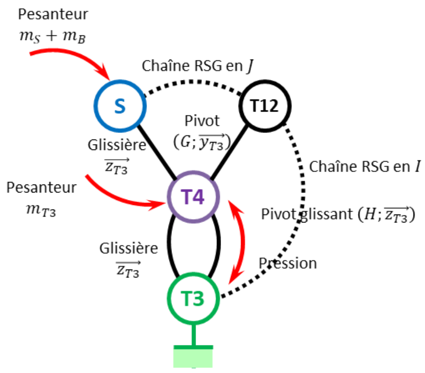
Chariot élévateur à bateaux

Question 1.

On isole l'ensemble : {bateau ; S ; chaîne ; T12 ; T4}. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\boldsymbol{\mathcal{P}_{int}(E)+\mathcal{P}(\bar{E}\rightarrow E/R_g)=\frac{dE_c(t)}{dt}}$.

Relation cinématique :



- $\overrightarrow{V(G,S/T_3)}=V_B\vec{z}$ et $\overrightarrow{V(G,T_4/T_3)}=V_V\vec{z}$
- $\overrightarrow{V(G,S/T_3)}=\overrightarrow{V(G,S/T_{12})}+\overrightarrow{V(G,T_{12}/T_4)}+\overrightarrow{V(G,T_4/T_3)}$
  - $\overrightarrow{V(G,S/T_{12})}=\overrightarrow{V(J,S/T_{12})}+\overrightarrow{GJ}\wedge\overrightarrow{\Omega(S/T_{12})}=R\vec{x}\wedge\omega(T_4/T_{12})\vec{y}=R\omega(T_4/T_{12})\vec{z}$
  - $V_B=R\omega(T_4/T_{12})+V_V$
- $\overrightarrow{V(G,S/T_3)}=\overrightarrow{V(G,S/T_{12})}+\overrightarrow{V(G,T_{12}/T_3)}$
  - $\overrightarrow{V(G,T_{12}/T_3)}=\overrightarrow{V(I,T_{12}/T_3)}+\overrightarrow{GI}\wedge\overrightarrow{\Omega(T_{12}/T_3)}=-R\vec{x}\wedge\omega(T_{12}/T_4)\vec{y}=R\omega(T_4/T_{12})\vec{z}$
  - $V_B=R\omega(T_4/T_{12})+R\omega(T_4/T_{12})=2R\omega(T_4/T_{12})$
- $\boldsymbol{V_B=\frac{V_B}{2}+V_V\Leftrightarrow V_B=2V_V}$ **et** $\boldsymbol{\omega(T_{12}/T_4)=-\frac{V_B}{2R}}$.

(Remarque : erreur de signe éventuelle sur $\omega(T_{12}/T_4)$, non pénalisante pour la suite…)

Bilan des puissances extérieures :

- $\mathcal{P}(pes\rightarrow S/R_g)=\begin{Bmatrix}-(m_S+m_B)g\vec{z}\\\vec{0}\end{Bmatrix}_{G_B}\otimes\begin{Bmatrix}u\vec{0}\\V_B\vec{z}\end{Bmatrix}_{G_B}=-(m_S+m_B)gV_B$
- $\mathcal{P}(pes\rightarrow T_4/R_g)=\begin{Bmatrix}-m_{T4}g\vec{z}\\\vec{0}\end{Bmatrix}_{G_{T4}}\otimes\begin{Bmatrix}\vec{0}\\V_V\vec{z}\end{Bmatrix}_{G_{T4}}=-m_{T4}gV_V=-\frac{1}{2}m_{T4}gV_B$
- $\mathcal{P}(pre\rightarrow T_4/R_g)=\begin{Bmatrix}F_V\vec{z}\\\vec{0}\end{Bmatrix}_H\otimes\begin{Bmatrix}\vec{0}\\V_V\vec{z}\end{Bmatrix}_{G_B}=F_VV_V=\frac{1}{2}.F_VV_B$
- $\mathcal{P}(T_3\rightarrow T_4/R_g)=0$: glissière et pivot glissant sans frottement
- $\mathcal{P}(T_3\rightarrow 12/R_g)=0$: roulement sans glissement.
- $\boldsymbol{\mathcal{P}(\bar{E}\rightarrow E/R_g)=V_B\left(\frac{1}{2}.F_V-\frac{1}{2}m_{T4}g-(m_S+m_B)g\right)}$

Bilan des puissances intérieures :

- $\boldsymbol{\mathcal{P}_{int}(E)=0}$

Calcul de l'énergie cinétique

- $E_c(S/3)=\frac{1}{2}(m_S+m_B)V_B^2$ (mouvement de translation du bateau par rapport au référentiel galiléen)
- $E_c(T_4/3)=\frac{1}{2}m_{T4}V_V^2=\frac{1}{8}m_{T4}V_B^2$ (mouvement de translation du vérin par rapport au référentiel galiléen)
- $E_c(T_{12}/3)=\frac{1}{2}J\omega(T_{12}/3)^2=\frac{1}{2}\frac{JV_B^2}{4R^2}$ (mouvement de rotation et translation du solide 12 – masse négligeable) *(Remarque : le terme ¼ n'apparait pas sur le corrigé initial).*
- $E_c(E/3)=\frac{1}{2}\left(m_S+m_B+\frac{1}{4}m_{T4}+\frac{J}{4R^2}\right)V_B^2$
- $\boldsymbol{\frac{dE_c(t)}{dt}=\left(m_S+m_B+\frac{1}{4}m_{T4}+\frac{J}{4R^2}\right)V_B\gamma}$ **et** $\boldsymbol{\gamma=\frac{dV_B}{dt}}$.

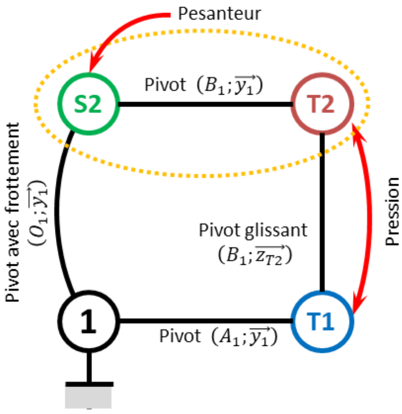
Au final :

$$\left(m_S+m_B+\frac{1}{4}m_{T4}+\frac{J}{4R^2}\right)V_B\gamma=V_B\left(\frac{1}{2}.F_V-\frac{1}{2}m_{T4}g-(m_S+m_B)g\right)$$

$$\Leftrightarrow\gamma=\frac{\frac{1}{2}.F_V-\frac{1}{2}m_{T4}g-(m_S+m_B)g}{m_S+m_B+\frac{1}{4}m_{T4}+\frac{J}{4R^2}}$$

Cette valeur permet de valider l'exigence 1.1.3 car connaissant la vitesse de levage à atteindre en charge (cf. critère 1.1.2) et l'accélération, on peut connaître le temps du régime transitoire ($t=\frac{V_{levage}}{\gamma}$).

Question 2. Quand le chariot avance à vitesse constante ($\varphi_{dec}=0$), il faut que l'angle $\varphi(t)$ soit nul. Il faut donc envoyer



une consigne $\varphi_c = -\delta$.

Question 3. On isole l'ensemble E={S2 ; T2}. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen : $\boldsymbol{\mathcal{P}_{int}(E) + \mathcal{P}(\overline{E} \rightarrow E/R_g) = \frac{dE_c(t)}{dt}}$.

- Calcul des puissances externes
  - $\mathcal{P}(pes \rightarrow S_2/1) = \begin{Bmatrix} -m_{S_2} g\overrightarrow{z_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_{S_2}} \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega(S_2/1)} = \dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{V(G_{S_2}, S_2/1)} = -x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{z_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{T_3}} \end{Bmatrix}_{G_{S2}} = (-m_{S_2} g\overrightarrow{z_1}) \cdot \left(-x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{z_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{T_3}}\right) = -m_{S_2} g\left(-x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\cos\alpha + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\sin\alpha\right)$
    - $\overrightarrow{V(G_{S_2}, S_2/1)} = \overrightarrow{V(O_1, S_2/1)} - \left(x_{G_{S_2}}\overrightarrow{x_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\overrightarrow{z_{T_3}}\right) \wedge \dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} = -x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{z_{T_3}} + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\overrightarrow{x_{T_3}}$
  - $\mathcal{P}(1 \rightarrow S_2/1) = \begin{Bmatrix} L_{12}\overrightarrow{x_1} - \mu\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} + N_{12}\overrightarrow{z_1} \\ - \end{Bmatrix}_{O_1} \otimes \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_1} = -\mu\dot{\alpha}^2$
  - $\mathcal{P}(T_1 \rightarrow T_2/1)_{\text{pivot glissant}} = 0$ (pivot glissant sans frottement)
  - $\mathcal{P}(T_1 \rightarrow T_2/1)_{\text{vérin}} = \begin{Bmatrix} p(t)S\overrightarrow{z_{T_2}} \\ - \end{Bmatrix}_{B_1} \otimes \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{z_{T_2}} \end{Bmatrix}_{B_1} = p(t)S\dot{\lambda} = p(t)S\dot{\alpha}/k$
  - $\boldsymbol{\mathcal{P}(\overline{E} \rightarrow E/R_g) = -m_{S_2} g\left(-x_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\cos\alpha + z_{G_{S_2}}\dot{\alpha}\sin\alpha\right) - \mu\dot{\alpha}^2 + p(t)S\dot{\alpha}/k}$
- Calcul des puissances internes $\boldsymbol{\mathcal{P}_{int}(E) = 0}$ pas de frottement dans la liaison pivot.
- Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble : seules la masse et l'inertie de S2 sont à prendre en contact (elles sont négligeables pour T2). $E_c(S_2/1) = \frac{1}{2}J_{S2}\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_{S2}\overrightarrow{V_{G_{S2},S_2/1}}^2 = \frac{1}{2}\left(J_{S_2} + m_{S_2}\left(x_{G_{S_2}}^2 + z_{G_{S_2}}^2\right)\right)\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\alpha}^2$

avec $J_{eq} = J_{S_2} + m_{S_2}\left(x_{G_{S_2}}^2 + z_{G_{S_2}}^2\right)$.

On trouve donc, au final :

$$J_{eq}\ddot{\alpha} + \mu\dot{\alpha} = \frac{p(t)S}{k} + m_{S2}g\left(x_{G_{S2}}\cos\alpha - z_{G_{S2}}\sin\alpha\right)$$

Si on suppose l'angle αnul (situation de la question précédente), on retrouve bien l'expression demandée.