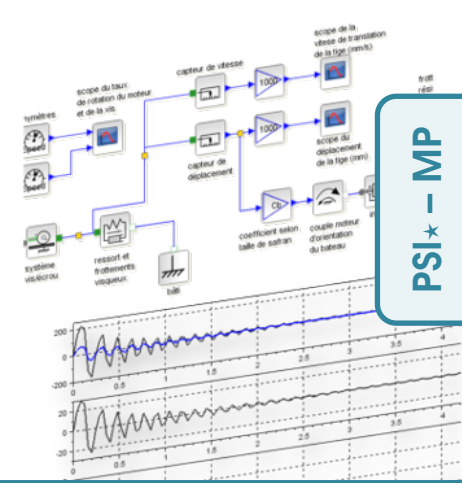


# Modéliser le comportement linéaire et non linéaire des systèmes multiphysiques

Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur

PSI★ – MP



## Chapitre 3

## Résolution des problèmes de dynamique plans à 1 mobilité

### Cours

Savoirs et compétences :

□ ...

1	Introduction	2
2	PFD : cas général	2
2.1	Principe Fondamental de la Dynamique . . . . .	2
2.2	Équations de mouvement . . . . .	2
2.3	Théorèmes généraux . . . . .	3
2.4	PFD : applications simplifiées . . . . .	3
2.5	Méthodologie . . . . .	3
3	Théorème de l'énergie cinétique dans des particuliers (mais fréquents)	4
3.1	Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide	4
3.2	Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons . . . . .	4
3.3	Énergie cinétique . . . . .	5
3.4	Énergie cinétique équivalente . . . . .	5
3.5	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	5
3.6	Méthodologie . . . . .	5
4	Loi de mouvement en trapèze	6

# 1 Introduction

## Objectif

L'objectif de ce cycle est triple. L'étude dynamique des systèmes de solide permet de

- déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en tenant compte des masses (et des répartitions de masses) des pièces ou des classes d'équivalence cinématique;
- dimensionner les actionneurs permettant d'actionner un système;
- déterminer les équations de mouvement.

On distingue deux principaux types de problèmes en dynamique :

- **type 1 :**
  - on connaît : les actionneurs et les inerties,
  - on détermine : les lois de mouvement et les actions mécaniques dans les liaisons;
- **type 2 :**
  - on connaît : les lois de mouvement et inerties,
  - on détermine : les caractéristiques des actionneurs et les actions mécaniques de liaison.

## Définition – Référentiel galiléen

Un **référentiel galiléen** se définit à partir d'un repère spatial (orthonormé direct  $(O_g; \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$ ) et d'une base de temps ( $t$ ) et est animé d'un mouvement de **translation rectiligne uniforme** (à vitesse constante) par rapport à un référentiel absolu fixe ou à un autre référentiel galiléen  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

On peut également le définir comme un référentiel « dans lequel le principe fondamental de la dynamique s'applique ».



Dans la pratique, on fera toujours la **supposition qu'un repère est galiléen**. Cela dépendra effectivement des mouvements mis en jeu et des **échelles temporelles et spatiales** considérées. Par exemple :

- pour étudier des mouvements de l'ordre de quelques minutes à l'échelle humaine, le **référentiel terrestre** (origine liée au centre de la terre et les trois axes liés au globe terrestre) est approprié;
- pour étudier les effets météorologiques (ouragans, courants marins), ou les mouvements des satellites, il convient alors de tenir compte de l'inertie de la terre et on pourra choisir le **référentiel géocentrique** (origine liée au centre de la terre et les trois axes dirigés vers trois étoiles très éloignées) comme référentiel galiléen;
- pour étudier le mouvement des planètes, il convient mieux d'utiliser le **référentiel héliocentrique** (origine liée au centre du soleil et les trois axes dirigés vers trois étoiles très éloignées).

Une chronologie galiléenne est obtenue par une horloge précise (Quartz, atomique, ou mouvement des astres). En mécanique classique (ou Newtonienne), les deux repères d'**espace et de temps** sont supposés **indépendants** ce qui n'est pas le cas de la mécanique relativiste.

## 2 Première approche du Principe Fondamental de la Dynamique

### 2.1 Principe Fondamental de la Dynamique

#### Définition – Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique

Dans le cas général, soit un ensemble matériel  $E$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), alors la somme des actions mécaniques extérieures (**torseur des actions mécaniques extérieures** s'appliquant sur  $E$ ) est égale au **torseur dynamique** du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  :

$$\{\mathcal{T}(\overline{E} \rightarrow E)\} = \{\mathcal{D}(E/R_0)\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel la relation est vérifiée. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.



- Les démarches pour le calcul du torseur dynamique seront vues ultérieurement.
- La démarche de calcul du torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur  $E$  est la même que celle vu lors de l'utilisation du PFS (ce sont les mêmes torseurs).

### 2.2 Équations de mouvement

#### Définition – Équations de mouvement

Une **équation de mouvement** est une équation différentielle du second ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure **aucune composante inconnue d'action mécanique**. Il est parfois nécessaire d'écrire plusieurs équations pour trouver par substitution une équation de mouvement. On nomme « **intégrale**

**première du mouvement** » une équation différentielle du premier ordre avec un second membre constant, obtenue par intégration d'une équation de mouvement.

## 2.3 Théorèmes généraux

Du principe fondamental de la dynamique découle plusieurs théorèmes généraux.

### Théorème – Théorème de la résultante dynamique

Pour tout ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  et de centre de gravité  $G$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur  $E$  est égale à la résultante dynamique du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  (notée  $\overrightarrow{R_d}(E/R_0)$ ) :

$$\overrightarrow{R}(\vec{E} \rightarrow E) = \overrightarrow{R_d}(E/R_0) = m\overrightarrow{\Gamma}(G, E/R_0).$$



On peut alors définir un Newton comme l'effort à mettre en œuvre pour mettre en mouvement 1 kg avec une accélération de  $1 \text{ m s}^{-2}$  en son centre de gravité  $G$ .

### Théorème – Théorème du moment dynamique

Pour tout ensemble matériel ( $E$ ) de masse  $m$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen ( $R_0$ ), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur  $E$  en un point quelconque  $A$  est égale au moment dynamique du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_0$  en  $A$  (noté  $\overrightarrow{\delta}(A, E/R_0)$ ) :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(A, \vec{E} \rightarrow E) = \overrightarrow{\delta}(A, E/R_0).$$

### Théorème – Théorème des actions mutuelles

Soient ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ) deux sous-ensembles matériels de ( $E$ ), en mouvement par rapport à un référentiel galiléen, et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. Alors :

$$\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = -\{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\}.$$

## 2.4 Principe Fondamental de la Dynamique : applications simplifiées

### Définition – Solide en translation par rapport à un référentiel galiléen

Si un ensemble matériel  $E$  (de centre d'inertie  $G$ ) est en mouvement de translation dans un référentiel galiléen ( $R_g$ ) alors :

- d'après le **théorème de la résultante dynamique** : la résultante des efforts extérieurs est égale au produit de la masse par l'accélération de  $G$  par rapport à  $R_g$  :  $m\overrightarrow{\Gamma}(G, E/R_g) = \overrightarrow{R}(\vec{E} \rightarrow E)$ ;
- d'après le **théorème du moment dynamique** : le moment des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur  $E$  est égal au vecteur nul en tout point :  $\overrightarrow{\mathcal{M}}(A, \vec{E} \rightarrow E) = \vec{0} \forall A$ .

### Définition – Solide en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen

Si un ensemble matériel  $E$  (de centre d'inertie  $G$ ) est en mouvement de rotation autour d'un axe  $\Delta$  (dirigé par  $\vec{u}$  unitaire) fixe dans un référentiel galiléen ( $R_g$ ) alors, d'après le **théorème du moment dynamique** :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(A, \vec{E} \rightarrow E) \cdot \vec{u} = J_{\Delta}(E) \cdot \ddot{\theta} \quad \forall A \in \Delta \text{ avec :}$$

- $J_{\Delta}(E)$  le moment d'inertie de  $E$  par rapport à l'axe  $\Delta$  (en  $\text{kg m}^2$ ) ;
- $\ddot{\theta}$ , l'accélération angulaire de  $E$  par rapport à  $R_g$  suivant  $\Delta$  :  $\overrightarrow{\Omega}(E/R_g) \cdot \vec{u}$ .

## 2.5 Méthodologie

**Méthode** La méthodologie de résolution d'un problème de dynamique est très similaire à celle utilisée lors de la détermination des performances statiques des systèmes.

- On choisit un repère galiléen et on effectue le bilan complet des données d'entrée du problème.
- On construit un graphe de structure.
- On isole le solide ou le système de solides considérés.
- On effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures agissant sur le système isolé.
- On écrit le PFD.

6. On projette les relations vectorielles sur les axes choisis.
7. On injecte les lois de comportement (ressort, lois de Coulomb, ...).
8. On effectue la résolution.

#### Méthode – Équations de mouvement

Idée de base : minimiser le nombre d'équations à écrire.

- Si on cherche à déterminer un couple moteur, on écrira plutôt un théorème du moment dynamique en projection sur l'axe de rotation.
- Si on cherche à déterminer l'effort transmis par un vérin, on écrira plutôt un théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe de translation.

### 3 Théorème de l'énergie cinétique dans des particuliers (mais fréquents)

**Hypothèse(s)** Nous allons traiter ici de cas particuliers du théorème de l'énergie cinétique. Une formulation plus générale sera vue ultérieurement. Les solides isolés seront forcément :

- **ou bien** en translation par rapport à un référentiel galiléen ;
- **ou bien** en rotation par rapport à un axe fixe d'un référentiel galiléen ;
- **ou bien** de masse (ou d'inertie) négligeable.

#### 3.1 Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide

**Définition – Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide (S)**

La **puissance d'une action mécanique extérieure** à un solide (S) en mouvement dans un référentiel R peut s'écrire comme le comoment entre le torseur des actions mécaniques que subit (S) et le torseur cinématique du mouvement de S dans le référentiel R.

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}.$$



On veillera bien, pour effectuer le **comoment** de deux torseurs, à les avoir exprimé au préalable **en un même point**.



- Le comoment des torseurs est défini par  $\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow S)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \\ \overline{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \end{array} \right\}_P \otimes \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S/R)} \\ \overline{V(P, S/R)} \end{array} \right\}_P$   
 $= \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overline{V(P, S/R)} + \overline{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)}.$
- Lorsque le torseur cinématique de S/R est un couple (mouvement de translation) alors en tout point A la puissance est alors donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overline{V(P, S/R)} \forall P.$
- Lorsque le torseur des actions mécaniques est un torseur couple alors la puissance est donnée par  $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/R) = \overline{\mathcal{M}(P, \text{ext} \rightarrow S)} \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R)} \forall P.$

#### 3.2 Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons

**Définition – Puissances d'actions mutuelles dans les liaisons** Si deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en liaison, on a :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}.$$

La **liaison parfaite** si et seulement si quel que soit le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  autorisé par la liaison entre ces deux solides, la **puissance des actions mutuelles entre  $S_1$  et  $S_2$  est nulle**.

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0.$$



- La notion de **liaison parfaite** s'étend facilement à une liaison équivalente à plusieurs liaisons placées en parallèle et en série entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$ . Pour cela il suffit de considérer les torseurs d'action mécanique transmissible et cinématique de la liaison équivalente.
- L'hypothèse d'une liaison parfaite a pour avantage de mettre en place le théorème de l'énergie cinétique (qui est une conséquence du principe fondamental de la dynamique) sans préjuger de la technologie de la liaison.

### 3.3 Énergie cinétique

#### Propriété – Expression avec les comoments

L'énergie cinétique peut s'exprimer comme le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}(S/R) \} \otimes \{ \mathcal{C}(S/R) \}.$$

! Il faudra bien veiller à ce que chacun des torseurs soit exprimé en un même point.

#### Propriété – Cas particuliers

- Solide  $S$  de masse  $M$  de centre d'inertie  $G$  en mouvement de **translation** par rapport à  $R$  :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} M \overline{V(G, S/R)}^2.$$

- Solide  $S$  de moment d'inertie  $I_{Oz}(S)$  en mouvement de rotation par rapport à l'**axe fixe**  $(O, \vec{z})$  par rapport  $R$  :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} I_{Oz}(S) \overline{\Omega(S/R)}^2.$$

### 3.4 Énergie cinétique équivalente

#### Définition – Énergie cinétique équivalente

Lorsqu'un problème ne comporte qu'un seul degré de liberté et pour simplifier les calculs, on peut exprimer l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble  $E$  composé de  $n$  solides  $S_i$  en fonction d'un seul paramètre cinématique. On peut alors écrire  $E_c(E/R)$

- avec **son inertie équivalente**  $J_{eq}(E)$  (en  $\text{kg m}^2$ ) rapportée à un paramètre de rotation  $\dot{\theta}(t)$  :

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} J_{eq}(E) \dot{\theta}^2.$$

- avec **sa masse équivalente**  $M_{eq}(E)$  (en  $\text{kg}$ ) rapportée à un paramètre de translation  $\dot{x}(t)$  :

$$E_c(E/R_g) = \frac{1}{2} M_{eq}(E) \dot{x}^2.$$

### 3.5 Théorème de l'énergie cinétique

#### Théorème – Théorème de l'énergie cinétique

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide  $S$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_g$  est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à  $S$ . Soit :

$$\frac{dE_c(S/R_g)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{S} \rightarrow S/R_g).$$

### 3.6 Méthodologie

#### Méthode – Équations de mouvement

- On réalise le graphe de liaisons exhaustif.
- On isole l'ensemble du mécanisme (à l'exclusion du bâti).
- On fait un bilan des puissances extérieures (et on les calcule).
- On fait un bilan des puissances intérieures (et on les calcule).
- On calcule l'énergie cinétique de l'ensemble isolé.
- On applique le théorème de l'énergie cinétique (TEC).

## 4 Loi de mouvement en trapèze

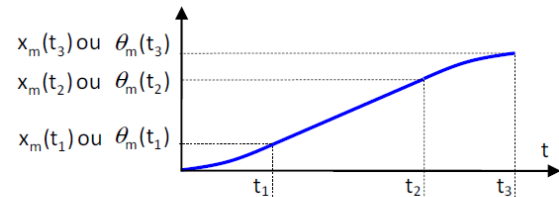
Une des lois usuellement suivie par un actionneur pour aller d'un point à un autre est une loi de mouvement de vitesse en trapèze. Ce mouvement peut être décomposé en 3 phases :

- phase 1 mouvement uniformément décéléré. L'accélération est donc constante, la vitesse croît de façon linéaire et la position de façon parabolique ;
- phase 2 : mouvement uniforme. L'accélération est nulle, la vitesse est constante et la position évolue linéairement ;
- phase 3 : mouvement uniformément décéléré. L'accélération est constante est négative, la vitesse décroît linéairement et la position évolue de façon parabolique.

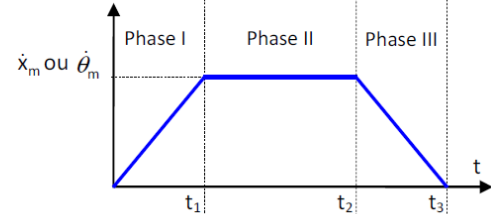
Dans le cas général, il sera souvent inutile d'écrire les équations horaires de chacune des phases. En effet, les questions liées à ces lois de mouvements sont généralement :

- d'identifier le « pire des cas » en terme de vitesse/accélération ;
- de déterminer les temps de une ou plusieurs des phases en fonction de la distance à parcourir, la vitesse maximale, l'accélération maximale ;
- de déterminer la hauteur du palier de vitesse ;
- de déterminer la distance parcourue.

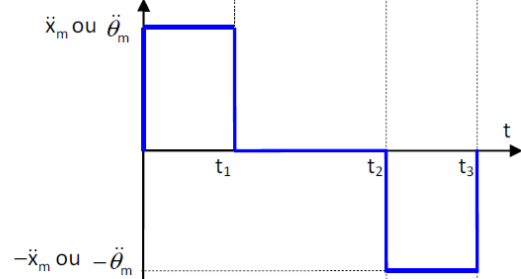
Position  $x(t)$  (mvt de translation) ou  $\theta(t)$  (mvt de rotation)



Vitesse  $\dot{x}(t)$  ou  $\dot{\theta}(t)$



Accélération  $\ddot{x}(t)$  ou  $\ddot{\theta}(t)$



**Résultat** Dans les 3 derniers points, il est souvent suffisant de remarquer en utilisant les courbes que :

- $t_1 = \frac{\dot{x}_m}{\ddot{x}_m}$  ;
- en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors de l'accélération est donnée par  $\frac{1}{2} t_1 \dot{x}_m$  ;
- en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors des 3 phases est donnée par  $2 \cdot \frac{1}{2} t_1 \dot{x}_m + (t_2 - t_1) \dot{x}_m$ .

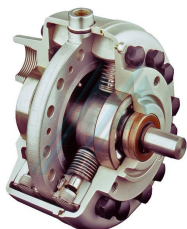
	Phase 1	Phase 2	Phase 3
Équation de position	$x(t) = \frac{1}{2} \ddot{x}_m t^2$	$x(t) = \dot{x}_m(t)(t - t_1) + x_m(t_1)$	$x(t) = -\frac{1}{2} \ddot{x}_m (t - t_2)^2 + \dot{x}_m(t)(t - t_2) + x_m(t_2)$
Équation de vitesse	$\dot{x}(t) = \ddot{x}_m t$	$\dot{x}(t) = \dot{x}_m$	$\dot{x}(t) = -\ddot{x}_m (t - t_2) + \dot{x}_m$
Équation d'accélération	$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_m$	$\ddot{x}(t) = 0$	$\ddot{x}(t) = -\ddot{x}_m$

## Références

- [1] Émilien Durif, *Introduction à la dynamique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.
- [2] Florestan Mathurin, *Introduction à la dynamique du solide*, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.



## Application 1



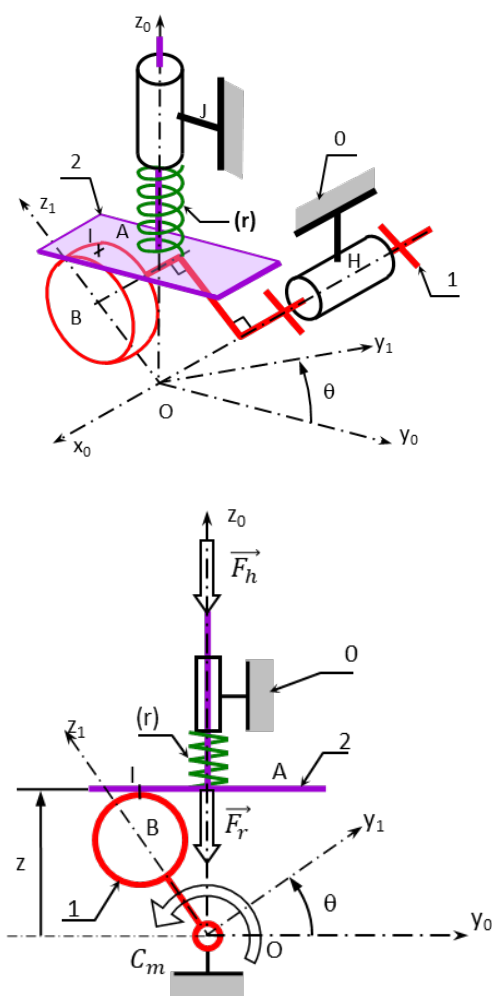
## Application – Pompe à plateau

C. Gamelon &amp; P. Dubois

## Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique ;
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Considérons le mécanisme de pompe représenté sur la figure ci-dessous.



L'arbre excentrique (1), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  horizontal, agit sur le piston (2) en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti (0). Pendant la phase de descente du piston (2), le contact ponctuel en I avec l'excentrique est maintenu par un ressort (r).

## Paramétrage

Le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti (0) est supposé galiléen. Le repère  $(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié à l'arbre excentrique (1). On a de plus :

- $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta$  ;
- $\vec{OB} = e \vec{z}_1$ ,  $\vec{BI} = R \vec{z}_0$ ,  $\vec{OA} = z \vec{z}_0$ .

Les liaisons pivot entre (0) et (1), ponctuelle entre (1) et (2), et pivot glissant entre (0) et (2) sont supposées sans frottement. Le solide (1) possède un moment d'inertie  $I_1$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_0)$ . Le piston (2) possède une masse  $m_2$ . Le ressort (r), de raideur  $k$ , est toujours comprimé. Pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , l'effort de compression est égal à  $\vec{F}_0 = -F_0 \vec{z}_0$ . Un moteur exerce un couple connu de moment  $\vec{C}_m = C_m \vec{x}_0$  sur l'arbre (1). Le fluide exerce sur le piston une action connue, représentée par un glisseur d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  et de résultante  $\vec{F}_h = -F_h \vec{z}_0$ .

## Résolution cinématique

**Question 1** En utilisant une fermeture géométrique ou la méthode de votre choix, déterminer la exprimer  $z$  en fonction de  $\theta$  et de constantes du problème. Déterminer alors  $V(A, 2/0)$  et  $\Gamma(A, 2/0)$ .

## Résolution dynamique

**Question 2** Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre  $\theta$  en utilisant le PFD.

**Question 3** Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

## Résolution énergétique

**Question 4** Proposer une méthode permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement relative au paramètre  $\theta$  en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

**Question 5** Mettre en œuvre la méthode proposée précédemment.

## Pour aller plus loin...

**Question 6** En considérant un frottement sec au niveau de la liaison ponctuelle entre (1) et (2), déterminer l'équation différentielle du mouvement.

## Application 2

## Application – Détermination de l'inertie équivalente de réducteurs

## Savoirs et compétences :

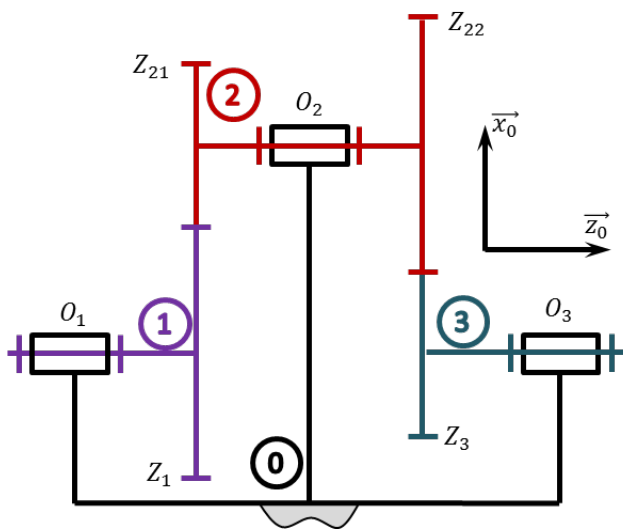
- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

## Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train simple

On donne un train d'engrenages simple avec  $Z_1$ ,  $Z_{21}$ ,  $Z_{23}$  et  $Z_3$  le nombre de dents des roues dentées. On nomme  $k_1$  le rapport du train de  $S_1$  et  $S_2$  avec  $k_1 = \frac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)}$

et  $k_2$  le rapport de  $S_2$  et  $S_3$  avec  $k_2 = \frac{\omega(3/0)}{\omega(2/0)}$ .

On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur  $C_m \vec{z}_0$  destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant  $C_r \vec{z}_0$



On rappelle que pour les engrenages à denture droite  $d = mz$  avec  $d$  le diamètre primitif,  $m$  le module,  $z$  le nombre de dents du pignon.  $\omega(1/0)$ ,  $\omega(2/0)$  et  $\omega(3/0)$  sont les vitesses de rotation de  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  autour des axes  $(O_1, \vec{x}_g)$ ,  $(O_2, \vec{x}_g)$  et  $(O_3, \vec{x}_g)$ . Le repère galiléen  $\mathcal{R}_g$  est lié au solide  $S_0$ . Les liaisons pivots sont supposées parfaites. Les moments d'inertie sont définies aux centres de masse  $G_1 = O_1$ ,  $G_2 = O_2$  et  $G_3 = O_3$  associées aux solides  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  suivant l'axe  $\vec{z}_0$  sont notés  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$ .

Le train d'engrenage est entraîné par un couple moteur  $C_m$  agissant sur la liaison pivot entre 1 et 0. Une poulie de rayon  $R$  est placée sur l'extrémité droite de l'arbre 3. Une charge de masse  $M$  y est suspendue.

**Question 1** Déterminer le rapport de réduction du train d'engrenages.

**Question 2** Déterminer l'inertie équivalente du réducteur seul ramené à l'axe moteur.

**Question 3** Déterminer l'inertie équivalente de l'ensemble réducteur et charge ramené à l'axe moteur.

**Question 4** Déterminer la relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie du réducteur.

**Question 5** Déterminer la relation entre le couple d'entrée, les grandeurs inertielles et l'accélération de l'arbre 1.



## Application 3



## Application 3 – Axe numérique

## Savoirs et compétences :

- ☐ Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- ☐ Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

Pour aller rechercher des produits dans leurs rayons, Amazon utilise des axes linéaires afin de déplacer un préhenseur.



Les performances dynamique de l'axe demandées sont les suivantes :

- vitesse linéaire maximale :  $50 \text{ m min}^{-1}$  ;
- accélération linéaire maximale :  $9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

**Objectif** L'objectif de ce travail est de déterminer les caractéristiques du moteur (vitesse et couple) permettant d'atteindre ces performances.

**Question 1** Quelle est la vitesse maximale que l'axe peut atteindre en  $\text{m s}^{-1}$ .

**Question 2** Combien de temps l'axe met-il pour atteindre la vitesse maximale ?

**Question 3** Quelle distance l'axe parcourt-il pour atteindre la vitesse maximale ?

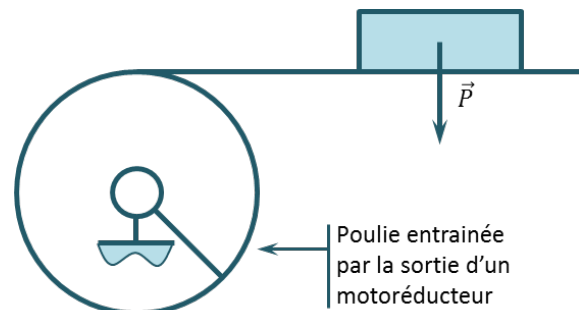
**Question 4** Quelle est la longueur minimale à commander pour que l'axe puisse atteindre la vitesse maximale ?

**Question 5** Proposer une longueur minimale de l'axe pour pouvoir profiter de ses performances dynamiques.

**Question 6** Tracer le profil de la position, de la vitesse et de l'accélération pour parcourir une distance de 50 cm. On cherchera à atteindre les performances maximales de l'axe.

Un motoréducteur permet d'entraîner un système poulie – courroie permettant de déplacer la charge. On considère :

- une charge de masse 1 kg ;
- une poulie de rayon 5 cm ;
- un réducteur de rapport de transmission 1 : 20.



**Question 7** Déterminer le couple à fournir par la poulie pour déplacer la charge lorsque l'accélération est au maximum.

**Question 8** Déterminer la vitesse et le couple à fournir par le moteur en considérant que l'inertie du motoréducteur est négligeable.

**Question 9** Donner la méthode permettant de prendre en compte l'inertie  $J$  du motoréducteur ? Quel serait l'impact de la prise en compte de cette hypothèse ?

## TD 1



## Véhicule TIM

Florestan Mathurin

## Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique ;
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

L'éco-marathon SHELL est une compétition relative à la consommation énergétique des moyens de propulsion automobile. Les concurrents doivent concevoir et piloter leur véhicule sur une distance fixée avec une vitesse minimale imposée. Les candidats sont ensuite classés en fonction de la consommation de leur véhicule, exprimée en « kilomètre par litre » de carburant. L'étude sur ce sujet, issue d'un projet élaboré par l'équipe T.I.M. de l'INSA Toulouse, a pour objet de quantifier les effets résistants et dissipatifs que sont la résistance au roulement et les actions aérodynamiques sur les performances de leur véhicule. Les effets inertiels étant plutôt quantifiés numériquement au niveau de la conception assistée par ordinateur du véhicule.

## Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

Le principe est présenté sur la figure 1. On place 2 roues lestées sur un dispositif inclinable. On considère ensuite que l'angle d'inclinaison minimum de la pente, où il y a début du mouvement des roues, est représentatif de la résistance au roulement. L'ensemble des 2 roues lestées peut être assimilé au solide 1 représenté sur la figure 1, de masse  $m$ , de rayon  $R$  et de centre de masse  $G$ .

L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  tel que  $\vec{g} = -g \vec{z}_0$ .

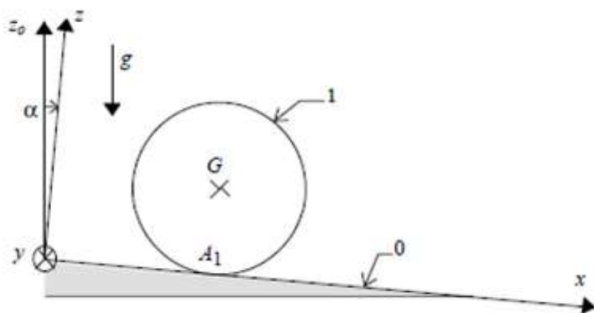


Figure 1

L'action de contact entre l'ensemble des roues 1 et le plan 0, incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, est modélisé comme un contact ponctuel avec frottement où l'on tient compte de la résistance au roulement.

Cette action de contact peut s'écrire :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} -T_{01} \vec{x} + N_{01} \vec{z} \\ -C_r \vec{y} \end{array} \right\}_{A_1}$  où  $C_r$  représente le couple de résistance au roulement qui s'oppose au roulement tel que :

$|C_r| = r|N_{01}|$  à la limite de l'équilibre et  $|C_r| < r|N_{01}|$  à l'équilibre.

**Question 1** Écrire le principe fondamental de la statique appliqué au solide 1 réduit au point  $G$  en projection sur la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 2** Déterminer l'expression analytique de l'angle  $\alpha_{\text{lim}}$  à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide 1 sur le plan 0.

Pour une masse du solide 1  $m = 50 \text{ kg}$  et pour un rayon  $R = 0,25 \text{ m}$  le roulement se produit à partir d'un angle  $\alpha_{\text{lim}}$  tel que  $\tan \alpha_{\text{lim}} = 0,008$ .

**Question 3** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $r$ .

**Question 4** Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en  $A_1$  si le coefficient de frottement au contact vaut  $f = 0,5$ .

## Modélisation du véhicule

L'objectif est d'établir un modèle analytique du véhicule, lors d'une phase de roulement sans glissement sur une ligne droite inclinée d'un angle  $\alpha$ , en l'absence de vent. En adoptant des conditions particulières d'essai, il sera possible d'identifier précisément, grâce à ce modèle, les actions aérodynamiques.

L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  telle que  $\vec{g} = -g \vec{z}_0$ . Le modèle est donné figure suivante. On considère que le véhicule se déplace sur une pente inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Le véhicule est constitué :

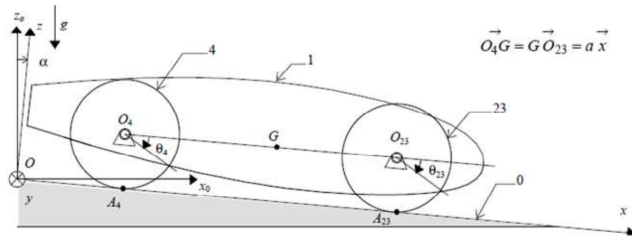
- d'un châssis avec son pilote : solide 1 de centre d'inertie  $G$ , de masse  $M$  en translation par rapport au repère galiléen  $R$  avec  $\vec{OG} = x \vec{x} + R \vec{z}$  ;
- de deux roues avant : solide 23 de centre d'inertie  $O_{23}$ , de masse  $2m$ , de rayon  $R$ , dont le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O_{23}, \vec{y})$  sera noté  $2I$ . Le solide 23 est en liaison pivot sans frottement par rapport au châssis 1 d'axe  $(O_{23}, \vec{y})$  caractérisé par le paramètre  $\theta_{23}$  ;
- d'une roue arrière motrice : solide 4 de centre d'inertie  $O_4$ , de masse  $m$ , de rayon  $R$ , dont le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O_4, \vec{y})$  sera noté  $I$ . Le solide 4 est en liaison pivot sans frottement par rap-

port au châssis 1 d'axe  $(O_4, \vec{y})$  caractérisé par le paramètre  $\theta_4$ ;

- un moteur d'entraînement du véhicule dont le corps est solidaire du châssis 1 exerce sur la roue 4 un couple moteur noté  $C_m \vec{y}$ .

Les roues sont en contact ponctuel avec frottement avec le sol 0. Afin de tenir compte de la résistance au roulement du pneu sur le sol, les actions de contact peuvent être modélisées en dynamique par :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow i)\} = \left\{ \begin{array}{l} -T_{0i} \vec{x} + N_{0i} \vec{z} \\ -N_{0i} r \vec{y} \end{array} \right\}_{A_i}$  avec  $i = 4$  ou 23.

L'ensemble du véhicule dont la carrosserie est soumis lors de son mouvement à un effort de traînée aérodynamique qui peut être modélisée par le torseur  $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 \vec{x} \\ 0 \end{array} \right\}_{O_{23}}$  avec  $\rho$  masse volumique du véhicule,  $S$  surface alaire,  $C_x$  coefficient de traînée du véhicule,  $\dot{x}$  vitesse relative du véhicule par rapport à l'air ambiant.



**Question 5** Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux points  $A_{23}$  et  $A_4$ .

**Question 6** En isolant l'ensemble  $E = 1+2+3+4$ , écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .

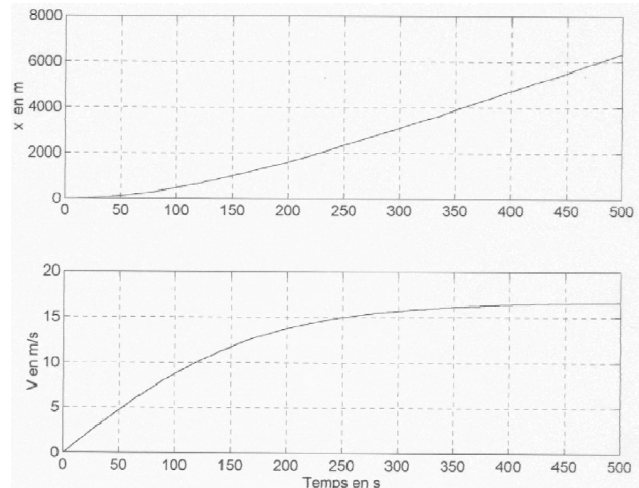
**Question 7** Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en  $O_{23}$  et  $O_4$  en projection sur  $\vec{y}$ .

**Question 8** Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur  $C_m$  vaut :  $C_m = (M + 3m)g \cos \alpha r + \left[ \frac{3I}{R} + R(M + 3m) \right] \ddot{x} - R(M + 3m)g \sin \alpha + \frac{1}{2} R \rho S C_x \dot{x}^2$ .

**Question 9** Identifier dans l'expression de  $C_m$  les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.

**Question 10** Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  quand le véhicule a une vitesse constante  $V$  sur une piste horizontale.

On réalise un essai du véhicule sur terrain horizontal, le moteur du véhicule délivrant un couple  $C_m$  constant. Les données véhicules sont :  $M = 70 \text{ kg}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $r = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $R = 0,25 \text{ m}$ ,  $C_m = 3,245 \text{ mN}$ ,  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ . L'acquisition des paramètres vitesse véhicule et distance parcourue sont visualisés par les graphes ci-dessous.



**Question 11** Déterminer dans les conditions d'essais le produit  $\frac{1}{2} \rho S C_x$  caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.

**Question 12** Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de  $5 \text{ km h}^{-1}$  (on négligera le couple de résistance au roulement).

1.  $-T_{01} + mg \sin \alpha = 0$ ;  $N_{01} - mg \cos \alpha = 0$ ;  $C_r = R T_{01}$ .
2.  $\tan \alpha_{\text{lim}} = \frac{r}{R}$ .
3.  $r = 0,002 \text{ m}$ .
4. Pour  $\tan \alpha_{\text{lim}} < f$  il y a donc roulement sans glissement.
5.  $\dot{x} = R \dot{\theta}_{23}$  et  $\dot{x} = R \dot{\theta}_4$ .
6.  $(M + 3m)g \sin \alpha - \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 - T_{04} - T_{023} = (M + 3m)\ddot{x}$  et  $-(M + 3m)g \cos \alpha + N_{04} + N_{023} = 0$ .
7.  $-r N_{023} + R T_{023} = 2I \ddot{\theta}_{23}$  et  $-r N_{04} + R T_{04} + C_m = I \ddot{\theta}_4$ .
- 8.
- 9.
- 10.
11.  $\frac{1}{2} \rho S C_x = 0,025 \text{ kg m}^{-1}$ .
12.  $\alpha = 1^\circ$ .