

Application 1



Chaîne fermée – Micromoteur de modélisme

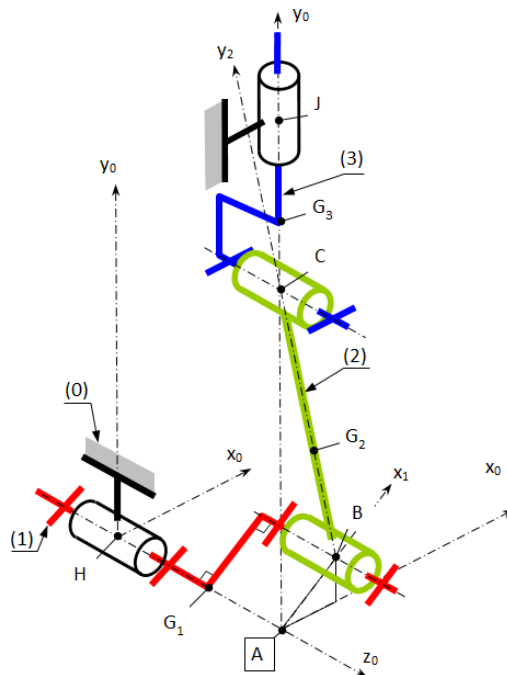
Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Mise en situation

Les figures et le schéma ci-dessous représentent un micromoteur à combustion interne de modèle réduit. Du point de vue cinématique, il est basé sur un système bielle manivelle (2,1), associé à un piston (3), animé d'un mouvement de translation rectiligne alternatif.



On note :

- $\overrightarrow{AB} = e \overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BC} = L_2 \overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{AC} = \lambda_3 \overrightarrow{y_0}$;

- $\overrightarrow{HG_1} = a_1 \overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{BG_2} = a_2 \overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{CG_3} = a_3 \overrightarrow{y_0}$;
- $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}) = \theta_1$, $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2}) = \theta_2$;
- $\omega_{10} = \dot{\theta}_1$ et $\omega_{20} = \dot{\theta}_2$;
- m_1 , m_2 et m_3 les masses des trois pièces mobiles (1), (2) et (3).

On note $C_m \overrightarrow{z_0}$ le couple délivré par le moteur et $F_e \overrightarrow{y_0}$ la force exercée sur le piston suite à l'explosion du mélange air – carburant. On néglige les effets de la pesanteur.

Question 1 Exprimer la relation liant la vitesse de rotation ω_{10} du vilebrequin (1) et la vitesse du piston (3), notée $\dot{\lambda} = V_{3/0}$.

Dans la perspective d'une étude dynamique, on se propose d'évaluer les caractéristiques de masse et inertie des trois pièces mobiles, ainsi que leurs propriétés cinétiques.

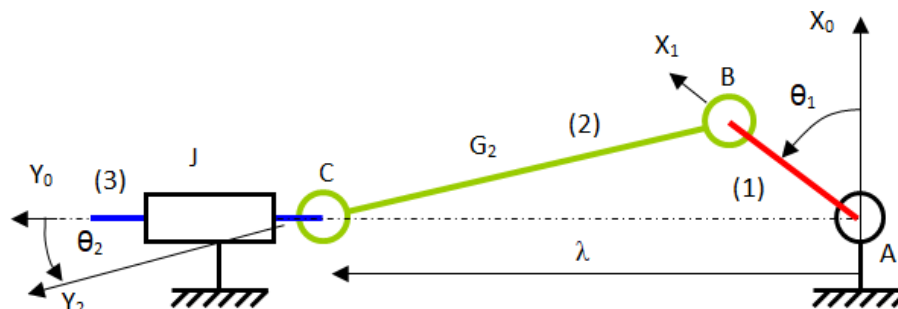
On note $I_H(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(H; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})}$ la

matrice d'inertie en H de l'ensemble {vilebrequin, hélice} repéré (1).

Question 2 En considérant que seul le plan $(H, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{z_1})$ est le plan de symétrie, indiquer quelle(s) simplification(s) cela apporte à cette matrice d'inertie.

Par la suite on fait l'hypothèse que les matrices d'inertie $I_A(1)$, $I_{G_2}(2)$ et $I_{G_3}(3)$ sont diagonales.

Question 3 Déterminer l'équation de mouvement par les théorèmes généraux.



Application 1



Chaîne ouverte – Wheeling moto

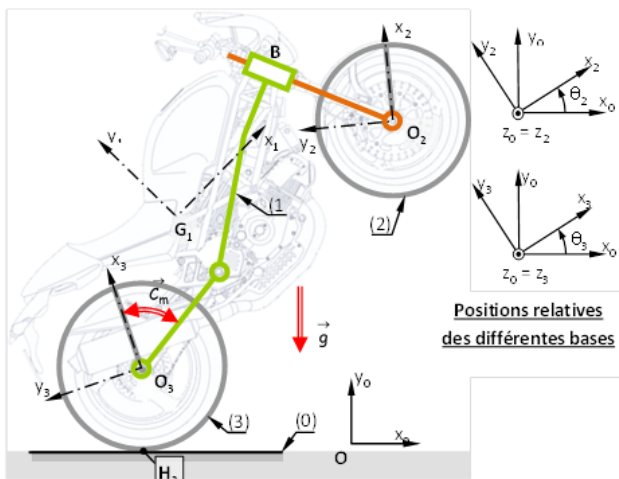
Équipe PT La Martinière Monplaisir

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Modélisation

L'étude proposée concerne l'étude dynamique d'une moto dans une phase de wheeling. Il s'agit d'une figure acrobatique consistant à soulever la roue avant, et de ne garder que l'appui sous la roue arrière. La moto est supposée se déplacer en ligne droite, sur une route horizontale, et l'étude menée est cinématiquement plane. Le modèle d'étude est sur la figure ci-dessous.



- $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère supposé galiléen, où \vec{x}_0 est dirigé suivant la vitesse de la moto et \vec{y}_0 suivant la verticale ascendante;
- $\mathcal{R}_1 = (G_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est un repère lié à l'ensemble considéré indéformable {cadre + bras arrière + fourche avant + pilote}. On note $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- $\mathcal{R}_2 = (O_2; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est un repère lié à la roue avant (2), de rayon R et de centre O_2 tel que $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$. On note $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$;
- $\mathcal{R}_3 = (O_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est un repère lié à la roue arrière (3), de rayon R et de centre O_3 tel que $\vec{z}_3 = \vec{z}_0$. On note $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$. Les contacts entre les roues

(2) et (3) et le sol (0) sont modélisés par des liaisons ponctuelles en H_2 et H_3 .

On note :

- $\vec{OO}_3 = \lambda \vec{x}_0 + R \vec{y}_0$;
- $\vec{O}_3\vec{O}_2 = L_1 \vec{x}_1$;
- $\vec{O}_3\vec{G}_1 = a_1 \vec{x}_1 + b_1 \vec{y}_1$;
- $\vec{H}_3\vec{O}_3 = R \vec{y}_0$;
- $\vec{H}_2\vec{O}_2 = R \vec{y}_0$;
- $G_2 = O_2$ et $G_3 = O_3$.

On note G_i le centre d'inertie, m_i la masse et C_i le moment d'inertie par rapport à l'axe de la pièce (i).

Étude dynamique

La transmission exerce sur la roue arrière un couple moteur $\vec{C}_m = C_m \vec{z}_0$. On suppose que l'adhérence roue/sol est suffisante pour assurer le roulement sans glissement de la roue (3) au contact en H avec le sol. La situation initiale est définie au moment où la roue avant quitte le contact avec le sol, avec $\dot{\theta}_1 = 0$ (après $\neq 0$).

Question 1 Construire le graphe de structure de la moto dans la phase de wheeling. Préciser le degré de mobilité de l'ensemble, compte tenu de l'hypothèse de roulement sans glissement en H_3 .

Question 2 En se limitant à l'application des théorèmes généraux de la dynamique, définir quelles équations permettent de déterminer le mouvement de l'ensemble, en précisant :

- élément(s) isolé(s);
- théorème appliqué, en précisant quelle projection et quel point de réduction éventuel sont retenus.

Question 3 Mettre en place les équations précédentes. Conclure sur la possibilité d'intégration de ces équations.

Application 2



Chaîne ouverte – Banc d'essai vibrant

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

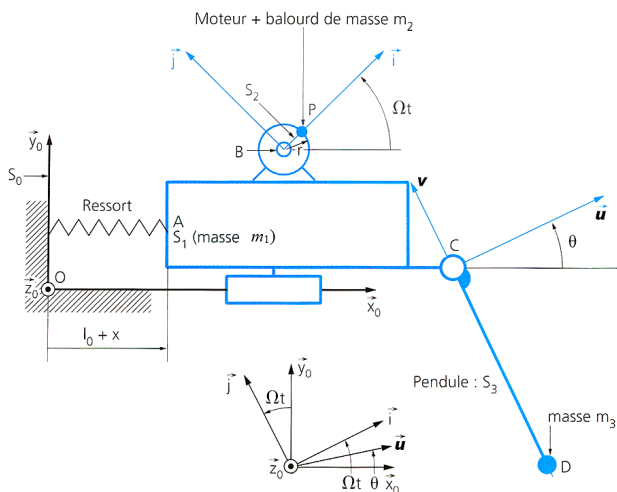
Présentation

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques. La figure ci-après représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue. Le bâti vibrant est modélisé par un solide S_1 , de masse m_1 en liaison glissière parfaite avec un support S_0 , fixe par rapport à un repère \mathcal{R}_0 supposé galiléen.

Le solide S_1 est rappelé par un ressort de longueur libre l_0 et de raideur k . Une masse ponctuelle m_2 excentrée, placée en P , tourne sur un rayon r et est entraînée à vitesse constante Ω . Elle modélise le balourd du rotor d'un moteur S_2 .

Un pendule simple de longueur L , porte à son extrémité D une masse concentrée m_3 , l'ensemble constitue le solide S_3 , en liaison pivot parfaite d'axe (C, \vec{z}_0) avec S_1 .

Les masses autres que m_1 , m_2 et m_3 sont négligées.



Objectif Déterminer les conditions géométriques permettant de supprimer les vibrations.

Question 1 Réaliser le graphe d'analyse du système.

Question 2 Préciser les théorèmes à utiliser permettant de déterminer deux équations différentielles liant x , θ et leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles.

Question 3 Déterminer ces deux équations.

On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant. On recherche alors une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$ en supposant que x , θ , \dot{x} , $\dot{\theta}$ sont des petites variations de position ou de vitesse autour de cette position d'équilibre.

Question 4 Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme $x(t) = A \cos(\Omega t)$ et $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$.

Question 5 Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B .

Question 6 Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer $x(t) = 0$ en régime forcé.

Éléments de correction

1. $(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta}\cos\theta - m_3L\dot{\theta}^2\sin\theta = m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)$ et $\ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$.
2. $(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta} = m_2r\Omega^2\cos(\Omega t)$ et $\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$.
3. $A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$ et $B = \frac{m_2r\Omega^2}{[-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k](-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$.
4. $L = \frac{g}{\Omega^2}$.

Application 3



Chaîne ouverte – Centrifugeuse géotechnique

Pôle Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

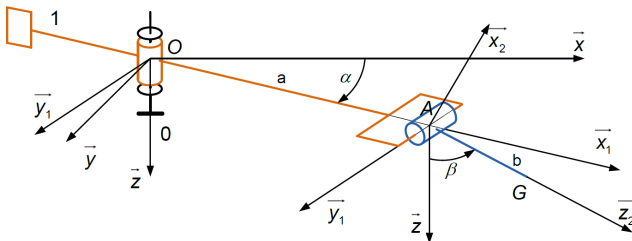
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Présentation

La géotechnique correspond aux activités liées aux applications de la mécanique des sols, de la mécanique des roches et de la géologie. À partir d'essais en laboratoire et in situ, la géotechnique fournit aux constructeurs de bâtiments et d'ouvrages les données indispensables pour le génie civil en ce qui concerne leur stabilité en fonction des sols. Aujourd'hui la modélisation physique d'ouvrage géotechnique en centrifugeuse est une approche expérimentale répandue. La centrifugation des modèles réduits permet de reproduire des états de contraintes dans les matériaux semblables à ceux régnant dans l'ouvrage grandeur nature. Le laboratoire central des Ponts et Chaussées (LCPC) de Nantes possède une centrifugeuse géotechnique dont les principales caractéristiques sont données ci-après :

- distance de l'axe à la plate-forme nacelle : 5,5 m ;
- longueur du bras : 6,8 m ;
- accélération maximale : 200 g ;
- temps de montée à 200 g : 360 s.

On propose le modèle cinématique suivant :



Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti 0 de la centrifugeuse. L'axe (O, \vec{z}) est dirigé suivant la verticale descendante. On désigne par $\vec{g} = g \vec{z}$ le vecteur accélération de la pesanteur.

Le bras 1 est en liaison pivot sans frottement d'axe (O, \vec{z}) avec le bâti 0. Soit $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère

lié au bras 1. On pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$, avec $\alpha = \omega t$, où ω est une constante positive.

La nacelle 2 est en liaison pivot sans frottement d'axe (A, \vec{y}_1) avec le bras 1, telle que $\vec{OA} = a \vec{x}_1$ (a est une constante positive). Soit $\mathcal{R}_2 = (A; \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ un repère lié à la nacelle 2. On pose $\beta = (\vec{z}, \vec{z}_2)$.

On note :

- bras 1 : moment d'inertie I par rapport à l'axe (O, \vec{z}) ;
- nacelle 2 : centre d'inertie G , tel que $\vec{AG} = b \vec{z}_2$ (b est une constante positive), masse m , matrice d'inertie

$$I_A(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

Un moteur, fixé sur la bâti 0, exerce sur le bras 1 une action mécanique représentée par le couple $C_m \vec{z}$. Le bras 1 tourne à la vitesse constante ω par rapport au bâti 0.

Objectif Déterminer les équations du mouvement de la centrifugeuse, ainsi que le couple moteur à fournir au cours du mouvement.

Question 1 Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer l'équation de mouvement de la nacelle 2 par rapport au bras 1. Déterminer cette équation.

Question 2 Préciser le théorème à utiliser permettant de déterminer le couple moteur. Déterminer son expression.

On suppose que la nacelle 2 est en équilibre relatif par rapport au bras 1, et que $m b a \gg A \simeq C$.

Question 3 Déterminer les expressions de l'angle β et du couple moteur C_m ?

Application 4



Chargement et déchargement des cargos porte-conteneurs

Centrale Supélec PSI 2013

Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Modélisation dynamique du comportement de la charge

Objectif Déterminer les équations du mouvement du conteneur de façon à en obtenir un modèle simple pour la synthèse de la commande.

En vue d'élaborer une commande automatisée du déchargement des conteneurs, une bonne compréhension de la dynamique du système est nécessaire. Cette partie vise à établir les équations du mouvement du conteneur. La charge peut alors balancer selon le modèle présenté ci-après. Dans cette étude, la vitesse de vent nulle. On fait l'hypothèse que le conteneur est suspendu à un seul câble indéformable, en liaison pivot à ses extrémités. Les liaisons entre les solides 0, 1, 2 et 3 sont supposées parfaites. Le portique support du chariot est noté 0, le chariot 1, le câble 2 et l'ensemble {spreader + conteneur} 3.

Paramétrage

- Le repère $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au portique fixe ; il est supposé galiléen avec \vec{z}_0 l'axe vertical ascendant.
- La position du chariot telle que $\vec{OE} = y_{ch}(t)\vec{y}_0$ est notée $y_{ch}(t)$; l'angle (\vec{z}_0, \vec{z}_2) d'inclinaison du câble $\theta(t)$ et l'angle (\vec{z}_2, \vec{z}_3) d'inclinaison du conteneur par rapport au câble $\beta(t)$.

Données

- $\mathcal{R}_1 = (E; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère lié au chariot de levage 1.
- $\mathcal{R}_2 = (E; \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ repère lié au câble 2 ; $\ell_2 = 50$ m la longueur EF du câble ; la masse est négligée.
- $\mathcal{R}_3 = (F; \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ repère lié à l'ensemble {spreader + conteneur} ; $m_3 = 50$ tonnes la masse du solide 3 ; G_3 le centre de gravité du solide 3, tel que $\vec{G_3F} = h_3\vec{z}_3$ où $h_3 = 2,5$ m ; la matrice d'inertie du

solide 3 s'écrit $I_3(G_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$ où

$$A_3 = 52 \times 10^3 \text{ kg m}^2$$

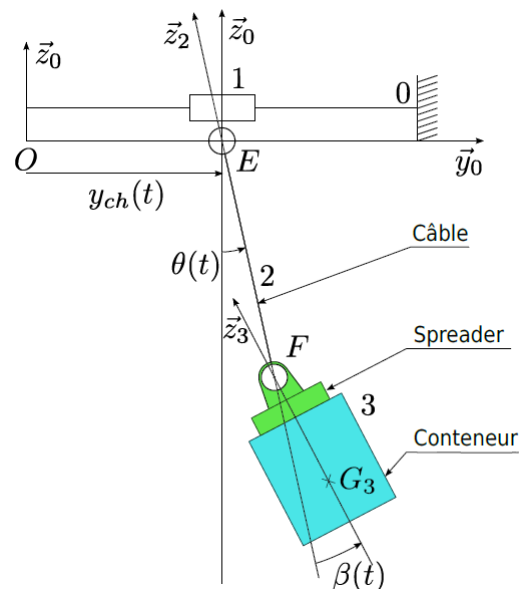
$$B_3 = 600 \times 10^3 \text{ kg m}^2$$

$$C_3 = 600 \times 10^3 \text{ kg m}^2$$

- la motorisation M_D du mouvement de direction exerce, par l'intermédiaire de câbles, des actions mé-

caniques sur (1) qui se réduisent à un glisseur de la forme $\vec{R}(M_D \rightarrow 1) = F\vec{y}_0$;

- l'action mécanique du câble sur le spreader est notée $\vec{R}(2 \rightarrow 3) = F_{23}\vec{z}_2$.



Question 1 Après avoir réalisé le graphe de structure, déterminer le nombre de degrés de liberté et le nombre d'actionneurs du modèle proposé figure précédente. En déduire le nombre de degrés de liberté non motorisés. Expliquer pourquoi il est difficile de poser le conteneur sur un camion avec précision ?

Question 2 Déterminer littéralement, au point G_3 , la vitesse $\vec{V}(G_3, 3/0)$ puis le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(3/0)\}$ de l'ensemble {conteneur + spreader} (3) dans son mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_0 .

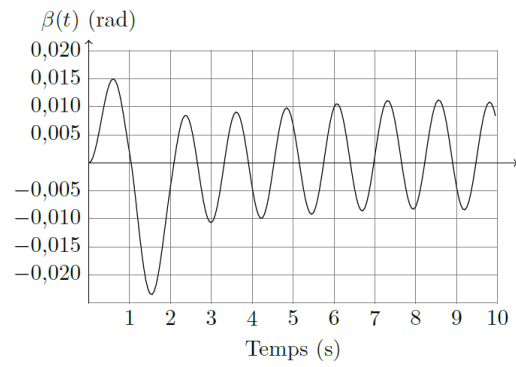
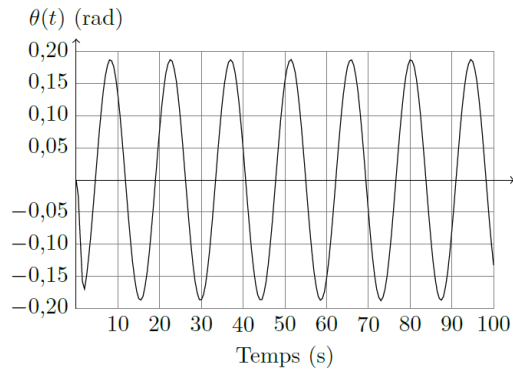
Question 3 En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer l'équation différentielle de résultante reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$, sans inconnue de liaison et sans l'action du moteur.

Question 4 En précisant l'isolement et le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer les équations

différentielles reliant les paramètres $\theta(t)$, $\beta(t)$ et $y_{ch}(t)$ et sans inconnue de liaison. La méthode sera clairement séparée des calculs.

Question 5 En supposant que θ , β , $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont petits, linéariser les équations précédentes.

Les courbes temporelles ont été obtenues par simulation, à partir des équations précédentes, pour un échelon en $y_{ch}(t)$ de 10 m.



Question 6 Proposer une simplification de la modélisation précédente.

TD 1



Dynamique du véhicule – Chariot élévateur à bateaux

X – ENS – PSI – 2012

Savoirs et compétences :

- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

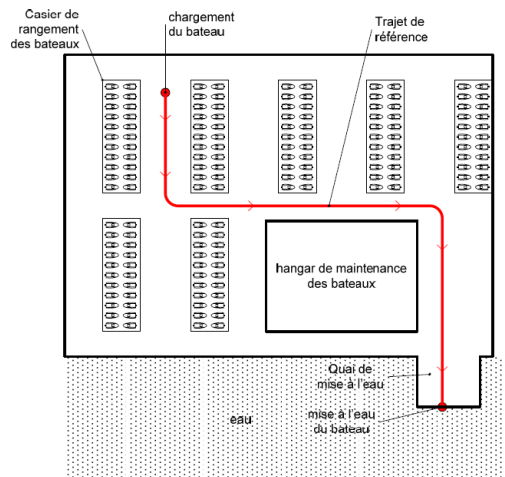
Présentation

Le chariot élévateur, objet de cette étude, permet la manutention de bateaux de 3000 kg à une hauteur de 8 m. Il est principalement constitué :

- du chariot qui assure le déplacement de l'ensemble et apporte la puissance pour la préhension et le levage ;
- du tablier, constitué du mât et des fourches, qui permet la préhension et la dépose du bateau.



On considère que le chariot élévateur se déplace sur le trajet de référence de la Figure 1. Les basculements frontal et latéral des chariots élévateurs représentent le principal risque auquel est confronté le conducteur. L'objectif de cette partie est de définir les conditions de stabilité du chariot élévateur dans les phases de freinage et lors des virages afin de définir les conditions optimales de déplacement du chariot dans chacune des phases. La caractérisation partielle de l'exigence 2 est donnée sur la Figure 2.



Caractérisation partielle de la Fonction de Service FS2			
Qualification		Critère	Valeur
Permettre au conducteur de déplacer le bateau en toute sécurité	C201	Basculement frontal	aucun
	C202	Couple de freinage du chariot disponible sur chaque roue	35 kN.m
	C203	Temps d'accélération sur le plat	Départ arrêté, parcourir 15 m en 5 s
	C204	Basculement latéral du chariot en virage	aucun
	C205	Puissance du moteur	220 kW
	C206	Position du centre de gravité de l'ensemble $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$	Situé à 1/3 de l'empattement par rapport à l'axe des roues arrière

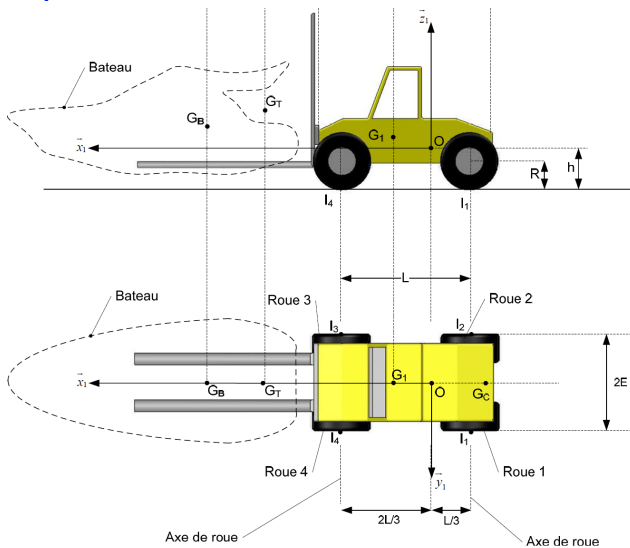
Objectif L'objectif est de valider l'exigence suivante : « req 2 : le conducteur peut déplacer le bateau en toute sécurité ».

Étude de la position du centre de gravité

La position du centre de gravité de l'ensemble « chariot+tablier » influence directement la stabilité lors des déplacements. Il est impératif de connaître avec précision sa position. Étant donné qu'il est possible de monter, sur le même chariot, différents types de tabliers en fonction de l'utilisation souhaitée, le chariot est équipé d'un contrepoids qui permet de régler la position du centre de gravité de l'ensemble. Ce réglage est effectué en usine et dépend du contexte d'utilisation du chariot élévateur.

Objectif L'objectif est de valider l'exigence suivante : « req C206 : la position du centre de gravité de l'ensemble $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$ doit être situé à un tiers de l'empattement par rapport à l'axe des roues arrières ».

La Figure suivante donne le paramétrage retenu pour l'étude. On note $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère lié au chariot. Le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ est un plan de symétrie matériel pour le chariot.



Le repère $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère lié à la route, supposé galiléen pour les conditions de l'étude.

On note :

- G_B : centre de gravité du bateau de masse m_B ;
- G_T : centre de gravité du tablier de masse m_T ;
- G_1 : centre de gravité du chariot seul de masse m_1 ;
- G_C : centre de gravité du contrepoids de masse m_C ;
- G : centre de gravité de l'ensemble $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$.

On donne : $\overrightarrow{OG_B} = \begin{pmatrix} x_{G_B} \\ 0 \\ z_{G_B} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$, $\overrightarrow{OG_T} = \begin{pmatrix} x_{G_T} \\ 0 \\ z_{G_T} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$, $\overrightarrow{OG_1} =$

$$\begin{pmatrix} x_{G_1} \\ 0 \\ z_{G_1} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}, \overrightarrow{OG_C} = \begin{pmatrix} x_{G_C} \\ 0 \\ z_{G_C} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}.$$

Afin de minimiser les risques de basculement du chariot élévateur, on souhaite que le point G soit confondu avec le point O (exigence req C206).

Question 1 Déterminer l'expression de x_{G_C} afin de valider l'exigence req C206.

Pour toute la suite de l'étude, les points G et O sont supposés confondus et la masse totale de l'ensemble $\Sigma = \{\text{chariot, tablier, contrepoids}\}$ est notée M .

Étude du basculement frontal

Afin d'éviter les risques de basculement frontal du chariot lors des phases de freinage, le dispositif de sécurité ADS permet au conducteur de choisir, à partir des commandes disponibles sur son tableau de bord, la valeur de la décélération à imposer au chariot avant l'arrêt total. Ainsi, lorsque le conducteur relâche complètement la pédale de l'accélérateur, le dispositif ADS entre en action et le chariot est alors animé d'un mouvement uniformément décéléré. Le choix de la valeur de la décélération est fait en fonction des conditions de chargement du chariot. Ce dispositif permet au conducteur de maîtriser parfaitement les distances d'arrêt tout en évitant le basculement frontal.

L'objectif de cette partie est de mettre en évidence l'intérêt d'un tel dispositif.

Le chariot est en phase de freinage sur une route horizontale, il transporte un bateau (B) de masse m_B et de

centre de gravité G_B . La vitesse du centre de gravité de l'ensemble Σ est donnée par $\overrightarrow{V}(G, \Sigma / \mathcal{R}_0) = V(t) \vec{x}_1$. Tous les mouvements du tablier sont inactifs durant le déplacement. Il n'y a pas de mouvement relatif entre le bateau et l'ensemble Σ au cours de cette phase. L'objet est de déterminer la valeur de la décélération qui provoque le basculement frontal de l'ensemble $\{\Sigma, B\}$. Le problème est traité en trois dimensions.

L'action mécanique exercée par le sol sur le pneu P_i est modélisée par le torseur $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_i)\} =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}(\text{sol} \rightarrow P_i) = -T_i \vec{x}_1 + N_i \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(I_i, \text{sol} \rightarrow P_i) = \vec{0} \end{array} \right\}_{I_i} = \left\{ \begin{array}{ll} -T_i & 0 \\ 0 & 0 \\ N_i & 0 \end{array} \right\}_{I_i, \mathcal{R}_1}.$$

La masse et l'inertie des roues sont négligées. La décélération qui provoque le basculement de l'ensemble $\{\Sigma, B\}$ est notée $\vec{\Gamma}_{\text{dec}}(\{\Sigma, B\} / \mathcal{R}_0) = -\text{dec}_x \vec{x}_1$.

On admet, dans un premier temps, que le basculement a lieu avant le glissement. Cette hypothèse sera vérifiée par la suite.

Question 2 Écrire les équations issues de l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble $\{\Sigma, B\}$. Le théorème du moment dynamique sera appliqué au point I_4 .

Question 3 Donner les hypothèses qui peuvent être faites afin de réduire le nombre d'inconnues du problème.

On considère que le basculement a lieu lorsque les roues arrière perdent le contact avec le sol.

Question 4 Déterminer alors l'expression de dec_x .

Le facteur d'adhérence entre le pneu et la route est noté f .

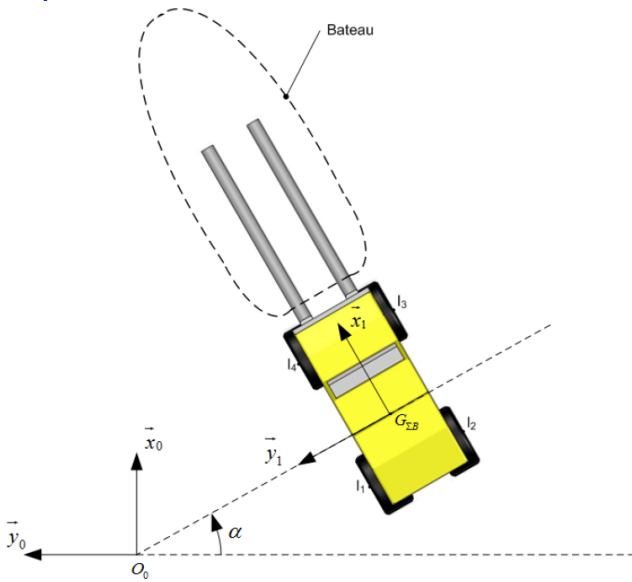
Question 5 Donner les expressions de N_4 et T_4 et expliquer qualitativement comment vérifier que le basculement a lieu avant le glissement afin de justifier l'hypothèse faite en début d'étude.

Étude du basculement latéral

Le centre de gravité de l'ensemble $\{\Sigma, B\}$ est noté $G_{\Sigma B}$

$$\overrightarrow{OG_{\Sigma B}} = \begin{pmatrix} x_{G_{\Sigma B}} \\ y_{G_{\Sigma B}} \\ z_{G_{\Sigma B}} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}.$$

L'objet est de déterminer la vitesse maximale avec laquelle le chariot peut aborder le virage sans risque de basculement latéral. Le schéma retenu pour l'étude est présenté sur la Figure 24. Le chariot aborde un virage de rayon de courbure ρ avec $\overrightarrow{O_0 G_{\Sigma B}} = -\rho \vec{y}_1$. Tous les mouvements du tablier sont inactifs durant le déplacement. Il n'y a pas de mouvement relatif entre le bateau B et l'ensemble Σ au cours du mouvement. La vitesse du chariot est constante pendant toute la phase de virage et est notée $\overrightarrow{V}(G, \Sigma / \mathcal{R}_0) = V \vec{x}_1$. La masse et l'inertie des roues sont négligées. On admet que le basculement latéral a lieu avant le glissement, cette hypothèse pourra être vérifiée par la suite.



Le rayon de courbure du virage ρ est suffisamment

grand devant l'empattement E du chariot pour pouvoir négliger l'influence du braquage des roues dans le modèle proposé. L'action mécanique exercée par le sol sur le pneu i est modélisée par le torseur : $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow P_i)\} =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow P_i)} = -T_i \vec{x}_1 + N_i \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(I_i, \text{sol} \rightarrow P_i)} = \vec{0} \end{array} \right\}_{I_i} = \left\{ \begin{array}{cc} -T_i & 0 \\ 0 & 0 \\ N_i & 0 \end{array} \right\}_{I_i, \mathcal{R}_1}.$$

La matrice d'inertie de l'ensemble $\{\Sigma, B\}$ est de la forme $I_{G_{\{\Sigma, B\}}}(\{\Sigma, B\}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}.$

Question 6 Quel théorème doit-on utiliser afin d'obtenir directement l'équation permettant de déterminer l'expression de V qui provoque le basculement latéral ?

Question 7 En déduire l'expression de V qui provoque le basculement latéral.

TD 2



Dynamique du véhicule – Véhicule à trois roues Clever

Concours Banque PT – SIA 2013

Savoirs et compétences :

- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Le Cleverest un démonstrateur technologique développé par un tissu d'industriels européens.

Il se présente comme un véhicule à trois roues pouvant embarquer deux personnes assises en tandem. Il adopte une architecture pendulaire, c'est-à-dire qu'il se penche dans les virages (cf.). Le déplacement du centre de gravité qui en résulte lui confère une grande stabilité malgré une faible largeur du véhicule (légèrement inférieure à 1 m, contre 60 à 75 cm pour une moto, et 1,5 m pour une petite voiture). Cette étroitesse se veut une réponse aux problèmes d'encombrement dans les villes mais permet aussi une surface frontale moins importante que sur une voiture conventionnelle et donc des pertes aérodynamiques réduites. En outre, les sensations de conduite sont semblables à celle d'une moto mais avec un pilotage, à l'aide d'un volant, propre à un véhicule à 4 roues. Le moteur est un monocylindre à gaz naturel qui a été développé par l'IFP et dont les performances permettent d'atteindre une vitesse de pointe de 100 km h^{-1} avec une accélération en phase avec les attentes pour un véhicule urbain.

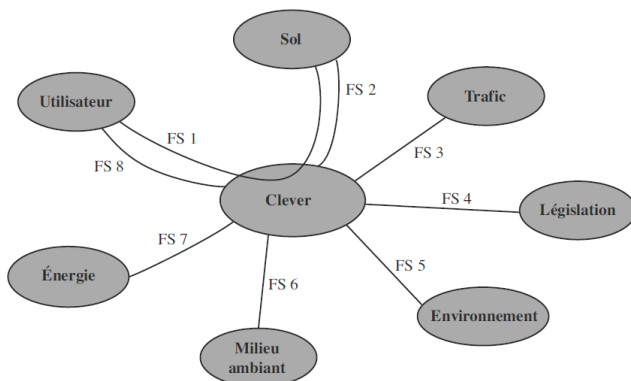
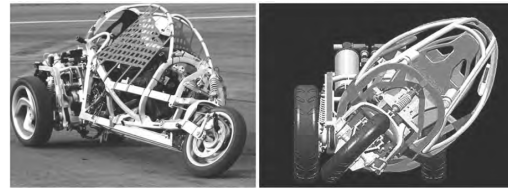


Diagramme partiel des interacteurs dans la phase d'utilisation normale 1

N°	Fonction de service
FS 1	Permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol
FS 2	Rester insensible aux perturbations de la route
FS 3	S'insérer facilement dans le trafic
FS 4	Respecter la réglementation en vigueur
FS 5	Contribuer au respect de l'environnement
FS 6	Résister au milieu ambiant
FS 7	Utiliser les énergies disponibles et ne pas trop consommer
FS 8	Être confortable

Caractérisation partielle des fonctions de service

Du point de vue de l'architecture cinématique (cf.), le groupe motopropulseur est placé à l'arrière. À l'avant, l'habitacle repose sur une roue de moto et pivote par rapport au bloc arrière autour d'une liaison pilotée angulairement par le biais de deux vérins hydrauliques. L'inclinaison est contrôlée par un ordinateur de bord en fonction de l'angle au volant et de la vitesse. Le Tableau regroupe les caractéristiques techniques annoncées par l'équipe de développement.



Vue de la cinématique pendulaire

Type de véhicule	inclinable à 3 roues
Disposition des sièges	en tandem
Longueur hors tout	3 m
Largeur hors tout	1 m
Hauteur hors tout	1,35 m
Poids à vide	395 kg
Châssis	aluminium
Carrosserie	matériau synthétique
Moteur	monocylindre à gaz naturel de 213 cm^3
Puissance maxi	20 Ch DIN (soit 15 kW) à 9000 tr/min
Couple maxi	16 Nm à 6500 tr/min
Vitesse maxi	100 km/h
Accélération	0-60 km/h en un temps inférieur à 7 s
Autonomie	100 km

Caractéristiques techniques

Validation de la fonction technique « Modifier l'inclinaison de l'habitacle »

Objectif Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction technique « Modifier l'inclinaison de l'habitacle » qui a été proposée pour assurer les fonctions de service FS1 «Permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol » et FS3 « S'insérer facilement dans le trafic » du Tableau donné en introduction. Ce choix doit en effet permettre de garantir la stabilité du Clever dans les virages tout en permettant une faible largeur du véhicule afin de s'insérer dans la circulation.

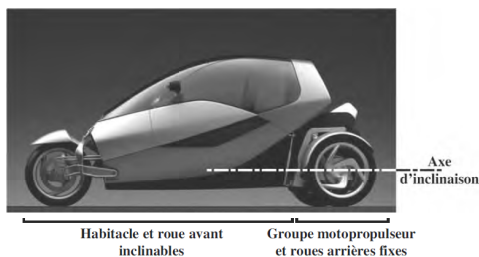
On donne ci-dessous deux extraits du cahier des charges relatifs aux fonctions de service FS1 et FS3.

Fonction de service	Critères d'appréciation	Niveau
FS1 Permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol	<ul style="list-style-type: none"> • Renversement du véhicule pour une vitesse de 55 km/h dans un virage de rayon de courbure 20 m • Glissement du véhicule pour une vitesse de 55 km/h dans un virage de rayon de courbure 20 m 	<ul style="list-style-type: none"> • Interdit • Interdit
Fonction de service	Critères d'appréciation	Niveau
FS3 S'insérer facilement dans la circulation	<ul style="list-style-type: none"> • Largeur hors tout du véhicule 	<ul style="list-style-type: none"> • < 1 m

1.1 Conditions de non renversement et d'adhérence

On se propose maintenant d'étudier l'influence du mécanisme d'inclinaison de l'habitacle du Clever sur la stabilité de celui-ci dans les virages. En particulier, on va montrer que cette technologie pendulaire lui permet d'avoir une largeur faible, comparée à une voiture qui n'est pas équipée de cette technologie, tout en assurant un non renversement à vitesse élevée.

Le mécanisme d'inclinaison peut être décrit globalement par la subsection 1.1. Le groupe motopropulseur, comportant entre autres le moteur et les roues arrière, reste en permanence perpendiculaire au sol. La partie avant, constituée de l'habitacle et de la roue avant, peut au contraire s'incliner dans les virages grâce à un mécanisme hydraulique qui sera étudié ultérieurement dans le sujet. Les deux parties du Clever sont reliées par une liaison pivot d'axe parallèle au sol, schématisée sur la subsection 1.1.



Présentation du mécanisme d'inclinaison

Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse pas dans un premier temps à la roue avant, ce qui permet de se ramener au système schématisé sur la subsection 1.1. On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- la route **R** est munie du repère $\mathcal{R}_g = (O; \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$. Le référentiel associé est supposé galiléen;
- le groupe motopropulseur **0** est animé d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O . Le rayon de courbure de la trajectoire du point C dans \mathcal{R}_g est R_C . Le repère lié à **0** est $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ tel que $\vec{z}_0 = \vec{z}_g$ et on note $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_g) = (\vec{y}_0, \vec{y}_g)$. On a donc $OC = R_C \vec{x}_0$. On remarquera bien que \mathcal{R}_0 est mobile par rapport à \mathcal{R}_g ;
- l'habitacle **1** est liée au groupe **0** par une liaison pivot d'axe (C, \vec{y}_0) . Le repère lié $\mathcal{R}_1 = (C; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est tel que $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$. On note $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ l'angle d'inclinaison du système pendulaire. Le centre de gravité de **1** est G tel que $\vec{CG} = e \vec{z}_1$ et

sa masse est m . On note $I_G(1)$ son opérateur d'inertie en G . On considérera que c'est un solide de forme quelconque dont la matrice est donnée dans la base \mathcal{B}_0 .

- les roues arrière **2** et **3** sont liées au groupe **0** par des liaisons pivots d'axe (C, \vec{x}_0) .
- les contacts entre les roues **2** et **3** et la route **R** ont lieu en A et B définis par $\vec{CA} = \frac{\ell}{2} \vec{x}_0 - r \vec{z}_0$ et $\vec{CB} = -\frac{\ell}{2} \vec{x}_0 - r \vec{z}_0$, r désignant le rayon des roues et ℓ la voie arrière du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres A et B et de normale \vec{z}_0 . Le contact dans ces liaisons se fait avec frottement et le coefficient de frottement est noté f (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route **R** sur les roues **2** et **3** sont modélisées dans le plan (\vec{x}_0, \vec{y}_0) par des glisseurs en A et B de résultantes $\vec{R}(R \rightarrow 2) = T_A \vec{x}_0 + N_A \vec{z}_0$ et $\vec{R}(R \rightarrow 3) = T_B \vec{x}_0 + N_B \vec{z}_0$.

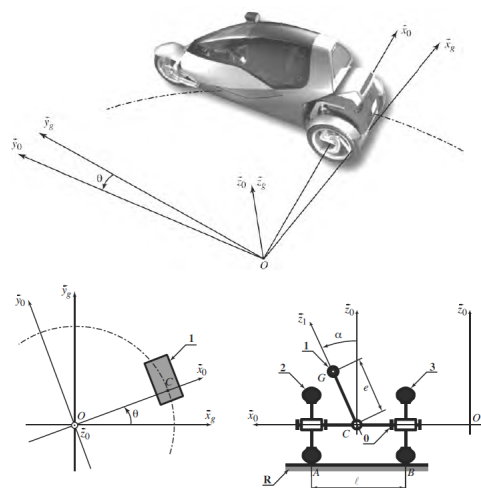
Dans les questions qui suivent, mises à part la liaison entre **R** et **2** et celle entre **R** et **3**, pour lesquelles le frottement est pris en compte, toutes les liaisons sont considérées parfaites. En outre, on négligera la masse des pièces **0**, **2** et **3** devant celle de l'habitacle **1**. On note $E = 0 \cup 1 \cup 2 \cup 3$. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g \vec{z}_0$.

On se place dans un cas où le rayon de courbure R_C de la trajectoire du point C , ainsi que la vitesse V de ce point par rapport au référentiel \mathcal{R}_g sont constants. L'angle d'inclinaison α du système pendulaire est lui aussi supposé constant.

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $V(G/\mathcal{R}_g)$, du point G dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_g en fonction de V , e , R_C et α .

Question 2 Exprimer l'accélération, notée $a(G/\mathcal{R}_g)$, du point G dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_g en fonction de V , e , R_C et α .

On



Modélisation simplifiée du Clever en position inclinée

On néglige le contact entre la roue avant et le sol.

Question 3 En rappelant que le rayon R_c , la vitesse V et l'angle α sont supposés constants, calculer le moment dynamique en G , noté $\delta(G, E/\mathcal{R}_g)$, de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_g .

Question 4 En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_g , écrire les trois équations scalaires qui lient les actions mécaniques de contact entre le sol et les roues T_A , N_A , T_B et N_B aux données du problème.

Question 5 Dédurre de ces trois relations l'expression des efforts normaux N_A et N_B en fonction de m , ℓ , r , e , g et R_c , α , V . Tous les autres paramètres étant fixés, une augmentation de la vitesse V risque-t-elle de susciter un décolllement de la roue intérieure ou de la roue extérieure au virage?

Question 6 Dédurre de la question précédente la condition de non renversement, écrite sous la forme d'une inéquation, qui lie le rapport V^2/R_c aux paramètres ℓ , r , e , g et α , R_c .

Question 7 Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A , T_B , N_A , N_B et f . En utilisant les équations qui avaient été montrées précédemment et en appliquant le principe fondamental de la dynamique, en déduire la condition d'adhérence, écrite sous la forme d'une inéquation, qui lie le rapport $\frac{V^2}{R_c}$ aux paramètres e , f , g et α , R_c .

1.2 Cas d'un véhicule sans architecture pendulaire

Afin de montrer l'intérêt de l'architecture pendulaire comme solution technique à la fonction de service FS3 « S'insérer facilement dans la circulation », on imagine maintenant que le véhicule Clever n'en est pas équipé, ce qui se traduit par la condition $\alpha = 0$.

Question 8 Réécrire les conditions d'adhérence et de non renversement dans ce cas particulier.

On se propose d'étudier la configuration suivante :

- rayon d'une roue, $r = 30$ cm, position du centre de gravité, $e = 50$ cm;
- accélération de la pesanteur, $g = 9,81$ m s⁻² coefficient d'adhérence pneu-route, $f = 0,8$.

Question 9 Calculer la valeur de la voie arrière du

véhicule (largeur ℓ entre les roues arrières) en dessous de laquelle le phénomène limitant la vitesse à laquelle on peut prendre un virage est le risque de renversement et non celui de dérapage. En déduire quel est le phénomène limitant dans le cas d'une voiture traditionnelle (voie de l'ordre de 1,5 m) et dans le cas d'un véhicule étroit comme le Clever (voie égale à 0,9 m)?

Question 10 Calculer la valeur de la vitesse maximale V à laquelle il est possible de prendre un virage de rayon de courbure $R_c = 20$ m avec un véhicule étroit de voie $\ell = 0,9$ m si celui-ci n'est pas inclinable. On exprimera cette vitesse en km/h. Celle-ci est-elle compatible avec la norme qui prescrit de pouvoir rouler à 55 km h⁻¹ dans un virage de rayon de courbure 20 m?

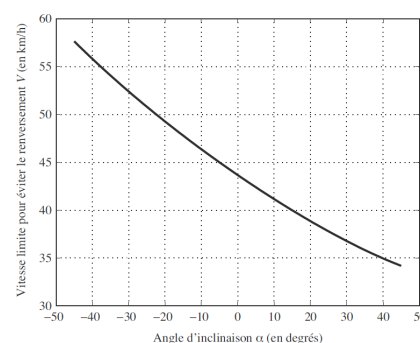
1.3 Cas d'un véhicule à architecture pendulaire

On considère maintenant l'architecture pendulaire. L'angle α peut varier dans la plage $[-45^\circ, 45^\circ]$.

Question 11 Commenter le signe de l'angle α pour contribuer au non renversement du Clever dans la configuration de la subsection 1.1 (virage à gauche). Le véhicule doit-il s'incliner vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la trajectoire (comme c'est le cas sur la subsection 1.1 en bas à droite)?

Le graphique de la subsection 1.3, représente, en fonction de l'angle d'inclinaison α et dans la configuration précédente (même géométrie et rayon de courbure $R_c = 20$ m), l'évolution de vitesse maximale V en dessous de laquelle il n'y a pas renversement.

Question 12 En utilisant la subsection 1.3, déterminer l'angle d'inclinaison α qu'il faut imposer à l'habitacle pour respecter la norme.



Représentation graphique de la condition de non renversement

TD 3



Dynamique du véhicule – Segway de première génération

Frédéric SOLLNER – Lycée Mermoz – Montpellier

Savoirs et compétences :

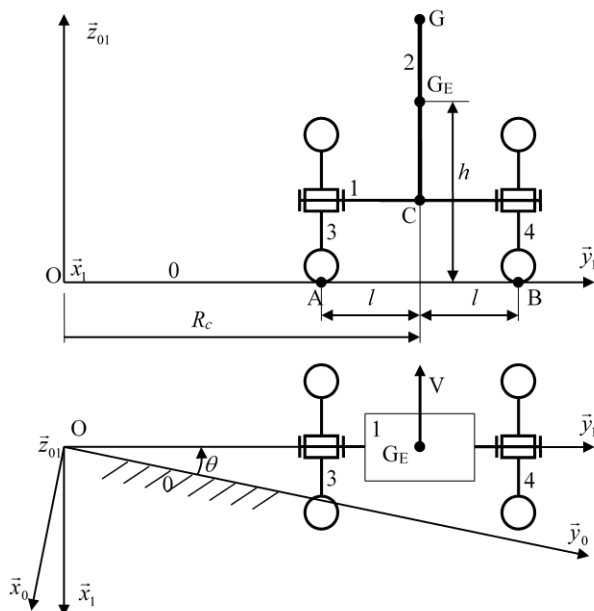
- ☐ Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- ☐ Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Présentation

Le support de l'étude est le véhicule auto balancé Segway®. Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, mais plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne.

La première génération de Segway avait un guidon fixe et une poignée de direction). Cette technologie provoquait un effet de roulis qui pouvait conduire à un renversement. Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier le dérapage et le renversement d'un Segway de première génération.

La seconde génération de Segway a vu apparaître une technologie appelée LeanSteer avec guidon inclinable qui permet de faire tourner le Segway lorsque l'utilisateur penche son corps sur le côté (non étudié dans cet exercice).



On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- la route (0) est munie du repère $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Ce référentiel associé est supposé galiléen.
- la plate-forme (1) a pour centre de gravité C. Le conducteur (2) a pour centre de gravité G. Les roues

3 et 4, de masse et inertie négligeable, sont liées à 1 par des liaisons pivots d'axe (C, \vec{y}_1) . L'ensemble $E = 1 \cup 2$ forme le système matériel indéformable E de centre de gravité G_E et de masse m_E . Il est animée d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O. Le rayon de courbure de la trajectoire du point G_E dans \mathcal{R}_0 est R_C . Le repère lié à 1 est \mathcal{R}_1 tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0 = \vec{z}_{01}$ et on note $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

On donne $\vec{OG}_E = R_C \vec{y}_1 + h \vec{z}_{01}$. L'opérateur d'inertie de E en G_E dans $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est : $I_{G_E}(E) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$.

Hypothèse(s)

- Les contacts entre les roues 3 et 4 et la route 0 ont lieu en A et B définis par $\vec{G_E A} = -l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$ et $\vec{G_E B} = l \vec{y}_1 - h \vec{z}_0$, l désignant la demi voie du véhicule. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres A et B et de normale \vec{z}_{01} . Le contact dans ces liaisons se fait avec un coefficient de frottement noté f (on supposera pour simplifier que les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques). Les actions mécaniques de la route 0 sur les roues 3 et 4 sont modélisées par des glisseurs en A et B de résultantes $\vec{R}(0 \rightarrow 3) = -T_A \vec{y}_1 + N_A \vec{z}_1$ et $\vec{R}(0 \rightarrow 4) = -T_B \vec{y}_1 + N_B \vec{z}_1$.
- On se place dans un cas où le rayon de courbure R_C de la trajectoire du point C, ainsi que la vitesse de rotation θ par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 sont constants.
- L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g \vec{z}_0$. Accélération de la pesanteur, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$.
- On néglige la masse et les l'inertie des roues.

On donne :

- coefficient d'adhérence pneu-route : $f = 1$;
- masse de $E = 1 + 2$: $m_E = 134 \text{ kg}$;
- demi largeur des voies : $l = 35 \text{ cm}$, $h = 86 \text{ cm}$.

Objectif L'objectif est de valider l'exigence 1 : permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol.

Étude du dérapage en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.1» Glissement du véhicule pour une vitesse de 20 km h^{-1} dans un virage de rayon de courbure 10 m	Interdit

Question 1 Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V}(G_E/\mathcal{R}_0)$, du point G_E dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R_C . Exprimer la vitesse linéaire V_L du véhicule en fonction de R_C et $\dot{\theta}$.

Étude du renversement en virage du véhicule Segway

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges.

Exigence	Niveau
id=«1.2» Renversement du véhicule pour une vitesse de 20 km h^{-1} dans un virage de rayon de courbure 10 m.	Interdit

Hypothèse(s) On suppose qu'il y a adhérence des roues en A et B.

On néglige $I_{G_E}(E)$ pour simplifier l'application numérique.

Question 2 Faire les applications numériques nécessaires et vérifier la conformité au cahier des charges.