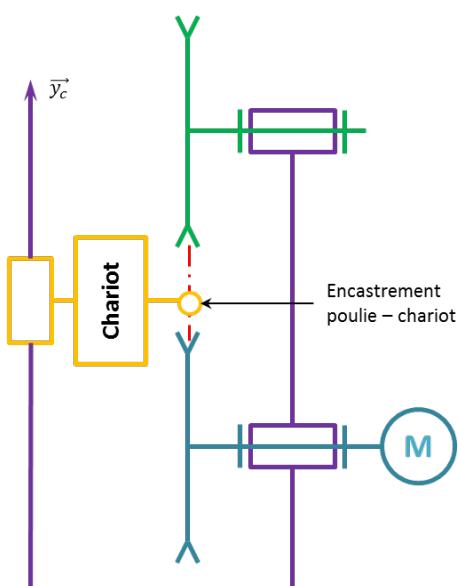
L'objectif de cette partie est de valider les choix effectués par la société pour le sous ensemble de sélection des fixations de la cellule (exigence 1.1).

## Axe chariot

Le déplacement du chariot est assuré par un axe numérique asservi en vitesse et en position. Cet axe est composé d'un moteur à courant continu, d'un système de transmission de puissance de type poulies / courroie et d'un rail.



## Modélisation du système de déplacement du chariot



## Sélectionner les fixations – Exigence 1.1

Afin de sélectionner le type de fixation, la buse d'aspiration doit être déplacée en face de la cassette avec une erreur inférieure à 0,5 mm (voir exigences fonctionnelles). Cependant le fabricant du système poulie-courroie du rail indique déjà une erreur de  $\pm 0,25$  mm due notamment à l'élasticité de la courroie. Par conséquent, l'erreur en position de la commande doit être nulle. De plus, afin de ne pas perdre de temps lors de la production, le temps maximal de déplacement lors de la sélection est imposé à une seconde.

L'étude se fera dans le cas le plus défavorable c'est-à-dire un déplacement du chariot vers le haut entre les deux cassettes de rivets les plus éloignées. L'axe de déplacement est appelé  $\vec{y}_c$

## Notations domaine temporel – domaine de Laplace

Les notations entre le domaine temporel et celui de Laplace sont données dans la suite. Ainsi, si la fonction  $f(t)$  possède une transformée de Laplace, elle sera notée :  $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ . Les équations caractéristiques du moteur à courant continu sont rappelées ci-dessous (les conditions de Heaviside sont respectées) :

- $u(t) = e(t) + L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t);$
- $e(t) = K_E \omega_m(t);$
- $C_M(t) = K_C i(t);$
- $J_{eq} \frac{d\omega_m}{dt} + f\omega_m(t) = C_M(t) - C_R(t).$

Avec :

- $u(t)$  : tension moteur;
- $i(t)$  : courant moteur;
- $e(t)$  : force contre-électromotrice;
- $\omega_m(t)$  : vitesse de rotation moteur;
- $C_M(t)$  : couple moteur;
- $C_R(t)$  : couple résistant modélisant l'action de pesanteur.

## Critères à respecter pour l'exigence 1.2

Exigence	Critères	Niveaux
Déplacer le chariot	Précision : erreur statique par rapport à une consigne de vitesse constante	NULLE
	Rapidité : temps de réponse à 5% en réponse à une consigne échelon	$Tr_{5\%} = 0,1$ s maxi
	Stabilité : Marge de gain Marge de gain	6 dB mini 45° mini

## Choix d'une architecture de la chaîne de transmission

**Question 1** Proposer sous la forme d'un schéma une autre solution permettant le déplacement du chariot. La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique par un moteur doit être conservée.

Compte tenu des vitesses de translation importantes, le système retenu est de type poulie-courroie.

## Détermination de l'inertie équivalente

Les grandeurs caractéristiques (notations et valeurs) des éléments de l'axe du chariot sont données dans le tableau ci-dessous :

Moment d'inertie du rotor du moteur autour de son axe	$J_m$	$140 \times 10^{-6} \text{ kgm}^2$
Moment d'inertie du réducteur ramené à l'arbre moteur	$J_{rd}$	$60 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$
Moment d'inertie de la poulie motrice autour de son axe	$J_{PM}$	$38 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$
Moment d'inertie de la poulie réceptrice autour de son axe	$J_{PR}$	$38 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$
Masse totale du chariot	$M$	5 kg
Vitesse de rotation de l'arbre moteur	$\omega_m$	
Vitesse de rotation de l'arbre de sortie du réducteur	$\omega_r$	
Rayon d'une poulie motrice ou réceptrice	$R_P$	45 mm
Rapport de réduction réducteur ( $\omega_r / \omega_m$ )	$\lambda$	1/5

**Question 2** À partir des grandeurs définies déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente  $J_{eq}$  de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{moteur+réducteur+poulies+chariot}\}$  ramenée sur l'arbre moteur. Cette inertie équivalente est définie par  $E_c(\Sigma) = 1/2 J_{eq} \omega_m^2$ .

**Question 3** Déterminer la valeur numérique de l'expression précédente.

## Modèle de connaissance du moteur à courant continu

**Objectif** L'objectif de cette partie est d'établir un modèle de la motorisation de l'axe afin de simuler un déplacement.

**Question 4** À partir des équations du moteur à courant continu, réaliser le schéma bloc du moteur à courant continu.

**Question 5** En considérant que  $C_R(p) = 0$ , déterminer la fonction de transfert  $H_M(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$  sous sa forme canonique.

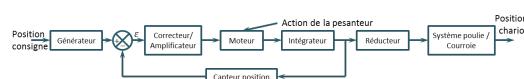
**Question 6** Montrer que la fonction de transfert  $H_M(p)$  peut se mettre sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_C}{K_C K_e + R J_{eq} p + L J_{eq} p^2}$ . Justifier la réponse. Pour cette question, la valeur numérique de  $J_{eq}$  considérée sera  $J_{eq} = 7 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$  indépendamment du résultat numérique calculé précédemment.

**Question 7** Montrer qu'avec l'expression,  $H_M(p)$  peut s'écrire sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}$  avec  $T_E < T_M$ .

## Étude de l'asservissement en position de l'axe

### Modélisation de l'asservissement en position

La partie précédente a permis de déterminer un modèle du moteur. La suite de l'étude va permettre, par simulation, de déterminer les réglages nécessaires de l'axe vis-à-vis du cahier des charges. La figure suivante présente le principe de l'asservissement de l'axe du chariot.



Les grandeurs caractéristiques des blocs de l'asservissement de l'axe chariot sont données dans le tableau ci-dessous :

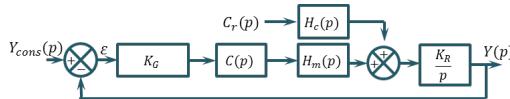
Générateur	$K_G$	À déterminer
Capteur de position	$K_{capt}$	$5 \times 10^{-3} \text{ Vrad}^{-1}$
Correcteur amplificateur	$C(p)$	Variable

**Question 8** Quelle doit être la valeur de  $K_G$  pour assurer un asservissement correct (c'est-à-dire l'écart  $\epsilon$  doit être nul si la position de l'axe est identique à la consigne) ?

**Question 9** Donner le schéma-blocs de l'asservissement.

### Étude du modèle simplifié

Afin de faciliter les calculs, le schéma bloc à retour unitaire est donné figure suivante. Le couple résistant  $C_R$  dû à l'action de pesanteur est supposé constant.



Avec :

$$\bullet H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} ;$$

$$\frac{(R + Lp) K_M}{K_C}$$

$$\bullet H_C(p) = \frac{K_C}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)} ;$$

$$\bullet C_R(p) = C_r / p ;$$

$$\bullet K_R = R_p \lambda .$$

**Question 10** Donner l'expression de  $Y(p)$ .

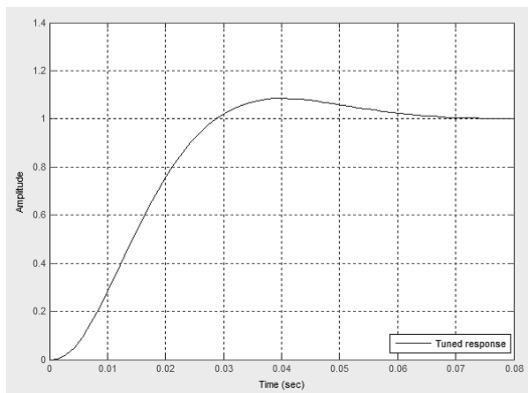
**Question 11** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

**Question 12** On souhaite que lorsque le système se déplace à vitesse constante, l'erreur sur la vitesse atteinte par le système soit nulle. Quelle sollicitation doit-on utiliser. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

**Question 13** Conclure.

Afin de répondre totalement au cahier des charges, l'utilisation d'un correcteur proportionnel intégral dérivé est retenue. En effet, la commande de l'axe intègre directement ce type de correcteur. Dans la suite du problème, le correcteur  $C(p)$  sera de la forme :  $C(p) = K_I \left( 1 + \frac{1}{(I_p p)} \right) (1 + T_D p)$ . Le réglage des coefficients a été fait par simulation numérique. Afin de vérifier maintenant le critère de rapidité, on donne la réponse temporelle (figure page suivante) de l'axe à un échelon de position de 1 m.

**Question 14** Conclure sur la conformité au cahier des charges du système ainsi réglé.



**Question 15** Tracer le diagramme de Bode.

On considère  $C_R(p) = 0$ . On prendra  $K_M = 0,8 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ ,  $T_e = 0,0051 \text{ s}$ ,  $T_m = 0,0074 \text{ s}$ .

**Question 16** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = 1$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

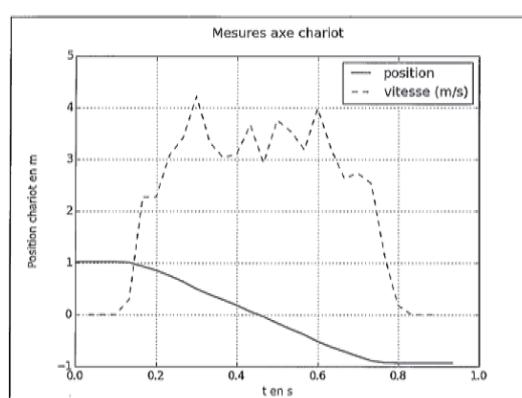
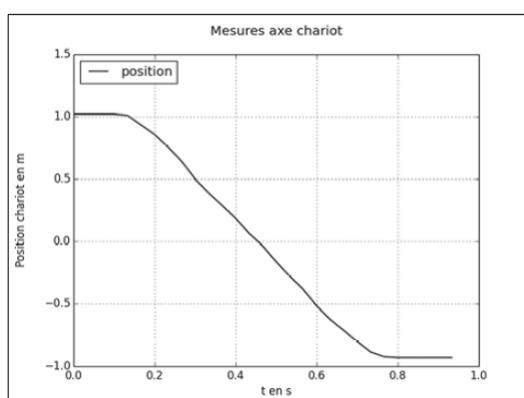
**Question 17** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = \frac{1}{p}$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

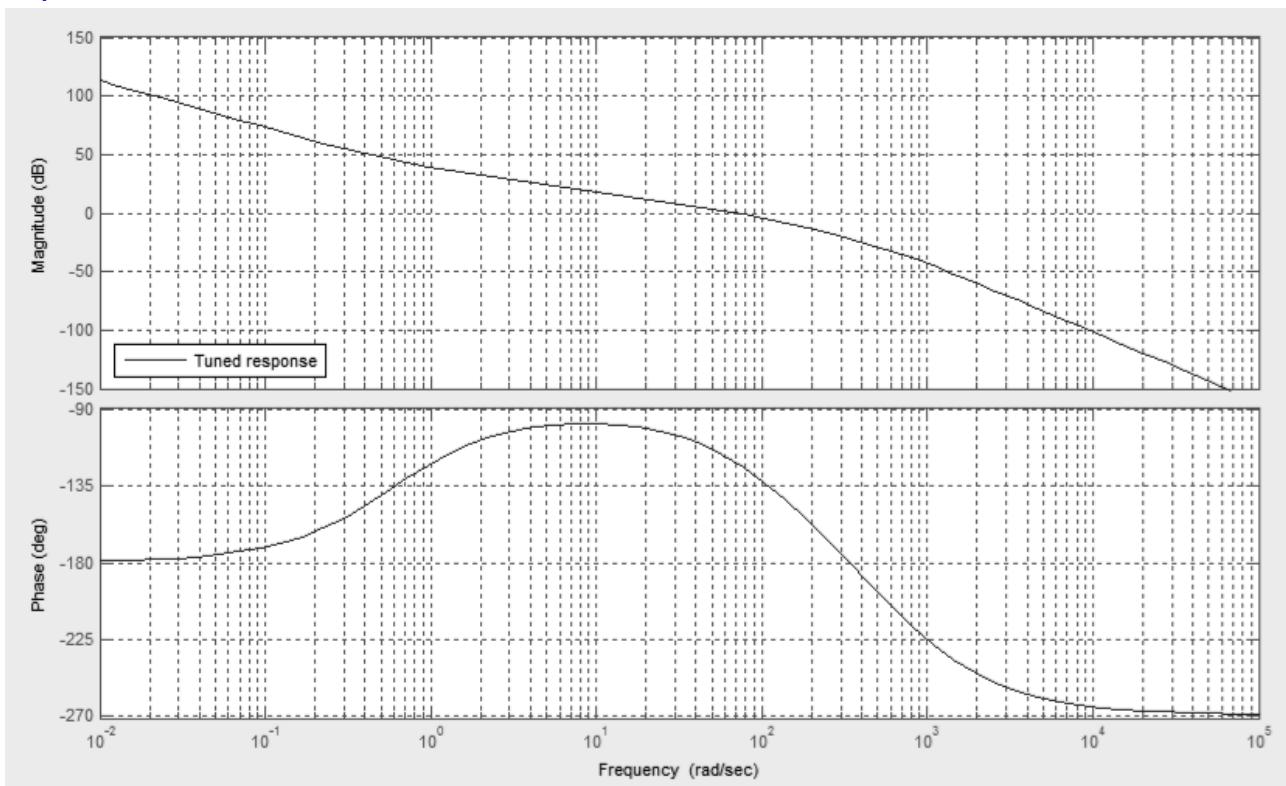
On donne ci-dessous les diagrammes de Bode avec les correcteurs optimisés. Déterminer les marges de gain et marges de phase.

### Vérification des performances de l'axe du magasin de rivets

Afin de vérifier les réglages précédents, un essai sur le système réel est réalisé. Une consigne de 2 m est donnée. L'absence de système d'acquisition dédié impose un système de mesure extérieur au système réel. C'est un dispositif d'analyse d'image qui est retenu pour ces mesures.

**Question 18** À partir des relevés ci-dessous, conclure sur le respect des exigences fonctionnelles de l'axe du magasin de stockage des rivets (Exigence 1.1).





## TD 03



## Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec TSI 2017

## Savoirs et compétences :

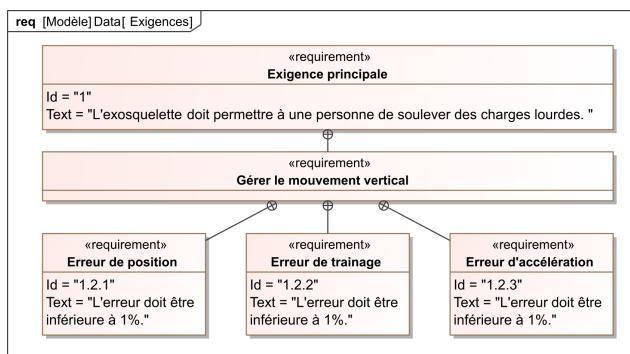
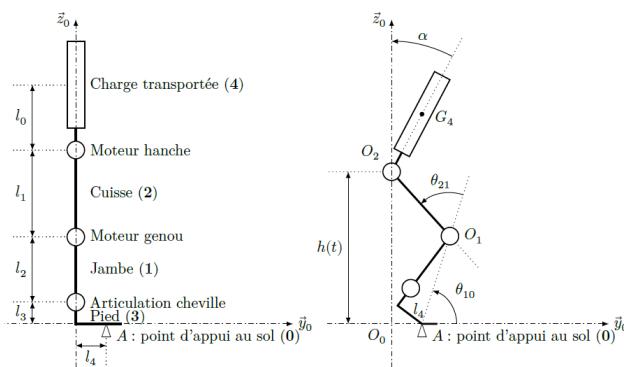


## Mise en situation

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.



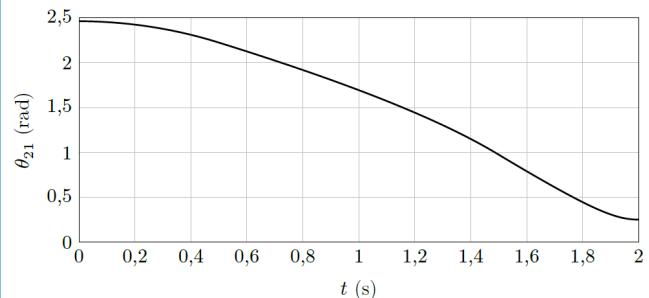
On donne dans la figure ci-dessous, la modélisation cinématique retenue dans le but de simuler le comportement de l'exosquelette.



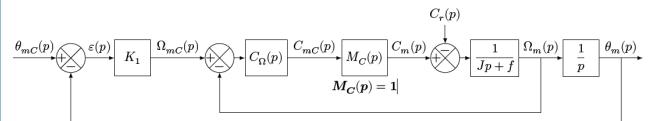
## Gestion du mouvement vertical

**Objectif** Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée à la figure suivante montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.



Le premier modèle défini figure suivante est adopté pour chaque axe.



## Notations :

- $\theta_{mc}(p)$  consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_{mc}(t)$  en rad);
- $\theta_m(p)$  position de l'axe moteur (variable temporelle :  $\theta_m(t)$  en rad);
- $C_{mc}(p)$  consigne de couple moteur (variable temporelle :  $c_{mc}(t)$  en Nm);
- $C_m(p)$  couple moteur (variable temporelle :  $c_m(t)$  en Nm);
- $C_r(p)$  couple résistant perturbateur (variable temporelle :  $c_r(t)$  en Nm);
- $K_1$  gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en  $s^{-1}$ );

- $\Omega_{mC}(p)$  consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_{mC}(t)$  en rad s<sup>-1</sup>);
- $\Omega_m(p)$  vitesse de l'axe moteur (variable temporelle :  $\Omega_m(t)$  en rad s<sup>-1</sup>);
- $C_\Omega(p)$  correcteur de l'asservissement de vitesse;
- $M_C(p)$  modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles :  $M_C(p) = 1$ ;
- $J$  moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur;
- $f$  coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement.

Le correcteur est de la forme :  $C_\Omega(p) = K_2 \left( \frac{Jp + f}{Jp} \right)$ .

En utilisant le schéma-blocs précédent, on peut constater que :

- l'écart est défini par la variable  $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ ;
- l'erreur entre l'entrée et la sortie est définie par la variable  $\mu(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ .

Étant donné que le modèle utilisé est à retour unitaire, l'écart  $\varepsilon(t)$  est égal à l'erreur  $\mu(t)$ .

**Hypothèse(s)** Le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude  $C_r(p) = 0$ .

**Question 1** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

8.0.0.1

**Question 2** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

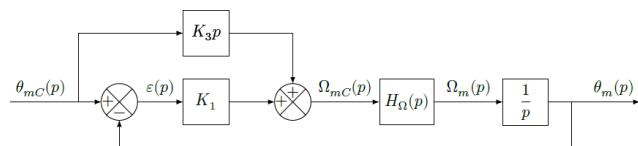
**Méthode** On peut définir l'erreur de position  $\varepsilon_p$  par  $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$  avec  $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p}$  (entrée échelon).

**Question 4** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis

l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Question 5** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, le second modèle avec anticipation de la vitesse est adopté avec  $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + Tp}$  et  $T = 33$  ms.



**Question 6** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

**Question 7** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

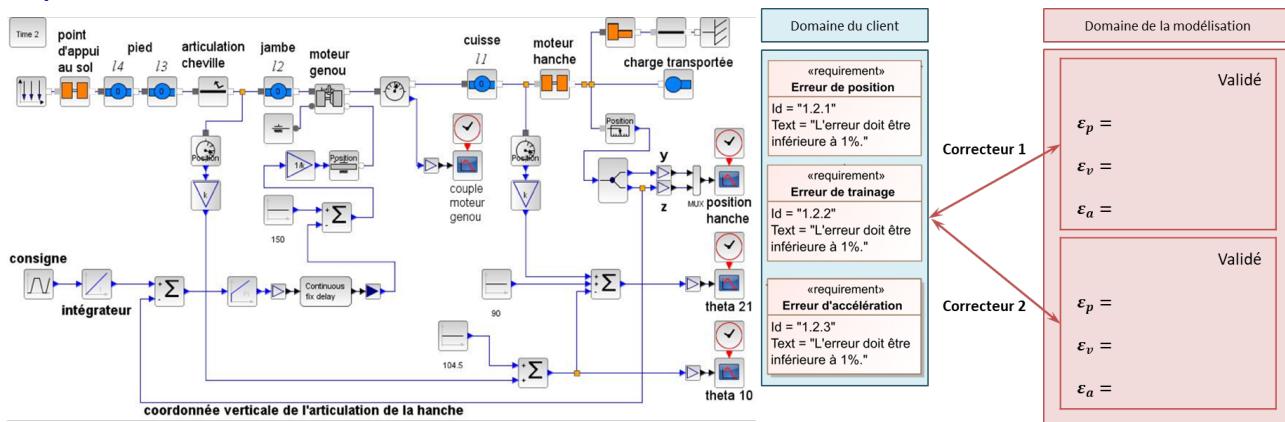
**Question 8** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

## Synthèse

**8.0.0.1** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.

Eléments de corrigé :

1. Asservissement en position.
2.  $H_\Omega(p) = 1 / \left( \frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1 \right)$ .
3.  $\varepsilon(p) = (\theta_{mC}(p)) / \left( 1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \right)$
4.  $\varepsilon(p) = 0$ ,  $\varepsilon_v = \frac{1}{K_1}$  et  $K_1 > 100$ .
5.  $\varepsilon_a = \infty$ .
6.  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) (p(1 + Tp - K_3)) / (p(1 + Tp) + K_1)$ .
7.  $\varepsilon_v = \frac{1 - K_3}{K_1}$ ,  $K_3 = 1$ .
8.  $\varepsilon_a = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}$ . Le cahier des charges est donc validé.



## Application 01

## Exercices d'application – Réponses fréquentielles

S. Grange

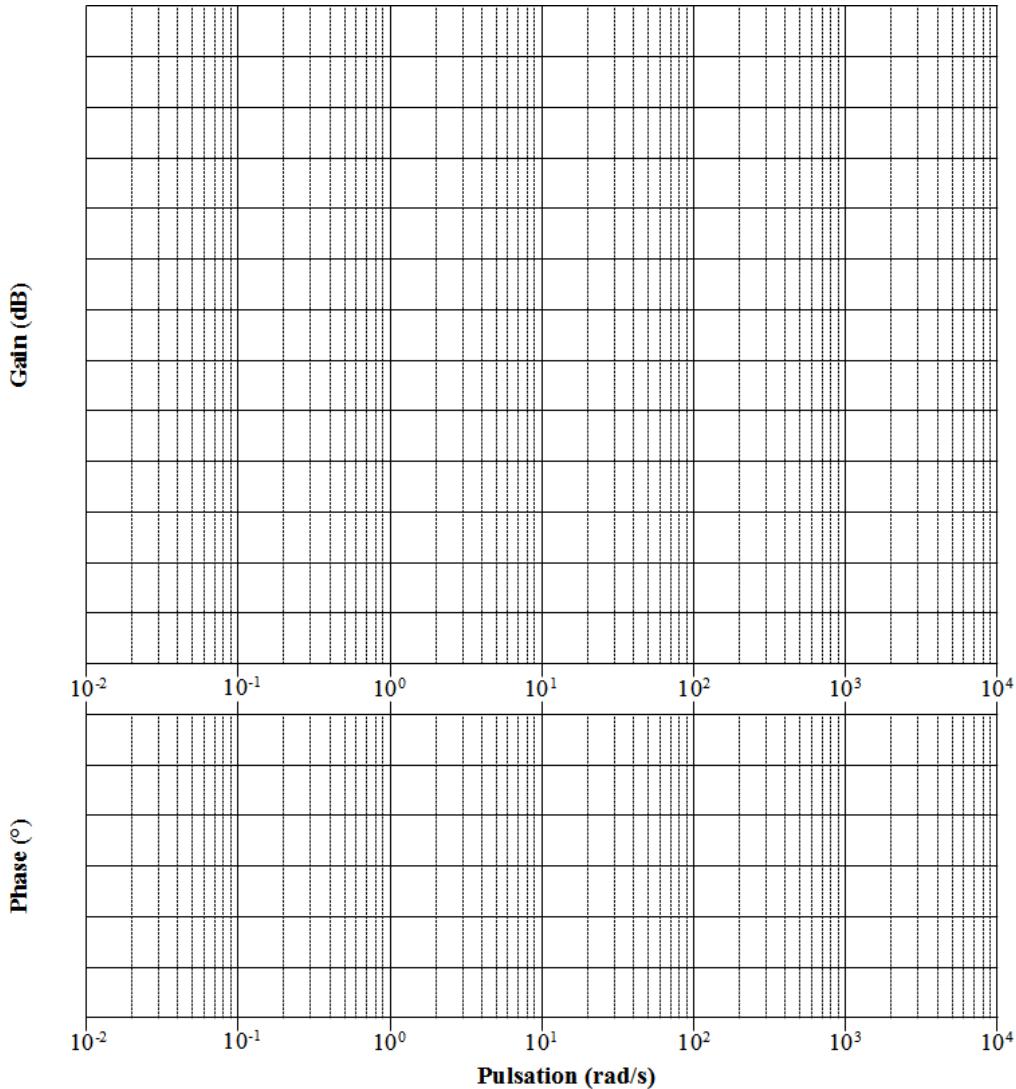
Savoirs et compétences :



## Diagramme de Bode

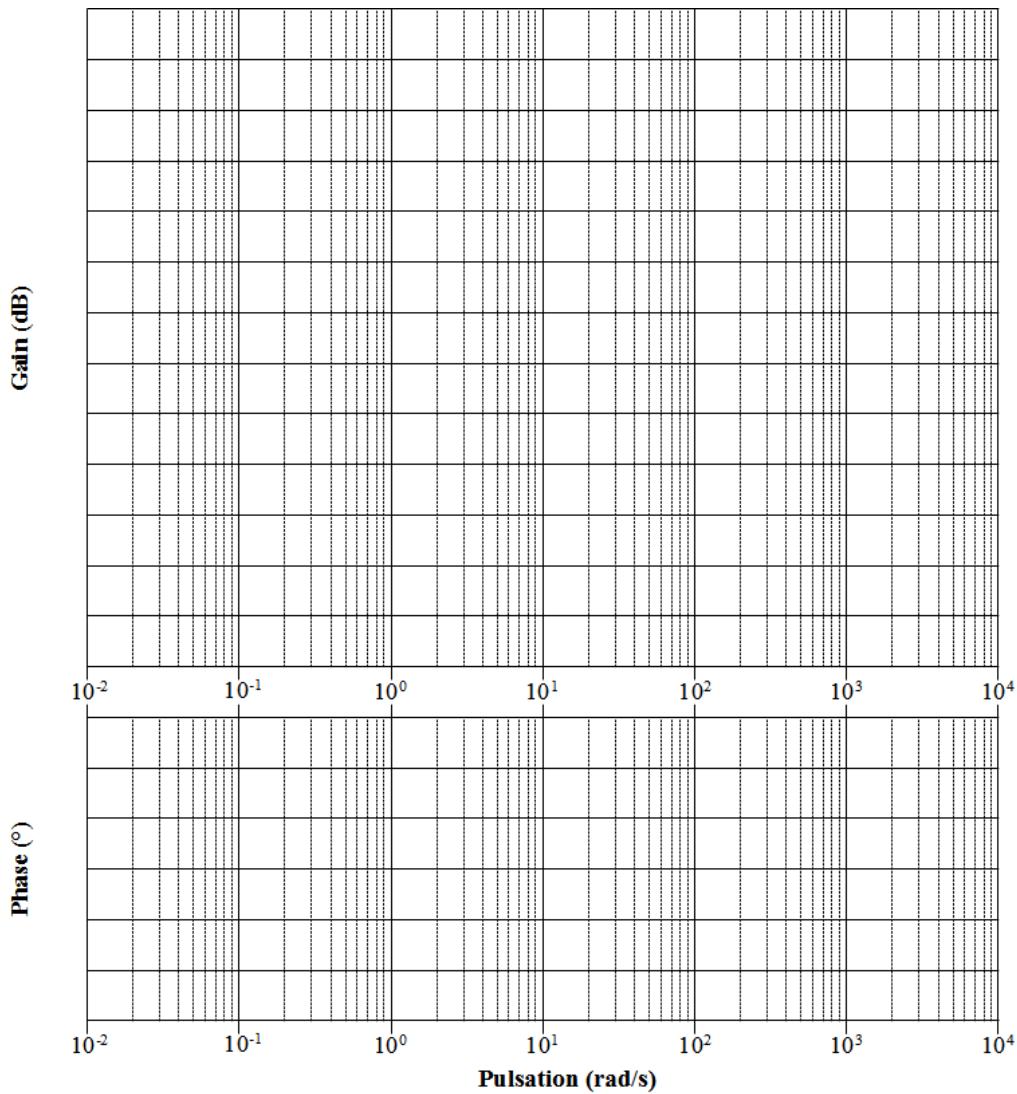
Question 1 Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

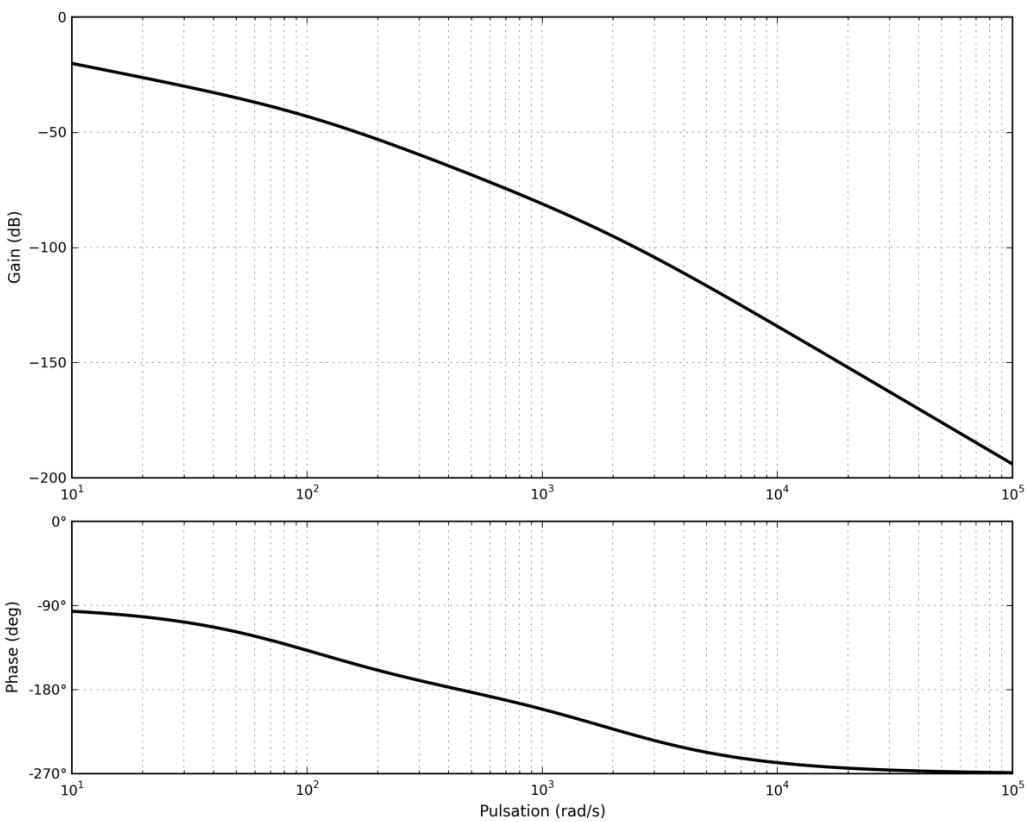


Question 2 Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

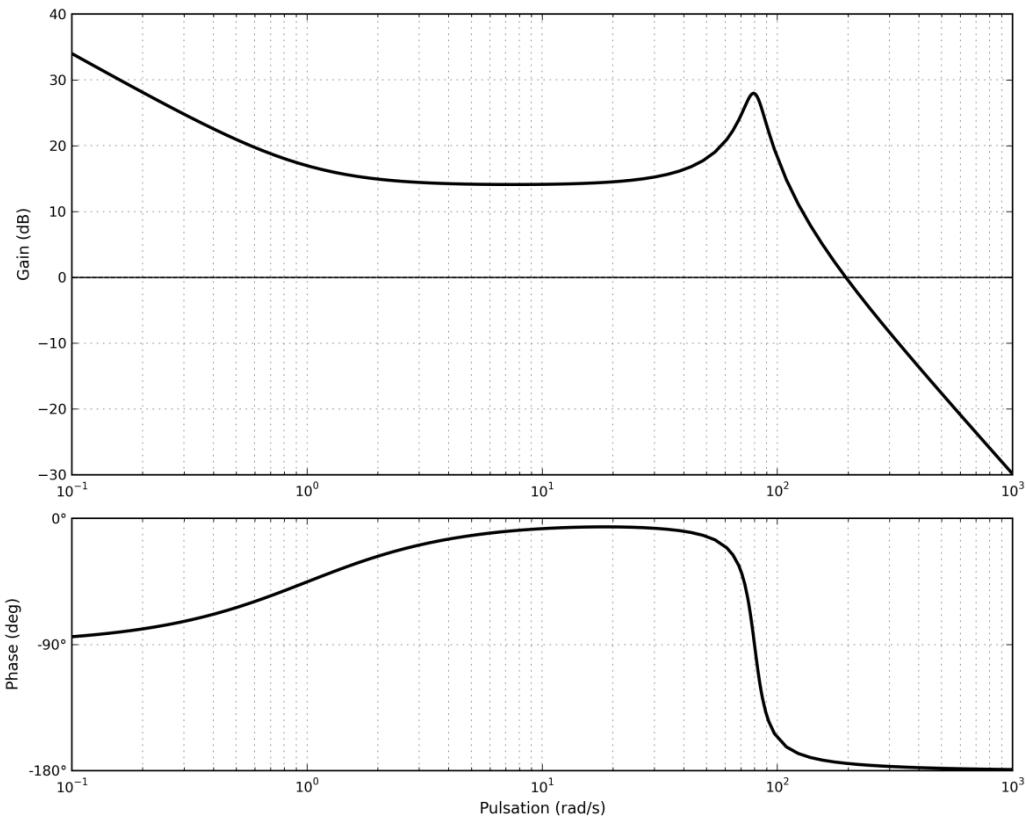


**Question 3** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :  $H(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$ . Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de  $H(p)$ .



**Question 4** On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale :  $e(t) = 3 \sin 300t$ . Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

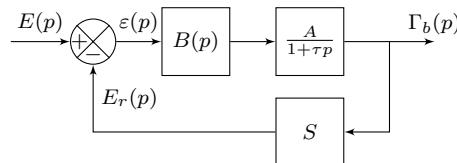
**Question 5** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a :  $\text{Max}(G_{dB}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ .



**Question 6** Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

## Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité  $S$  est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.



On a  $A = 100 \text{ g ms}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ,  $\tau = 0,2 \text{ s}$  et  $S = 10 \cdot 10^{-3} / \text{g V} / (\text{m/s}^2)$  où  $g$  est l'accélération de pesanteur.  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  la tension de consigne de cet asservissement et  $\Gamma_b(p)$  la transformée de l'accélération  $\gamma b(t)$ .

$$B(p) = 1$$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude  $E_0$  égale à 0,2 V.

**Question 7** Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

**Question 8** La tension de consigne prend la forme suivante :  $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$  avec  $\omega t = 10 \text{ rad s}^{-1}$ . Déterminer  $\omega b(t)$  en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

**Deuxième étude :**  $B(p) = \frac{1}{p}$ .

**Question 9** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

**Question 10** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.

## Synthèse 01



## Bateau support de ROV

Concours Centrale Supelec – MP 2019

## Savoirs et compétences :



## Introduction

On s'intéresse à une grue permettant la dépose sur fond marin d'un robot dont l'objectif est d'enfoncer des câbles.



FIGURE 1 – ROV suspendu à la grue portique

**Objectif** Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

La société TravOcéan souhaite pouvoir travailler dans des conditions de mer difficiles pour limiter au maximum les périodes d'arrêt des chantiers. Pour cela, elle souhaite disposer d'un système de treuillage de ses ROV certifié pour une houle d'amplitude verticale de 5 m. Le tableau suivant présente un extrait du cahier des charges correspondant.

Exigence	Critère	Niveau
Id 1.1 Compensation des mouvements du ROV pour une houle d'amplitude de 5 m et de pulsations comprises entre $0,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ à $1,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	Amplitude verticale du ROV maximale	$< 1 \text{ m}$ pour 5 m d'amplitude de houle
Id 1.2 Mise en tension du câble	Temps de réponse, $t_{r5\%}$	$< 3 \text{ s}$

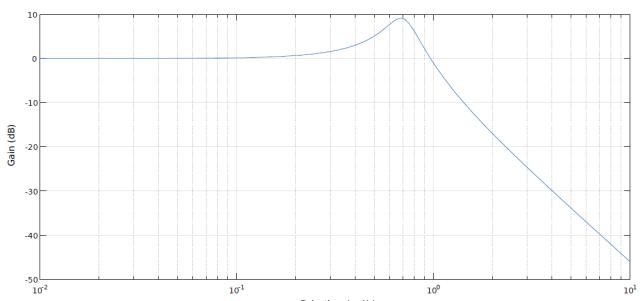
Extrait du cahier des charges

Une étude expérimentale en bassin de carène a permis d'obtenir un modèle de comportement de l'ensemble  $S = \{\text{bateau} + \text{portique} + \text{ROV}\}$  suivant l'axe vertical, sous l'effet de la houle, au point d'ancrage du ROV sur la grue portique.

La fonction de transfert de l'ensemble  $S$  est  $B(p) = \frac{Y_S(p)}{Y_{\text{vague}}(p)}$  avec  $Y_S(p)$  la transformée de Laplace de la variation du déplacement vertical du point d'ancrage du ROV et  $Y_{\text{vague}}(p)$  la transformée de Laplace de la variation du déplacement de la surface de l'eau à la verticale du point d'ancrage du ROV.

**Question 1** Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Le tracé du gain de  $B(p)$  dans la figure suivante.



**Question 2** En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

## Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

**Objectif** Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Pour compenser les effets de la houle, une solution hydropneumatique est alors envisagée. Ce système est un compensateur de houle passif noté PHC (Figure 2).

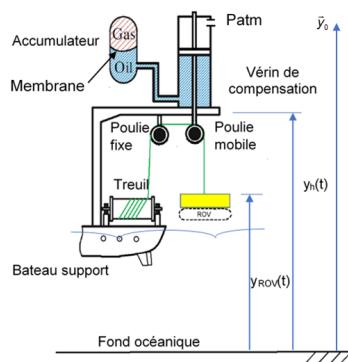


FIGURE 2 – Schéma d'implantation du PHV (non à l'échelle)

Les petites variations de pression  $\Delta p_E(t)$  et  $\Delta p_G(t)$  autour du point d'équilibre peuvent être définies par  $\Delta p_E(t) = p_E(t) - P_{E0}$  et  $\Delta p_G(t) = p_G(t) - P_{G0}$ . Une étude de mécanique des fluides a permis d'obtenir les relations (1) et (2).

$$\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = \frac{K}{V_E} A \left( \frac{dy_h(t)}{dt} - \frac{dy_{ROV}(t)}{dt} \right) + \frac{K}{V_E} C_{qR} (\Delta p_G(t) - \Delta p_E(t)) \quad (1)$$

$$\frac{d\Delta p_G(t)}{dt} = \frac{r P_{G0} C_{qR}}{V_{G0}} (\Delta p_E(t) - \Delta p_G(t)) \quad (2).$$

À l'équilibre, le principe fondamental de la statique se traduit par  $-Mg + A(P_{E0} - P_{atm}) = 0$ .

Le théorème de la résultante dynamique appliquée à  $\Sigma$  se traduit par  $S\Delta p_E(t) = M\ddot{y}_{ROV}(t) + c(y_{ROV}(t) - y_h(t))$ .

L'hypothèse du fluide incompressible se traduit par  $\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = 0$ .

**Question 3** Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme :

$\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{ROV}(p))$ . Exprimer  $K_1$  et  $\tau_1$  en fonction de  $A$ ,  $V_{G0}$ ,  $r$ ,  $C_{qR}$  et  $P_{G0}$ .

**Question 4** Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \text{ Exprimer } \omega_0, \zeta \text{ et } \tau \text{ en fonction des constantes définies précédemment.}$$

On utilisera dans toute la suite la relation  $\tau \omega_0 = 2\zeta$ .

**Question 5** Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC,  $H(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_h(p)}$ , en faisant apparaître ses caractéristiques. Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

**Question 6** Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC},  $G(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_{vague}(p)}$  en fonction de  $H(p)$  et  $B(p)$ . Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de  $G(p)$ .

Des réglages pour différentes valeurs de pulsation de la houle  $\omega_c$  et de gain maximal acceptable du compensateur ont été effectués. La Figure 3 donne les diagrammes du gain de la fonction  $G(p)$  de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC} pour quatre réglages. Les volumes du gaz  $V_{G0}$  correspondant à chaque réglage sont donnés dans le tableau ci-après.

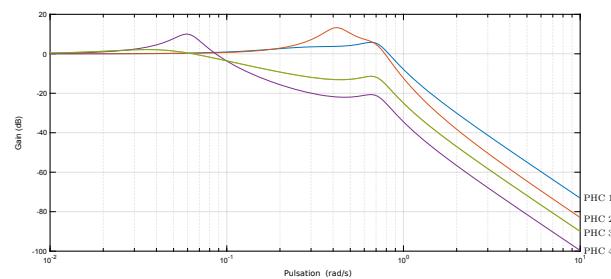


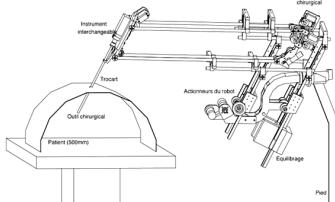
FIGURE 3 – Courbes de gain  $G(p)$  pour différents réglages du PHC

Réglage	PHC 1	PHC 2	PHC 3	PHC 4
$V_{G0}$ (m <sup>3</sup> )	96	1	52	2
Volumes $V_{G0}$ pour différents réglages du PHC				

Pour respecter l'exigence Id 1.1, le gain de la fonction de transfert de l'ensemble doit toujours être inférieur à  $-14$  dB.

**Question 7** Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

## Synthèse 02

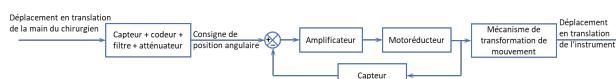


## Présentation

On s'intéresse au robot de chirurgie endoscopique « Endoxirob ». Il est nécessaire de permettre à l'instrument chirurgical de se mouvoir avec des performances dynamiques comparables ou meilleures que celles réalisées par un chirurgien humain. L'étude est effectuée uniquement pour l'axe « d'élévation » selon  $\vec{z}_1$ .

Req.	Exigence	Niveaux
1	Vitesse de translation nominale	$> 0,1 \text{ ms}^{-1}$
2	Temps $t_1$ pour atteindre la vitesse nominale	100 ms maximum
3	Précision – Écart statique	$< 0,2 \text{ mm}$
4	Précision – Retard de traînage pour une rampe de $0,1 \text{ ms}^{-1}$	$< 0,1 \text{ s}$
5	Stabilité – Dépassement	Aucun
6	Stabilité – Marge de phase	45°
7	Rapidité – Bande passante à $-3 \text{ dB}$ pour la partie mécanique	4 Hz

La figure suivante présente le schéma-blocs de l'axe d'élévation (selon  $\vec{Z}_1$ ) du dispositif de commande de l'instrument chirurgical.



La console permet de capter le déplacement de la main, de le coder, de le corriger éventuellement afin d'ébaucher la consigne de position angulaire du rotor moteur. La position angulaire est ensuite transformée en position linéaire de l'instrument par un mécanisme de transformation de mouvement à crémaillère.

La figure suivante présente de façon simplifiée, la chaîne cinématique de l'axe d'élévation :

- l'actionneur est un moto-réducteur (1) à courant continu Gammatic n° RH-8D-6006; le premier étage de transmission du mouvement se fait par une courroie crantée (2) qui s'enroule sur des poulies de même diamètre pour entraîner l'arbre intermédiaire (3);
  - une roue dentée (3') de diamètre primitif  $\Phi_1 = 38,4\text{ mm}$  solidaire de l'arbre intermédiaire (3) engrène avec une crémaillère (4) solidaire de la partie supérieure mobile du robot;

## Robot pour la chirurgie endoscopique

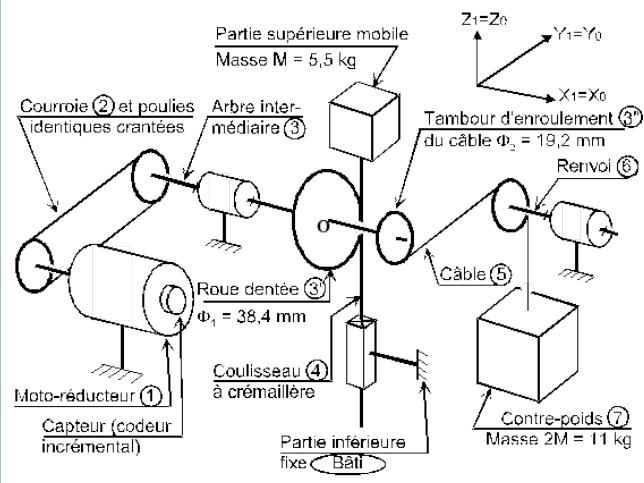
Banque PT – SIA – 2005

### ***Savoirs et compétences :***



- cette crémaillère est en liaison glissière d'axe  $\overrightarrow{z_1}$  par rapport à la partie inférieure du robot considérée comme fixe dans cette partie du sujet, et notée « Bâti ».

Pour équilibrer le poids de la partie supérieure (coulisseau compris) de masse  $M = 5,5\text{kg}$ , les ingénieurs ont placé un contre-poids (7) de masse  $2M = 11\text{kg}$  tiré par un câble qui s'enroule sur un tambour (3") de diamètre  $\Phi_2 = \frac{\Phi}{2} = 19,2\text{mm}$  solidaire de l'arbre intermédiaire (3).



Le constructeur du moto-réducteur donne les caractéristiques mécaniques en sortie du réducteur ce qui permet de considérer le moto-réducteur comme un « moteur qui tourne lentement avec un couple élevé » :

- puissance nominale en sortie du réducteur :  $P_{\text{nom}} = 8,6\text{W}$ ;
  - couple nominal en sortie du réducteur :  $C_{\text{nom}} = 1,4\text{Nm}$ ;
  - couple de maintien en sortie du réducteur :  $C_{\text{maint}} = 1,5\text{Nm}$ ;
  - couple maxi en sortie du réducteur :  $C_{\text{max}} = 2,7\text{Nm}$ ;
  - vitesse nominale en sortie du réducteur :  $N_{\text{nom}} = 60\text{tr min}^{-1}$ ;
  - vitesse maxi en sortie du réducteur :  $N_{\text{max}} = 100\text{tr min}^{-1}$ ;
  - moment d'inertie total ramené à l'arbre de sortie du réducteur :  $J_1 = 3,70 \times 10^{-3}\text{kg m}^2$ ;
  - capteur de position : codeur 360 incrémentés par tour monté sur le rotor du moteur;

- rapport de réduction : 50 (n'interviendra que dans le calcul de la résolution du capteur).

### Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

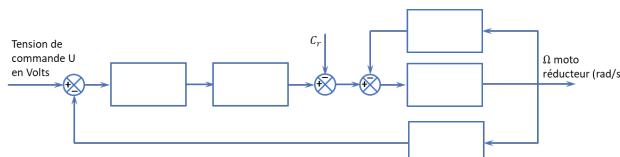
Le constructeur donne les caractéristiques électromécaniques exprimées à la sortie du réducteur. On rappelle les équations temporelles :  $u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_{\text{rédu}}(t)$ ,  $C_{\text{rédu}}(t) = k_c i(t)$ ,  $C_{\text{rédu}}(t) - C_r - f_v \omega_{\text{rédu}}(t) = J_{\text{équ}} \frac{d\omega_{\text{rédu}}(t)}{dt}$ .

Avec :

- $u(t)$  tension appliquée aux bornes de l'induit
- $i(t)$  intensité du courant traversant l'induit
- $e(t)$  force électromotrice induite par la rotation du moteur, évaluée à la sortie du réducteur;
- $\omega_{\text{rédu}}(t)$  vitesse de rotation à la sortie du réducteur;
- $C_{\text{rédu}}(t)$  couple moteur ramené à la sortie du réducteur;
- $R = 10\Omega$  : résistance de l'induit;
- $L = 2,2\text{ mH}$  inductance de l'induit;
- $k_c = 2,1\text{ N mA}^{-1}$  constante de couple évaluée à la sortie du réducteur;
- $k_e = 2,1\text{ V s rad}^{-1}$  constante de f.e.m évaluée à la sortie du réducteur;
- $C_r = 0,2\text{ N m}$  couple résistant induit par les frottements secs, ramené à la sortie du réducteur
- $f_v = 0,04\text{ Nm s rad}^{-1}$  coefficient de frottement visqueux équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur
- $J_{\text{équ}} = 7 \times 10^{-3}\text{ kg m}^2$  moment d'inertie équivalent à toutes les pièces en mouvement, ramené à la sortie du réducteur.

Les transformées de Laplace des fonctions  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $e(t)$ ,  $\omega_{\text{rédu}}(t)$ ,  $C_{\text{rédu}}(t)$  sont respectivement  $U(p)$ ,  $I(p)$ ,  $E(p)$ ,  $\Omega_{\text{rédu}}(p)$  et  $C_{\text{rédu}}(p)$ . On considère toutes les conditions initiales nulles.

**Question 1** Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.



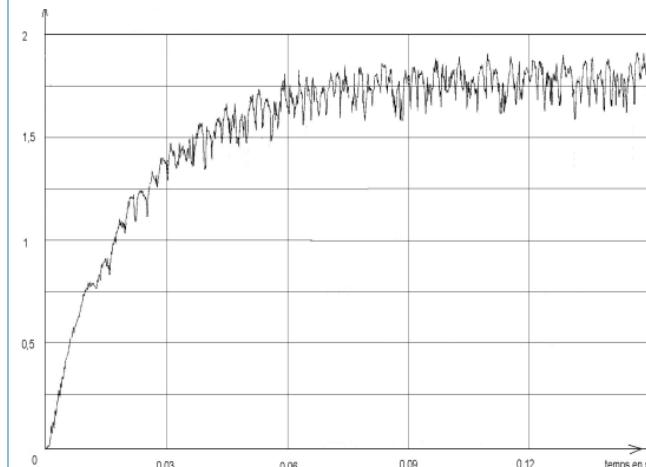
**Question 2** Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur  $M(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)}$  lorsque  $C_r(p) = 0$ .

Quel que soit le résultat obtenu à la question précédente, on utilisera l'expression de  $M(p)$  suivante :  $M_1(p) = 0,436$

$$1 + 14,5 \cdot 10^{-3} p + 3,1 \cdot 10^{-6} p^2.$$

Sur le système de levage non asservi c'est à dire avec le capteur de position angulaire déconnecté, on a pratiqué, un essai en charge, en donnant au moteur un échelon de tension  $u(t) = 24\text{ V}$ . Avec une génératrice tachymétrique

dont le gain est de  $0,166\text{ V s rad}^{-1}$ , on a tracé la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$ .



Remarque : la partie supérieure du robot est supposée rigide pendant cet essai.

**Question 3** Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance  $L$ .

**Question 4** Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de  $M_1(p)$  lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de  $L$ ) étant rejeté.



Un pôle est dit dominant par rapport à un autre quand sa partie réelle est grande devant l'autre.

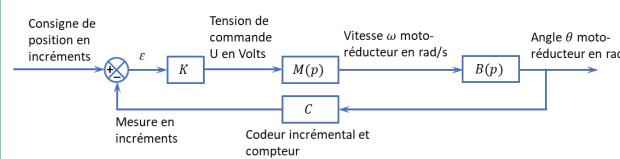
**Dans la suite du problème, on néglige l'inductance  $L$  du moteur.**

**Question 5** Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur  $M_2(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + T p}$ . Donner les valeurs numériques de  $G_s$  et de  $T$  à partir de l'expression de  $M_1(p)$  et des réponses apportées précédemment.

**Question 6** Déterminer les valeurs de  $G_s$  et  $T$ , à partir de la courbe de tension image de  $\omega_{\text{rédu}}(t)$  (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).

### Respect du critère de marge de phase

La boucle d'asservissement de la position angulaire de l'arbre de sortie du réducteur est définie par le schéma-blocs figure suivante. La consigne de position en incrément est élaborée par le calculateur, à partir des informations envoyées par la console.



Le convertisseur-amplificateur  $K$  de gain  $k$  variable élabore la commande du moteur. Le codeur incrémental  $C$  placé sur le rotor du moteur a une résolution de 360 incrément par tour. Il est associé à un compteur-décompteur qui élabore la mesure de position en incrément. Le système est discret (non continu) mais on l'assimile à un système continu car le comptage est très rapide. Le réducteur a un rapport de réduction de 50.

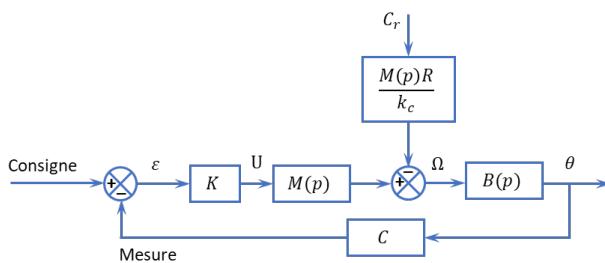
**Question 7** Donner la fonction de transfert du bloc  $B(p)$  et la valeur du coefficient du bloc  $C$  en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de  $k$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_0(p)$ .

**Question 8** Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour  $k = 1$ . Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de  $k$ ? Justifier.

**R** Au vu de l'exigence 6, on admet que le système est stable en boucle fermé si, sur le tracé de Bode de la boucle ouverte, lorsque le gain est nul, la phase est supérieure à  $-180 + 45 = -135^\circ$ .

**Question 9** Calculer l'écart statique  $\epsilon_{\text{cons}\infty}$  en incrément lorsque la consigne est un échelon de position :  $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$ .

Étant donné que la perturbation  $C_r$  intervient entre deux blocs de  $M(p)$ , on adopte le schéma de la figure suivante pour faciliter les calculs de la question suivante.



**Question 10** Calculer, pour la valeur  $k_{45}$  de  $k$  établie précédemment, l'écart statique  $\epsilon_{\text{per}\infty}$  en incrément entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant  $C_r u(t)$  induit par les frottements secs.

**Question 11** La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incrément pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc  $K$  qui annulerait cet écart.

## Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

### Modélisation par schéma-blocs



## Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

Lorsque la boucle d'asservissement est bien réglée, la fonction de transfert est :  $H_1(p) = \frac{\Theta(p)}{\text{Cons}(p)} = \frac{0,00035}{1 + 0,014p + 0,00017p^2}$ . On rappelle que la courroie s'enroule sur des poulies de même diamètre et que la roue dentée qui engrenne avec la crémaillère a un diamètre  $\Phi_1 = 38,4$  mm.

**Question 12** Exprimer le coefficient du bloc  $H_2$  et préciser l'unité.

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

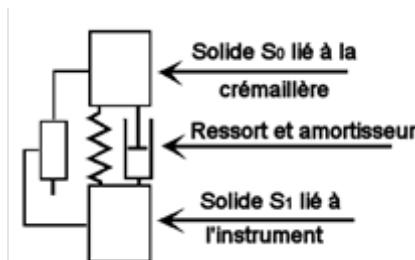
**Question 13** Quelle relation doit vérifier le produit  $P$  des gains des blocs  $C_1, H_1, H_2$ ? Justifier. Exprimer le coefficient  $c_1$  en incrément par mètre du bloc  $C_1$ .

Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

**Question 14** Exprimer le nouveau coefficient  $c_2$  du bloc  $C_1$  ainsi que le nouveau produit  $P_1$ .

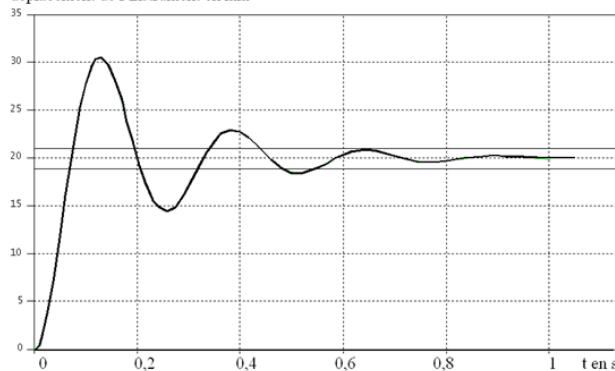
## Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

La partie supérieure du robot est constituée par assemblage de tubes minces en fibres de carbone. On modélise cette partie par deux solides :  $S_0$  représentant la crémaillère et les solides qui y sont liés; et  $S_1$  représentant l'instrument chirurgical. Ces solides sont considérés en liaison glissière parfaite et reliés par un ressort de raideur  $k_0$  et un amortisseur de coefficient  $f_0$ , montés en parallèle comme le montre le schéma.

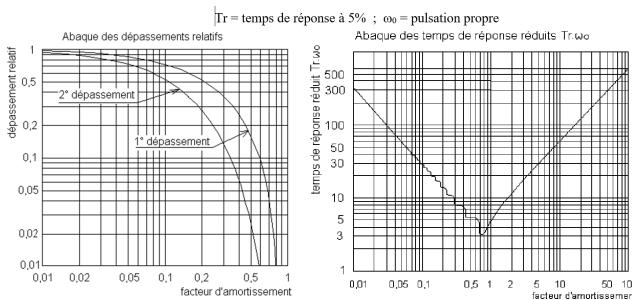


Pour identifier la fonction de transfert  $H_3(p) = \frac{D_{\text{instrum}}(p)}{D_{\text{crem}}(p)}$  de cette partie, on a imposé à la crémaillère un échelon de déplacement  $d_{\text{crem}}(t) = 20 \times 10^{-3}$  m à partir de la position d'équilibre. On a tracé la courbe de déplacement  $d_{\text{instrum}}(t)$  de l'instrument.

déplacement de l'instrument en mm



On donne sur la figure suivante les abaques des dépassesments relatifs et des temps de réponse réduits d'un système du second ordre.



**Question 15** Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert  $H_3(p)$ ; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.

**Question 16** Le critère de la bande passante de 4 Hz à  $-3 \text{ dB}$  est-il satisfait?

Les questions suivantes vont permettre de déterminer l'expression analytique de  $H_3(p)$ , de façon à analyser l'influence du paramètre de raideur, pour respecter le critère de bande passante du cahier des charges.

Soit  $m_1$  la masse du solide  $S_1$ . L'axe du mouvement est vertical ascendant et noté  $\vec{z}$ . L'origine  $O$  du mouvement de  $S_1$  correspond à la position pour laquelle le ressort est à sa longueur libre. Soit  $a_0$  l'allongement du ressort dans la position d'équilibre qui prend en compte l'action de la pesanteur. Nota :  $a_0$  est négatif car on considère qu'il y a allongement du ressort.

L'équation du mouvement du ressort autour de la position d'équilibre est donné par :  $m_1 \frac{d^2z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0$ .

**Question 17** Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique :  $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$ , exprimer le coefficient d'amortissement  $\xi_3$  et la pulsation propre  $\omega_{03}$  du mouvement en fonction de  $k_0$ ,  $f_0$ ,  $m_1$ .

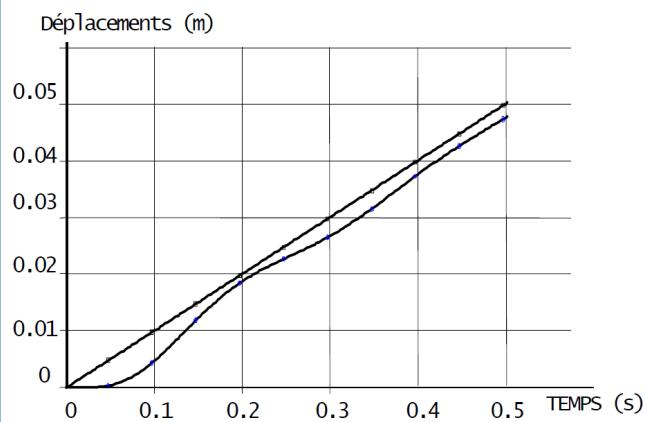
On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface :  $m_1 = 1,6 \text{ kg}$ .

**Question 18** Pour la valeur de  $\omega_{03}$  calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur  $k_0$  (en  $\text{N/m}$ ) qui permettrait de respecter le critère de la bande

passante à  $-3 \text{ dB}$  de 4 Hz. (On notera que  $\omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03}$ ).

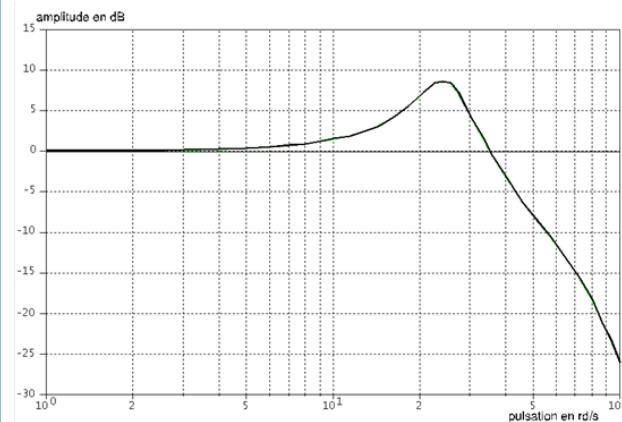
### Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

On conserve la valeur  $c_1$  du bloc  $C_1$ . La fonction de transfert du système est :  $H(p) = \frac{D_{\text{instrument}}(p)}{D_{\text{main}}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,014p + 0,00017p^2)(1 + 0,015p + 0,0014p^2)}$ . Le chirurgien impose avec sa main une rampe de déplacement de  $100 \text{ mm s}^{-1}$ . On a tracé sur la figure suivante les courbes de déplacement de la main et de l'instrument.



**Question 19** Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal; de l'écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère?

On donne, la courbe d'amplitude (gain) de  $H(p)$  pour  $p = j\omega$  dans le plan de Bode. La main du chirurgien est prise d'un tremblement sensiblement sinusoïdal dont la période est de 0,25 s et l'amplitude 1 mm.



**Question 20** Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale?

### Amélioration des performances dynamiques

On souhaite limiter l'amplitude du mouvement de l'outil lors du tremblement de la main en filtrant le signal

traité par le capteur-codeur  $C_1$  de sorte que les tremblements n'apparaissent plus sur le soustracteur. On propose trois filtres du premier ordre, de gains statiques égaux à 1 et de constantes de temps :  $T_1 = 0,04\text{ s}$ ;  $T_2 = 0,1\text{ s}$ ;  $T_3 = 0,5\text{ s}$ .

**Question 21** *Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la*

*période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténués de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?*

## Synthèse 03



## Système de freinage d'un TGV DUPLEX

Concours Centrale Supelec PSI 2006

## Savoirs et compétences :

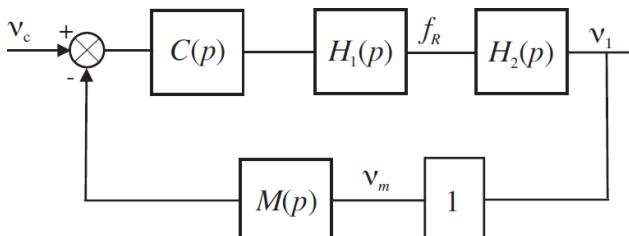


## Mise en situation

L'objet de cette étude est l'analyse du système de freinage mécanique à énergie pneumatique installé sur les TGV Duplex. Par soucis de sécurité, il est indispensable d'éviter le blocage des roues (phénomène appelé en-rayage) lors du freinage. Pour cela il est nécessaire de maîtriser la vitesse de glissement entre la roue et le rail.

**Objectif** L'objectif est d'étudier la loi de commande du dispositif d'anti-enrayage et plus précisément le calcul du correcteur de la boucle de régulation.

On suppose, pour la suite, que l'architecture de la boucle de régulation est représentée sur la figure suivante où  $v_c$  est la consigne de glissement.



Structure de la chaîne de régulation de glissement

On note :

- $H_1(p)$  la fonction de transfert de l'actionneur de freinage (vérin pneumatique + électrovalve) ;
- $H_2(p)$  la fonction de transfert de la roue au freinage ;
- $C(p)$  le correcteur de la boucle de régulation ;
- $M(p)$  la fonction de transfert de la chaîne de mesure du glissement, cette chaîne comporte un filtre destiné à limiter l'impact des bruits de mesure ;
- $v_m$  : glissement estimé.

On adoptera pour la suite :  $H_1(p) = \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}$  et  $M(p) = \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

Pour une vitesse de train  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ , le cahier des charges est résumé par les données du tableau suivant et les données numériques utilisées sont données ci-dessous. Enfin, les problèmes liés à l'évolution de la vitesse du train par rapport au rail  $V_T$  ne font pas l'objet de cette étude.

On a  $M = 8200 \text{ kg}$ ,  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ ,  $I/r^2 = 400 \text{ kg g}^{-1} \text{ m}^{-2}$ .

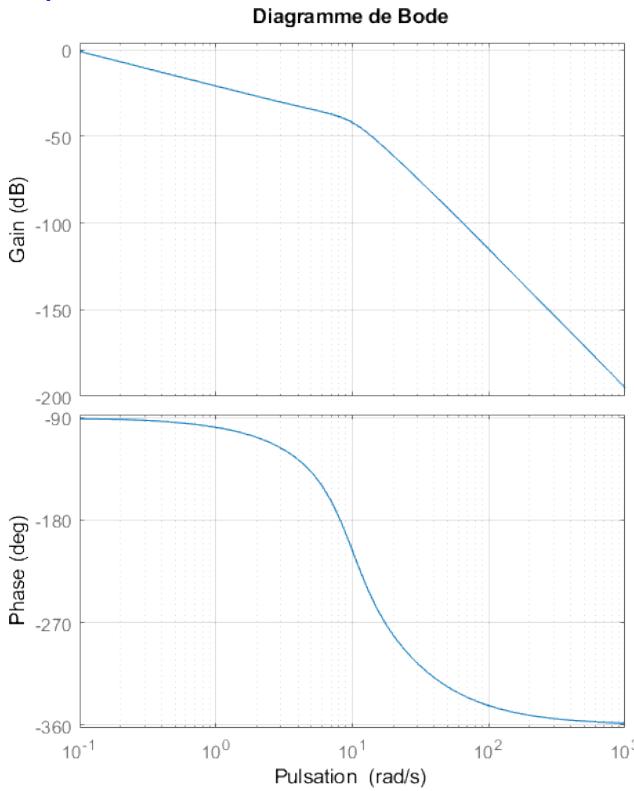
Marges de stabilité, performances en boucle ouverte	
Pulsation de coupure à 0 dB	$\omega_c \simeq 1 \text{ rad s}^{-1}$
Marge de phase	$\Delta\varphi \geq 60^\circ$ au point de fonctionnement nominal $B$
Stabilité quel que soit le point de fonctionnement sur la caractéristique $\mu = f(v)$	
Réponse à un échelon de consigne de glissement	
Écart en régime permanent	Nul
Temps du 1 <sup>er</sup> maximum	$t_m \leq 3,5 \text{ s}$
Dépassement	$D \simeq 18\%$
Réponse à une variation en échelon de l'adhérence	
Écart en régime permanent	Nul
Temps de réponse	$t_r \leq 9 \text{ s}$

Cahier des charges de la boucle de régulation de glissement pour  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ 

## Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

On donne la fonction de transfert entre le glissement relatif et la force de freinage :  $H_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_R(p)} = \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}$ .

**Question 1** En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.



### Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type P.I. dont la fonction de transfert est :  $C(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

**Méthode** Si on note  $\omega_c$  on définit la pulsation de coupure telle que  $|\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$ . On peut alors définir la marge de phase par  $M\varphi = \arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ)$ .

**Question 3** Calculer la valeur minimale,  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

**Méthode** Il faut chercher  $K_r$  tel que  $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0$ .

### Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

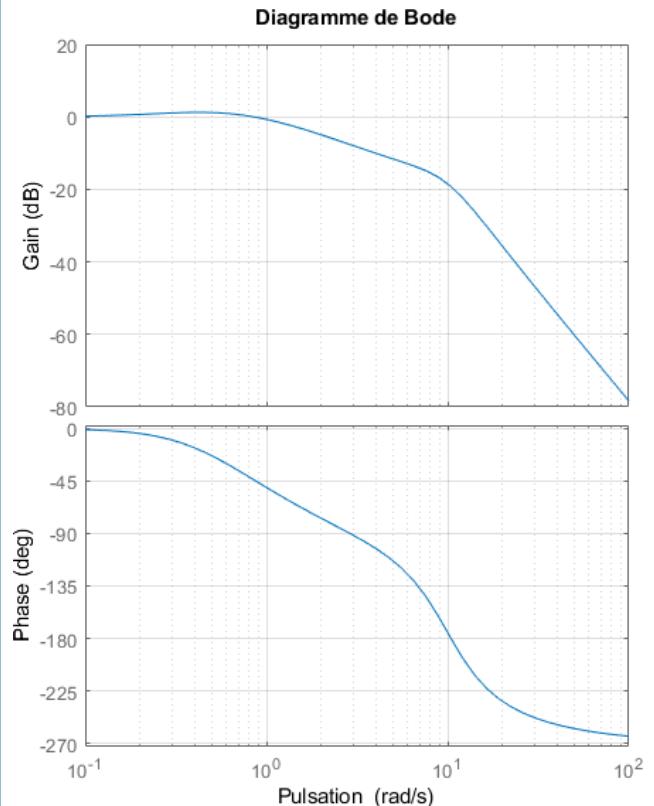
Le correcteur de la boucle de régulation du dispositif d'anti-enrayage a été déterminé à partir de considérations sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte (pulsation de coupure à 0 dB et marge de phase). Aussi l'objectif de cette partie est de vérifier que le correcteur déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Cette vérifi-

cation concerne d'une part les performances vis-à-vis des variations de la consigne de glissement : temps du 1<sup>er</sup>maximum, dépassement, écart en régime permanent et d'autre part la réponse vis-à-vis des variations d'adhérence.

Au regard de la réponse fréquentielle en boucle fermée  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)}$ , on décide de modéliser la transmittance correspondante par la fonction suivante :  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2 \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$ .

On supposera sans aucune justification que  $\omega_0 > \frac{1}{\tau_2}$ .

**Question 5** En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.



**Question 6** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

**Question 7** En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert  $F(p)$  par la forme suivante :  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

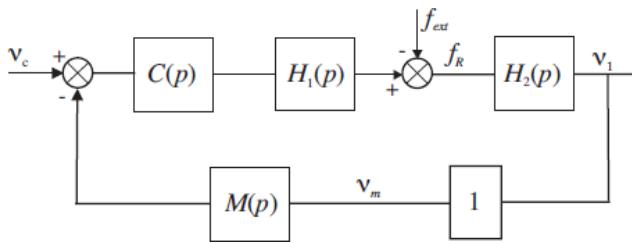
On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement :  $f(t) = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t)$ .

**8.0.0.0.2** Calculer le temps du 1<sup>er</sup>maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $v_c(t) = v_{c0}u(t)$  où  $u(t)$  désigne l'échelon unité.

**Question 8** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

### Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

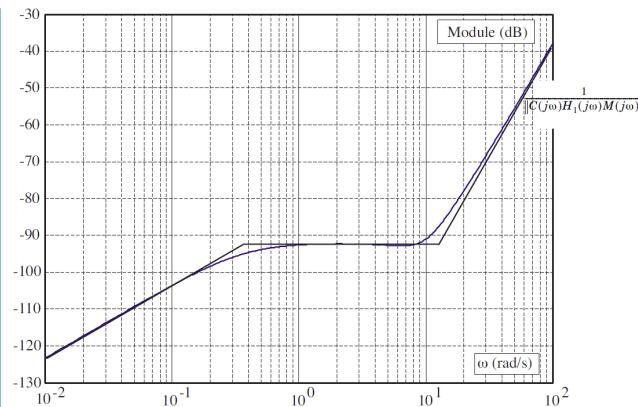
La variation d'adhérence peut être modélisée en première approximation comme une force perturbatrice externe additive. On admet que cette modélisation conduit au schéma bloc représenté sur la figure ci-dessous.



On se propose dans cette partie d'évaluer les performances de la chaîne de régulation de freinage vis-à-vis de cette perturbation.

**Question 9** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{ext}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose  $v_c$  nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :  $\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \left\| H_2(j\omega) \right\|; \frac{1}{\left\| C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega) \right\|} \right]$

**Question 10** La figure suivante comporte le tracé de la fonction  $\frac{1}{\left\| C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega) \right\|}$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction  $\|H_2(j\omega)\|$ .



**Question 11** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $\|F_2(j\omega)\|$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p)$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

**Question 12** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme :  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

**Question 13** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{ext} = F_0 u(t)$ , où  $u(t)$  représente l'échelon unité et avec  $F_0 = 2000 \text{ N}$ .

**Question 14** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale  $v_1(0)$  (valeurs à considérer en valeur absolue).

### Retour sur le cahier des charges

**Question 15** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

1. ...
2.  $\arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ$ .
3.  $T_i \geq \tan(68,5) = 2,54 \text{ s}$ .
4. \*\*\*
5. \*\*\*
6. \*\*\*
7. \*\*\*
8. \*\*\*
9. \*\*\*
10. \*\*\*

## Synthèse 04



## Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec PSI 2016

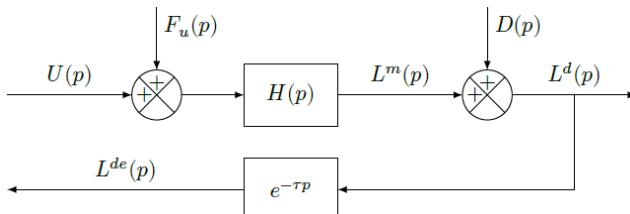
## Savoirs et compétences :



## Mise en situation

**Objectif** En vue d'asservir la position de la colonne vertébrale à une position de référence, une structure de commande à partir de l'estimation de la position réelle est mise en place. Après la définition des modèles nécessaires à la synthèse des lois de commande, l'objet de cette partie est de concevoir le régulateur de cette architecture de commande.

Pour la synthèse des régulateurs de la boucle externe, on adopte le modèle du procédé représenté par le schéma-blocs de la figure suivante.



Modèle du procédé pour la conception de la loi de commande de la chaîne d'asservissement

On suppose :

- qu'une première structure de commande « rapprochée » assure l'asservissement en vitesse des axes et que les caractéristiques dynamiques des six axes asservis sont identiques;
- pour un axe donné, que les efforts dus à sa rigidité, à la charge et les couplages avec les autres axes sont modélisés sous la forme d'un signal externe perturbateur unique, ramené en entrée du procédé et dont  $F_u(p)$  est la transformée de Laplace;
- que les jeux dans les liaisons sont modélisés sous la forme d'un signal perturbateur externe, dont  $D(p)$  est la transformée de Laplace, traduisant l'écart de déplacement de la position de l'axe;
- pour l'axe considéré que  $L^m(p)$ ,  $L^d(p)$  et  $L^{de}(p)$  sont respectivement les transformées de Laplace de la position non déformée, de la position de l'axe après déformation et de l'estimation de la position réelle issue de l'évaluation au moyen de l'algorithme de traitement d'images (la grandeur  $L^m$  est obtenue au moyen d'une mesure issue d'un capteur placé directement sur l'axe de l'actionneur);
- que  $U(p)$  représente la transformée de Laplace de la

grandeur de commande (homogène à une tension) de la chaîne de motorisation de l'axe considéré.

La chaîne de motorisation est modélisée par la fonction de transfert  $H(p) = \frac{L_m(p)}{U(p)} = \frac{0,5}{p(1+0,01p)}$ , la chaîne d'acquisition et le système de traitement d'images sont modélisés en temps continu comme un retard pur  $\tau = 0,04$  s. Pour la chaîne d'asservissement, le cahier des charges partiel suivant, caractérisé par une pulsation de coupure en boucle ouverte et une marge de phase fixées à priori, est rappelé :

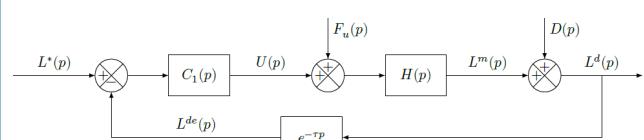
- pulsation de coupure  $\omega_c$  à 0 dB en boucle ouverte  $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$ .

Pour la conception de la loi de commande, il s'agira :

- de montrer qu'une structure mono-boucle simple ne permet pas d'assurer le cahier des charges partiel;
- d'analyser si une structure de commande adaptée aux systèmes à retard peut assurer les performances escomptées (permettant ainsi de s'affranchir du retard pur de la chaîne de mesure par traitement d'images);
- de montrer qu'une structure adaptée aux systèmes à retard complétée par une boucle interne sur la mesure de position d'un axe non déformé permet de vérifier l'ensemble du cahier des charges.

## Analyse d'une structure mono-boucle

Une solution simple est d'envisager, dans un premier temps, une structure de commande réalisée directement à partir de l'estimation  $L^{de}(t)$  de la position réelle de l'axe considéré. Cette structure, dont le correcteur est noté  $C_1(p)$  et la consigne  $L^*(p)$ , est représentée par le schéma de la figure suivante.



Structure de commande à une boucle

En raison de la présence de bruits de mesure (signaux non représentés sur les schémas fournis), il n'est pas souhaitable d'introduire d'action dérivée dans le régulateur

de cette boucle. Seuls des correcteurs de type proportionnel intégral seront envisagés.

**Question 1** La figure B du document réponse montre le diagramme de Bode de la fonction  $H(p)$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant  $C_1(p) = 1$ ).

**Question 2** Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

- compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur  $C_1(j\omega)$  doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur  $\tau$  ;
- en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allure des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral  $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{Ti1p}\right)$ , justifier qu'un correcteur de ce type :
  - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure ;
  - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

### Structure de commande adaptée à un système avec retard

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé d'utiliser une structure de commande adaptée aux systèmes comportant des retards. La figure suivante montre deux structures de commande correspondant d'une part au schéma réel (a) représentant la réalisation de la commande ( $X(p)$ ) est la transformée de Laplace d'une grandeur  $x(t)$  interne au régulateur), d'autre part un schéma fictif (b).

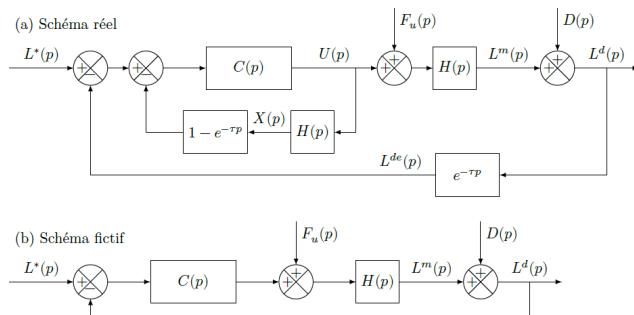


Figure 3 – Structure de commande adaptée aux systèmes à retard

**Question 3** En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral  $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{Ti p}\right)$  permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- déterminer la condition en phase, soit  $\arg(C(j\omega))$ , que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale  $T_i$  ;
- pour la valeur de  $T_i$  obtenue, déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

**Question 4** Pour une consigne nulle  $L^*(t)$ , une perturbation en sortie nulle  $d(t) = 0$  et un échelon de perturbation en entrée  $f_u(t) = F_0 h(t)$  où  $h(t)$  est l'échelon d'Heaviside :

- déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a)) ;
- compte tenu de la forme de  $H(p)$ , en déduire alors le comportement de la grandeur  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini ;
- au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

### Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé une structure à deux boucles définies ainsi :

- une boucle interne réalisée à partir de la mesure de la position non déformée de l'axe  $L^m(t)$  permet d'asservir cette grandeur à une consigne de référence  $L^{m*}(t)$ . Le calcul du correcteur de la boucle interne est hors du cadre de cette étude, et on note  $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)}$  la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle interne ;
- la boucle externe, réalisée à partir de la grandeur estimée  $L^{de}(t)$ .

La nouvelle structure de commande est représentée par le schéma de la figure suivante où la représentation de la boucle interne est limitée à sa fonction de transfert en boucle fermée  $T(p)$  où :

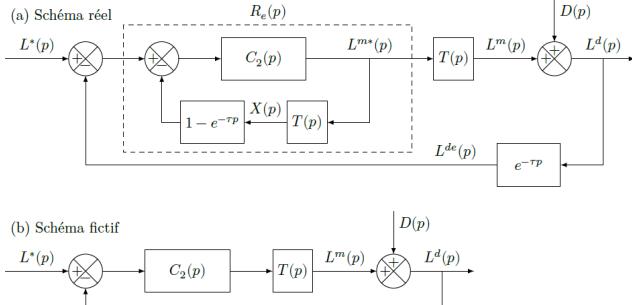
- $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}$  est la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement de position de l'axe non déformée (elle est ainsi la fonction de transfert de la boucle interne non représentée sur la figure) ;
- $L^{m*}(p)$  est la consigne de l'asservissement de la boucle interne ;
- l'effet de la perturbation  $F_u(p)$  est réduit par la boucle interne, et son influence peut être négligée ;
- les seules perturbations se limitent alors à celles dues aux jeux, soit le signal de transformée de Laplace  $D(p)$ .

Pour la conception de la loi de commande :

- une approche identique à celle de la partie précédente adaptée au cas des systèmes présentant des retards est utilisée ;
- on synthétise dans ce cas un correcteur  $C_2(p) =$

$K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{12}p}\right)$  de type PI sans prendre en compte le retard et le régulateur  $R_e(p)$  est réalisé en utilisant  $C_2(p)$  selon une structure identique à celle de la figure précédente (a) ;

- le calcul du régulateur  $C_2(p)$  ne fait pas partie de cette étude, on suppose cependant qu'il permet d'assurer les exigences du cahier des charges.



Modèle de commande avec une boucle interne intégrée

**Question 5** En utilisant la même démarche que celle

de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur  $L^m(t)$  en régime permanent, soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$ , en réponse à une perturbation  $d(t)$  en échelon  $d(t) = D_0 h(t)$ . Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur  $R_e(p)$  selon le schéma de la figure 3(a) reste stable du point de vue interne.

### Retour sur le cahier des charges

La figure suivante montre les évolutions temporelles de la position  $L^d(t)$  en réponse à une consigne en échelon  $L^*(t) = L_0 h(t - 0,02)$  avec  $L_0 = 10 \text{ mm}$  et à une perturbation en échelon  $D^*(t) = D_0 h(t - 0,02)$  avec  $D_0 = 10 \mu\text{m}$ .

**Question 6** Commenter ces courbes et, en justifiant le résultat obtenu, valider les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.

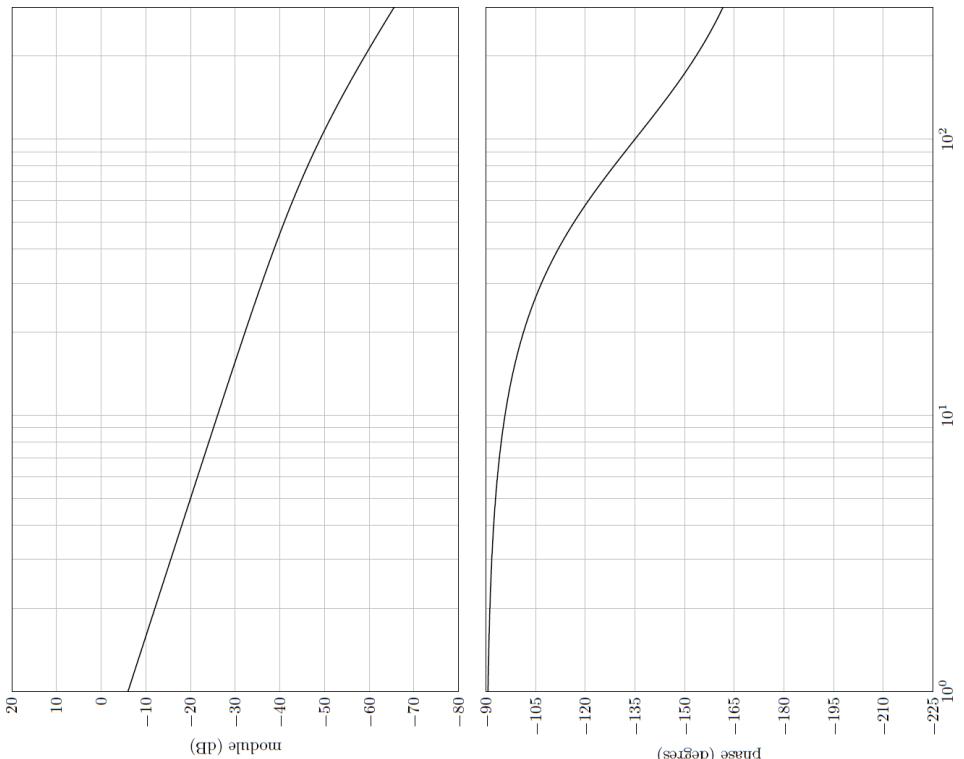
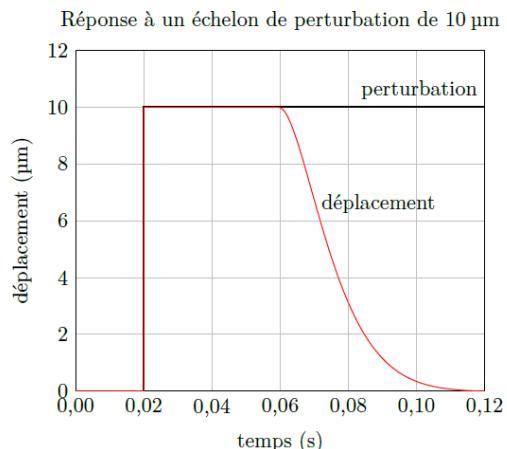
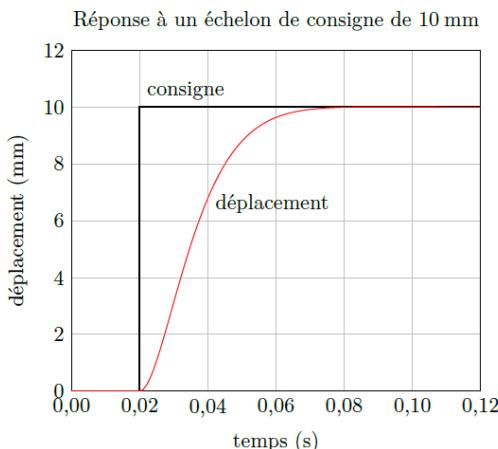


Figure B Diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$