

## TD 01 – Corrigé

## Banc d'essai BTP

Concours CCINP-TSI 20??

Savoirs et compétences :



## Mise en situation

Objectif Valider Req 1.1.1.

## Le moteur à courant continu

## Modélisation de l'asservissement en vitesse

**Question 1** Quelle solution technologique peut-on utiliser pour le capteur situé en boucle de retour? Comment déterminer la valeur du gain  $K_{Adapt}$ ?

**Correction** Il s'agit de réaliser un asservissement en fréquence de rotation. On pourrait utiliser une génératrice tachymétrique.

Afin d'avoir un asservissement précis ( $\epsilon(p) = 0$  lorsque  $\Omega_c(p) = \Omega(p)$ ), on prend  $K_{Adapt} = K_{Capt}$ .

**Hypothèse 1 : on considère que  $C_r(p) = 0$  et  $\Omega_c(p) \neq 0$ .**

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_m(p) = (\Omega_m(p))/U(p)$  puis la fonction de transfert en boucle fermée  $H_1(p) = (\Omega_m(p))/(\Omega_c(p))$ . On considère que  $C(p) = K_p$ ,  $K_p$  étant constant. Mettre  $H_1(p)$  sous la forme  $K_1/(1 + \tau_1 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_1$  et  $\tau_1$ .

## Correction

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K}{R I_{eq} p}}{1 + \frac{K^2}{R I_{eq} p}} = \frac{K}{R I_{eq} p + K^2} = \frac{1/K}{1 + \frac{K^2}{R I_{eq}} p}$$

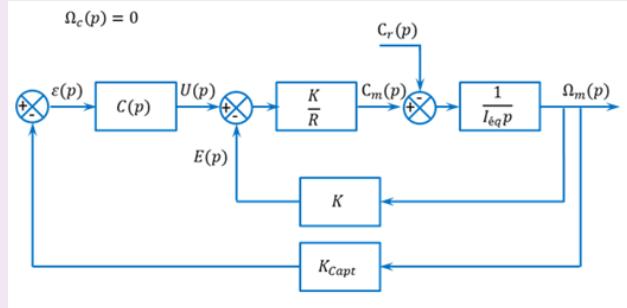
$$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)} = K_{Adapt} \frac{\frac{K}{R I_{eq} p + K^2} C(p)}{1 + \frac{K}{R I_{eq} p + K^2} C(p) K_{Capt}} = \frac{K_{Adapt} K C(p)}{R I_{eq} p + K^2 + K C(p) K_{Capt}}$$

$$H_1(p) = \frac{K_{Adapt} K K_p}{R I_{eq} p + K^2 + K K_p K_{Capt}} = \frac{\frac{K_{Adapt} K_p}{K + K_p K_{Capt}}}{\frac{R I_{eq}}{K^2 + K K_p K_{Capt}} p + 1} = \frac{K_1}{1 + \tau_1 p}$$

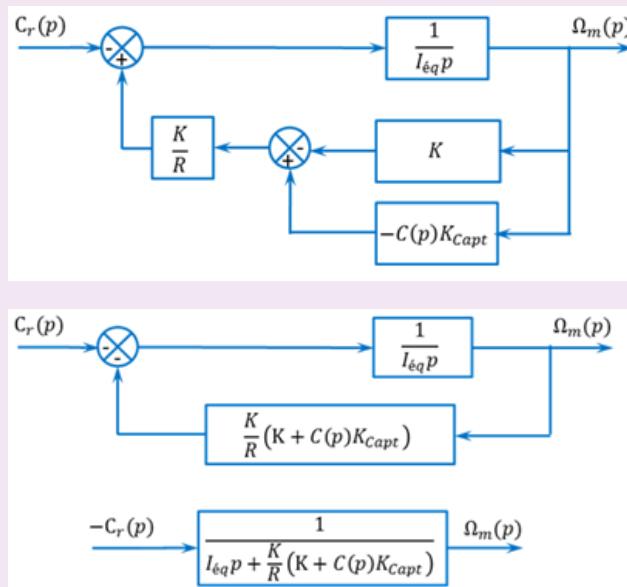
Soit par identification :  $K_1 = \frac{K_{Adapt} K_p}{K + K_p K_{Capt}}$  et  $\tau_1 = \frac{R I_{eq}}{K^2 + K K_p K_{Capt}}$ .

**Hypothèse 2 : on considère que  $\Omega_c(p) = 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 3** Retracer sur la copie le schéma bloc en tenant compte de ces hypothèses.

**Correction**


**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_2(p) = (\Omega_m(p))/(C_r(p))$ . On considère que  $C(p) = K_p$ ,  $K_p$  étant constante. Mettre  $H_2(p)$  sous la forme  $-K_2/(1 + \tau_2 p)$  où on explicitera les valeurs de  $K_2$  et  $\tau_2$ .

**Correction**


On a donc :  $H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = -\frac{1}{\frac{K}{R}(K + K_p K_{\text{Capt}}) + I_{\text{eq}} p} = -\frac{\frac{R}{K(K + K_p K_{\text{Capt}})}}{1 + \frac{R I_{\text{eq}}}{K(K + K_p K_{\text{Capt}})} p} = -\frac{K_2}{1 + \tau_2 p}$  Soit par identification :  $K_2 = \frac{R}{K(K + K_p K_{\text{Capt}})}$  et  $\tau_2 = \tau_1 = \frac{R I_{\text{eq}}}{K(K + K_p K_{\text{Capt}})}$ .

**Hypothèse 3 : on considère maintenant que  $\Omega_c(p) \neq 0$  et que  $C_r(p) \neq 0$ .**

**Question 5** En utilisant le théorème de superposition, exprimer  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $\Omega_c(p)$  et  $C_r(p)$ .

**Correction** Par superposition on a :  $\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_c(p) + H_2(p)C_r(p)$ .

À une fréquence de rotation de  $350 \text{ min}^{-1}$  en sortie de BTP correspond une consigne de fréquence de rotation du moteur de  $1928 \text{ min}^{-1}$  soit environ  $202 \text{ rad/s}$ . Le couple résistant ramené à l'arbre moteur est évalué à  $990 \text{ Nm}$ . On soumet donc le système à un échelon de consigne d'amplitude  $202 \text{ rad/s}$  et à un couple résistant de  $990 \text{ Nm}$ .

**Question 6** Après avoir exprimé la consigne  $\Omega_c(p)$  puis le couple résistant  $C_r(p)$ , calculer sous forme littérale l'écart statique du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

**Correction** On a, pour des échelons de consignes :  $\Omega_c(p) = \frac{\Omega_{c0}}{p}$  avec  $\Omega_{c0} = 202 \text{ rad/s}$  et  $C_r(p) = \frac{C_{r0}}{p}$  avec  $C_{r0} = 990 \text{ Nm}$ .

L'écart statique  $\varepsilon_S$  s'écrit en sortie du comparateur :

$$\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p (K_{\text{Adapt}} \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} \Omega_m(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p (K_{\text{Adapt}} \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_1(p) \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_2(p) C_r(p)))$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( K_{\text{Adapt}} \frac{\Omega_{c0}}{p} - K_{\text{Capt}} K_1 \frac{\Omega_{c0}}{p} + K_{\text{Capt}} K_2 \frac{C_{r0}}{p} \right)$$

$$\varepsilon_S = (K_{\text{Adapt}} - K_{\text{Capt}} K_1) \Omega_{c0} + K_{\text{Capt}} K_2 C_{r0}$$

L'écart statique ne pourra pas être nul (exigence 1.1.1 du cahier des charges non vérifiée).

**Question 7** Quel intérêt peut présenter l'utilisation d'un correcteur intégral de gain  $K_I$  de la forme  $C(p) = K_I / p$  ?

**Correction** En choisissant  $K_{\text{Adapt}} = K_{\text{Capt}}$ , l'écart statique pourra être réduit à condition d'avoir un gain  $K_P$  important  $K_1 \rightarrow 1$  et  $K_2 \rightarrow 0$ , mais pas trop pour ne pas rendre le système instable. Avec un correcteur intégral, le système devient de classe 1 et l'écart statique est annulé.

**Question 8** En conclusion, en utilisant le correcteur précédent, l'asservissement proposé permet-il de tenir la consigne de vitesse lorsqu'un couple résistant est appliqué à l'arbre de sortie de la BTP ? L'exigence 1.1.1 est-elle vérifiée ?

**Correction** En reprenant le raisonnement de la question \*\*, et en remplaçant  $C(p)$  par  $K_I / p$  dans les expressions

$$\text{de } H_1(p) \text{ et } H_2(p) : \lim_{p \rightarrow 0} H_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{Adapt}} \frac{\frac{K}{R I_{\text{eq}} p + K^2} \frac{K_I}{p}}{1 + \frac{K}{R I_{\text{eq}} p + K^2} \frac{K_I}{p} K_{\text{Capt}}} = \frac{K_{\text{Adapt}}}{K_{\text{Capt}}}.$$

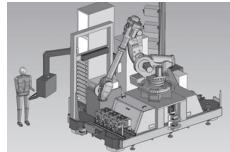
$$\lim_{p \rightarrow 0} H_2(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{1}{K \left( K + \frac{K_I}{p} K_{\text{Capt}} \right) + I_{\text{eq}} p} = 0$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p (K_{\text{Adapt}} \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_1(p) \Omega_c(p) - K_{\text{Capt}} H_2(p) C_r(p))$$

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} K_{\text{Adapt}} \Omega_{c0} - K_{\text{Capt}} K_{\text{Adapt}} / K_{\text{Capt}} \Omega_{c0} - K_{\text{Capt}} 0 C_r 0 = 0$$

Dans ce cas, l'application d'un couple perturbateur n'a donc pas d'influence sur l'écart statique. La fréquence de rotation du rotor peut être temporairement impactée, mais au bout d'un laps de temps, l'écart statique tend vers 0. L'exigence 1.1.1 est donc vérifiée.

## TD 02 – Corrigé



## Cellule d'assemblage pour avion Falcon

Concours E3A – PSI 2015.

## Savoirs et compétences :



## Mise en situation

## Sélectionner les fixations – Exigence 1.1

## Critères à respecter pour l'exigence 1.2

## Choix d'une architecture de la chaîne de transmission

**Question 1** Proposer sous la forme d'un schéma une autre solution permettant le déplacement du chariot. La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique par un moteur doit être conservée.

**Correction** Utilisation d'un système vis-écrou.

## Détermination de l'inertie équivalente

**Question 2** À partir des grandeurs définies déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente  $J_{eq}$  de l'ensemble  $\Sigma = \{\text{moteur} + \text{réducteur} + \text{poulies} + \text{chariot}\}$  ramenée sur l'arbre moteur. Cette inertie équivalente est définie par  $E_c(\Sigma) = 1/2 J_{eq} \omega_m^2$ .

**Correction**  $E_c(\Sigma) = E_c(\text{moteur}) + E_c(\text{réducteur}) + E_c(\text{poulies}) + E_c(\text{chariot})$ .

- $E_c(\text{moteur}) = 1/2 J_m \omega_m^2$ ;
- $E_c(\text{réducteur}) = 1/2 J_{\text{red}} \omega_m^2$ ;
- $E_c(\text{poulies}) = 1/2 (J_{\text{Pm}} + J_{\text{PR}}) \omega_{\text{red}}^2 = 1/2 (J_{\text{Pm}} + J_{\text{PR}}) \lambda^2 \omega_m^2$ ;
- $E_c(\text{chariot}) = 1/2 M V^2 = 1/2 M R_p^2 \lambda^2 \omega_m^2$ .

On a donc  $J_{eq} = M R_p^2 \lambda^2 + (J_{\text{Pm}} + J_{\text{PR}}) \lambda^2 + J_{\text{red}} + J_m$ .

**Question 3** Déterminer la valeur numérique de l'expression précédente.

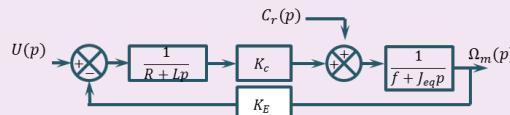
**Correction**  $J_{eq} = 0,0068 \text{ kg m}^2$

## Modèle de connaissance du moteur à courant continu

**Objectif** L'objectif de cette partie est d'établir un modèle de la motorisation de l'axe afin de simuler un déplacement.

**Question 4** À partir des équations du moteur à courant continu, réaliser le schéma-blocs du moteur à courant continu.

**Correction**



**Question 5** En considérant que  $C_R(p) = 0$ , déterminer la fonction de transfert  $H_M(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$  sous sa forme canonique.

**Correction** 
$$H_m(p) = \frac{\frac{K_c}{K_c K_E + Rf}}{1 + \frac{RJ_e q + Lf}{K_c K_E + Rf} p + \frac{LJ_e q}{K_c K_E + Rf} p^2}$$

**Question 6** Montrer que la fonction de transfert  $H_M(p)$  peut se mettre sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_c}{K_c K_E + R J_{eq} p + L J_{eq} p^2}$ . Justifier la réponse. Pour cette question, la valeur numérique de  $J_{eq}$  considérée sera  $J_{eq} = 7 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$  indépendamment du résultat numérique calculé précédemment.

**Correction** En faisant les applications numériques on montre que  $Rf$  est négligeable devant  $K_c K_E$  et que  $Lf$  et  $K_c$  négligeable devant  $R J_{eq}$ . On a donc :  $H_m(p) = \frac{\frac{K_c K_E}{1 + \frac{R J_{eq}}{K_c K_E} p + \frac{L J_{eq}}{K_c K_E} p^2}}{K_c K_E + R J_{eq} p + L J_{eq} p^2} = \frac{K_c}{K_c K_E + R J_{eq} p + L J_{eq} p^2}$ .

**Question 7** Montrer qu'avec l'expression,  $H_M(p)$  peut s'écrire sous la forme  $H_M(p) = \frac{K_M}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)}$  avec  $T_E < T_M$ .

**Correction** 
$$\begin{cases} T_e + T_m = \frac{R J_{eq}}{K_c K_E} \\ T_e T_m = \frac{L J_{eq}}{K_c K_E} \end{cases}$$
 On a (résolution d'une équation du second degré) :  

$$T_e = \frac{\frac{R J_{eq}}{K_c K_E} - \sqrt{\left(\frac{R J_{eq}}{K_c K_E}\right)^2 - 4 \frac{L J_{eq}}{K_c K_E}}}{2}$$
.  $T_e = 0,0051 \text{ s}$  et  $T_m = 0,0074 \text{ s}$ .

## Étude de l'asservissement en position de l'axe

### Modélisation de l'asservissement en position

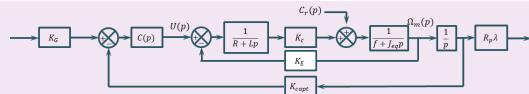
**Question 8** Quelle doit être la valeur de  $K_G$  pour assurer un asservissement correct (c'est-à-dire l'écart  $\epsilon$  doit être nul si la position de l'axe est identique à la consigne) ?

#### Correction

On doit avoir  $K_G = K_{\text{capt}} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{R_p} = 0,556 \text{ V rad}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

**Question 9** Donner le schéma-blocs de l'asservissement.

#### Correction



## Étude du modèle simplifié

**Question 10** Donner l'expression de  $Y(p)$ .

### Correction

On raisonne par superposition :

Si  $C_r(p) = 0$  :

$$\begin{aligned}
 Y_1(p) &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{\frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p}} \\
 &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r}{p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p) K_r} \\
 &= Y_{\text{cons}}(p) \frac{K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M K_r}
 \end{aligned}$$

**Correction** Si  $Y_{\text{Cons}}(p) = 0$  :

$$\begin{aligned}
 Y_2(p) &= C_r(p) \frac{\frac{H_c(p) K_r}{p}}{1 + \frac{K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)}{p}} \\
 &= C_r(p) \frac{H_c(p) K_r}{p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) H_m(p)} \\
 &= C_r(p) \frac{\frac{(R + Lp) K_M K_r}{K_C}}{(1 + T_E p)(1 + T_M p)p + K_r K_G K_{\text{Capt}} C(p) K_M}
 \end{aligned}$$

On a donc :  $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$ .

**Question 11** On souhaite déterminer l'erreur en position du système. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

### Correction

**Question 12** On souhaite que lorsque le système se déplace à vitesse constante, l'erreur sur la vitesse atteinte par le système soit nulle. Quelle sollicitation doit-on utiliser. Calculer l'écart statique pour  $C(p) = K_p$  puis  $C(p) = \frac{K_i}{p}$ .

### Correction

**Question 13** Conclure.

### Correction

**Question 14** Conclure sur la conformité au cahier des charges du système ainsi réglé.

**Correction**

**Question 15** Tracer de diagramme de Bode.

**Correction**

**Question 16** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = 1$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

**Correction**

**Question 17** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $C(p) = \frac{1}{p}$ . Déterminer les marges de phase et les marges de gain.

**Correction**

## Vérification des performances de l'axe du magasin de rivets

**Question 18** À partir des relevés ci-dessous, conclure sur le respect des exigences fonctionnelles de l'axe du magasin de stockage des rivets (Exigence 1.1).

**Correction**

## TD 03 – Corrigé



## Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec TSI 2017

## Savoirs et compétences :



## Mise en situation

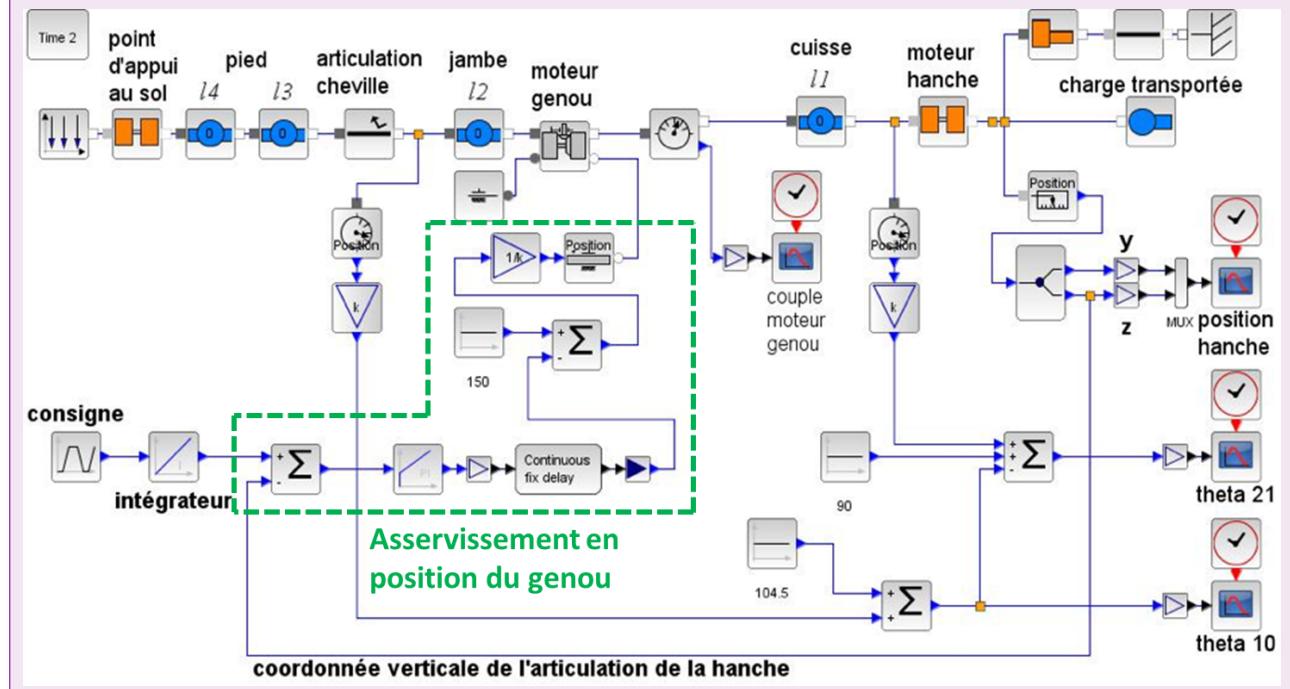
## Gestion du mouvement vertical

**Objectif** Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

**Question 1** Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

## Correction

Il s'agit d'un asservissement en position.



**Question 2** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

**Correction** En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a :  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} = \frac{C_\Omega(p)M_C(p)}{1 + C_\Omega(p)M_C(p)} \frac{1}{Jp + f}$ .

En conséquences :  $H_\Omega(p) = \frac{C_\Omega K_2}{Jp + C_\Omega K_2} = \frac{1}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1}$ .

**Question 3** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

**Correction** D'une part,  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$ . D'autre part,  $\theta_m(p) = H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \varepsilon(p)$ . Par suite,  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p) \left(1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}\right) = \theta_{mC}(p)$ . En conséquences,  $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}}$ .

**Question 4** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Correction** On a :

$$\bullet \quad \varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1} \frac{K_1}{p}} = 0 \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1);}$$

$$\bullet \quad \varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1} \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1} K_1} = \frac{1}{K_1} \text{ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et de gain } K_1 \text{ en BO).}$$

Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut  $\frac{1}{K_1} < 0,01$  et  $K_1 > 100$ .

**Question 5** Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

**Correction** En raisonnant de même, on a :  $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1} \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} = 0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + \frac{1}{\frac{Jp}{C_\Omega K_2} + 1} K_1} = \infty$  (ce qui était prévisible pour un système de classe 1).  
Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

**Question 6** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

**Correction** En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$ ;
- $\Omega_{mC}(p) = K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)$ ;
- $\theta_m(p) = \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp}$ .

On a donc :  $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp} = \theta_{mC}(p) - (K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)) \frac{1}{p(1 + Tp)} = \theta_{mC}(p) - \frac{K_3 p}{p(1 + Tp)} \theta_{mC}(p) - \frac{K_1}{p(1 + Tp)} \varepsilon(p)$ .

$$\text{On a alors } \varepsilon(p) \left(1 + \frac{K_1}{p(1 + Tp)}\right) = \theta_{mC}(p) \left(1 - \frac{K_3}{1 + Tp}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) \frac{p(1+Tp)+K_1}{p(1+Tp)} = \theta_{mC}(p) \frac{1+Tp-K_3}{1+Tp}.$$

$$\text{Enfin, } \varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) \frac{p(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1}.$$

Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

**Question 7** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant l'annuler cette erreur.

**Correction**  $\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} = \frac{1-K_3}{K_1}.$

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir  $K_3 = 1$ .

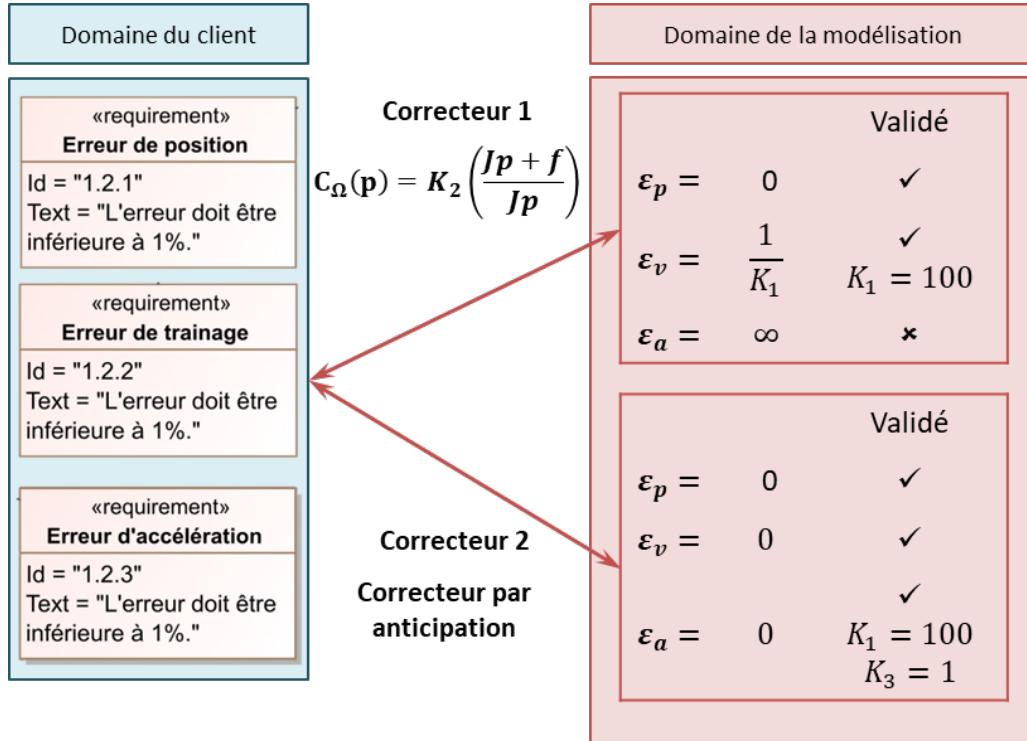
**Question 8** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

On a :

**Correction**  $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+Tp-K_3)}{p(1+Tp)+K_1} \frac{1}{p}.$  En prenant  $K_3 = 1$  et  $K_1 = 100$ , on obtient :  $\varepsilon_a = \frac{T}{p(1+Tp)+100} = \frac{33 \times 10^{-3}}{100}.$  L'erreur est donc de  $33 \times 10^{-5}$ . Le cahier des charges est donc validé.

## Synthèse

**Question 9** En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.



Application 01 –  
Corrigé

## Exercices d'application – Réponses fréquentielles

S. Grange

Savoirs et compétences :

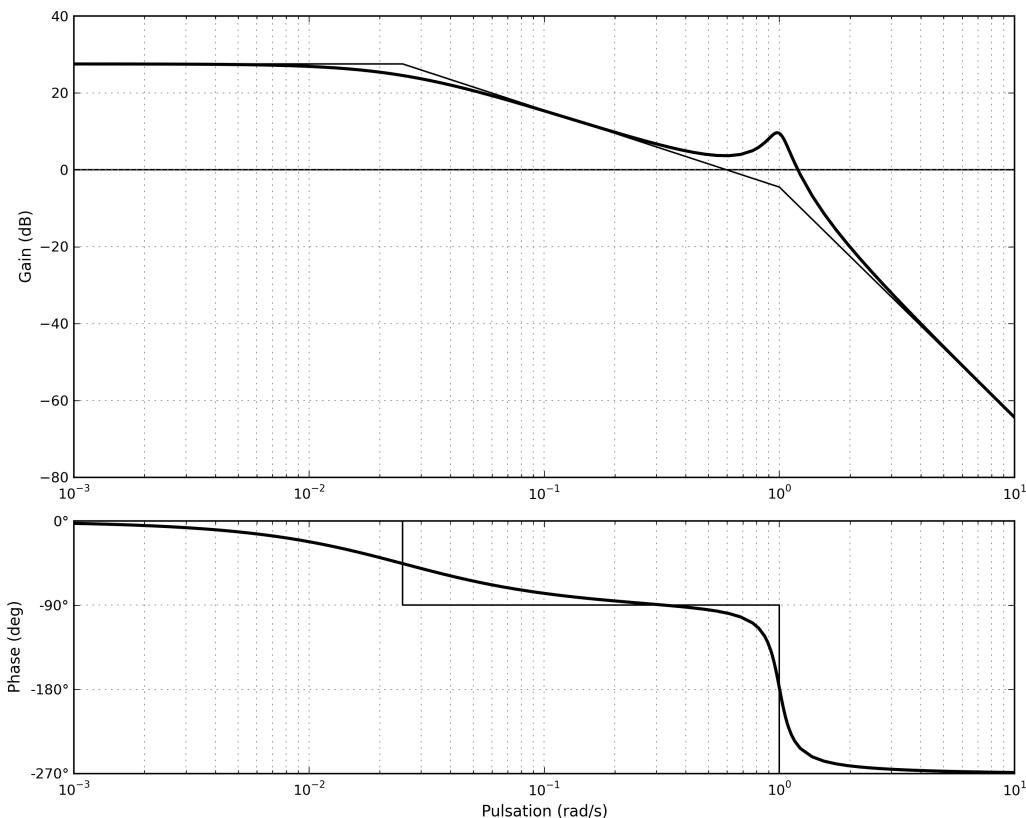


## Diagramme de Bode

Question 1 Tracer les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)}$$

**Correction**  $H(p) = \frac{0,6}{(p + 0,025)(p^2 + 0,2p + 1)} = \frac{24}{(1+40p)\left(1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1}p + \frac{p^2}{1^2}\right)}$

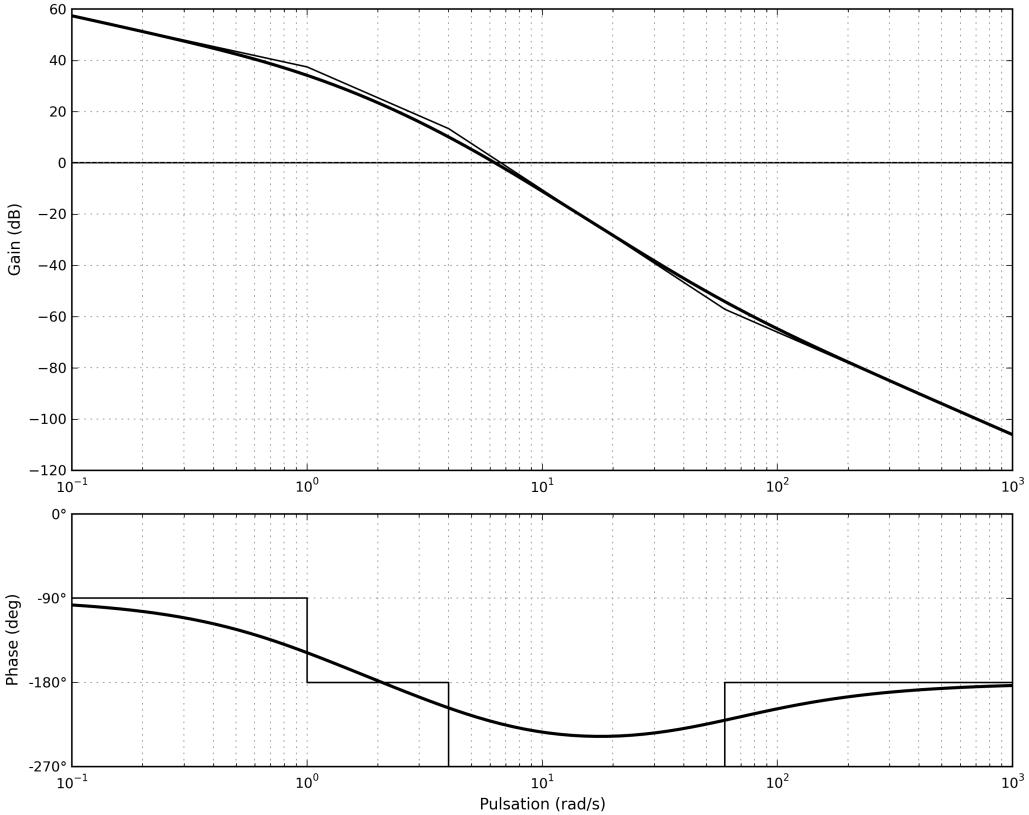


Question 2 Tracer les diagrammes de Bode réel et asymptotique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{5(p + 60)}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

**Correction**

$$H(p) = \frac{5(p+60)}{p(p^2+5p+4)} = \frac{75(1+0,0167p)}{p(1+(2 \cdot 1,25)/2p + p^2/2^2)} = \frac{75(1+0,0167p)}{p(1+p)(1+0,25p)}$$



**Question 3** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. Vous justifierez notamment sa forme :  $H(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$ . Donner les deux pôles dominants, en déduire une expression simplifiée de  $H(p)$ .

**Correction** D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. De plus la phase diminue dans un premier temps de 90 degrés puis encore de 90 degrés ce qui justifie les 2 1<sup>er</sup>ordres.

Pour identifier les constantes de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un premier ordre passe par -45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $\frac{1}{\tau}$ . Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc les pulsations de coupure lorsque la phase vaut -135 degrés puis -225 degrés. On a :  $1/T_1 \simeq 100$  et  $1/T_2 \simeq 2000$  donc  $T_1 = 0,01\text{s}$  et  $T_2 = 0,0005\text{s}$ .

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici  $\omega = 0,1\text{ rad/s}$ . Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1<sup>er</sup> ordre valent environ  $20\log K$  et celui de l'intégrateur  $20\log(1/\omega)$ . On a donc pour  $\omega = 0,1\text{ rad/s}$  :  $20\log(K/0,1) \simeq -20$   $K \simeq 1$

$$\text{On a donc : } H(p) = \frac{1}{p(1+0.01p)(1+0.0005p)}.$$

Le pôle dominant est le pôle qui met le plus de temps à converger, c'est-à-dire celui qui a la constante de temps la plus grande, on a donc :  $H(p) \simeq \frac{1}{p(1+0.01p)}$ .

**Question 4** On suppose que l'entrée du système est sinusoïdale :  $e(t) = 3 \sin 300t$ . Donner l'expression de la réponse en régime permanent à partir ce même diagramme de Bode.

**Correction** On sait que la sortie sera également sinusoïdale, de même pulsation que l'entrée mais déphasée et d'amplitude différente :  $s(t) = S_0 \sin(300t + \varphi)$ .

Le diagramme de Bode nous donne le rapport de l'amplitude entre la sortie et l'entrée (courbe de gain) et le

déphasage de la sortie par rapport à l'entrée (courbe de phase).

$$G_{dB}(\omega = 300 \text{ rad/s}) = 20 \log(S_0/E_0) = 20 \log(S_0/3).$$

On peut lire que :  $G_{dB}(\omega = 300 \text{ rad/s}) \approx -60 \text{ dB}$  et donc  $S_0 \approx 3 \cdot 10^{-3}$ . D'après la courbe de phase, on peut lire :  $\varphi(\omega = 300 \text{ rad/s}) = -175 \text{ degrés}$ . On a donc :  $s(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(300t - 3,05)$ . L'angle est à mettre en radians.

**Question 5** Identifier la fonction de transfert représentée par le diagramme de Bode suivant. La calculatrice est autorisée. On rappelle que pour une fonction de transfert du 2ème ordre, on a :  $\text{Max}(G_{dB}) = 20 \log \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ .

**Correction** D'après le diagramme de Bode, on voit que la fonction de transfert possède un intégrateur puisque la phase débute à 90 degrés. Ensuite la phase augmente dans un premier temps de 90 degrés, ce qui signifie la présence d'un « 1er ordre » en numérateur. Puis la phase diminue de 180 degrés et le gain résonne ce qui justifie la présence d'un 2ème ordre avec un coefficient d'amortissement plus petit que  $1/\sqrt{2}$ .

$$H(p) = \frac{K(1+Tp)}{p(1+2\xi/\omega_0 p + p^2/(\omega_0^2))}$$

Pour identifier la constante de temps, on va utiliser le fait que la phase d'un « premier ordre » au numérateur passe par 45 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $1/\tau$ . Ici, il y a un intégrateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -45 degrés. On a :  $1/T \approx 1$  et  $T = 1 \text{ s}$ .

Pour identifier la pulsation de coupure, on va utiliser le fait que la phase d'un 2ème ordre passe par -90 degrés pour sa pulsation de coupure qui vaut  $\omega_0$ . Ici, il y a un intégrateur et un « 1er ordre » au numérateur. On trouve donc la pulsation de coupure lorsque la phase vaut -90 degrés. On a :  $\omega_0 \approx 80 \text{ rad/s}$ .

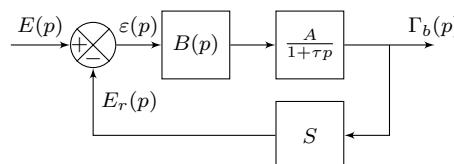
Pour identifier le coefficient d'amortissement, on va utiliser la résonnance. On a :  $20 \log(1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})) \approx 13$  et  $\xi \approx 0,11$ .

Pour identifier le gain, on se place pour des pulsations faibles, ici  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$ . Pour ces pulsations, on sait que les gains des 1er ordre et du 2ème ordre valent environ  $20 \log K$  et celui de l'intégrateur  $20 \log(1/\omega)$ . On a donc pour  $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$  :  $20 \log(K/0,1) \approx 33$  et  $K \approx 4,5$

**Question 6** Déterminer les marges de stabilité pour ces quatre fonctions de transfert.

## Réponse fréquentielle

Un capteur d'accélération de sensibilité  $S$  est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé ce capteur. Le moteur permettant la motorisation du plateau est connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.



On a  $A = 100 \text{ g m s}^{-2} \text{ V}^{-1}$ ,  $\tau = 0,2 \text{ s}$  et  $S = 10 \cdot 10^{-3} / \text{g V/(m/s}^2)$  où  $g$  est l'accélération de pesanteur.  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  la tension de consigne de cet asservissement et  $\Gamma_b(p)$  la transformée de l'accélération  $\gamma_b(t)$ .

$$B(p) = 1$$

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude  $E_0$  égale à 0,2 V.

**Question 7** Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent. On voudrait une accélération égale à 20 g. Quelle doit être la tension de consigne ?

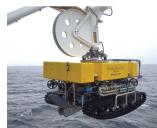
**Question 8** La tension de consigne prend la forme suivante :  $e(t) = 0,2 \sin(\omega t)$  avec  $\omega t = 10 \text{ rad s}^{-1}$ . Déterminer  $\omega b(t)$  en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

$$\text{Deuxième étude : } B(p) = \frac{1}{p}.$$

**Question 9** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système. Identifier les différents paramètres de cette fonction. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

**Question 10** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert.

## Synthèse 01 – Corrigé



### Bateau support de ROV

Concours Centrale Supelec – MP 2019

*Savoirs et compétences :*



#### Introduction

On s'intéresse à une grue permettant la dépose sur fond marin d'un robot dont l'objectif est d'enfouir des câbles.

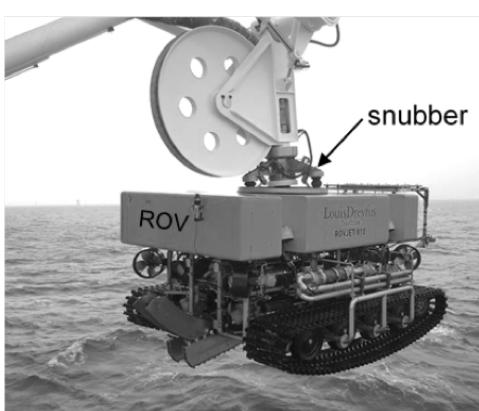


FIGURE 1 – ROV suspendu à la grue portique

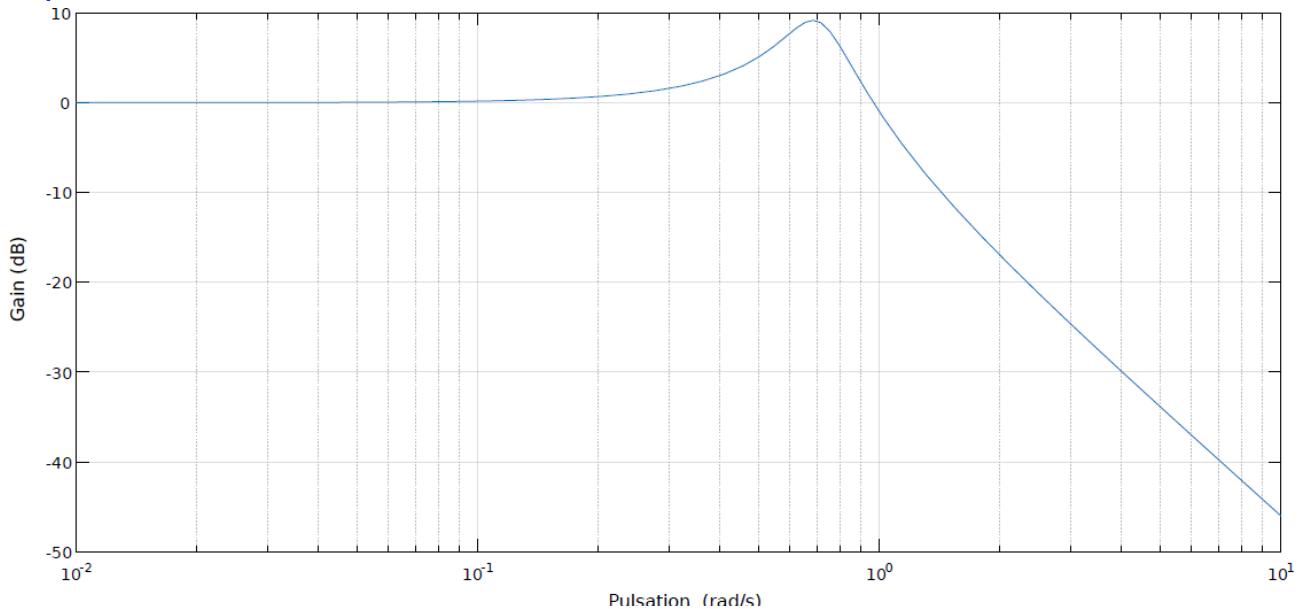
**Objectif** Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

**Question 1** Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

**Correction** La définition du gain en décibel de la fonction de transfert  $B(j\omega)$  est  $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{vague}(j\omega)} \right|$ . L'exigence Id 1.1 impose une amplitude maximale du ROV de 1 m pour 5 m de houle soit :

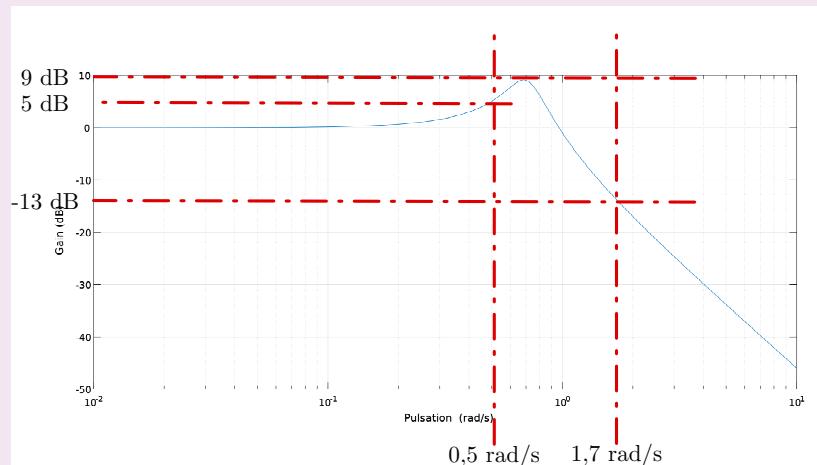
$$G_{dB(\omega)} < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB} \quad \forall \omega \in [0, 5; 1, 7] \text{ rad/s.}$$

Le tracé du gain de  $B(p)$  dans la figure suivante.



**Question 2** En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

**Correction** On observe un phénomène de résonance, le système amplifie la houle entre 0,5 et 1 rad/s et l'atténue à une valeur maximale de 13-14 dB pour 1,7 rad/s. Le système ne répond donc pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.



## Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

**Objectif** Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

À l'équilibre, le principe fondamental de la statique se traduit par  $-Mg + A(P_{E0} - P_{atm}) = 0$ .

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à  $\Sigma$  se traduit par  $S\Delta p_E(t) = M \ddot{y}_{ROV}(t) + c(\dot{y}_{ROV}(t) - \dot{y}_h(t))$ .

L'hypothèse du fluide incompressible se traduit par  $\frac{d\Delta p_E(t)}{dt} = 0$ .

**Question 3** Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme :

$\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{ROV}(p))$ . Exprimer  $K_1$  et  $\tau_1$  en fonction de  $A$ ,  $V_{G0}$ ,  $r$ ,  $C_{qR}$  et  $P_{G0}$ .

**Correction** On écrit les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace en tenant compte de l'hypothèse de fluide

incompressible :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)) + C_{qR}(\Delta P_G(p) - \Delta P_E(p)) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}(\Delta P_E(p) - \Delta P_G(p)) = p\Delta P_G(t). \quad (2)$$

L'équation (2) donne :

$$\begin{aligned} \Delta P_G(t) \left( p + \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \right) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \Delta P_E(p), \\ \Delta P_G(t) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)) + C_{qR} \left( \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p) - \Delta P_E(p) \right) = 0,$$

$$Sp(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)) = C_{qR} \left( 1 - \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \right) \Delta P_E(p),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{Sp}{C_{qR}} \frac{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0}} (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{S}{C_{qR}} \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \left( \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)).$$

Enfin, on obtient :

$$\Delta P_E(p) = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \left( \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)).$$

Par identification :

$$K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \text{ et } \tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}.$$

**Question 4** Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert :  $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ . Exprimer  $\omega_0$ ,  $\zeta$  et  $\tau$  en fonction des constantes définies précédemment.

**Correction** La transformée de Laplace de (3) est :

$$\alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) = \gamma \Delta P_E(p).$$

En utilisant (4), on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) &= \gamma K_1 (\tau_1 p + 1) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)), \\ (\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)) Y_{\text{ROV}}(p) &= (\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p) Y_h(p). \end{aligned}$$

On obtient :

$$H(p) = \frac{\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p}{\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)},$$

$$H(p) = \frac{\gamma K_1 + (\gamma K_1 \tau_1 + \beta) p}{\alpha p^2 + (\beta + \gamma K_1 \tau_1) p + K_1 \gamma}.$$

Donc :

$$H(p) = \frac{1 + \frac{\gamma K_1 \tau_1 + \beta}{K_1 \gamma} p}{1 + \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{K_1 \gamma} p + \frac{\alpha}{K_1 \gamma} p^2}.$$

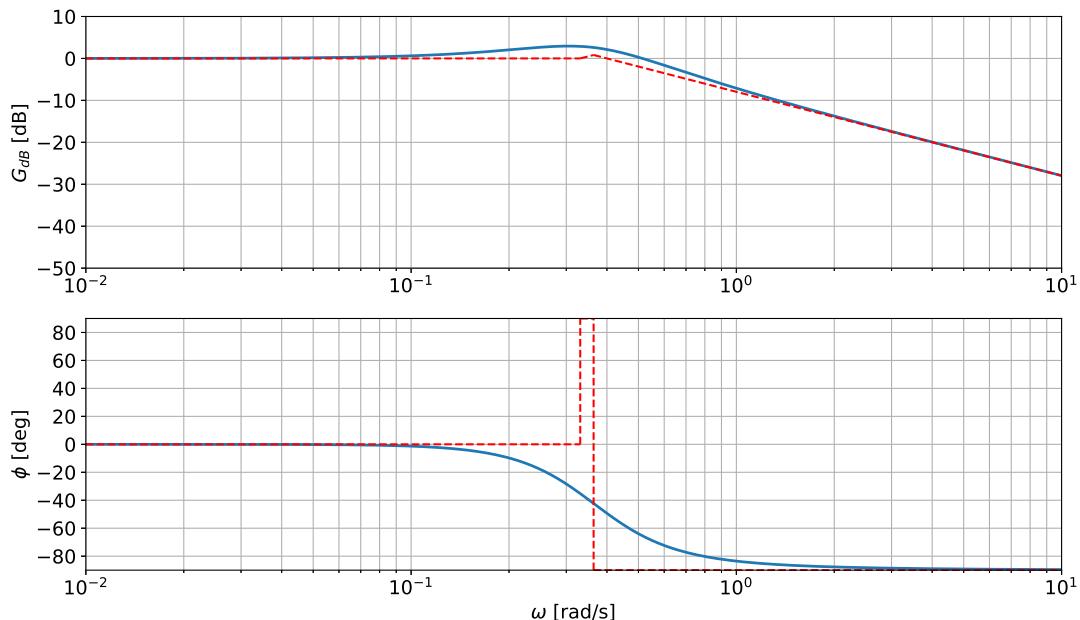
Par identification, on obtient :

$$\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1} ; \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}} ; \zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}.$$

**Question 5** Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC,  $H(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_h(p)}$ , en faisant apparaître ses caractéristiques. Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

**Correction** Diagrammes de Bode de  $H(p)$ . On identifie 2 pulsations caractéristiques :  $\omega_1 = 1/\tau \approx 0,33$  rad/s et  $\omega_n = 0,364$  rad/s. On verra apparaître un phénomène de résonance à la pulsation  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2\zeta^2}$  car  $\zeta = 0,55 < \sqrt{2}/2$ . La résonance sera toutefois faible.

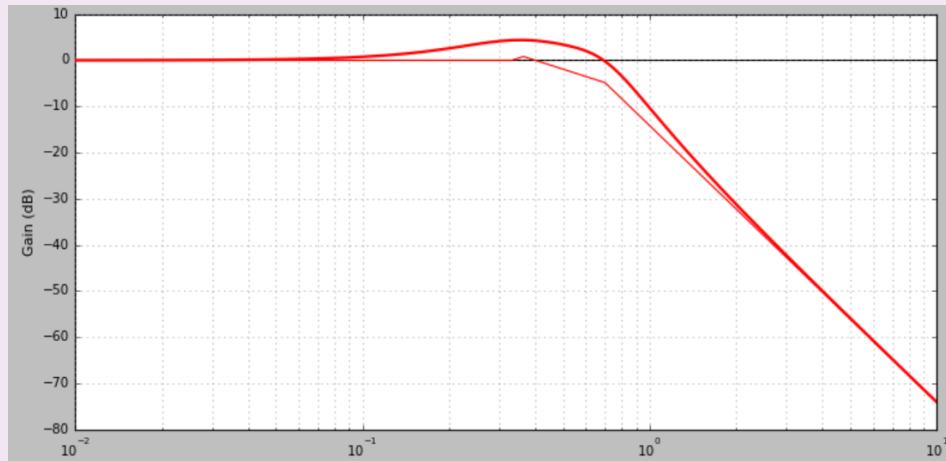
$\omega$	$\text{BF } \omega \ll \omega_1$	$\text{MF } \omega_1 \ll \omega \ll \omega_n$	$\text{HF } \omega_n \ll \omega$
$H(j\omega)$	1	$\tau j\omega$	$\frac{\tau \omega_n^2}{j\omega}$
$G_{\text{dB}}$	0	$20\log \tau + 20\log \omega$	$20\log(\tau \omega_n^2) - 20\log \omega$
$\phi$	0	$90^\circ$	$-90^\circ$



La valeur du gain maxi est de +3 dB (due au premier ordre au numérateur, l'influence du dénominateur est négligeable car la résonance est faible).

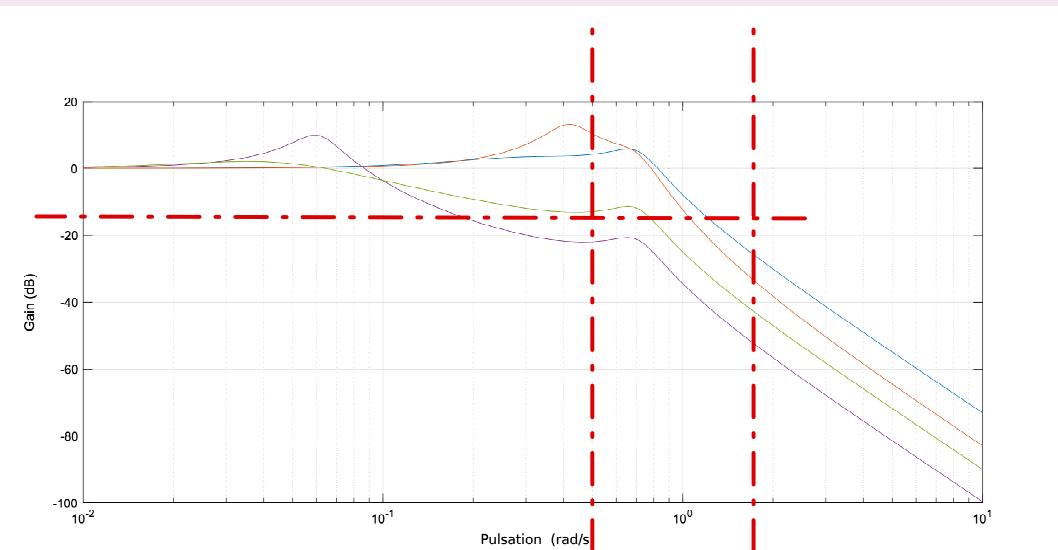
**Question 6** Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC},  $G(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_{vague}(p)}$  en fonction de  $H(p)$  et  $B(p)$ . Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de  $G(p)$ .

**Correction** On a la relation  $G(p) = B(p)H(p)$ .

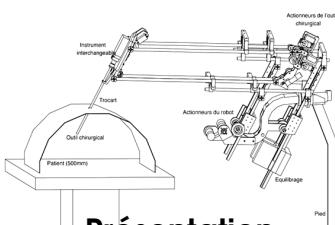


**Question 7** Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

**Correction** Le réglage de PHC 4 est celui qui respecte le mieux l'exigence Id1.1.



## Synthèse 02 – Corrigé



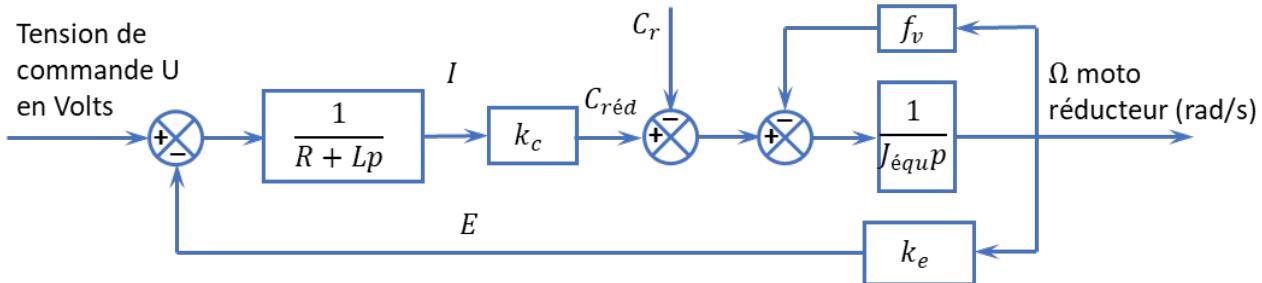
### Présentation

#### Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

**Question 1** Transformer les équations temporelles ci-dessus. Remplir sous forme littérale les blocs du schéma suivant. Exprimer les grandeurs physiques entre chaque bloc.

**Correction** On a :

- $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p)$ ;
- $E(p) = k_e \Omega_{\text{rédu}}(p)$ ;
- $C_{\text{rédu}}(p) = k_c I(p)$ ;
- $C_{\text{rédu}}(p) - C_r(p) - f_v \Omega_{\text{rédu}}(p) = J_{\text{équ}} p \Omega_{\text{rédu}}(p)$ .



**Question 2** Exprimer littéralement sous forme canonique la fonction de transfert du moto-réducteur  $M(p) = \frac{\Omega_{\text{rédu}}(p)}{U(p)}$  lorsque  $C_r(p) = 0$ .

**Correction** En raisonnant à partir des équations, on a :  $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) \Rightarrow U(p) = I(p)(R + Lp) + k_e \Omega_{\text{rédu}}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{C_{\text{rédu}}}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{\text{rédu}}(p) \Rightarrow U(p) = \frac{(J_{\text{équ}} p + f_v) \Omega_{\text{rédu}}(p)}{k_c} (R + Lp) + k_e \Omega_{\text{rédu}}(p) \Rightarrow U(p) = \left( \frac{(J_{\text{équ}} p + f_v)}{k_c} (R + Lp) + k_e \right) \Omega_{\text{rédu}}(p)$

$$\text{Au final, } M(p) = \frac{k_c}{(J_{\text{équ}} p + f_v)(R + Lp) + k_e k_c}.$$

$$\text{En mettant l'expression sous forme canonique, on a : } M(p) = \frac{k_c}{J_{\text{équ}} L p^2 + (R J_{\text{équ}} + L f_v) p + k_e k_c + R f_v}$$

$$\Rightarrow M(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + R f_v}}{\frac{J_{\text{équ}} L}{k_e k_c + R f_v} p^2 + \frac{R J_{\text{équ}} + L f_v}{k_e k_c + R f_v} p + 1}.$$

$$\text{En réalisant l'application numérique, on a : } M(p) = \frac{0,44}{3,2 \times 10^{-6} p^2 + 14,6 \times 10^{-3} p + 1}.$$

**Question 3** Après avoir analysé cette courbe, expliquer pourquoi on peut négliger l'inductance  $L$ .

**Correction** En observant cette courbe, l'absence de tangente horizontale à l'origine permet de modéliser le système comme un système d'ordre 1. En négligeant  $L$ , le terme d'ordre 2 devient donc négligeable et  $M(p)$  se modélise par une fonction d'ordre 1.

**Question 4** Justifier analytiquement la réponse précédente à partir de l'expression de  $M_1(p)$  lorsque l'on envisage une étude fréquentielle : on précisera la valeur du pôle dominant, l'autre (faisant intervenir la valeur de  $L$ ) étant rejeté.

Un pôle est dit dominant par rapport à un autre quand sa partie réelle est grande devant l'autre.

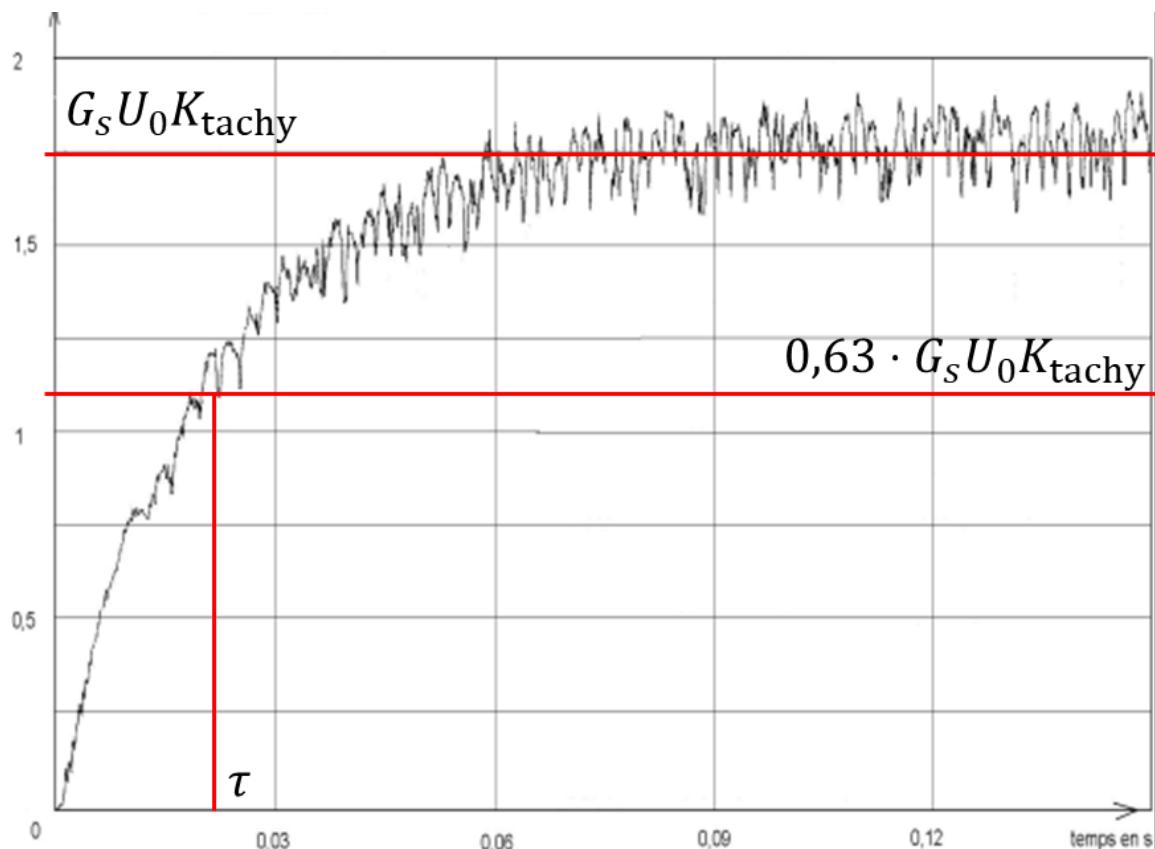
**Correction** En utilisant la formulation de  $M_1(p)$  donnée, on calcule le discriminant du dénominateur et on a :  $\Delta = (14,5 \times 10^{-3})^2 - 4 \cdot 3,1 \times 10^{-6} = 0,00019785$ . Au final,  $p_1 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \simeq -4607$  et  $p_2 = \frac{-14,5 \times 10^{-3} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 3,1 \times 10^{-6}} \simeq -70$ . Le dénominateur peut donc se factoriser sous la forme  $3,1 \times 10^{-6}(p + 4607)(p + 70)$ . Le pôle  $p_2$  est donc dominant par rapport à  $p_1$ .

**Question 5** Exprimer littéralement, sous forme canonique, la fonction de transfert du moto-réducteur  $M_2(p) = \frac{\Omega_{réé}(p)}{U(p)} = \frac{G_s}{1 + Tp}$ . Donner les valeurs numériques de  $G_s$  et de  $T$  à partir de l'expression de  $M_1(p)$  et des réponses apportées précédemment.

**Correction** En utilisant l'expression établie initialement en négligeant l'inductance, on a  $M_2(p) = \frac{k_c}{\frac{k_e k_c + R f_v}{R J_{équ}} p + 1}$ . En réalisant l'application numérique,  $M_2(p) = \frac{0,437}{1 + 0,015p}$  ( $G_s = 0,437 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$  et  $T = 0,015 \text{ s}$ ).

**Question 6** Déterminer les valeurs de  $G_s$  et  $T$ , à partir de la courbe de tension image de  $\omega_{réé}(t)$  (expliquer les démarches sous la figure et comparer avec les résultats obtenus précédemment).

**Correction** La tension de consigne étant de 24 V et la vitesse de sortie est telle que  $24 \cdot G_s \cdot K_{tachy} = 1,75 \text{ V}$  soit  $G_s = \frac{1,75}{24 \times 0,166} = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ . En utilisant la méthode de 63 % de la valeur finale, on a  $\tau = 0,02 \text{ s}$ . On constate que les résultats sont relativement proches de ceux formulés par l'hypothèse «  $L$  négligeable ».



### Respect du critère de marge de phase

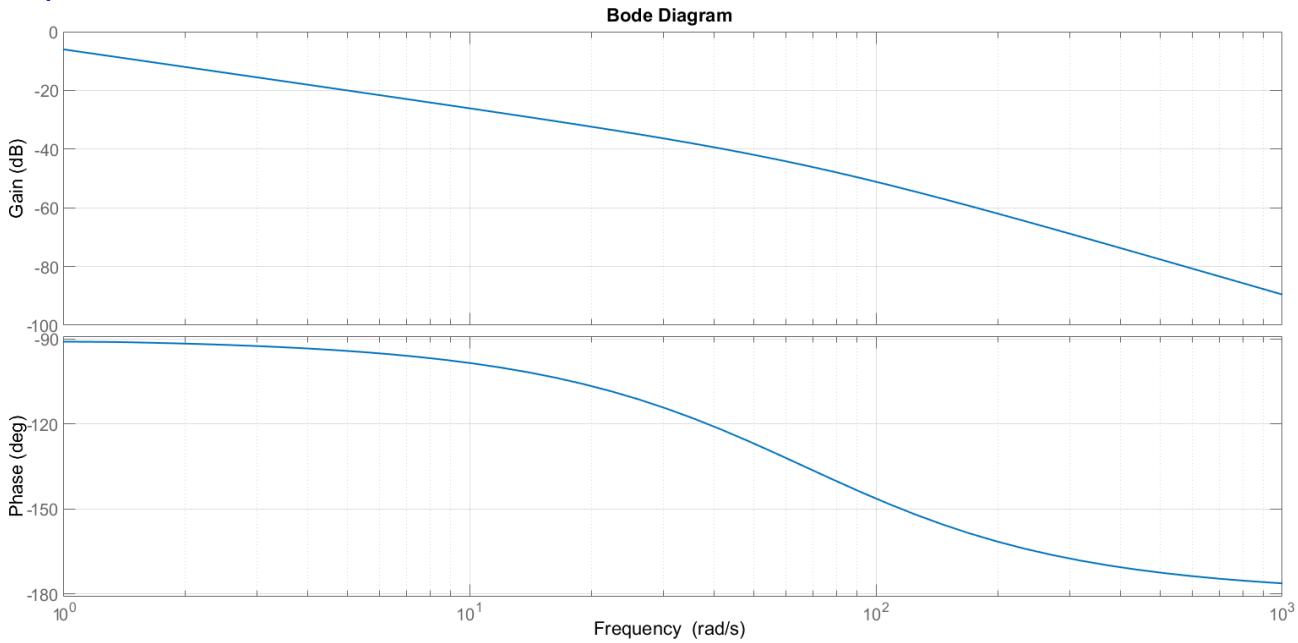
**Question 7** Donner la fonction de transfert du bloc  $B(p)$  et la valeur du coefficient du bloc  $C$  en incr./rad. Exprimer numériquement, en fonction de  $k$ , la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_O(p)$ .

**Correction**  $B$  assure la réduction de la fréquence de rotation et son intégration dans le but d'obtenir un angle; donc  $B(p) = \frac{1}{50p}$ . Par ailleurs  $C = \frac{360}{2\pi}$  incr/rad.

$$\text{On a donc } H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{kG_S}{1 + Tp}.$$

**Question 8** Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte pour  $k = 1$ . Le système est-il stable en boucle fermée pour cette valeur de  $k$ ? Justifier.

**R** Au vu de l'exigence 6, on admet que le système est stable en boucle fermé si, sur le tracé de Bode de la boucle ouverte, lorsque le gain est nul, la phase est supérieure à  $-180 + 45 = -135^\circ$ .



**Correction** Au vu du tracé, la phase est supérieure à  $-135^\circ$  lorsque le gain est nul. Le système est donc stable.

**Question 9** Calculer l'écart statique  $\varepsilon_{\text{cons}\infty}$  en incrémentés lorsque la consigne est un échelon de position :  $\text{Cons}(t) = 1 \cdot u(t)$ .

**Correction**

**Méthode 1 (à connaître après le cours sur la précision – Cycle 2)**

La boucle ouverte est de classe 1, l'entrée est un échelon et il n'y a pas de perturbation. L'écart statique est donc nul.

**Méthode 2 (à savoir faire) – Calcul de l'écart**

On a  $\varepsilon(p) = \frac{\text{Cons}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$ .  $\text{Cons}(p) = \frac{1}{p}$ . On a alors  $\varepsilon_{\text{cons}\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow +0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow +0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \text{FTBO}(p)} = 0$ .

**Question 10** Calculer, pour la valeur  $k_{45}$  de  $k$  établie précédemment, l'écart statique  $\varepsilon_{\text{pert}\infty}$  en incrément entre la consigne et la mesure lorsque la perturbation est l'échelon de couple résistant  $C_r u(t)$  induit par les frottements secs.

**Correction** On a  $\varepsilon(p) = \text{Cons}(p) - B(p)C\Omega(p) = \text{Cons}(p) - B(p)C \left( \varepsilon(p)KM(p) - C_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \right) \Leftrightarrow \varepsilon(p)(1 + B(p)CKM(p)) = \text{Cons}(p) + B(p)C C_r(p) \frac{M(p)R}{k_c} \Leftrightarrow \varepsilon(p) = \text{Cons}(p) \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} + C_r(p) \frac{M(p)RB(p)C}{k_c(1 + B(p)CKM(p))} = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + B(p)CKM(p)} + C_r \frac{M(p)RB(p)C}{k_c(1 + B(p)CKM(p))} = \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{\frac{G_S}{1 + Tp} R \frac{1}{50p} C}{k_c \left( 1 + \frac{1}{50p} CK \frac{G_S}{1 + Tp} \right)} = \lim_{p \rightarrow 0} C_r \frac{G_S RC}{k_c ((1 + Tp)50p + CKG_S)} = C_r \frac{G_S RC}{k_c CKG_S} = C_r \frac{R}{k_c K}.$  On a donc  $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = C_r \frac{R}{k_c K}$  soient  $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95$  incr.

**Question 11** La chaîne cinématique de transmission est telle qu'il faut 150 incrément pour que la crémaillère se déplace de 1 mm, quelle est l'incidence de cet écart sur la position de l'instrument? Conclure par rapport aux exigences du cahier des charges. Proposer une modification du bloc  $K$  qui annulerait cet écart.

**Correction** Si on majore l'erreur précédente à 1 incrément, l'erreur sur la position de l'instrument est de 0,007 mm. Cette erreur est inférieure à 0,2 mm (exigence 3). On peut conserver la valeur  $k = 1$ .

## Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

Modélisation par schéma-blocs

Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

**Question 12** Exprimer le coefficient du bloc  $H_2$  et préciser l'unité.

**Correction** En notant  $x$  le déplacement en translation, on a  $x = \frac{38,4}{2}\Theta$ . On a donc  $H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$ .

En régime statique, la position de la crémaillère est l'image de la position de la main, aux écarts près.

**Question 13** Quelle relation doit vérifier le produit  $P$  des gains des blocs  $C_1, H_1, H_2$ ? Justifier. Exprimer le coefficient  $c_1$  en incrément par mètre du bloc  $C_1$ .

**Correction** Dans le cas où l'instrument doit réaliser les mêmes mouvements que la main, il est nécessaire que  $P = 1$ .

On a  $G_{H_1} \cdot G_{H_2} = 0,0192 \times 0,00035 = 6,72 \times 10^{-6}$ .

On a donc  $c_1 = 148810 \text{ incr m}^{-1}$ .

Pour augmenter la précision de l'opération chirurgicale, on désire que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main.

**Question 14** Exprimer le nouveau coefficient  $c_2$  du bloc  $C_1$  ainsi que le nouveau produit  $P_1$ .

**Correction** On souhaite maintenant que  $P_1 = \frac{1}{10}$  et  $c_1 = 14\,881 \text{ incr m}^{-1}$ .

### Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

**Question 15** Établir, à partir de cette figure, l'expression de la fonction de transfert  $H_3(p)$ ; déterminer les valeurs caractéristiques : gain statique, coefficient d'amortissement et pulsation propre.

**Correction** Pour un échelon de 20 mm, le déplacement est de 20 mm. Le gain statique est donc de  $K = 1$ .

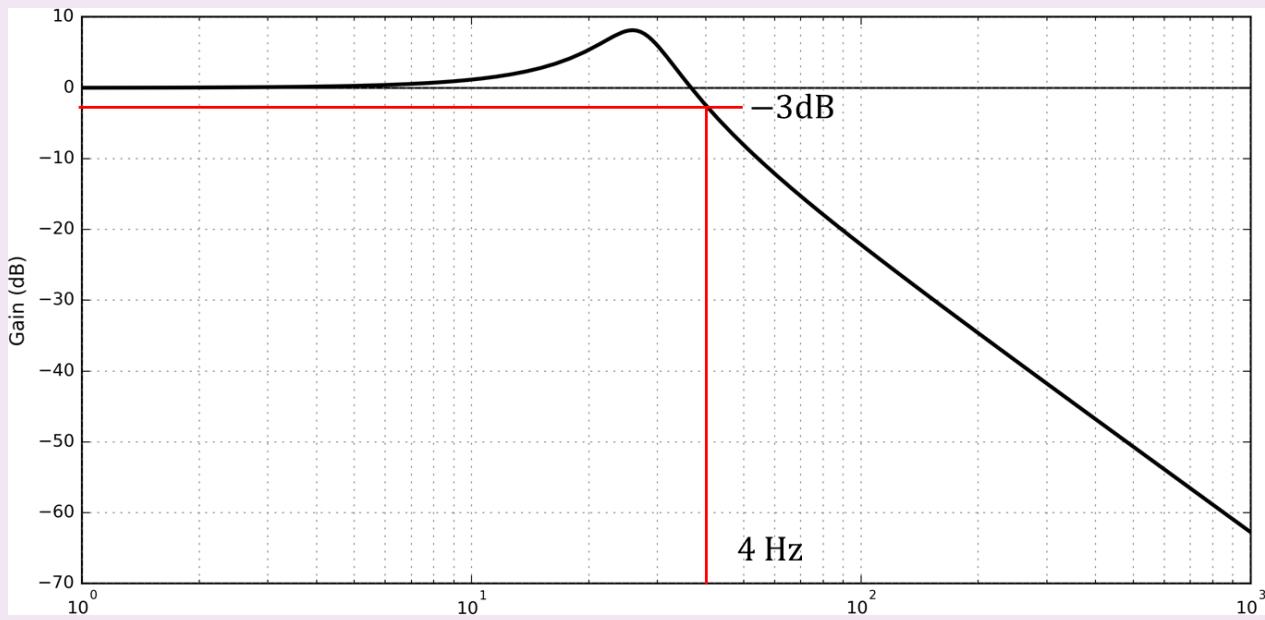
Le premier dépassement absolu est d'environ 30 mm soit un dépassement de 50 % par rapport à la valeur finale. En utilisant l'abaque des temps de réponse, on trouve  $\xi = 0,2$ .

Le temps de réponse à 5 % est d'environ 0,55 s. En utilisant l'abaque, on a  $\omega_0 Tr = 15$ . On a donc  $\omega_0 = 27 \text{ rad s}^{-1}$ .

$$\text{Au final, } H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$$

**Question 16** Le critère de la bande passante de 4 Hz à  $-3 \text{ dB}$  est-il satisfait?

**Correction** On trace le diagramme de Bode. La bande passante à  $-3 \text{ dB}$  est de 4 Hz. Une marge de sécurité serait peut être préférable.



Les questions suivantes vont permettre de déterminer l'expression analytique de  $H_3(p)$ , de façon à analyser l'influence du paramètre de raideur, pour respecter le critère de bande passante du cahier des charges.

Soit  $m_1$  la masse du solide  $S_1$ . L'axe du mouvement est vertical ascendant et noté  $\vec{z}$ . L'origine  $O$  du mouvement de  $S_1$  correspond à la position pour laquelle le ressort est à sa longueur libre. Soit  $a_0$  l'allongement du ressort dans la position d'équilibre qui prend en compte l'action de la pesanteur. Nota :  $a_0$  est négatif car on considère qu'il y a allongement du ressort.

L'équation du mouvement du ressort autour de la position d'équilibre est donné par :  $m_1 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0$ .

**Question 17** Après avoir mis l'équation différentielle du mouvement sous forme canonique :  $A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + z(t) = 0$ , exprimer le coefficient d'amortissement  $\xi_3$  et la pulsation propre  $\omega_{03}$  du mouvement en fonction de  $k_0$ ,  $f_0$ ,  $m_1$ .

**Correction** On a  $m_1 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + f_0 \frac{dz(t)}{dt} + k_0 z = 0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{k_0} \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{f_0}{k_0} \frac{dz(t)}{dt} + z = 0$ .

$$\text{On a donc } \omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \text{ et } \frac{2\xi_3}{\omega_{03}} = \frac{f_0}{k_0} \text{ et } \xi_3 = \frac{f_0}{2k_0} \sqrt{\frac{k_0}{m_1}} = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$$

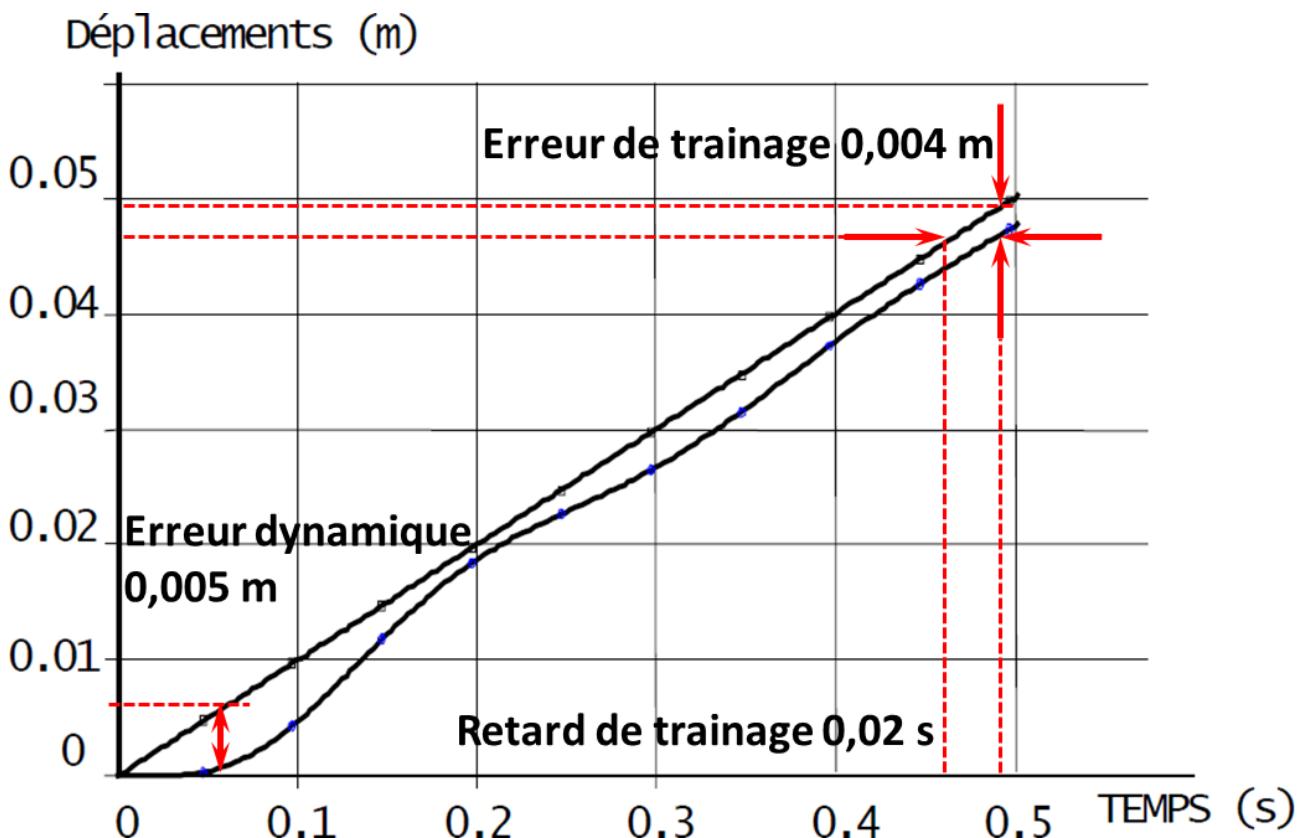
On donne la valeur numérique de la masse de l'instrument chirurgical et de la plaque d'interface :  $m_1 = 1,6 \text{ kg}$ .

**Question 18** Pour la valeur de  $\omega_{03}$  calculée précédemment, déterminer la valeur minimale de la raideur  $k_0$  (en  $\text{N/m}$ ) qui permettrait de respecter le critère de la bande passante à  $-3 \text{ dB}$  de  $4 \text{ Hz}$ . (On notera que  $\omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03}$ ).

**Correction** On a  $\omega_{-3 \text{ dB}} > \omega_{03}$  or  $\omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1} \Rightarrow k_0 = m_1 \omega_{03}^2$ ; donc nécessairement,  $\omega_{-3 \text{ dB}} > \sqrt{\frac{k_0}{m_1}} \Rightarrow k_0 < \omega_{-3 \text{ dB}}^2 m_1$   
 $\Rightarrow k_0 < 2^2 4^2 \pi^2 \times 1,6 \text{ k} < 1010 \text{ N m}^{-1}$ .

#### Analyse du déplacement de l'instrument par rapport au déplacement de la main

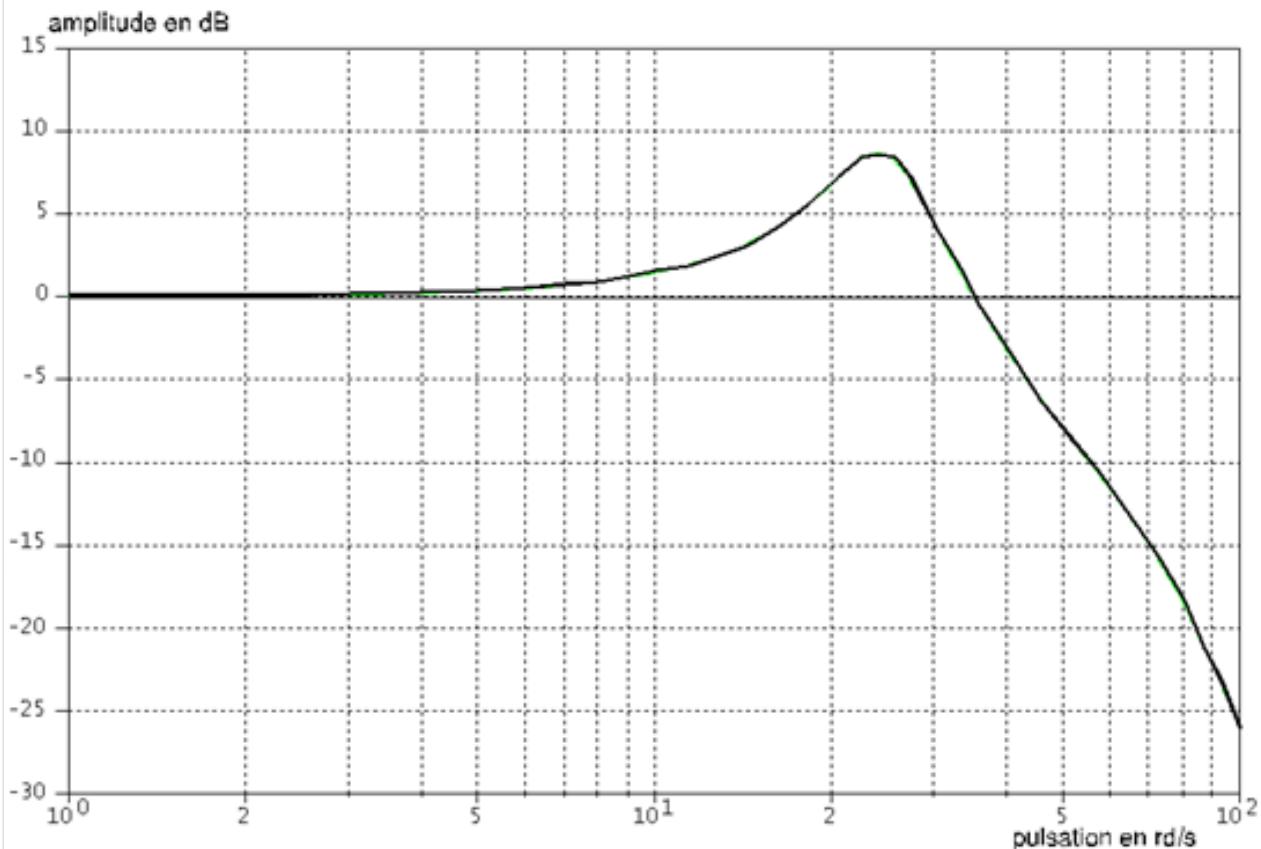
**Question 19** Mettre en évidence et donner les valeurs numériques : de l'écart dynamique maximal; de l'écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$ , en régime établi, du retard de traînage. Le cahier des charges est-il satisfait pour ce dernier critère?



#### Correction

- Écart dynamique maximal : 5 mm.
- Écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$ , en régime établi : 4 mm.
- Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.

On donne, la courbe d'amplitude (gain) de  $H(p)$  pour  $p = j\omega$  dans le plan de Bode. La main du chirurgien est prise d'un tremblement sensiblement sinusoïdal dont la période est de 0,25 s et l'amplitude 1 mm.

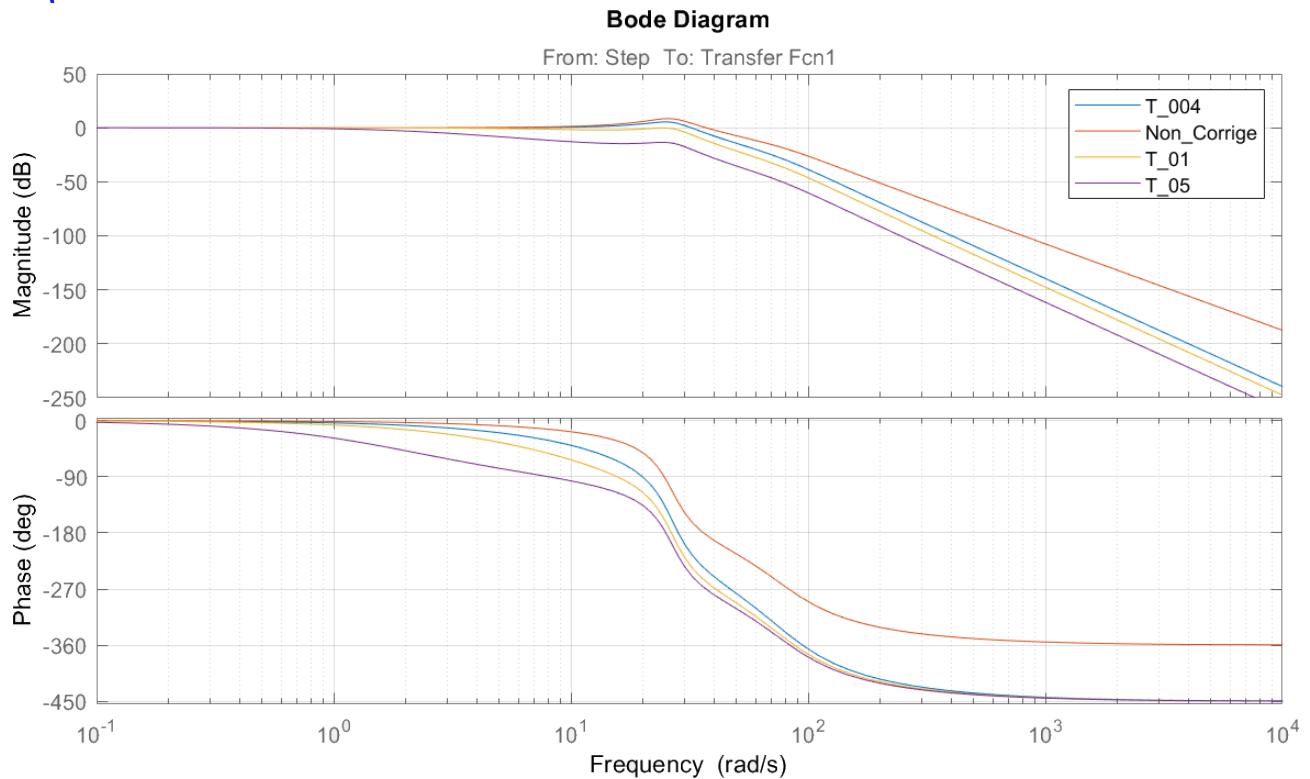


**Question 20** Déterminer à partir de cette courbe, l'amplitude du mouvement pris par l'instrument. Quelle est la conséquence de ce mouvement sur la plaie chirurgicale ?

**Correction** Pour une sinusoïde de période 0,25 s, la pulsation est de  $\frac{2\pi}{0,25} = 25 \text{ rad s}^{-1}$ . À cette pulsation, le gain est de 8 dB. Le rapport  $S/E$  est donc de  $10^{8/20} = 2,5$  ainsi l'amplitude du robot sera de 2,5 mm. Il faudrait régler l'asservissement pour que ces vibrations soient atténuées/filtrées (plutôt qu'amplifiées).

#### Amélioration des performances dynamiques

**Question 21** Tracer sur la figure précédente, les trois courbes asymptotiques d'amplitude de ces filtres avec des couleurs différentes. Sachant que les mouvements dont la période est inférieure à 1 s ne doivent pas être atténués de plus de 1 dB, choisir le numéro 1, 2 ou 3 du filtre qui atténue de 8 à 10 dB le tremblement de la main de période 0,25 s. Tracer sur cette figure, dans une autre couleur, l'allure de la courbe d'amplitude corrigée par ce filtre. Le niveau de 4 Hz, de la bande passante à -3 dB du critère de rapidité est-il toujours respecté ?



**Correction** Le filtre  $T_2 = 0,1\text{ s}$  permet d'atténuer le gain à une pulsation de  $25\text{ rad s}^{-1}$  sans trop atténuer le gain à des pulsations inférieures à  $6,3\text{ rad s}^{-1}$ .

1.  $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p); E(p) = k_e\Omega_{\text{réé}}(p); C_{\text{réé}}(p) = k_c I(p); C_{\text{réé}}(p) - C_r(p) - f_v\Omega_{\text{réé}}(p) = k_{\text{équ}}p\Omega_{\text{réé}}(p).$
2. 
$$M(p) = \frac{k_c}{\frac{J_{\text{équ}}L}{k_e k_c + Rf_v} p^2 + \frac{RJ_{\text{équ}} + Lf_v}{k_e k_c + Rf_v} p + 1}.$$
3. .
4. .
5. 
$$M_2(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + Rf_v}}{\frac{RJ_{\text{équ}}}{k_e k_c + Rf_v} p + 1}.$$
6.  $G_S = 0,439 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ , on a  $\tau = 0,02 \text{ s}$ .
7.  $B(p) = \frac{1}{50p}, C = \frac{360}{2\pi} \text{ incr/rad}, H_O(p) = \frac{1}{50p} \frac{360}{2\pi} \frac{kG_S}{1 + Tp}.$
8. .
9. L'écart statique est nul.
10.  $\varepsilon_{\text{pert}\infty} = 0,2 \frac{10}{2,11} = 0,95 \text{ incr.}$
11.  $H_2 = \frac{x}{\Theta} = 19,2 \text{ mm rad}^{-1} = 0,0192 \text{ m rad}^{-1}$
12. .
13. .
14. .
15. 
$$H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 0,2}{27} p + \frac{p^2}{27^2}}.$$
16. .
17.  $\omega_{03}^2 = \frac{k_0}{m_1}$  et  $\xi_3 = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{1}{k_0 m_1}}.$
18.  $\Rightarrow k_0 < 1010 \text{ N m}^{-1}.$
19.
  - Écart dynamique maximal : 5 mm.
  - Écart de traînage (ou de vitesse)  $\varepsilon_v$  en régime établi : 4 mm.
  - Retard de traînage : 0,02 s – cahier des charges validé – Req 4.
20. .
21.  $T_2 = 0,1 \text{ s.}$

## Synthèse 03



## Système de freinage d'un TGV DUPLEX

Concours Centrale Supelec PSI 2006

## Savoirs et compétences :

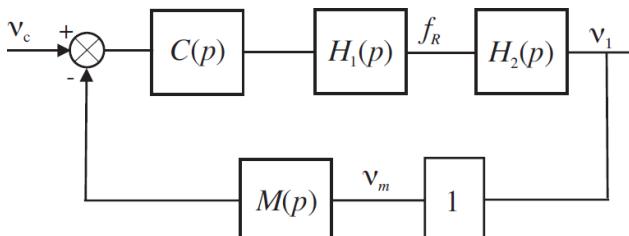


## Mise en situation

L'objet de cette étude est l'analyse du système de freinage mécanique à énergie pneumatique installé sur les TGV Duplex. Par soucis de sécurité, il est indispensable d'éviter le blocage des roues (phénomène appelé en-rayage) lors du freinage. Pour cela il est nécessaire de maîtriser la vitesse de glissement entre la roue et le rail.

**Objectif** L'objectif est d'étudier la loi de commande du dispositif d'anti-enrayage et plus précisément le calcul du correcteur de la boucle de régulation.

On suppose, pour la suite, que l'architecture de la boucle de régulation est représentée sur la figure suivante où  $v_c$  est la consigne de glissement.



Structure de la chaîne de régulation de glissement

On note :

- $H_1(p)$  la fonction de transfert de l'actionneur de freinage (vérin pneumatique + électrovalve) ;
- $H_2(p)$  la fonction de transfert de la roue au freinage ;
- $C(p)$  le correcteur de la boucle de régulation ;
- $M(p)$  la fonction de transfert de la chaîne de mesure du glissement, cette chaîne comporte un filtre destiné à limiter l'impact des bruits de mesure ;
- $v_m$  : glissement estimé.

On adoptera pour la suite :  $H_1(p) = \frac{2000}{1 + 0,1p + 0,01p^2}$  et  $M(p) = \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

Pour une vitesse de train  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ , le cahier des charges est résumé par les données du tableau suivant et les données numériques utilisées sont données ci-dessous. Enfin, les problèmes liés à l'évolution de la vitesse du train par rapport au rail  $V_T$  ne font pas l'objet de cette étude.

On a  $M = 8200 \text{ kg}$ ,  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$ ,  $I/r^2 = 400 \text{ kg g}^{-2}$ .

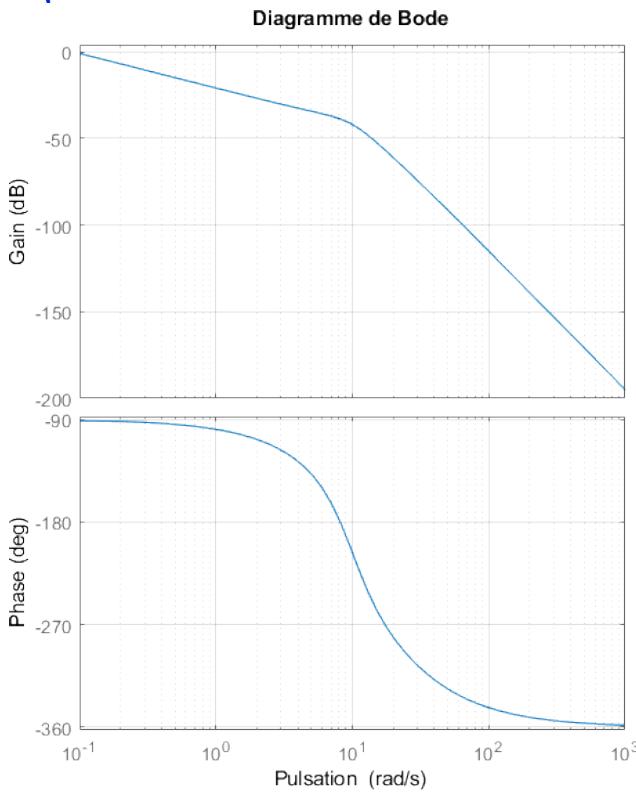
Marges de stabilité, performances en boucle ouverte	
Pulsation de coupure à 0 dB	$\omega_c \simeq 1 \text{ rad s}^{-1}$
Marge de phase	$\Delta\varphi \geq 60^\circ$ au point de fonctionnement nominal $B$
Stabilité quel que soit le point de fonctionnement sur la caractéristique $\mu = f(v)$	
Réponse à un échelon de consigne de glissement	
Écart en régime permanent	Nul
Temps du 1 <sup>er</sup> maximum	$t_m \leq 3,5 \text{ s}$
Dépassement	$D \simeq 18\%$
Réponse à une variation en échelon de l'adhérence	
Écart en régime permanent	Nul
Temps de réponse	$t_r \leq 9 \text{ s}$

Cahier des charges de la boucle de régulation de glissement pour  $V_T = 200 \text{ km h}^{-1}$

## Analyse des réponses fréquentielles en boucle ouverte

On donne la fonction de transfert entre le glissement relatif et la force de freinage :  $H_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_R(p)} = \frac{45 \cdot 10^{-6}}{p}$ .

**Question 1** En prenant  $C(p) = 1$ , compléter par le tracé asymptotique le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte fourni.



### Synthèse du régulateur de la boucle de régulation

On décide d'implémenter un régulateur de type PI. dont la fonction de transfert est :  $C(p) = K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ .

**Question 2** Calculer la valeur que doit prendre l'argument de  $C(p)$  afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure  $\omega_c$  souhaitée.

**Méthode** Si on note  $\omega_c$  on définit la pulsation de coupure telle que  $|\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0 \text{ dB}$ . On peut alors définir la marge de phase par  $M\varphi = \arg[\text{FTBO}(j\omega_c)] - (-180^\circ)$ .

**Question 3** Calculer la valeur minimale,  $T_{i\min}$ , que l'on peut conférer à la constante  $T_i$  de l'action intégrale du régulateur.

**Question 4** En adoptant  $T_i = T_{i\min}$ , déterminer alors le gain  $K_r$  du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées. (Approche graphique demandée, approche analytique facultative)

**Méthode** Il faut chercher  $K_r$  tel que  $20 \log |\text{FTBO}(j\omega_c)| = 0$ .

### Vérification du cahier des charges vis-à-vis de la consigne de glissement

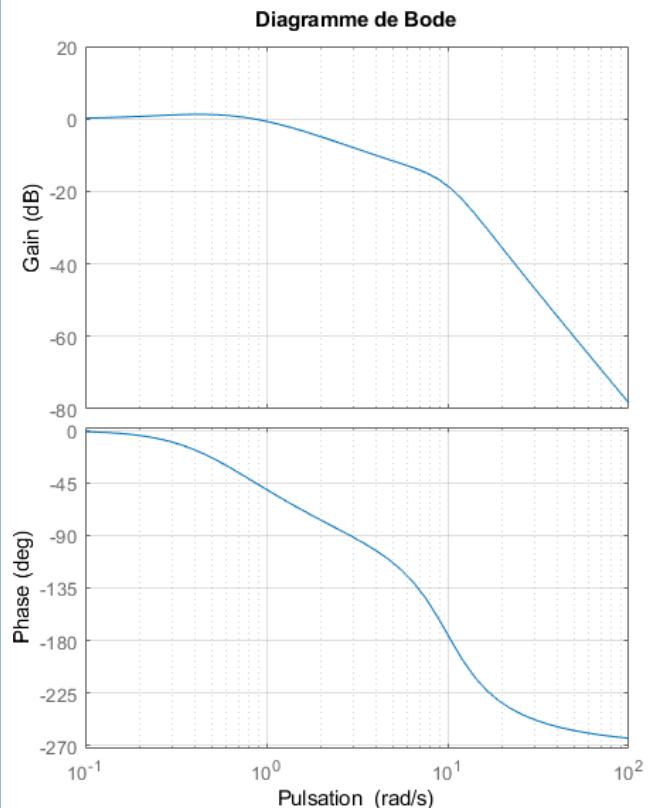
Le correcteur de la boucle de régulation du dispositif d'anti-enrayage a été déterminé à partir de considérations sur la réponse fréquentielle en boucle ouverte (pulsation de coupure à 0 dB et marge de phase). Aussi l'objectif de

cette partie est de vérifier que le correcteur déterminé permet de satisfaire le cahier des charges. Cette vérification concerne d'une part les performances vis-à-vis des variations de la consigne de glissement : temps du 1<sup>er</sup> maximum, dépassement, écart en régime permanent et d'autre part la réponse vis-à-vis des variations d'adhérence.

Au regard de la réponse fréquentielle en boucle fermée  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)}$ , on décide de modéliser la transmittance correspondante par la fonction suivante :  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2 \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$ .

On supposera sans aucune justification que  $\omega_0 > \frac{1}{\tau_2}$ .

**Question 5** En examinant les diagrammes de Bode suivants de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$ , justifier l'expression adoptée et compléter les diagrammes fournis par leur tracé asymptotique.



**Question 6** Proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

**Question 7** En justifiant votre réponse, montrer que l'on peut approcher la fonction de transfert  $F(p)$  par la forme suivante :  $F(p) = \frac{v_1(p)}{v_c(p)} = \frac{K_f (1 + \tau_1 p)}{(1 + \tau_2 p)^2}$ .

On donne la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement :  $f(t) =$

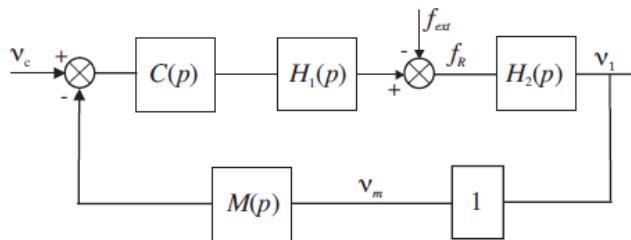
$$\left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2^3} t + \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} u(t).$$

**Question 8** Calculer le temps du 1<sup>er</sup> maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif  $v_c(t) = v_{c0} u(t)$  où  $u(t)$  désigne l'échelon unité.

**Question 9** Vérifier le cahier des charges en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif.

### Analyse des performances temporelles en réponse à des variations d'adhérence

La variation d'adhérence peut être modélisée en première approximation comme une force perturbatrice externe additive. On admet que cette modélisation conduit au schéma bloc représenté sur la figure ci-dessous.

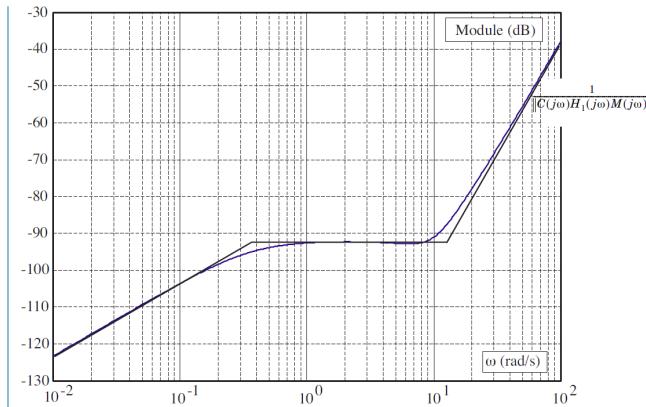


On se propose dans cette partie d'évaluer les performances de la chaîne de régulation de freinage vis-à-vis de cette perturbation.

**Question 10** Déterminer la fonction de transfert  $F_2(p) = \frac{v_1(p)}{F_{ext}(p)}$  entre le glissement et la force de perturbation que vous expliciterez en fonction des différentes transmittances de la boucle de régulation (on suppose  $v_c$  nulle). En expliquant soigneusement votre démarche, montrer que le module de la réponse fréquentielle, notée  $\|F_2(j\omega)\|$ , de cette fonction peut être approché par la relation :

$$\|F_2(j\omega)\| = \min \left[ \|H_2(j\omega)\|; \frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|} \right]$$

**Question 11** La figure suivante comporte le tracé de la fonction  $\frac{1}{\|C(j\omega)H_1(j\omega)M(j\omega)\|}$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme asymptotique de la fonction  $\|H_2(j\omega)\|$ .



**Question 12** En déduire la forme du tracé asymptotique de la fonction  $\|F_2(j\omega)\|$ . En analysant les brisures de ce diagramme et en supposant que le système bouclé est stable, donner directement sous forme numérique, l'expression de la fonction de transfert  $F_2(p)$  entre le glissement et la perturbation due à la variation d'adhérence.

**Question 13** Préciser les pôles de la fonction  $F_2(p)$  déterminée à la question précédente et en justifiant votre réponse proposer une fonction approchée de cette fonction sous la forme :  $F_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + T p}$ .

**Question 14** En utilisant cette fonction de transfert, donner l'expression de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en réponse à une variation en échelon de la force perturbatrice  $F_{ext} = F_0 u(t)$ , où  $u(t)$  représente l'échelon unité et avec  $F_0 = 2000$  N.

**Question 15** Tracer l'allure de l'évolution temporelle du glissement relatif  $v_1(t)$  en précisant la valeur initiale  $v_1(0)$ . En vous référant à des fonctions ou des résultats connus, déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse  $t_r$  à partir duquel le glissement reste en dessous de 5 % de la valeur initiale  $v_1(0)$  (valeurs à considérer en valeur absolue).

### Retour sur le cahier des charges

**Question 16** Conclure sur les performances obtenues vis-à-vis des exigences du cahier des charges en réponse à des variations de l'adhérence.

1. ...
2.  $\arg \left[ \frac{T_i p + 1}{T_i p} \right] \geq -21,5^\circ$ .
3.  $T_i \geq \tan(68,5) = 2,54$  s.
4. \*\*\*
5. \*\*\*
6. \*\*\*
7. \*\*\*
8. \*\*\*
9. \*\*\*
10. \*\*\*

## Synthèse 04



## Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec PSI 2016

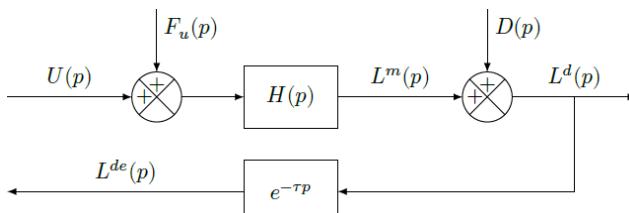
## Savoirs et compétences :



## Mise en situation

**Objectif** En vue d'asservir la position de la colonne vertébrale à une position de référence, une structure de commande à partir de l'estimation de la position réelle est mise en place. Après la définition des modèles nécessaires à la synthèse des lois de commande, l'objet de cette partie est de concevoir le régulateur de cette architecture de commande.

Pour la synthèse des régulateurs de la boucle externe, on adopte le modèle du procédé représenté par le schéma-blocs de la figure suivante.



Modèle du procédé pour la conception de la loi de commande de la chaîne d'asservissement

On suppose :

- qu'une première structure de commande « rapprochée » assure l'asservissement en vitesse des axes et que les caractéristiques dynamiques des six axes asservis sont identiques;
- pour un axe donné, que les efforts dus à sa rigidité, à la charge et les couplages avec les autres axes sont modélisés sous la forme d'un signal externe perturbateur unique, ramené en entrée du procédé et dont  $F_u(p)$  est la transformée de Laplace;
- que les jeux dans les liaisons sont modélisés sous la forme d'un signal perturbateur externe, dont  $D(p)$  est la transformée de Laplace, traduisant l'écart de déplacement de la position de l'axe;
- pour l'axe considéré que  $L^m(p)$ ,  $L^d(p)$  et  $L^{de}(p)$  sont respectivement les transformées de Laplace de la position non déformée, de la position de l'axe après déformation et de l'estimation de la position réelle issue de l'évaluation au moyen de l'algorithme de traitement d'images (la grandeur  $L^m$  est obtenue au moyen d'une mesure issue d'un capteur placé directement sur l'axe de l'actionneur);
- que  $U(p)$  représente la transformée de Laplace de la

grandeur de commande (homogène à une tension) de la chaîne de motorisation de l'axe considéré.

La chaîne de motorisation est modélisée par la fonction de transfert  $H(p) = \frac{L_m(p)}{U(p)} = \frac{0,5}{p(1+0,01p)}$ , la chaîne d'acquisition et le système de traitement d'images sont modélisés en temps continu comme un retard pur  $\tau = 0,04$  s. Pour la chaîne d'asservissement, le cahier des charges partiel suivant, caractérisé par une pulsation de coupure en boucle ouverte et une marge de phase fixées à priori, est rappelé :

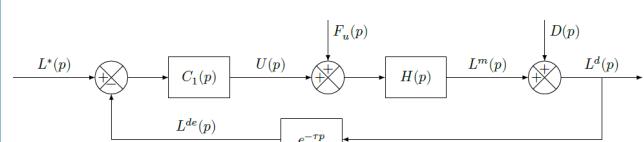
- pulsation de coupure  $\omega_c$  à 0 dB en boucle ouverte  $\omega_c = 60 \text{ rad s}^{-1}$ ;
- marge de phase  $\Delta\varphi \geq 45^\circ$ .

Pour la conception de la loi de commande, il s'agira :

- de montrer qu'une structure mono-boucle simple ne permet pas d'assurer le cahier des charges partiel;
- d'analyser si une structure de commande adaptée aux systèmes à retard peut assurer les performances escomptées (permettant ainsi de s'affranchir du retard pur de la chaîne de mesure par traitement d'images);
- de montrer qu'une structure adaptée aux systèmes à retard complétée par une boucle interne sur la mesure de position d'un axe non déformé permet de vérifier l'ensemble du cahier des charges.

## Analyse d'une structure mono-boucle

Une solution simple est d'envisager, dans un premier temps, une structure de commande réalisée directement à partir de l'estimation  $L^{de}(t)$  de la position réelle de l'axe considéré. Cette structure, dont le correcteur est noté  $C_1(p)$  et la consigne  $L^*(p)$ , est représentée par le schéma de la figure suivante.



Structure de commande à une boucle

En raison de la présence de bruits de mesure (signaux non représentés sur les schémas fournis), il n'est pas souhaitable d'introduire d'action dérivée dans le régulateur

de cette boucle. Seuls des correcteurs de type proportionnel intégral seront envisagés.

**Question 1** La figure B du document réponse montre le diagramme de Bode de la fonction  $H(p)$ . Tracer directement sur cette figure le diagramme de Bode (tracés réels des module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée (soit en prenant  $C_1(p) = 1$ ).

**Question 2** Au regard des tracés de la question précédente et des performances souhaitées par le cahier des charges :

- compte tenu de la pulsation de coupure et de la marge de phase souhaitées, déterminer les deux contraintes (sur le module et l'argument) que le correcteur  $C_1(j\omega)$  doit vérifier pour les deux cas : procédé sans retard pur et procédé avec la présence du retard pur  $\tau$  ;
- en argumentant la réponse à l'aide du tracé des allures des diagrammes de Bode (directement sur la copie) d'un correcteur de type proportionnel intégral  $C_1(p) = K_1 \left(1 + \frac{1}{Ti1p}\right)$ , justifier qu'un correcteur de ce type :
  - ne permet pas d'atteindre les performances exigées en présence du retard de mesure ;
  - peut être toutefois envisagé en absence du retard dans la chaîne de mesure.

### Structure de commande adaptée à un système avec retard

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé d'utiliser une structure de commande adaptée aux systèmes comportant des retards. La figure suivante montre deux structures de commande correspondant d'une part au schéma réel (a) représentant la réalisation de la commande ( $X(p)$ ) est la transformée de Laplace d'une grandeur  $x(t)$  interne au régulateur), d'autre part un schéma fictif (b).

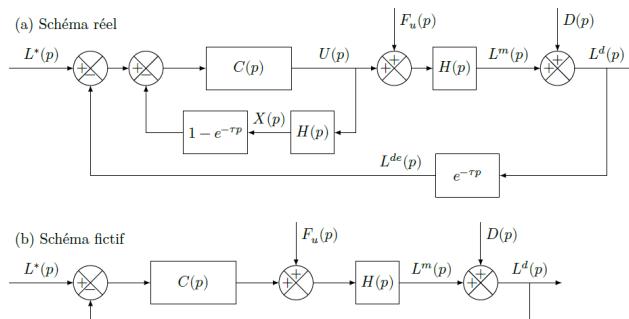


Figure 3 – Structure de commande adaptée aux systèmes à retard

**Question 3** En utilisant le schéma fictif (b) et le diagramme de Bode de la figure B du document réponse, déterminer le correcteur de type proportionnel intégral  $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{Ti1p}\right)$  permettant d'assurer les performances exprimées par le cahier des charges partiel. Pour concevoir ce régulateur, la démarche suivante pourra être suivie :

- déterminer la condition en phase, soit  $\arg(C(j\omega))$ , que doit vérifier le correcteur au regard de la marge de phase souhaitée. En déduire alors la valeur numérique du temps d'action intégrale  $T_i$  ;
- pour la valeur de  $T_i$  obtenue, déterminer alors la valeur du gain  $K$  permettant d'assurer le cahier des charges partiel.

**Question 4** Pour une consigne nulle  $L^*(t)$ , une perturbation en sortie nulle  $d(t) = 0$  et un échelon de perturbation en entrée  $f_u(t) = F_0 h(t)$  où  $h(t)$  est l'échelon d'Heaviside :

- déterminer la valeur en régime permanent de la grandeur de commande  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  (ce calcul sera effectué en utilisant la structure de la figure 3(a)) ;
- compte tenu de la forme de  $H(p)$ , en déduire alors le comportement de la grandeur  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini ;
- au regard de ce comportement, discuter alors des performances de cette structure de commande et conclure quant à sa pertinence sur l'asservissement de l'Hexapode.

### Analyse d'une structure de commande à deux boucles

Pour remédier au problème mis en évidence à la question précédente, il est envisagé une structure à deux boucles définies ainsi :

- une boucle interne réalisée à partir de la mesure de la position non déformée de l'axe  $L^m(t)$  permet d'asservir cette grandeur à une consigne de référence  $L^{m*}(t)$ . Le calcul du correcteur de la boucle interne est hors du cadre de cette étude, et on note  $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)}$  la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle interne ;
- la boucle externe, réalisée à partir de la grandeur estimée  $L^{de}(t)$ .

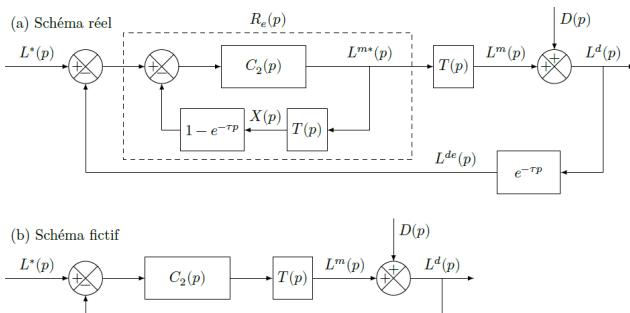
La nouvelle structure de commande est représentée par le schéma de la figure suivante où la représentation de la boucle interne est limitée à sa fonction de transfert en boucle fermée  $T(p)$  où :

- $T(p) = \frac{L^m(p)}{L^{m*}(p)} = \frac{1}{(1 + 0,05p)^2}$  est la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement de position de l'axe non déformée (elle est ainsi la fonction de transfert de la boucle interne non représentée sur la figure) ;
- $L^{m*}(p)$  est la consigne de l'asservissement de la boucle interne ;
- l'effet de la perturbation  $F_u(p)$  est réduit par la boucle interne, et son influence peut être négligée ;
- les seules perturbations se limitent alors à celles dues aux jeux, soit le signal de transformée de Laplace  $D(p)$ .

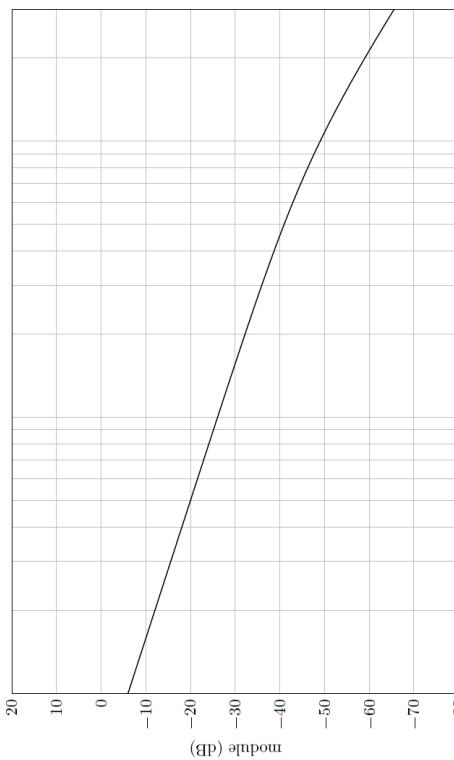
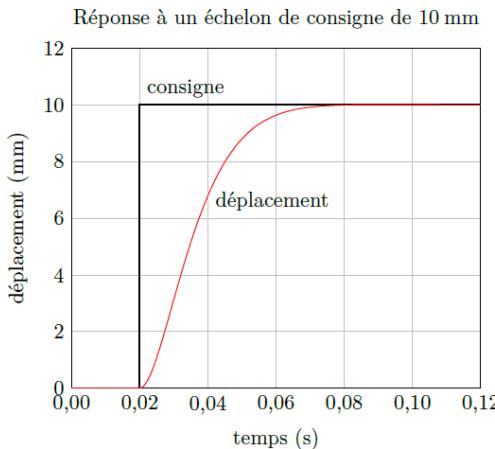
Pour la conception de la loi de commande :

- une approche identique à celle de la partie précédente adaptée au cas des systèmes présentant des retards est utilisée ;

- on synthétise dans ce cas un correcteur  $C_2(p) = K_2 \left(1 + \frac{1}{T_{i2}p}\right)$  de type PI sans prendre en compte le retard et le régulateur  $R_e(p)$  est réalisé en utilisant  $C_2(p)$  selon une structure identique à celle de la figure précédente (a) ;
- le calcul du régulateur  $C_2(p)$  ne fait pas partie de cette étude, on suppose cependant qu'il permet d'assurer les exigences du cahier des charges.



Modèle de commande avec une boucle interne intégrée



**Question 5** En utilisant la même démarche que celle de la question précédente, déterminer la valeur de la grandeur  $L^m(t)$  en régime permanent, soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} L^{m*}(t)$ , en réponse à une perturbation  $d(t)$  en échelon  $d(t) = D_0 h(t)$ . Au regard des différents éléments constitutifs de la boucle de régulation, justifier qualitativement que la réalisation du régulateur  $R_e(p)$  selon le schéma de la figure 3(a) reste stable du point vue interne.

### Retour sur le cahier des charges

La figure suivante montre les évolutions temporelles de la position  $L^d(t)$  en réponse à une consigne en échelon  $L^*(t) = L_0 h(t - 0,02)$  avec  $L_0 = 10 \text{ mm}$  et à une perturbation en échelon  $D^*(t) = D_0 h(t - 0,02)$  avec  $D_0 = 10 \mu\text{m}$ .

**Question 6** Commenter ces courbes et, en justifiant le résultat obtenu, valider les exigences vérifiées. Conclure alors sur la pertinence de l'approche utilisée et sur la structure de correction retenue.

Réponse à un échelon de perturbation de 10 µm

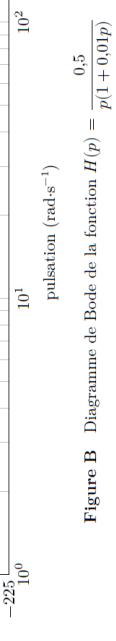
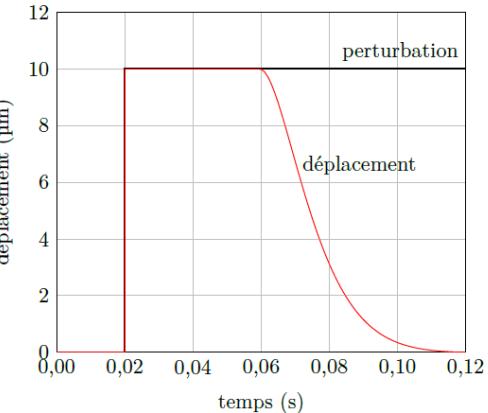


Figure B Diagramme de Bode de la fonction  $H(p) = \frac{0,5}{p(1 + 0,01p)}$