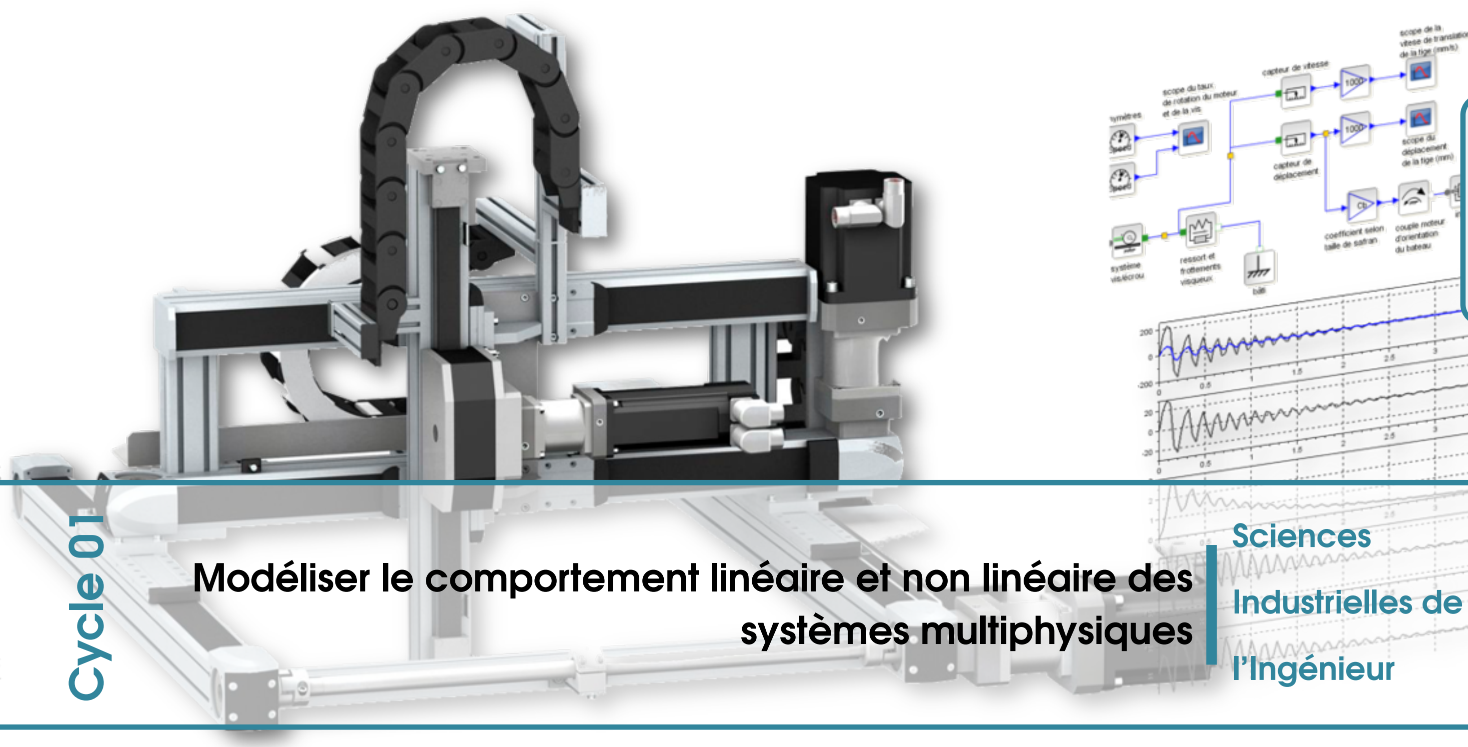

http://www.schneider-electric.fr/ - Lexium Max

PSI★ – MP

Cycle 01

Modéliser le comportement linéaire et non linéaire des systèmes multiphysiques

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Cours

Chapitre 1

Modélisation multiphysique

Savoirs et compétences :

- ❒ ...

Xavier Pessoles
PSI★ – MP

1 Introduction

Objectif

L'objectif de ce cycle est triple. L'étude dynamique des systèmes de solide permet de
- déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en tenant compte des masses (et des répartitions de masses) des pièces ou des classes d'équivalence cinématique;
- dimensionner les actionneurs permettant d'actionner un système;
- déterminer les équations de mouvement.

On distingue deux principaux types de problèmes en dynamique :
- **type 1** :
  - on connaît : les actionneurs et les inerties,
  - on détermine : les lois de mouvement et les actions mécaniques dans les liaisons;
- **type 2** :
  - on connaît : les lois de mouvement et inerties,
  - on détermine : les caractéristiques des actionneurs et les actions mécaniques de liaison.

Méthode La méthodologie de résolution d'un problème de dynamique est très similaire à celle utilisée lors de la détermination des performances statiques des systèmes.
1. On choisit un repère galiléen et on effectue le bilan complet des données d'entrée du problème.
2. On construit un graphe de structure.
3. On isole le solide ou le système de solides considéré.
4. On effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures agissant sur le système isolé.
5. On écrit le PFD.
6. On projette les relations vectorielles sur les axes choisis.
7. On injecte les lois de comportement (ressort, lois de Coulomb, ...).
8. On effectue la résolution.

Définition – Référentiel galiléen

Un **référentiel galiléen** se définit à partir d'une repère spatial (orthonormé direct $\left(O_g; \overrightarrow{x_g}, \overrightarrow{y_g}, \overrightarrow{z_g}\right)$ et d'une base de temps (t) et est animé d'un mouvement de **translation rectiligne uniforme** (à vitesse constante) par rapport à un référentiel absolu fixe ou à un autre référentiel galiléen $\left(O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$.

On peut également le définir comme un référentiel « dans lequel le principe fondamental de la dynamique s'applique ».

R Dans la pratique, on fera toujours la **supposition qu'un repère est galiléen**. Cela dépendra effectivement des mouvements mis en jeu et des **échelles temporelles et spatiales** considérées. Par exemple :
- pour étudier des mouvements de l'ordre de quelques minutes à l'échelle humaine, le **référentiel terrestre** (origine liée au centre de la terre et les trois axes liés au globe terrestre) est approprié;
- pour étudier les effets météorologiques (ouragans, courants marins), ou les mouvements des satellites, il convient alors de tenir compte de l'inertie de la terre et on pourra choisir le **référentiel géocentrique** (origine liée au centre de la terre et les trois axes dirigés vers trois étoiles très éloignées) comme référentiel galiléen;
- pour étudier le mouvement des planètes, il convient mieux d'utiliser le **référentiel héliocentrique** (origine liée au centre du soleil et les trois axes dirigés vers trois étoiles très éloignées).

Une chronologie galiléenne est obtenue par une horloge précise (Quartz, atomique, ou mouvement des astres). En mécanique classique (ou Newtonienne), les deux repères d'**espace et de temps** sont supposés **indépendants** ce qui n'est pas le cas de la mécanique relativiste.

2 Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

2.1 Principe Fondamental de la Dynamique

Définition – Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique

Dans le cas général, soit un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), alors la somme des actions mécaniques extérieures (**torseur des actions mécaniques extérieures** s'appliquant sur E) est égale au **torseur dynamique** du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\left\{\mathscr{T}\left(\overline{E} \rightarrow E\right)\right\} = \left\{\mathscr{D}(E/R_0)\right\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel la relation est vérifiée. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

R

- Les démarches pour le calcul du torseur dynamique seront vues ultérieurement.
- La démarche de calcul du torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur E est la même que celle vu lors de l'utilisation du PFS (ce sont les mêmes torseurs).

2.2 Équations de mouvement

Définition – Équations de mouvement
Une **équation de mouvement** est une équation différentielle du second ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure **aucune composante inconnue d'action mécanique**. Il est parfois nécessaire d'écrire plusieurs équations pour trouver par substitution une équation de mouvement. On nomme « **intégrale première du mouvement** » une équation différentielle du premier ordre avec un second membre constant, obtenue par intégration d'une équation de mouvement.

2.3 Théorèmes généraux

Du principe fondamental de la dynamique découle plusieurs théorèmes généraux.

Théorème – Théorème de la résultante dynamique
Pour tout ensemble matériel (E) de masse m et de centre de gravité G en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur E est égale à la résultante dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 (notée $\overrightarrow{R_d}(E/R_0)$) :

$$\overrightarrow{R\left(\bar{E}\rightarrow E\right)}=\overrightarrow{R_d}(E/R_0)=m\overrightarrow{\Gamma(G,E/R_0)}.$$

R On peut alors définir un Newton comme l'effort à mettre en œuvre pour mettre en mouvement 1 kg avec une accélération de $1\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ en son centre de gravité G.

Théorème – Théorème du moment dynamique
Pour tout ensemble matériel (E) de masse m en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur E en un point quelconque A est égale au moment dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 en A (noté $\overrightarrow{\delta(A,E/R_0)}$) :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A,\bar{E}\rightarrow E\right)}=\overrightarrow{\delta(A,E/R_0)}.$$

Théorème – Théorème des actions mutuelles
Soient (E_1) et (E_2) deux sous-ensembles matériels de (E), en mouvement par rapport à un référentiel galiléen, et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. Alors :

$$\{\mathcal{T}(E_1\rightarrow E_2)\}=-\{\mathcal{T}(E_2\rightarrow E_1)\}.$$

3 Principe Fondamental de la Dynamique : applications simplifiées

Définition – Solide en translation par rapport à un référentiel galiléen
Si un ensemble matériel E (de centre d'inertie G) est en mouvement de translation dans un référentiel galiléen (R_g) alors :

- d'après le **théorème de la résultante dynamique :** la résultante des efforts extérieurs est égale au produit de la masse par l'accélération de G par rapport à R_g : $\boldsymbol{m\,\overrightarrow{\Gamma(G,E/R_g)}=\overrightarrow{R\left(\bar{E}\rightarrow E\right)}}$;
- d'après le **théorème du moment dynamique :** le moment des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur E est égal au vecteur nul en tout point : $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A,\bar{E}\rightarrow E\right)}=\overrightarrow{0}\,\forall A}$.

Définition – Solide en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen
Si un ensemble matériel E (de centre d'inertie G) est en mouvement de rotation autour d'un axe Δ (dirigé par $\overrightarrow{u}$ unitaire) fixe dans un référentiel galiléen (R_g) alors, d'après le **théorème du moment dynamique** :

$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathcal{M}\left(A,\bar{E}\rightarrow E\right)}\cdot\overrightarrow{u}=J_\Delta(E)\cdot\ddot{\theta}\ \forall A\in\Delta}$ avec :

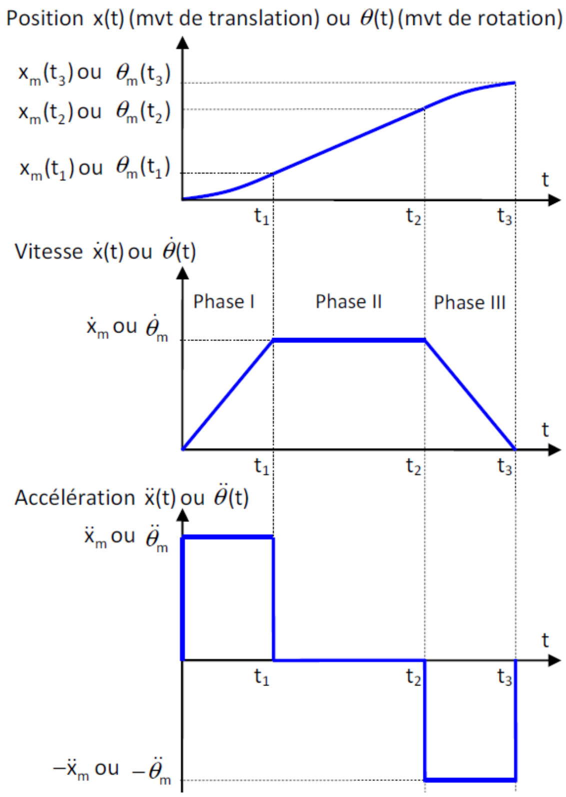
- $J_\Delta(E)$ le moment d'inertie de E par rapport à l'axe Δ (en $\mathrm{kg\,m^2}$) ;

- $\ddot{\theta}$, l'accélération angulaire de E par rapport à R_g suivant Δ : $\overrightarrow{\Omega}(E/R_g) \cdot \overrightarrow{u}$.

4 Loi de mouvement en trapèze

Une des lois usuellement suivie par un actionneur pour aller d'un point à un autre est une loi de mouvement de vitesse en trapèze. Ce mouvement peut être décomposé en 3 phases :

- phase 1 mouvement uniformément décéléré. L'accélération est donc constante, la vitesse croit de façon linéaire et la position de façon parabolique;
- phase 2 : mouvement uniforme. L'accélération est nulle, la vitesse est constante et la position évolue linéairement;
- phase 3 : mouvement uniformément décéléré. L'accélération est constante est négative, la vitesse décroît linéairement et la position évolue de façon parabolique.



Dans le cas général, il sera souvent inutile d'écrire les équations horaires de chacune des phases. En effet, les questions liées à ces lois de mouvements sont généralement :

- d'identifier le « pire des cas » en terme de vitesse/accélération;
- de déterminer les temps de une ou plusieurs des phases en fonction de la distance à parcourir, la vitesse maximale, l'accélération accélérations maximale;
- de déterminer la hauteur du palier de vitesse;
- de déterminer la distance parcourue.

Résultat Dans les 3 derniers points, il est souvent suffisant de remarquer en utilisant les courbes que :

- $t_1 = \dfrac{\dot{x}_m}{\ddot{x}_m}$;
- en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors de l'accélération est donnée par $\dfrac{1}{2} t_1 \dot{x}_m$;
- en utilisant la courbe de vitesse et en remarquant que l'intégrale sous la courbe correspond à la distance parcourue, la distance parcourue lors des 3 phases est donnée par $2 \cdot \dfrac{1}{2} t_1 \dot{x}_m + (t_2 - t_1)\dot{x}_m$.

	Phase 1	Phase 2	Phase 3
Équation de position	$x(t) = \dfrac{1}{2}\ddot{x}_m t^2$	$x(t) = \dot{x}_m(t)(t-t_1) + x_m(t_1)$	$x(t) = -\dfrac{1}{2}\ddot{x}_m (t-t_2)^2 + \dot{x}_m(t)(t-t_2) + x_m(t_2)$
Équation de vitesse	$\dot{x}(t) = \ddot{x}_m t$	$\dot{x}(t) = \dot{x}_m$	$\dot{x}(t) = -\ddot{x}_m(t-t_2) + \dot{x}_m$
Équation d'accélération	$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_m$	$\ddot{x}(t) = 0$	$\ddot{x}(t) = -\ddot{x}_m$

Références

[1] Émilien Durif, *Introduction à la dynamique des solides, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.*

[2] Florestan Mathurin, *Introduction à la dynamique du solide, Lycée Bellevue, Toulouse,* `http://florestan.mathurin.free.fr/`.