Colle – Corrigé

Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant★

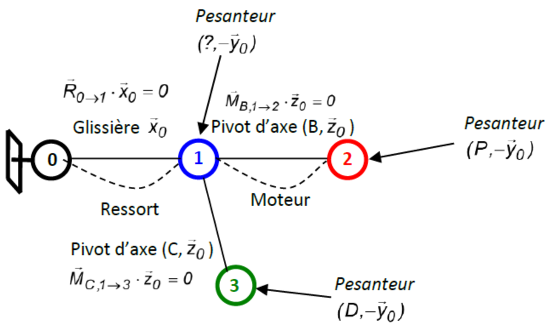
Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

1. Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x, θ , leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles. Déterminer ces deux équations.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède trois degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver trois équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée : $\Omega = cte$. Reste à déterminer $\theta(t)$ et $x(t)$.

On isole Σ =1+2+3.
Le théorème de la résultante dynamique appliqué à Σ en projection sur $\vec{x}_0$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas :

$$\boxed{\vec{R}_{d\,\Sigma/0}\cdot\vec{x}_0=\vec{R}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}\cdot\vec{x}_0}$$

On isole 3.
Le théorème du moment dynamique appliqué à 3 au point C et en projection sur $\vec{z}_0$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 3 n'interviennent pas :

$$\boxed{\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0=\vec{M}_{C,\overline{3}\to 3}\cdot\vec{z}_0}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{R}_{\overline{(1+2+3)}\to(1+2+3)}\cdot\vec{x}_0$:

$$\{\mathcal{T}_{0\to 1}\}=\underset{\forall P}{\begin{Bmatrix}\vec{R}_{0\to 1}\\ \vec{M}_{P,0\to 1}\end{Bmatrix}}\quad avec\ \vec{R}_{0\to 1}\cdot\vec{x}_0=0 \qquad \{\mathcal{T}_{0\xrightarrow{ressort}1}\}=\underset{\forall P\in(A,\vec{x}_0)}{\begin{Bmatrix}-kx\vec{x}_0\\ \vec{0}\end{Bmatrix}}$$

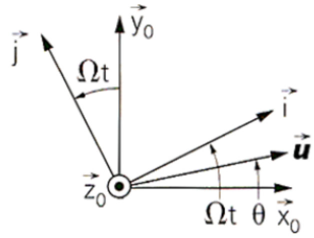
$$\{\mathcal{T}_{pes\to 1}\}=\underset{\forall P\in(G_1,\vec{y}_0)}{\begin{Bmatrix}-m_1g\vec{y}_0\\ \vec{0}\end{Bmatrix}} \qquad \{\mathcal{T}_{pes\to 2}\}=\underset{\forall P\in(G_2,\vec{y}_0)}{\begin{Bmatrix}-m_2g\vec{y}_0\\ \vec{0}\end{Bmatrix}} \qquad \{\mathcal{T}_{pes\to 3}\}=\underset{\forall P\in(G_3,\vec{y}_0)}{\begin{Bmatrix}-m_3g\vec{y}_0\\ \vec{0}\end{Bmatrix}}$$

$$\vec{R}_{\overline{(1+2+3)}\to(1+2+3)}\cdot\vec{x}_0=-kx$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0}\cdot\vec{x}_0$:

$\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0}\cdot\vec{x}_0=\sum_{i=1}^{3} m_i\vec{\Gamma}_{G_i\in i/0}\cdot\vec{x}_0$

Soit $\vec{R}_{d\,(1+2+3)/0}\cdot\vec{x}_0=m_1\vec{\Gamma}_{G_1\in 1/0}\cdot\vec{x}_0+m_2\vec{\Gamma}_{G_2\in 2/0}\cdot\vec{x}_0+m_3\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}\cdot\vec{x}_0$



$\vec{V}_{G_1\in 1/0}=\dot{x}\vec{x}_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_1\in 1/0}=\ddot{x}\vec{x}_0}$

$\vec{V}_{G_2\in 2/1}=\cancel{\vec{V}_{B\in 2/1}}+\overrightarrow{G_2B}\wedge\vec{\Omega}_{2/1}=-r\vec{i}\wedge\Omega\vec{z}_0=r\Omega\vec{j}$

$\vec{V}_{G_2\in 2/0}=\vec{V}_{G_2\in 2/1}+\vec{V}_{G_2\in 1/0}=r\Omega\vec{j}+\dot{x}\vec{x}_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_2\in 2/0}=\ddot{x}\vec{x}_0-r\Omega^2\vec{i}}$ car $\left.\dfrac{d\vec{j}}{dt}\right|_0=\vec{\Omega}_{2/0}\wedge\vec{j}=\Omega\vec{z}_0\wedge\vec{j}=-\Omega\vec{i}$

$\vec{V}_{G_3\in 3/1}=\cancel{\vec{V}_{C\in 3/1}}+\overrightarrow{G_3C}\wedge\vec{\Omega}_{3/1}=L\vec{v}\wedge\dot{\theta}\vec{z}_0=L\dot{\theta}\vec{u}$

$\vec{V}_{G_3\in 3/0}=\vec{V}_{G_3\in 3/1}+\vec{V}_{G_3\in 1/0}=L\dot{\theta}\vec{u}+\dot{x}\vec{x}_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}=\ddot{x}\vec{x}_0+L\ddot{\theta}\vec{u}+L\dot{\theta}^2\vec{v}}$ car $\left.\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right|_0=\vec{\Omega}_{3/0}\wedge\vec{u}=\dot{\theta}\vec{z}_0\wedge\vec{u}=\dot{\theta}\vec{v}$

Théorème de la résultante dynamique appliqué à Σ=S1 + S2 + S3 en projection sur $\vec{x}_0$: $\vec{R}_{d\,\Sigma/0}\cdot\vec{x}_0=\vec{R}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}\cdot\vec{x}_0$

$-kx=m_1\ddot{x}+m_2\left(\ddot{x}-r\Omega^2\cos(\Omega t)\right)+m_3\left(\ddot{x}+L\ddot{\theta}\cos\theta-L\dot{\theta}^2\sin\theta\right)$

$\boxed{(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+kx+m_3L\ddot{\theta}\cos\theta-m_3L\dot{\theta}^2\sin\theta=m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)}$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{C,\bar{3}\to 3}\cdot\vec{z}_0$:

$\{T_{2\to 3}\}=\underset{\forall P\in(C,\vec{z}_0)}{\begin{cases}\vec{R}_{2\to 3}\\ \vec{M}_{P,2\to 3}\end{cases}}$ *avec* $\vec{M}_{P,2\to 3}\cdot\vec{z}_0=0$ $\qquad \{T_{pes\to 3}\}=\underset{\forall P\in(G_3,\vec{y}_0)}{\begin{cases}-m_3g\vec{y}_0\\ \vec{0}\end{cases}}$

$\vec{M}_{C,pes\to 3}\cdot\vec{z}_0=\left(\cancel{\vec{M}_{G_3,pes\to 3}}+\overrightarrow{CG_3}\wedge -m_3g\vec{y}_0\right)\cdot\vec{z}_0=\left[-L\vec{v}\wedge -m_3g\vec{y}_0\right]\cdot\vec{z}_0=-m_3gL\sin\theta$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0$:

$\vec{\delta}_{G_3,3/0}=\vec{0}$ (masse ponctuelle)

$\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0=\left[\vec{\delta}_{G_3,3/0}+\overrightarrow{CG_3}\wedge\vec{R}_{d\,3/0}\right]\cdot\vec{z}_0=\left[-L\vec{v}\wedge m_3\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}\right]\cdot\vec{z}_0=-m_3L\left[\vec{z}_0\wedge\vec{v}\right]\cdot\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}=m_3L\vec{u}\cdot\vec{\Gamma}_{G_3\in 3/0}=m_3L\left[\ddot{x}\cos\theta+L\ddot{\theta}\right]$

Théorème du moment dynamique appliqué à *S3* au point C et en projection sur $\vec{z}_0$: $\vec{\delta}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0=\vec{M}_{C,\bar{3}\to 3}\cdot\vec{z}_0$

$-m_3gL\sin\theta=m_3L\left[\ddot{x}\cos\theta+L\ddot{\theta}\right]$ d'où $\boxed{\ddot{x}\cos\theta+L\ddot{\theta}+g\sin\theta=0}$

2. Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

En considérant que $x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de la position d'équilibre $(x_0, \theta_0) = (0,0)$,

et que le développement limité de $f(x)$ à l'ordre n en a est $f(x+a) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}x + \cdots + \dfrac{f^n(a)}{n!}x^n$, on a :

$$\text{ordre } 0 : \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \quad \text{ordre } 1 : \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = \theta \end{cases} \quad \text{ordre } 2 : \begin{cases} \cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2!} \\ \sin\theta = \theta \end{cases} \quad \text{ordre } 3 : \begin{cases} \cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2!} \\ \sin\theta = \theta - \dfrac{\theta^3}{3!} \end{cases}$$

et $\dot{\theta}^2 \approx 0$

Donc : $\boxed{(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3 L\ddot{\theta} = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t)}$ et $\boxed{\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0}$

3. Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B.

En posant $x(t) = A\cos(\Omega t)$ et $\theta(t) = B\cos(\Omega t)$, on a : $\ddot{x}(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t)$ et $\ddot{\theta}(t) = -B\Omega^2 \cos(\Omega t)$

Les deux équations obtenues précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -(m_1 + m_2 + m_3)A\Omega^2 \cos(\Omega t) + kA\cos(\Omega t) - m_3 LB\Omega^2 \cos(\Omega t) = m_2 r \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - LB\Omega^2 \cos(\Omega t) + gB\cos(\Omega t) = 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit à : $\begin{cases} \left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]A - m_3 L\Omega^2 B = m_2 r \Omega^2 \\ -A\Omega^2 + \left(-L\Omega^2 + g\right)B = 0 \end{cases}$

Soit : $\boxed{A = \dfrac{m_2 r \Omega^2 \left(-L\Omega^2 + g\right)}{\left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]\left(-L\Omega^2 + g\right) - m_3 L\Omega^4}}$

$\boxed{B = \dfrac{m_2 r \Omega^4}{\left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]\left(-L\Omega^2 + g\right) - m_3 L\Omega^4}}$

4. Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer $x(t) = 0$ en régime forcé.

On a $x(t) = 0$ en régime forcé, si $A = 0$.

Ce qui implique que : $A = \dfrac{m_2 r \Omega^2 \left(-L\Omega^2 + g\right)}{\left[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k\right]\left(-L\Omega^2 + g\right) - m_3 L\Omega^4}$ Soit : $\boxed{L = \dfrac{g}{\Omega^2}}$

Dans ce cas $B = \dfrac{-m_2 r}{m_3 L}$ et $\theta(t) = B\cos(\Omega t) = \dfrac{-m_2 r}{m_3 L}\cos(\Omega t)$

Colle – Corrigé

Chaîne ouverte – Centrifugeuse géotechnique ★

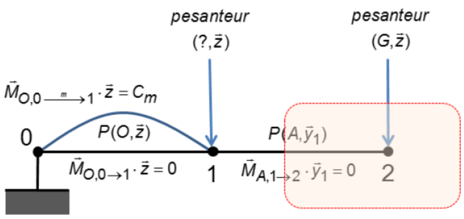
Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

1. Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.

Graphe de structure :



Le mécanisme possède deux degrés de mobilité, il est donc nécessaire de trouver deux équations du mouvement indépendantes. Une équation est déjà imposée : $\omega = cte$. Reste à déterminer $\beta(t)$.

On isole la nacelle 2.

Le théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur $\vec{y}_1$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 1 et 2 n'interviennent pas :

$$\boxed{\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1=\vec{M}_{A,\bar{2}\rightarrow 2}\cdot\vec{y}_1}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec{M}_{A,\bar{2}\rightarrow 2}\cdot\vec{y}_1$:

$$\left\{T_{1\rightarrow 2}\right\}=\underset{\forall P\in(A,\vec{y}_1)}{}\begin{cases}\vec{R}_{1\rightarrow 2}\\ \vec{M}_{P,1\rightarrow 2}\end{cases} \text{ avec } \vec{M}_{P,1\rightarrow 2}\cdot\vec{y}_1=0 \qquad \left\{T_{pes\rightarrow 2}\right\}=\underset{\forall P\in(G,\vec{z})}{}\begin{cases}mg\vec{z}\\ \vec{0}\end{cases}$$

Avec $\vec{M}_{A,1\rightarrow 2}\cdot\vec{y}_1=0$

$$\vec{M}_{A,pes\rightarrow 2}\cdot\vec{y}_1=\left(\cancel{\vec{M}_{G,pes\rightarrow 2}}+\overrightarrow{AG}\wedge mg\vec{z}\right)\cdot\vec{y}_1=\left(b\vec{z}_2\wedge mg\vec{z}\right)\cdot\vec{y}_1=\underline{-mgb\sin\beta}$$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir : $\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1$:

A n'est pas un point fixe dans R_0. On ne peut donc pas utiliser l'intégration par partie.

La matrice d'inertie est donnée en un point A qui n'est pas le centre de gravité !!!

2 possibilités :

Méthode 1 : utiliser les définitions de $\vec{\sigma}_{A,2/0}$ et $\vec{\delta}_{A,2/0}$:

$$\vec{\sigma}_{A,2/0}=\overline{\overline{I}}_A(2)\cdot\vec{\Omega}_{2/0}+m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}_{A\in 2/0} \quad \text{et} \quad \vec{\delta}_{A,2/0}=\left.\frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt}\right|_0+m\vec{V}_{A/0}\wedge\vec{V}_{G\in 2/0}$$

Méthode 2 : utiliser Huygens pour obtenir la matrice au point G, puis utiliser la méthode classique en déterminant $\vec{\sigma}_{G,2/0}$ puis $\vec{\delta}_{G,2/0}$ puis $\vec{\delta}_{A,2/0}$.

Nous allons utiliser la méthode 1.

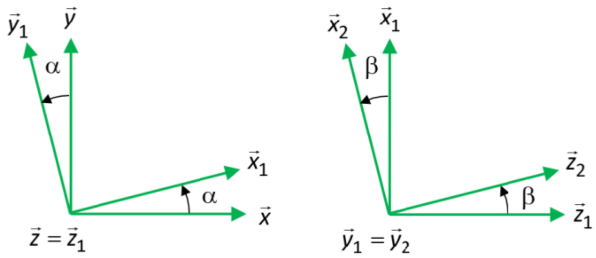
$\vec{V}_{A/0} = \vec{V}_{A\in 2/0} = \vec{V}_{A\in 1/0} = \cancel{\vec{V}_{O\in 1/0}} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -a\vec{x}_1 \wedge \dot{\alpha}\vec{z}_1 = a\dot{\alpha}\vec{y}_1$

$$\vec{\sigma}_{A,2/0} = \bar{\bar{I}}_A(2)\cdot\vec{\Omega}_{2/0} + m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A\in 2/0} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{b2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{b1} + mb\vec{z}_2 \wedge a\dot{\alpha}\vec{y}_1$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{b2} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{pmatrix}_{b2} - mba\dot{\alpha}\vec{x}_2$$

$$= -A\dot{\alpha}\sin\beta\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\vec{y}_2 + C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2 - mba\dot{\alpha}\vec{x}_2$$

$$= -(A\dot{\alpha}\sin\beta + mba\dot{\alpha})\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\vec{y}_2 + C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2$$



$$\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1 = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt}\right|_0 \cdot\vec{y}_1 + (m\vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G\in 2/0})\cdot\vec{y}_1$$

Avec : $(m\vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G\in 2/0})\cdot\vec{y}_1 = 0$ car $\vec{V}_{A/0} // \vec{y}_1$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt}\right|_0 \cdot\vec{y}_1 = \frac{d\left(\vec{\sigma}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1\right)}{dt} - \vec{\sigma}_{A,2/0}\cdot\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_0$$

et $\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_0 = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{y}_1 = \dot{\alpha}\vec{z} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\alpha}\vec{x}_1$

Donc

$$\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1 = \frac{d\left(B\dot{\beta}\right)}{dt} - \left[-(A\dot{\alpha}\sin\beta + mba\dot{\alpha})\vec{x}_2 + B\dot{\beta}\vec{y}_2 + C\dot{\alpha}\cos\beta\vec{z}_2\right]\cdot\left[-\dot{\alpha}\vec{x}_1\right]$$

$\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1 = B\ddot{\beta} + \dot{\alpha}\left[-(A\dot{\alpha}\sin\beta + mba\dot{\alpha})\cos\beta + C\dot{\alpha}\cos\beta\sin\beta\right]$ car $\vec{x}_2\cdot\vec{x}_1 = \cos\beta$ et $\vec{z}_2\cdot\vec{x}_1 = \sin\beta$

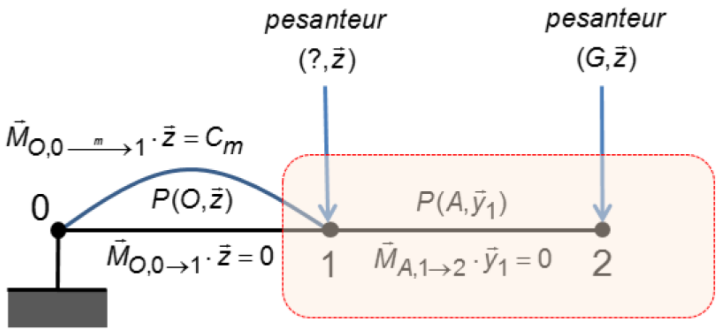
$$\underline{\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1 = B\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2\cos\beta\left[\sin\beta(C-A) - mba\right]}$$

Théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur $\vec{y}_1$: $\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{y}_1 = \vec{M}_{A,\bar{2}\to 2}\cdot\vec{y}_1$

$$\boxed{-mgb\sin\beta = B\ddot{\beta} + \omega^2\cos\beta\left[\sin\beta(C-A) - mba\right]} \ (1)$$

2. Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.

Graphe de structure :



On isole l'ensemble *E=bras 1+ nacelle 2*.
Le théorème du moment dynamique appliqué à E au point O et en projection sur $\vec z$ doit permettre d'obtenir une équation dans laquelle les actions mécaniques inconnues de liaison entre 0 et 1 n'interviennent pas.

$$\boxed{\vec\delta_{O,E/0}\cdot\vec z = \vec M_{O,\bar E\to E}\cdot\vec z}$$

Actions mécaniques pour obtenir $\vec M_{O,\bar E\to E}\cdot\vec z$:

$\{\mathcal T_{0\to 1}\} = \begin{Bmatrix}\vec R_{0\to 1}\\ \vec M_{P,0\to 1}\end{Bmatrix}_{\forall P\in(O,\vec z)}$ *avec* $\vec M_{P,0\to 1}\cdot\vec z = 0$

$\{\mathcal T_{0\xrightarrow{m}1}\} = \begin{Bmatrix}\vec 0\\ \vec M_{P,0\xrightarrow{m}1}\end{Bmatrix}_{\forall P}$ *avec* $\vec M_{P,0\xrightarrow{m}1}\cdot\vec z = C_m$

$\{\mathcal T_{pes\to 1}\} = \begin{Bmatrix}m_1 g\vec z\\ \vec 0\end{Bmatrix}_{\forall P\in(G_1,\vec z)}$

$\{\mathcal T_{pes\to 2}\} = \begin{Bmatrix}mg\vec z\\ \vec 0\end{Bmatrix}_{\forall P\in(G,\vec z)}$

Avec $\vec M_{O,pes\to i}\cdot\vec z = \left(\cancel{\vec M_{G,pes\to i}} + \vec{OG_i}\wedge m_i g\vec z\right)\cdot\vec z = \underline{0}|$

$\vec M_{O,\bar E\to E}\cdot\vec z = \vec M_{O,0\to 1}\cdot\vec z + \vec M_{O,0\xrightarrow{m}1}\cdot\vec z + \vec M_{O,pes\to 1}\cdot\vec z + \vec M_{O,pes\to 2}\cdot\vec z = \underline{C_m}|$

Éléments cinétique et dynamique pour obtenir $\vec\delta_{O,E/0}\cdot\vec z$:

O est un point fixe dans R_0*. On peut donc utiliser l'intégration par partie.*

$$\vec\delta_{O,E/0}\cdot\vec z = \frac{d\left(\vec\sigma_{O,E/0}\cdot\vec z\right)}{dt} - \vec\sigma_{O,E/0}\cdot\cancel{\left.\frac{d\vec z}{dt}\right|_0} = \frac{d\left(\vec\sigma_{O,E/0}\cdot\vec z\right)}{dt}$$

$\vec\sigma_{O,1/0}\cdot\vec z = \left(\bar{\bar I}_O(1)\cdot\vec\Omega_{1/0}\right)\cdot\vec z = I\dot\alpha$ donc $\underline{\dfrac{d\left(\vec\sigma_{O,1/0}\cdot\vec z\right)}{dt} = 0}|$ (car $\dot\alpha = \omega = cte$)

$$\vec\sigma_{O,2/0}\cdot\vec z = \left(\vec\sigma_{A,2/0} + \vec{OA}\wedge m\vec V_{G\in 2/0}\right)\cdot\vec z = \vec\sigma_{A,2/0}\cdot\vec z + \left(\vec{OA}\wedge m\vec V_{G\in 2/0}\right)\cdot\vec z$$

$$\begin{aligned}\vec\sigma_{A,2/0}\cdot\vec z &= \left[-(A\dot\alpha\sin\beta + mba\dot\alpha)\vec x_2 + B\dot\beta\vec y_2 + C\dot\alpha\cos\beta\vec z_2\right]\cdot\vec z\\ &= -(A\dot\alpha\sin\beta + mba\dot\alpha)(-\sin\beta) + C\dot\alpha\cos^2\beta \qquad \text{car } \vec x_2\cdot\vec z = -\sin\beta \text{ et } \vec z_2\cdot\vec z = \cos\beta\\ &= \omega\left(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + mba\sin\beta\right)\end{aligned}$$

$$\left(\overrightarrow{OA}\wedge m\vec{V}_{G\in 2/0}\right)\cdot\vec{z}=\left[a\vec{x}_1\wedge m(\vec{V}_{A\in 2/0}+\overrightarrow{GA}\wedge\vec{\Omega}_{2/0})\right]\cdot\vec{z}$$
$$=\left\{a\vec{x}_1\wedge m\left[a\dot{\alpha}\vec{y}_1-b\vec{z}_2\wedge(\dot{\alpha}\vec{z}+\dot{\beta}\vec{y}_1)\right]\right\}\cdot\vec{z}$$
$$=\left\{a\vec{x}_1\wedge m\left[\dot{\alpha}(a+b\sin\beta)\vec{y}_1+b\dot{\beta}\vec{x}_2\right]\right\}\cdot\vec{z}$$
$$=ma\dot{\alpha}(a+b\sin\beta)$$
$$=ma\omega(a+b\sin\beta)$$

Ainsi $\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z}=\omega\left(A\sin^2\beta+C\cos^2\beta+2mba\sin\beta+ma^2\right)$

$$\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z}=\omega\left(A\sin^2\beta+C\cos^2\beta+2mba\sin\beta+ma^2\right)$$

$$\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt}=\omega\left(2\dot{\beta}A\sin\beta\cos\beta-2C\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta+2mba\dot{\beta}\cos\beta\right)$$

$$\boxed{\frac{d\left(\vec{\sigma}_{O,2/0}\cdot\vec{z}\right)}{dt}=2\omega\dot{\beta}\cos\beta\left[\sin\beta(A-C)+mba\right]}$$

Théorème du moment dynamique appliqué à E au point O et en projection sur $\vec{z}$: $\vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{z}=\vec{M}_{O,\bar{E}\to E}\cdot\vec{z}$

$$\boxed{C_m=2\omega\dot{\beta}\cos\beta\left[\sin\beta(A-C)+mba\right]}\quad(2)$$

3. Déterminer les expressions de l'angle β et du couple moteur C_m ?

On suppose que $mba \gg A\approx C$

De plus lorsque la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, on a : $\beta=cte\Rightarrow\dot{\beta}=\ddot{\beta}=0$

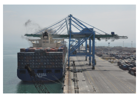
Ainsi, les deux équations déterminées aux questions 1 et 2 $\begin{cases}-mgb\sin\beta=B\ddot{\beta}+\omega^2\cos\beta\left[\sin\beta(C-A)-mba\right] & (1)\\ C_m=2\omega\dot{\beta}\cos\beta\left[\sin\beta(A-C)+mba\right] & (2)\end{cases}$ deviennent :

(1) $\Rightarrow\ -mgb\sin\beta=-\omega^2\cos\beta mba\quad\Rightarrow\ \tan\beta=\dfrac{\omega^2 a}{g}\quad\Rightarrow\ \boxed{\beta=\arctan\left(\dfrac{\omega^2 a}{g}\right)}$

(2) $\Rightarrow\boxed{C_m=0}$ ce qui est normal, car la liaison 1/0 est parfaite, donc à vitesse constante de 1/0, il n'y a pas besoin de couple moteur (qui sert à accélérer ou freiner).

Cycle 04

Colle – Corrigé



Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs ★

Centrale Supelec PSI 2013

Savoirs et compétences :

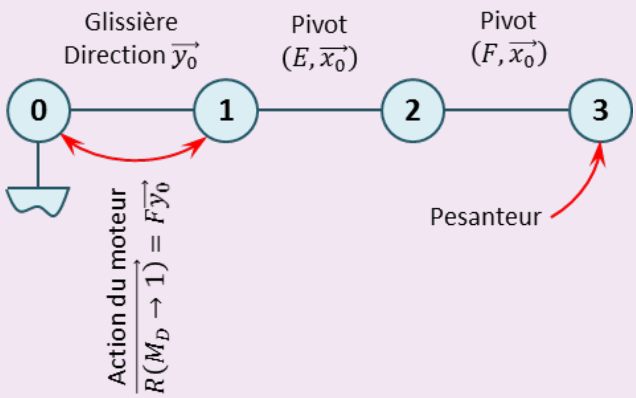
- ❒ *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- ❒ *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

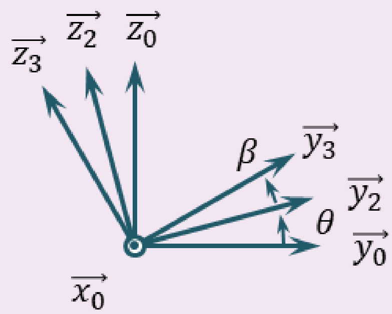
Modélisation dynamique du comportement de la charge

Objectif Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.

Question 1 *Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?*

Correction





Le système a trois mobilités :

- la translation de la liaison glissière de longueur $y_{ch}(t)$ (degré de liberté motorisé) ;
- la rotation du câble d'angle $\theta(t)$ (degré de liberté non motorisé) ;
- la rotation du conteneur d'angle $\beta(t)$ (degré de liberté non motorisé).

Les deux liaisons pivot n'étant pas freinées ou motorisées, lorsque le chariot se positionne au-dessus du camion le conteneur va se balancer, ce qui rend difficile la dépose du conteneur.

Question 2 *Déterminer littéralement, au point G_3, la vitesse $\overrightarrow{V(G_3,3/0)}$ puis le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(3/0)\}$ de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen $\mathcal{R}_0$.*

Correction $\overrightarrow{V(G_3,3/0)} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG_3}\right)\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\dfrac{d}{dt}\left(y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0}-\ell_2\overrightarrow{z_2}-h_3\overrightarrow{z_3}\right)\right]_{\mathcal{R}_0}.$

On a :

- $\left[\dfrac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega(2/0)}\wedge\overrightarrow{z_2} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{z_2} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_2}$;

- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_3} + \overrightarrow{\Omega(3/0)}\wedge\overrightarrow{z_3} = \left(\dot\theta+\dot\beta\right)\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{z_3} = -\left(\dot\theta+\dot\beta\right)\overrightarrow{y_3}$;
- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dot\theta\,\overrightarrow{z_2}$;
- $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left(\dot\theta+\dot\beta\right)\overrightarrow{z_3}$.

$\overrightarrow{V(G_3,3/0)} = \dot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\dot\theta\overrightarrow{y_2} + h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)\overrightarrow{y_3}$.

$\overrightarrow{\Gamma(G_3,3/0)} = \ddot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot\theta\overrightarrow{y_2} + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot\theta^2\overrightarrow{z_2} + h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\overrightarrow{z_3}$.

Par ailleurs, G_3 étant le centre d'inertie, de 3, on a $\overrightarrow{\delta(G_3,3/0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_3,3/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}A_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = A_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{x_0}$.

On a donc, $\{\mathscr{D}(3/0)\} = \left\{\begin{array}{l} M_3\left(\ddot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot\theta\overrightarrow{y_2} + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot\theta^2\overrightarrow{z_2} + h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\overrightarrow{z_3}\right) \\ A_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{x_0}\end{array}\right\}_{G_3}$

Question 3 *En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$et $y_{ch}(t)$, sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.*

Correction D'une part, on peut se dire qu'on va utiliser le résultat de la question précédente. D'autre part, le sujet demande une équation de résultante sans aucune action mécanique. Si on isole le solide 3, il va donc falloir projeter sur une direction ne faisant pas intervenir d'action mécanique. Les données précisent que l'action du câble est suivant $\overrightarrow{z_2}$, on peut donc suggérer de réaliser le thorème de la résultante dynamique appliqué au solide 3 en projection sur $\overrightarrow{y_2}$.

Le bilan des actions mécaniques est donc le suivant :

- action de la pesanteur sur 3 ;
- action de 2 sur 3.

On a donc : $-M_3 g\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{y_2} = \left(M_3\left(\ddot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot\theta\overrightarrow{y_2} + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot\theta^2\overrightarrow{z_2} + h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{y_2}$

$\Leftrightarrow -M_3 g\sin\theta = M_3\left(\ddot y_{ch}(t)\cos\theta + \ell_2\ddot\theta + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\cos\beta - h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\sin\beta\right)$

Résolution faisant intervenir F – Non demandé.

L'équation de résultante étant demandée, on peut aussi isoler une pièce (ou un ensemble de pièces) en translation rectiligne. On isole donc **(1+2+3)** et on réalise un théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{y_0}$.

Bilan des actions mécaniques :

- action de la pesanteur sur 3 (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$) ;
- action de la pesanteur sur 1 (négligée) (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$) ;
- action de 0 sur 3 (glissière) (la résultante n'a pas de composante sur $\overrightarrow{y_0}$) ;
- action du moteur sur 1.

On applique le TRD sur $\overrightarrow{y_0}$: $F = \overrightarrow{R_d(1+2+3/0)}\cdot\overrightarrow{y_0} = \underbrace{\overrightarrow{R_d(1/0)}\cdot\overrightarrow{y_0}}_{=0\text{(masse négligée)}} + \underbrace{\overrightarrow{R_d(2/0)}\cdot\overrightarrow{y_0}}_{=0\text{(masse négligée)}} + \overrightarrow{R_d(3/0)}\cdot\overrightarrow{y_0}$

$\Rightarrow F = \left(M_3\left(\ddot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot\theta\overrightarrow{y_2} + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot\theta^2\overrightarrow{z_2} + h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{y_0}$

$\Leftrightarrow F = M_3\left(\ddot y_{ch}(t) + \ell_2\ddot\theta\cos\theta + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\cos(\beta+\theta) - \ell_2\dot\theta^2\sin\theta - h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\sin(\beta+\theta)\right)$

Question 4 *En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations différentielles reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$ et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.*

Correction Le TRD appliqué à 3 en projection suivant $\overrightarrow{z_2}$ se traduit par :

$F - M_3 g\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{z_2} = \left(M_3\left(\ddot y_{ch}(t)\overrightarrow{y_0} + \ell_2\ddot\theta\overrightarrow{y_2} + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\overrightarrow{y_3} + \ell_2\dot\theta^2\overrightarrow{z_2} + h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{z_2}$

$\Leftrightarrow F - M_3 g\cos\theta = M_3\left(-\ddot y_{ch}(t)\sin\theta + h_3\left(\ddot\theta+\ddot\beta\right)\sin\beta + \ell_2\dot\theta^2 + h_3\left(\dot\theta+\dot\beta\right)^2\cos\beta\right)$.

Le TMD appliqué à 3 au point F en projection suivant $\overrightarrow{x_0}$ se traduit par :

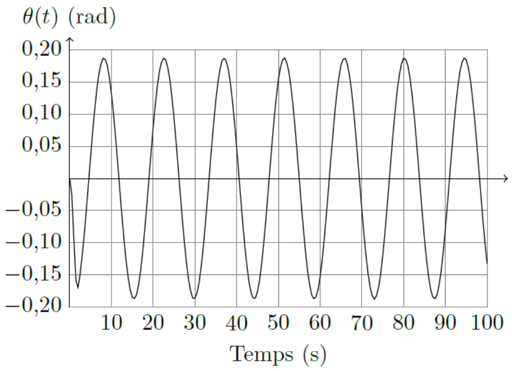
$\overrightarrow{FG_3}\wedge\left(-M_3 g\overrightarrow{z_0}\right)\cdot\overrightarrow{x_0} = \left(\overrightarrow{\delta(G_3,3/0)} + \overrightarrow{FG_3}\wedge\overrightarrow{R_d(3/0)}\right)\cdot\overrightarrow{x_0}$

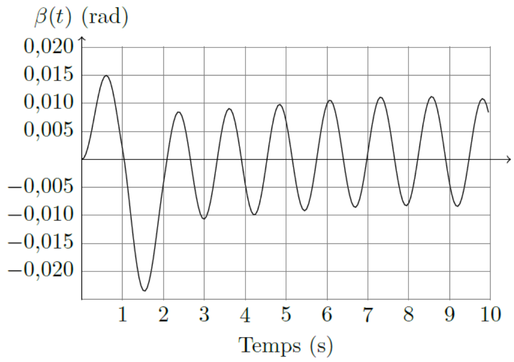
$\Leftrightarrow -h_3 \overrightarrow{z_3} \wedge \left(-M_3 g \overrightarrow{z_0}\right) \cdot \overrightarrow{x_0} = A_3 \left(\ddot{\theta} + \ddot{\beta}\right)$
$\Leftrightarrow -M_3 g h_3 \sin(\beta+\theta) = A_3 \left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)$.

Question 5 *En supposant que θ, β, $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, linéariser les équations précédentes.*

Correction
- On a $-M_3 g \sin\theta = M_3 \left(\ddot{y}_{ch}(t)\cos\theta + \ell_2\ddot{\theta} + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\cos\beta - h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2 \sin\beta\right)$. En linéarisant, on obtient $-M_3 g\theta = M_3 \left(\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2\ddot{\theta} + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right) - h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\beta\right)$. En considérant que $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, on a : $-M_3 g\theta = M_3 \left(\ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2\ddot{\theta} + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\right)$.
- On a : $F - M_3 g\cos\theta = M_3\left(-\ddot{y}_{ch}(t)\sin\theta + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\sin\beta + \ell_2\dot{\theta}^2 + h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\cos\beta\right)$. En linéarisant, on obtient : $F - M_3 g = M_3\left(-\ddot{y}_{ch}(t)\theta + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\beta + \ell_2\dot{\theta}^2 + h_3\left(\dot{\theta}+\dot{\beta}\right)^2\right)$ En considérant que $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, on a : $F - M_3 g = M_3\left(-\ddot{y}_{ch}(t)\theta + h_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)\beta\right)$.
- On a : $M_3 g h_3 \sin(\beta+\theta) = A_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)$ En linéarisant, on obtient $M_3 g h_3 (\beta+\theta) = A_3\left(\ddot{\theta}+\ddot{\beta}\right)$.

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en $y_{ch}(t)$ de 10 m.





Question 6 *Proposer une simplification de la modélisation précédente.*

Correction L'amplitude des oscillations de β est 10 fois inférieure aux oscillations de θ. En conséquences, on pourrait poser $\beta = 0$ et :
- $-g\theta = \ddot{y}_{ch}(t) + \ell_2\ddot{\theta} + h_3\ddot{\theta}$;
- $F - M_3 g = -M_3\ddot{y}_{ch}(t)\theta$;
- $M_3 g h_3 \theta = A_3\ddot{\theta}$.

Colle – Corrigé

Dynamique du véhicule – Segway de première génération★

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement*

Présentation

Objectif L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

Question 1 *Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V(G_E/\mathscr{R}_0)}$, du point G_E dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C. Exprimer la vitesse linéaire $V_L = ||\overrightarrow{V(G_E/\mathscr{R}_0)}||$ du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.*

Correction On a $\overrightarrow{V(G_E/\mathscr{R}_0)} = -R_C\dot{\theta}\overrightarrow{x_1}$. On a alors $V_L = R_C\dot{\theta}$.

Question 2 *Exprimer l'accélération, notée $\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathscr{R}_0)}$, du point G_E dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C.*

Correction $\overrightarrow{\Gamma(G_E/\mathscr{R}_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V(G_E/\mathscr{R}_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = -R_C\ddot{\theta}\overrightarrow{x_1} - R_C\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} = -R_C\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1}$ ($\dot{\theta}$ est constant).

Question 3 *Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A, T_B, N_A, N_B et f traduisant le non glissement du véhicule. En déduire une inéquation liant $T_A + T_B$ à f et $N_A + N_B$.*

Correction La direction des efforts normaux et tangentiels est donnée. En utilisant les lois de Coulomb, on a donc, $T_A \leq f N_A$ et $T_B \leq f N_B$. En sommant les inégalités, on a donc $T_A + T_B \leq f(N_A + N_B)$.

Question 4 *Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.*

Correction E étant un ensemble indéformable, on a : $\overrightarrow{R_d(E/\mathscr{R}_0)} = -m_E R_C\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1}$ (pas de projection sur $\overrightarrow{z_0}$. On isole E et les roues et on réalise le BAME :

- pesanteur sur E ;
- action du sol sur les roues.

En appliquant le TRD en projection sur $\overrightarrow{z_{01}}$, on a donc : $N_A + N_B - m_E g = 0$.

Question 5 *Isoler E et les roues. Écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{y_1}$. En déduire une inéquation donnant la vitesse limite V_L de passage dans un virage qui ne provoque pas le dérapage.*

Correction En appliquant le TRD en projection sur $\overrightarrow{y_1}$, on a : $-T_A - T_B = -m_E R_C\dot{\theta}^2 \Leftrightarrow T_A + T_B = m_E R_C\dot{\theta}^2$. En utilisant les résultats de la question précédente, $m_E R_C\dot{\theta}^2 \leq f m_E g$. En notant $V_L = R_C\dot{\theta}$ la vitesse limite avant dérapage, on a $\dfrac{V_L^2}{R_C} \leq f g$. On a donc $V_L \leq \sqrt{R_C f g}$.

Question 6 *Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.*

Correction La vitesse limite est donc de $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ soient $36\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ce qui satisfait le cahier des charges.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

Question 7 *Calculer le torseur dynamique du système matériel E en G_E dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = \left(O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$. Exprimer ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$.*

Correction Au centre d'inertie de E, on a $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_0}$. On a $\overrightarrow{\Omega(E/\mathcal{R}_0)} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_0}$. On a donc, $\overrightarrow{\sigma(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E\dot{\theta}\overrightarrow{x_1} - D\dot{\theta}\overrightarrow{y_1} + C\dot{\theta}\overrightarrow{z_{01}}$. On a donc $\overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} = -E\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} + D\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1}$.

En conséquence, $\{\mathcal{D}(E/\mathcal{R}_0)\} = \left\{\begin{array}{c} -m_E R_C \dot{\theta}^2 \overrightarrow{y_1} \\ -E\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} + D\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1} \end{array}\right\}_{G_E}$.

Question 8 *Calculer $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \overrightarrow{x_1}$ le moment dynamique au point B de l'ensemble (E) dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0 = \left(O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ en projection sur $\overrightarrow{x_1}$.*

Correction $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{\delta(G_E, E/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{BG_E} \wedge \overrightarrow{R_d(B/E)} = -E\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} + D\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1} + \left(h\overrightarrow{z_0} - l\overrightarrow{y_1}\right) \wedge \left(-m_E R_C \dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1}\right)$ $= -E\dot{\theta}^2\overrightarrow{y_1} + D\dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1} + h m_E R_C \dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1}$. $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \overrightarrow{x_1} = (D + h m_E R_C)\dot{\theta}^2$.

Question 9 *En appliquant le théorème du moment dynamique au point B à l'ensemble E et les roues dans leur mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$, en projection sur $\overrightarrow{x_1}$, écrire l'équation scalaire qui donne N_A en fonction de $\overrightarrow{\delta(B, E/\mathcal{R}_0)} \cdot \overrightarrow{x_1}$ et des données du problème.*

Correction On a :
- $\overrightarrow{BG_E} \wedge -m_E g \overrightarrow{z_{01}} = \left(-l\overrightarrow{y_1} + h\overrightarrow{z_0}\right) \wedge -m_E g \overrightarrow{z_{01}} = l m_E g \overrightarrow{x_1}$;
- $\overrightarrow{BA} \wedge \left(-T_A\overrightarrow{y_1} + N_A\overrightarrow{z_1}\right) = -2l\overrightarrow{y_1} \wedge \left(-T_A\overrightarrow{y_1} + N_A\overrightarrow{z_1}\right) = -2l N_A \overrightarrow{x_1}$.

En appliquant le TMD en B suivant $\overrightarrow{x_1}$, on a : $l m_E g - 2l N_A = (D + h m_E R_C)\dot{\theta}^2$.

Au final, $N_A = \dfrac{l m_E g - (D + h m_E R_C)\dot{\theta}^2}{2l}$.

Question 10 *Écrire la condition de non renversement du véhicule.*

Correction Pour qu'il y ait non renversement, N_A doit rester positif ou nul.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 11 *Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.*

Correction $N_A \simeq \dfrac{l m_E g - h m_E R_C \dot{\theta}^2}{2l} \geq 0$.Ce qui est positif (pas de basculement).

$N_A \geq 0 \Rightarrow \dfrac{l m_E g - (D + h m_E R_C)\dot{\theta}^2}{2l} \geq 0 \Rightarrow l g - h R_C \dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow l g - h V_L^2/R_C \geq 0 \Rightarrow l g \geq h V_L^2/R_C \Rightarrow \sqrt{\dfrac{R_C l g}{h}} \geq V_L$ $\Rightarrow V_L \leq 6{,}38\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 22{,}9\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. CDCF Validé.