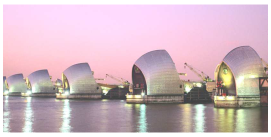
Activation 1 – Corrigé



Barrière sur la tamise – Matrices d'inertie

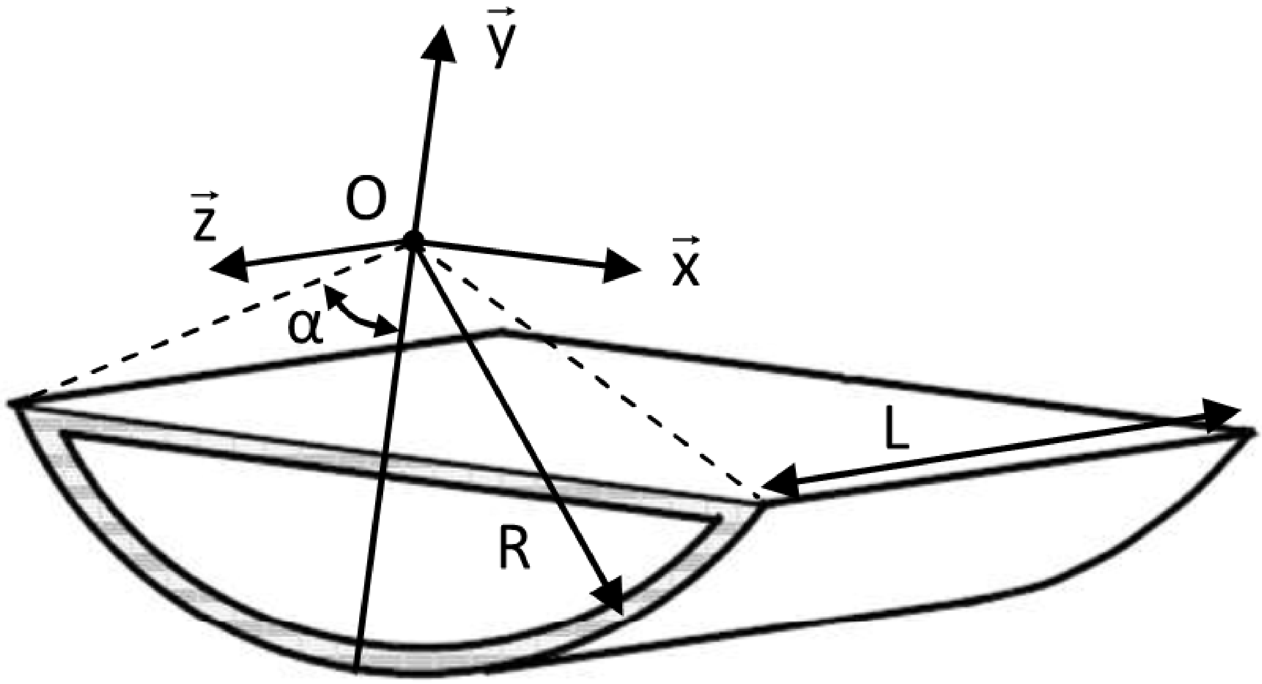
Florestan Mathurin

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C13 : centre d'inertie ;*
- *Mod2.C14 : opérateur d'inertie ;*
- *Mod2.C15 : matrice d'inertie.*

Barrière sur la Tamise

Le barrage sur la Tamise permet de protéger Londres des grandes marrées évitant ainsi des crues qui pourraient survenir. Ce barrage est constituée de dix portes dont une modélisation est donnée ci-dessous.



On donne :

- $L = 58\,\text{m}$ la longueur de la porte ;
- $R = 12{,}4\,\text{m}$ le rayon de la porte ;
- $e = 0{,}05\,\text{m}$ l'épaisseur de la porte, considérée négligeable devant R ;
- $\rho = 7800\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$;
- $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Question 1 *Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la porte :*

1. *déterminer les coordonnées du centre d'inertie G_P de la plaque ;*
2. *déterminer les coordonnées du centre d'inertie G_C de la portion cylindrique ;*
3. *déterminer les coordonnées du centre d'inertie G de la porte.*

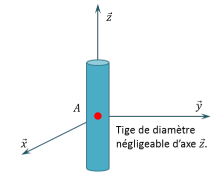
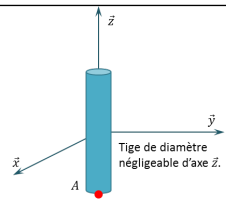
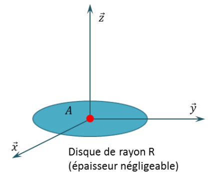
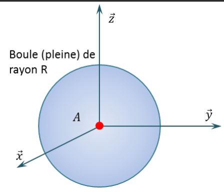
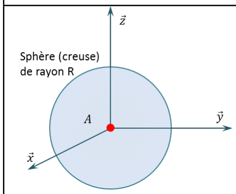
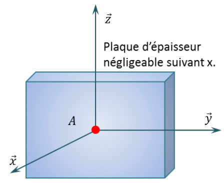
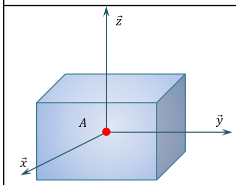
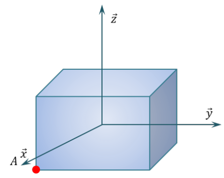
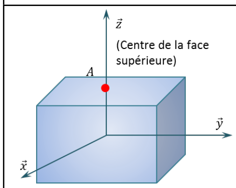
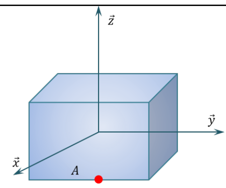
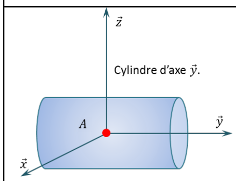
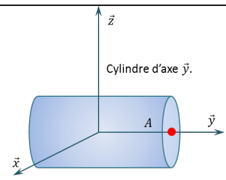
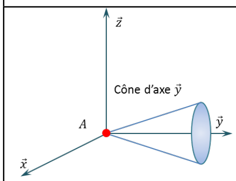
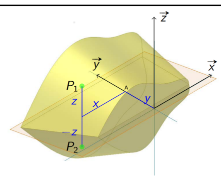
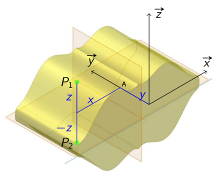
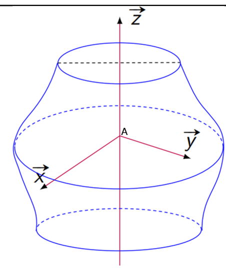
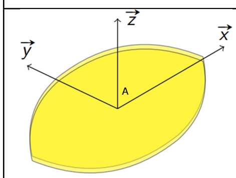
Question 2 *Déterminer la forme de la matrice d'inertie de la porte :*

1. *donner la forme de la matrice d'inertie de la plaque P en G_P ;*
2. *donner la forme de la matrice d'inertie du cylindre C en G_C ;*
3. *donner la forme de la matrice d'inertie de la porte P en G.*

Question 3 *Déterminer la moment d'inertie de la porte par rapport à* $\left(O,\overrightarrow{z}\right)$.

Matrices d'inertie

Donner les formes des matrices d'inertie suivantes.

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Application 1 – Corrigé

Application – Vilebrequin de moteur

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C13 : centre d'inertie*
- *Mod2.C14 : opérateur d'inertie*
- *Mod2.C15 : matrice d'inertie*

Question 1 *Calculer les masses des différentes pièces : m_1, m_2, m_3 et m_4.*

Correction On a :
- $m_1 = \mu \pi r_1^2 l_1$;
- $m_2 = \mu a b e$
- $m_3 = \mu \frac{1}{2} \pi R^2 e$;
- $m_4 = \mu \pi r_3^2 L$.

Question 2 *Déterminer le centre d'inertie de chaque pièce.*

Correction On a :
- $\overrightarrow{OG_1} = h\overrightarrow{y} + \frac{l_1}{2}\overrightarrow{z}$;
- $\overrightarrow{OG_2} = \frac{b}{2}\overrightarrow{y} - \frac{e}{2}\overrightarrow{z}$;
- $\overrightarrow{OG_4} = -\left(e + \frac{L}{2}\right)\overrightarrow{z}$.

Le solide 3 a deux plans de symétrie : $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$ et $\left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$. On ne cherche donc la composante du centre d'inertie que dans la direction $\overrightarrow{y}$.

$m_3\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y} = \int \overrightarrow{OP}\,\overrightarrow{y}\,\mathrm{d}m$ avec $\mathrm{d}m = \mu\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\, e$ (ρ variant de 0 à R et θ variant de $-\pi$ à 0) et $\overrightarrow{OP} = \rho\left(\cos\theta\,\overrightarrow{x} + \sin\theta\,\overrightarrow{y}\right)$.

On a donc :

$\mu\frac{1}{2}\pi R^2 e\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y} = \int \rho\left(\cos\theta\,\overrightarrow{x} + \sin\theta\,\overrightarrow{y}\right)\overrightarrow{y}\,\mu e\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi R^2\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y} = \int \rho^2\sin\theta\,\overrightarrow{y}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi R^2\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y} = -\frac{R^3}{3}\left[\cos\theta\right]_{-\pi}^{0}\overrightarrow{y}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y} = -2\frac{R}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y} = -4\frac{R}{3\pi}\overrightarrow{y}$

Au final : $\overrightarrow{OG_3} = -\frac{4R}{3\pi}\overrightarrow{y} - \frac{e}{2}\overrightarrow{z}$

Question 3 *Déterminer la valeur de R afin que le centre d'inertie du vilebrequin soit sur son axe de rotation. Faire l'application numérique.*

Correction On a $\left(m_1 + m_2 + m_3 + m_4\right)\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{y} = 0$

$\Leftrightarrow m_1\overrightarrow{OG_1}\cdot\overrightarrow{y} + m_2\overrightarrow{OG_2}\cdot\overrightarrow{y} + m_3\overrightarrow{OG_3}\cdot\overrightarrow{y} + m_4\overrightarrow{OG_4}\cdot\overrightarrow{y} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\mu\pi r_1^2 l_1\right)h + \left(\mu a b e\right)\frac{b}{2} - \left(\mu\frac{1}{2}\pi R^2 e\right)\frac{4R}{3\pi} + \left(\mu\pi r_3^2 L\right)\cdot 0 = 0$

$\Leftrightarrow \pi r_1^2 l_1 h + a b e\frac{b}{2} - \frac{1}{2}R^2 e\frac{4R}{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \pi r_1^2 l_1 h \frac{3}{2} + a b^2 e \frac{3}{4} = R^3 e \Leftrightarrow R^3 = \pi r_1^2 l_1 h \frac{3}{2e} + a b^2 \frac{3}{4}$$

Question 4 *Donner les formes des matrices d'inertie de chaque pièce au point où elles s'expriment de manière la plus simple et dans la base* $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.

Correction

$$I_{G_1}(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad I_{G_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad I_{G_3}(S_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad I_{G_4}(S_4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

Question 5 *Donner les formes de matrices d'inertie du vilebrequin en* O *dans la base* $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.

Correction $\overrightarrow{OG_1} = h\overrightarrow{y} + \frac{l_1}{2}\overrightarrow{z}$

$$I_O(S_1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + m_1 \begin{pmatrix} h^2 + \frac{l_1^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_1^2}{4} & -\frac{h l_1}{2} \\ 0 & -\frac{h l_1}{2} & h^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

$\overrightarrow{OG_2} = \frac{b}{2}\overrightarrow{y} - \frac{e}{2}\overrightarrow{z}$

$$I_O(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + m_2 \begin{pmatrix} \frac{b^2}{4} + \frac{e^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^2}{4} & -\frac{b e}{4} \\ 0 & -\frac{b e}{4} & \frac{b^2}{4} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

$\overrightarrow{OG_3} = -\frac{4R}{3\pi}\overrightarrow{y} - \frac{e}{2}\overrightarrow{z}$

$$I_O(S_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + m_3 \begin{pmatrix} \frac{16R^2}{9\pi^2} + \frac{e^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^2}{4} & -\frac{4R}{3\pi}\frac{e}{2} \\ 0 & -\frac{4R}{3\pi}\frac{e}{2} & \frac{16R^2}{9\pi^2} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

$\overrightarrow{OG_4} = -\left(e + \frac{L}{2}\right)\overrightarrow{z}$.

$$I_O(S_4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + m_4 \begin{pmatrix} \left(e + \frac{L}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(e + \frac{L}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

On a :

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

Le carter moteur peut être basculé pour l'entretien. Cette opération ne doit normalement pas être effectuée lorsque le moteur fonctionne. Afin de calculer les effets dynamiques engendrés par cette manipulation, il est nécessaire de calculer l'inertie en rotation du vilebrequin par rapport à cet axe de rotation.

Question 6 *Calculer l'inertie en rotation par rapport à l'axe* $\overrightarrow{OA}$.

Correction $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{OA}}{||\overrightarrow{OA}||} = \frac{L_1\overrightarrow{z} + h\overrightarrow{y}}{\sqrt{L_1^2 + h^2}}$

$$J_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & u_y & u_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_R \begin{pmatrix} 0 \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & u_y & u_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B\,b - D\,c \\ -D\,b + C\,c \end{pmatrix}$$

$$J_\Delta = (B\,b - D\,c)\,u_y + (-D\,b + C\,c)\,u_z$$

Application 1 – Corrigé

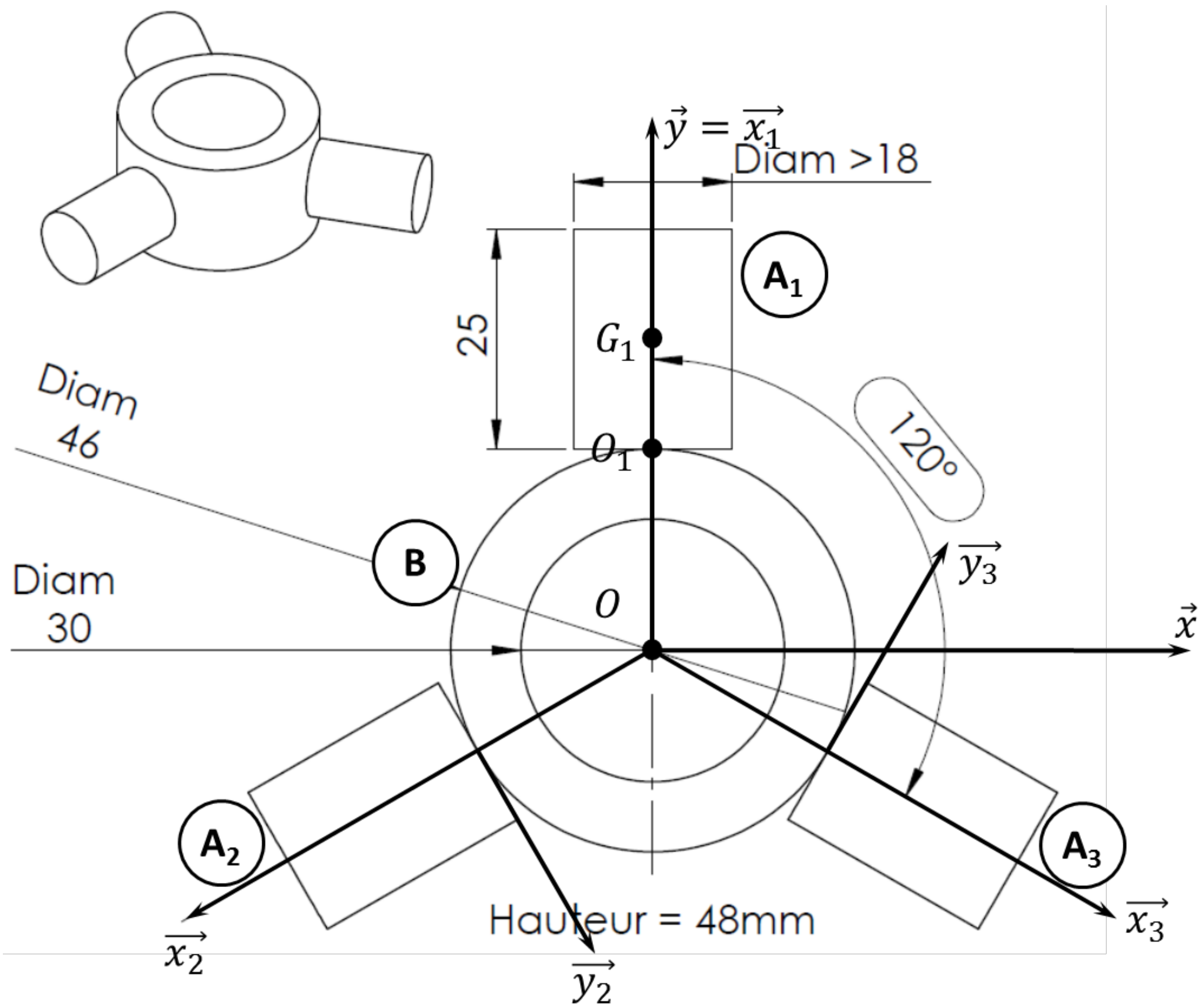
Application 2
X. Pessoles

Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod2.C13 : centre d'inertie*
- ❒ *Mod2.C14 : opérateur d'inertie*
- ❒ *Mod2.C15 : matrice d'inertie*

Triaxe

On donne le plan d'un triaxe constitué des 3 axes A_1, A_2, A_3 et du moyeu central noté M. On note T l'ensemble.



On note :

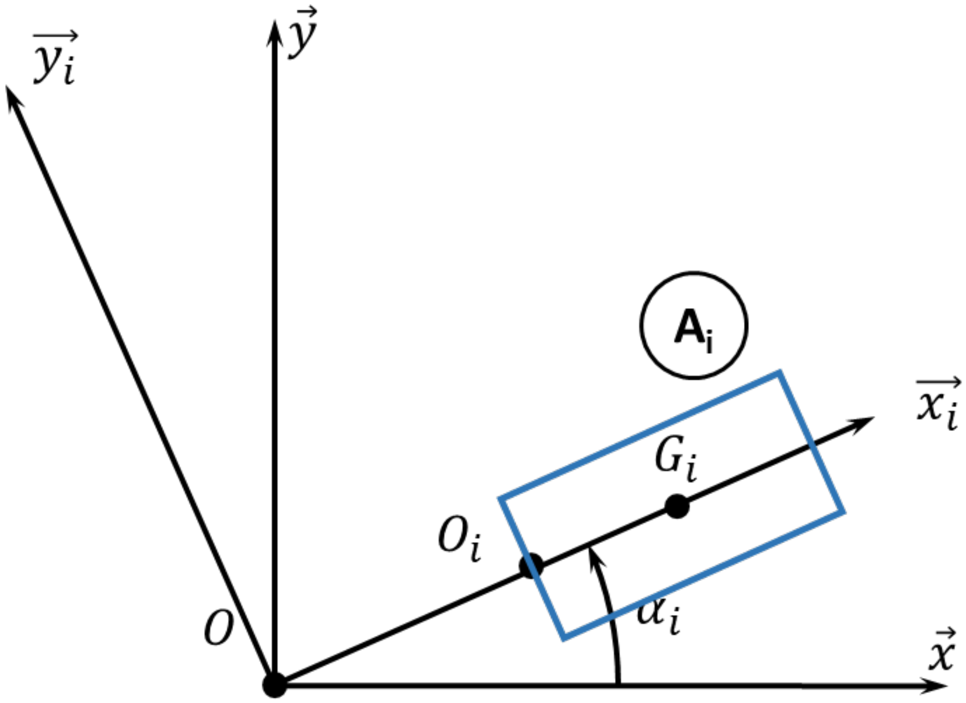
- $\vec{z}$ l'axe perpendiculaire au plan de la feuille. On se place ci-dessus dans le plan de symétrie $(O, \vec{x}, \vec{y})$;
- $\mathcal{R}_i$ le repère $(O_i; \overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$ et $\mathcal{B}_i$ la base associée.

TOUS LES CALCULS SE FERONT DE MANIÈRE LITTEREALE!

- $D_1 = 18\,\text{mm}$ et $H_1 = 25\,\text{mm}$.
- $D = 46\,\text{mm}$, $D' = 30\,\text{mm}$ et $H = 48\,\text{mm}$.

- $\alpha_1 = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1}\right) = 90°$, $\alpha_2 = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_2}\right) = -150°$ et $\alpha_3 = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_3}\right) = -30°$.

On donne ci-dessous le paramétrage d'un axe A_i.



Question 1 *Déterminer (sans calcul) la position du centre de gravité du triaxe.*

Correction

Le plan $\left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$ est plan de symétrie du triaxe; donc $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{z} = 0$

Le plan $\left(O, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ est plan de symétrie du triaxe; donc $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{x} = 0$

Reste la coordonnée selon $\overrightarrow{y}$.

Les plans $\left(O, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x_2}\right)$ et $\left(O, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x_3}\right)$ étant plans de symétrie, on a $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{y_2} = 0$ et $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{y_3} = 0$. Or $\overrightarrow{OG} = y_g \overrightarrow{y} = y_g \cos\alpha_2 \overrightarrow{y_2} - y_g \sin\alpha_2 \overrightarrow{x_2}$. Il en résulte que $y_g \cos\alpha_2 = 0$ et donc nécessairement $y_g = 0$ car $\alpha_2 \neq 0$.

Question 2 *Déterminer analytiquement la position du centre de gravité G_i du solide A_1 dans le repère $\mathcal{R}_i$.*

Correction On pourrait répondre directement en disant que le solide à 3 plans de symétrie orthogonaux entre eux. En utilisant la définition on a :

- $M_1 = \mu H_1 \pi \dfrac{D_1^2}{4}$;
- en coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{O_i P_i} = x\overrightarrow{x_i} + \rho\cos\theta\overrightarrow{y_i} + \rho\sin\theta\overrightarrow{z_i}$ et $\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x$ avec $x \in [0, H_1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, D_1/2]$;
- $m_i x_{G_i} = \mu \iiint x_P dV = \mu \iiint x\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x = \mu\dfrac{H_1^2}{2} 2\pi \dfrac{D_1^2}{8}$;
- $m_i y_{G_i} = \mu \iiint y_P dV = \mu \iiint \rho\cos\theta\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x = 0$;
- $m_i z_{G_i} = \mu \iiint z_P dV = \mu \iiint \rho\sin\theta\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x = 0$.

Au final, $\mu H_1 \pi \dfrac{D_1^2}{4} x_{G_1} = \mu \dfrac{H_1^2}{2} 2\pi \dfrac{D_1^2}{8} \Leftrightarrow x_{G_1} = \dfrac{H_1}{2}$.

Question 3 *Déterminer (sans calcul) la **forme** de la matrice d'inertie du triaxe.*

Correction Le plan $\left(O,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right)$ est plan de symétrie du triaxe ; donc $E=\iiint xz\mathrm{d}m=0$ et $D=\iiint yz\mathrm{d}m=0$.
Le plan $\left(O,\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ est plan de symétrie du triaxe ; donc $E=\iiint xz\mathrm{d}m=0$ et $F=\iiint xy\mathrm{d}m=0$.

La matrice est donc diagonale et de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$.

Question 4 *Déterminer analytiquement la matrice d'inertie du solide A_i en G_i dans $\mathscr{R}_i$. On la note $I_{G_i}(A_i)=\begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i\\ -F_i & B_i & -D_i\\ -E_i & -D_i & C_i\end{pmatrix}_{\mathscr{R}_i}$ où les constantes seront à déterminer littéralement.*

Correction Le solide étant axisymétrique, on a : $D_i=E_i=F_i=0$ et $C_i=B_i$. D'où $I_{G_i}(A_1)=\begin{pmatrix} A_i & 0 & 0\\ 0 & B_i & 0\\ 0 & 0 & B_i\end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1}$.

Calculons $A_i=\iiint\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}m=\mu\iiint\left(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x$
$=\mu\iiint\rho^3\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z=\mu\left[\dfrac{\rho^4}{4}\right]_0^{D_1/2}2\pi H_1=\mu\dfrac{D_1^4}{16\cdot 4}2\pi H_1=M_1\dfrac{D_1^2}{8}$.
Calculons $B_i=\iiint\left(x^2+z^2\right)\mathrm{d}m=\mu\iiint\left(x^2+\rho^2\sin^2\theta\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x$

$B_x=\mu\iiint x^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x+\mu\iiint\rho^2\sin^2\theta\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x=\mu\iiint x^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x=\mu\dfrac{H_1^3}{4\cdot 3}\dfrac{D_1^2}{8}2\pi=M\dfrac{H_1^2}{12}$

$B_z=\mu\iiint\rho^2\sin^2\theta\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x=\mu\iiint\rho^3\dfrac{1-\cos 2x}{2}\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x=\mu\iiint\dfrac{\rho^3}{2}\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x=\mu\dfrac{D_i^4}{2\cdot 16\cdot 4}2\pi H_1=M\dfrac{D_i^2}{16}$.

Au final, $A_i=M_1\dfrac{D_1^2}{8}$ et $B_i=M\left(\dfrac{H_1^2}{12}+\dfrac{D_1^2}{16}\right)$.

Question 5 *Déterminer $I_{G_i}(A_i)$ dans la base $\mathscr{B}\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ puis $I_O(A_i)$ dans la base $\mathscr{B}$.*

Correction On a $\overrightarrow{x_i}=\cos\alpha\overrightarrow{x}+\sin\alpha\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{y_i}=\cos\alpha\overrightarrow{y}-\sin\alpha\overrightarrow{x}$. En conséquences, on a : $P_{10}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

On a donc $I_{G_1}(A_1)_{\mathscr{R}}=P_{10}^{-1}I_{G_1}(A_1)_{\mathscr{R}_1}P_{10}$.

$$I_{G_1}(A_1)_{\mathscr{R}}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & 0 & 0\\ 0 & B_1 & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}_{\mathscr{R}_1}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\cos\alpha & -A_1\sin\alpha & 0\\ B_1\sin\alpha & B_1\cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}A_1\cos^2\alpha+B_1\sin^2\alpha & -A_1\sin\alpha\cos\alpha+B_1\cos\alpha\sin\alpha & 0\\ -A_1\sin\alpha\cos\alpha+B_1\cos\alpha\sin\alpha & A_1\sin^2\alpha+B_1\cos^2\alpha & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}$$

Par ailleurs, $\overrightarrow{OG_i}=\dfrac{H+D}{2}\overrightarrow{x_i}=\dfrac{H+D}{2}\left(\cos\alpha\overrightarrow{x}+\sin\alpha\overrightarrow{y}\right)$; donc :

$$I_O(A_i)_{\mathscr{R}}=I_{G_i}(A_i)_{\mathscr{R}}+M_1\begin{pmatrix}\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2 & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right) & 0\\ \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right) & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2+\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2\end{pmatrix}$$

$$I_O(A_i)_{\mathcal{R}} = I_{G_i}(A_i)_{\mathcal{R}} + M_1 \begin{pmatrix} \left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2 & \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & 0 \\ \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & \left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

Au final, $I_O(A_i)_{\mathcal{R}} =$

$$\begin{pmatrix} A_1\cos^2\alpha + B_1\sin^2\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\sin\alpha\right)^2 & (B_1-A_1)\sin\alpha\cos\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & 0 \\ (B_1-A_1)\sin\alpha\cos\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2\cos\alpha\sin\alpha & A_1\sin^2\alpha + B_1\cos^2\alpha + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\cos\alpha\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 + M_1\left(\dfrac{H+D}{2}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

On note $I_O(A_i)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} f(\alpha) & fg(\alpha) & 0 \\ fg(\alpha) & g(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & h(\alpha) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$

Question 6 *Déterminer $I_O(B)$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Question 7 *Proposer une méthode pour déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en O dans la base $\mathcal{B}$.*

Question 8 *Déterminer le tenseur d'inertie du triaxe en O dans la base $\mathcal{B}$.*

Correction

Question 9 *Déterminer $I_O(M)$ la matrice d'inertie du moyeu M.*

Correction

Question 10 *Déterminer $I_O(T)$ la matrice d'inertie du triaxe T.*

Correction