

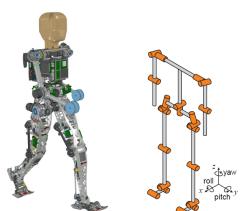
## Cours

# Chapitre 2

## Hyperstatisme

**Savoirs et compétences :**

- Mod2.C34 : chaînes de solides;*
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;*
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;*
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;*
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.*



*Robot humanoïde Lola*



*Simulateur de vol Lockheed Martin*

## 1 Degrés de mobilité

**Définition Mobilité cinématique** On appelle  $m_c = m_u + m_i$  le **degrés de mobilité cinématique** d'une liaison ou d'un mécanisme, avec :

- $m_u$  : le nombre de mobilités dites **utile**;
- $m_i$  : le nombre de mobilités dites **interne**.

Pour une liaison seule :

- $m_c = 0$  : liaison complète ou rigide;
- $m_c > 0$  : liaison mobile à  $m_c$  degrés de liberté.

(R)

Dans un mécanisme, une mobilité utile est une mobilité **recherchée dans la fonction du mécanisme**. On différenciera **seulement** les mobilités utiles **indépendantes**. Si une relation existe, par exemple, entre un mouvement d'entrée et un mouvement de sortie, alors cela sera considéré comme une seule mobilité.

Les mobilités internes sont des mobilités indépendantes résiduelles à l'intérieur du mécanisme.

**Méthode** Les mobilités utiles et internes peuvent être déterminées intuitivement. Cependant, il est possible de déterminer le nombre de mobilités analytiquement.

### Méthode cinématique

Il faut commencer par écrire la (ou les) fermetures de chaînes cinématiques. Une fermeture de chaîne permet d'écrire un système de 6 équations. On note  $r_c$  le rang du système d'équations cinématiques.

On a alors  $m_c = I_c - r_c$ .

### Méthode statique

Il faut commencer par appliquer le PFS à chacune des pièces du système. Un PFS permet d'écrire un système de 6 équations. On note  $r_s$  le rang du système d'équations statiques.

On a alors  $m_c = E_S - r_s$ .

## 2 Hyperstatisme

### 2.1 Définition

On appelle  $h$  le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme. Il traduit l'impossibilité à résoudre un problème de mécanique, par la redondance abusive des liaisons.

**Définition Degrés d'hyperstatisme** On peut définir le degré d'hyperstatisme par :

#### Méthode cinématique

$$h = m_c - I_c + E_c$$

$h = 0$  : liaison ou mécanisme **isostatique**;

- $h > 0$  : liaison ou mécanisme **hyperstatique**.

#### Méthode statique

$$h = m_c - E_s + I_s$$

#### Définition Notations

$I_c$  et  $I_s$  sont respectivement les  **nombres d'inconnues cinématiques et statiques** d'un système et ils dépendent du type de modélisation (2D ou 3D).

#### Méthode cinématique

On rappelle que le **nombre cyclomatique**  $\gamma$  est tel que  $\gamma = L - S + 1$  ( $S$  nombre de classes d'équivalence et  $L$  le nombre de liaisons).

On note  $E_c$  le nombre d'équations cinématique :

- en 3D :  $E_c = 6\gamma$ ;
- en 2D :  $E_c = 3\gamma$ .

#### Méthode statique

$E_s$  est le nombre d'équations statique :

- en 3D :  $E_s = 6(S - 1)$ ;
- en 2D :  $E_s = 3(S - 1)$ .

(R)

- Un système en **chaîne ouverte** est toujours **isostatique**.
- **Une liaison hélicoïdale a 5 inconnues statiques et 1 inconnue cinématique.**

### 2.2 Le système est hyperstatique... et alors ?

Tout d'abord, d'un point de vue calcul mécanique, l'intérêt d'un système isostatique est qu'il est possible de calculer les efforts dans chacune des liaisons. Un système isostatique sera de plus facile à assembler car le positionnement des pièces les unes avec les autres est « unique ».

Pour les systèmes hyperstatiques, il n'est pas possible de connaître chacun des efforts. En revanche, la détermination des lois de mouvement des systèmes reste possible. Les systèmes hyperstatiques sont plus rigides que des systèmes isostatiques mais nécessitent de prendre des précautions au montage ou à la fabrication des pièces :

- les dimensions des pièces fabriquées doivent être maîtrisées;
- du jeu doit être prévu pour garantir l'assemblage;
- des dispositifs de réglage peuvent être proposés.

Un système hyperstatique peut donc être plus cher à réaliser, mais peut être plus rigide et d'une plus grande durée de vie.

Pour calculer les efforts dans un système hyperstatique, plusieurs solutions sont possibles : on peut par exemple faire des hypothèses sur une répartition d'efforts.

**Méthode Conditions de montage** Pour déterminer les conditions de montage, il est possible d'exploiter les équations  $0 = 0$  issues des fermetures de chaînes cinématiques. En effet, le nombre d'équations  $0 = 0$  correspond au degré d'hyperstatisme.

- une équation de type  $0 = 0$  issue de la fermeture des vecteurs taux de rotation impose de spécifier un parallélisme;
- une équation de type  $0 = 0$  issue de la fermeture des vecteurs vitesse impose de spécifier une distance.

Il est parfois demandé de diminuer le degré d'hyperstatisme d'un système. Pour cela, il faut rajouter des degrés de liberté à certaines liaisons, sans pour autant modifier le comportement du système.

**Activation 1 – Corrigé****Activation – Pompe à pistons axiaux***É. Durif***Savoirs et compétences :**

- Mod2.C34 : chaînes de solides.

**Bilan des actions mécanique pour chacune des classes d'équivalence****Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 1**

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point *B* :

- Action de 0 sur 1 en A :**

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1A})\} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & 0 \\ Y_{A01} & 0 \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{A01} & L_1 Y_{A01} \\ Y_{A01} & -L_1 X_{A01} \\ Z_{A01} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

- Action de 0 sur 1 en B :**

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_{1B})\} = \begin{Bmatrix} X_{B01} & L_{B01} \\ Y_{B01} & M_{B01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

- Action de 2 sur 1 en C :**

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ 0 & -R Y_{21} \end{Bmatrix}_{B,R_1}$$

**Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 2**

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point *C* :

- Action de 3 sur 2 en D :**

$$\{\mathcal{T}(S_3 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1} = \begin{Bmatrix} X_{32} & -\lambda Y_{32} \\ Y_{32} & \lambda X_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- Action de 1 sur 2 en C :**

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} -X_{21} & -L_{21} \\ -Y_{21} & -M_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- Action de la pression en C :**

$$\{\mathcal{T}(\text{pression} \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_p & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

### Bilan des actions mécaniques pour l'ensemble 3

On choisit d'écrire tous les torseurs des actions mécaniques au point D :

- **Action de 2 sur 3 en D :**

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_3)\} = \begin{Bmatrix} -X_{32} & 0 \\ -Y_{32} & 0 \\ -Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1}$$

- **Action de 0 sur 3 en E :**

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_3)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_{1*}} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_{1*}} = \begin{Bmatrix} Z_{03} \sin(\alpha) & L_{03} \cos(\alpha) \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} \cos(\alpha) & -L_{03} \sin(\alpha) \end{Bmatrix}_{D,R_1}$$

### Résolution d'un système linéaire homogène

En appliquant successivement le principe fondamental de la statique pour chacun des trois ensemble on obtient un système de 18 équations :

(1)résultante suivant $\vec{x}_1$	$X_{A01} + X_{B01} + X_{C21} = 0$
(2)résultante suivant $\vec{y}_1$	$Y_{A01} + Y_{B01} + Y_{C21} = 0$
(3)résultante suivant $\vec{z}_1$	$Z_{A01} = 0$
(4)moment suivant $(B, \vec{x}_1)$	$L_1 Y_{A01} + L_{B01} + L_{C21} = 0$
(5)moment suivant $(B, \vec{y}_1)$	$-L_1 X_{A01} + M_{B01} + M_{C21} = 0$
(6)moment suivant $(B, \vec{z}_1)$	$-R Y_{C21} = 0$
(7)résultante suivant $\vec{x}_1$	$X_{D32} - X_{C21} = 0$
(8)résultante suivant $\vec{y}_1$	$Y_{D32} - Y_{C21} = 0$
(9)résultante suivant $\vec{z}_1$	$Z_{D32} + F_p = 0$
(10)moment suivant $(C, \vec{x}_1)$	$-\lambda Y_{D32} - L_{C21} = 0$
(11)moment suivant $(C, \vec{y}_1)$	$\lambda X_{D32} - M_{C21} = 0$
(12)moment suivant $(C, \vec{z}_1)$	$0 = 0$
(13)résultante suivant $\vec{x}_1$	$-X_{D32} + Z_{E03} \sin(\alpha) = 0$
(14)résultante suivant $\vec{y}_1$	$-Y_{D32} = 0$
(15)résultante suivant $\vec{z}_1$	$-Z_{D32} + Z_{E03} \cos(\alpha) = 0$
(16)moment suivant $D\vec{x}_1$	$L_{E03} \cos(\alpha) = 0$
(17)moment suivant $D\vec{y}_1$	$M_{E03} = 0$
(18)moment suivant $D\vec{z}_1$	$-M_{E03} \sin(\alpha) = 0$

### Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

Bilan de l'approche statique

- On obtient alors un système de  $E_s = 18$  équations statiques.
- La modélisation comporte  $I_s = 17$  inconnues statiques.
- Certaines de ces équations ne sont pas significatives, elles correspondent aux mobilités cinématiques du mécanisme :
  - Équation (12) “ $0 = 0$ ” : mobilité de rotation de piston autour de  $(C, \vec{z}_1)$ .
  - Les équations (6) (8) et (14) sont équivalentes à deux équations libres : mobilité de rotation du barillet autour de  $(B, \vec{z}_1)$ .
  - Équation (18) liée à (17) : rotation du poussoir autour de  $(E, \vec{z}_{1*})$ .

Le système possède alors **3 mobilités cinématiques** ( $m_c = 3$ ).

Pour résoudre ce système on se retrouve donc avec  $r_s = 15$  équations significatives (rang du système d'équations statiques  $r_s$ ) pour  $I_s = 17$  inconnues. Nous avons donc un déficit de **2 équations** ou encore 2 inconnues statiques de trop pour résoudre le problème. Le système est donc **hypercontraint**. On dit que la modélisation du système est **hyperstatique d'ordre 2**

$$h = I_s - r_s = I_s - (E_s - m_c) \quad (1)$$

## Étude cinématique

### Objectifs

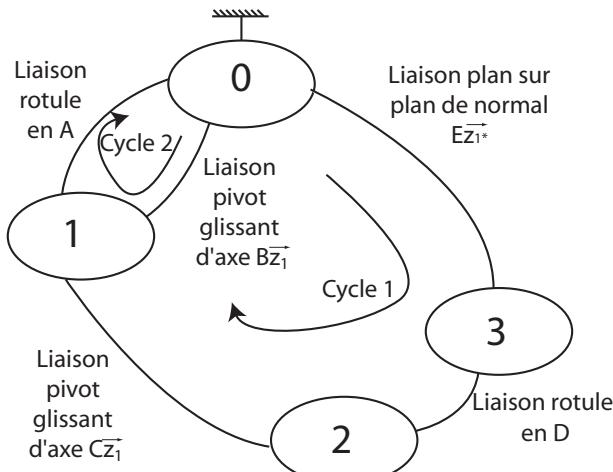
- La résolution cinématique a pour but de déterminer les caractéristiques cinématiques au niveau de toutes les liaisons de la chaîne.
- Cette approche permet également de déterminer l'isostaticité ou l'hypostaticité en vue de déterminer les conditions éventuelles de montage du mécanisme.
- Elle permet enfin de déterminer la loi entrée-sortie cinématique du mécanisme.

### Démarche

Le graphe de liaison donné ci-après montre que le mécanisme possède deux chaînes fermées :

- Chaîne 1 : {0 – 3 – 2 – 1 – 0}.
- Chaîne 2 : {0 – 1 – 0}.

L'approche cinématique consiste à écrire pour chaque chaîne la fermeture cinématique à l'aide des torseurs.



Graphe de structure de la pompe

### Fermeture de chaîne cinématique

#### Chaîne cinématique 1

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en C :

- $\{\mathcal{V}(3/0)\}$  :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}(3/0)\} &= \begin{Bmatrix} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{Bmatrix}_{E,R_{1*}} = \begin{Bmatrix} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_{1*}} = \begin{Bmatrix} 0 & u_{30} \cos(\alpha) \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) \end{Bmatrix}_{D,R_1} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 & u_{30} \cos(\alpha) - \lambda r_{30} \sin(\alpha) \\ r_{30} \sin(\alpha) & v_{30} \\ r_{30} \cos(\alpha) & -u_{30} \sin(\alpha) \end{Bmatrix}_{C,R_1} \end{aligned}$$

- $\{\mathcal{V}(3/2)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} = \begin{Bmatrix} p_{32} & 0 \\ q_{32} & 0 \\ r_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_1} = \begin{Bmatrix} p_{32} & -\lambda q_{32} \\ q_{32} & \lambda p_{32} \\ r_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(2/1)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & w_{21} \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R r_{B10} \\ r_{B10} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

### Chaine cinématique 2

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \{\mathcal{V}(1_B/0)\}$$

On détermine alors successivement les différents torseurs cinématiques que l'on exprimera tous en  $A$  :

- $\{\mathcal{V}(1_A/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1_A/0)\} = \begin{Bmatrix} p_{A10} & 0 \\ q_{A10} & 0 \\ r_{A10} & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1}$$

- $\{\mathcal{V}(1_B/0)\}$  :

$$\{\mathcal{V}(1_B/0)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{B10} & w_{B10} \end{Bmatrix}_{A,R_1}$$

### Résolution

On écrit alors la fermeture cinématique pour chaque fermeture cinématique. Cela donnera 12 équation pour 13 inconnues avec les deux fermetures de chaines :

$$\{\mathcal{V}_{(1/0)}^A\} - \{\mathcal{V}_{(1/0)}^B\} = \{0\}$$

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} - \{\mathcal{V}(3/0)\} = \{0\}$$

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & \lambda \sin(\alpha) & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_{A10} \\ q_{A10} \\ r_{A10} \\ r_{B10} \\ w_{B10} \\ u_{30} \\ v_{30} \\ r_{30} \\ p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \\ r_{21} \\ w_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### Mise en évidence de l'hyperstatisme et de la mobilité

#### Approche cinématique

- Avec deux cycles fermés, on obtient alors un système de  $E_c = 12$  équations.
- La modélisation comporte  $I_c = 13$  inconnues cinématiques.
- Le rang du système vaut  $r_c = 10$  car deux équations ((4) et (5)) donnent “ $0 = 0$ ” et ne sont donc pas significatives.
- Le nombre d'équations non-significatives correspond directement à l'**hyperstaticité** (ici  $h = 2$ )
- La mobilité cinématique se définit comme la différence entre le nombre d'inconnues cinématiques ( $I_c$ ) et le nombre d'équations significatives ( $r_c$ ) : **ici**  $m_c = 3$

$$m_c = I_c - r_c = I_c - (E_c - h). \quad (2)$$

## Application 01

### Application 1 – Corrigé

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides ;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle ;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle ;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme ;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

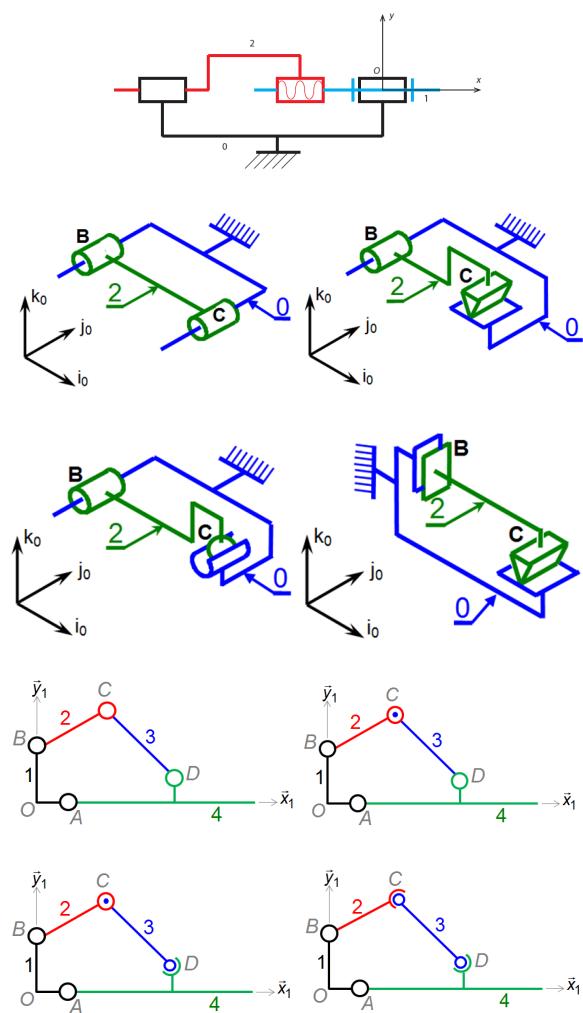
### Exercice 1 – Applications directes

Pôle Chateaubriand – Joliot-Curie.

**Question 1** Pour chacun des mécanismes suivants, déterminer le degré d'hyperstatisme.

**Question 2** Lorsque le modèle est hyperstatique, proposer :

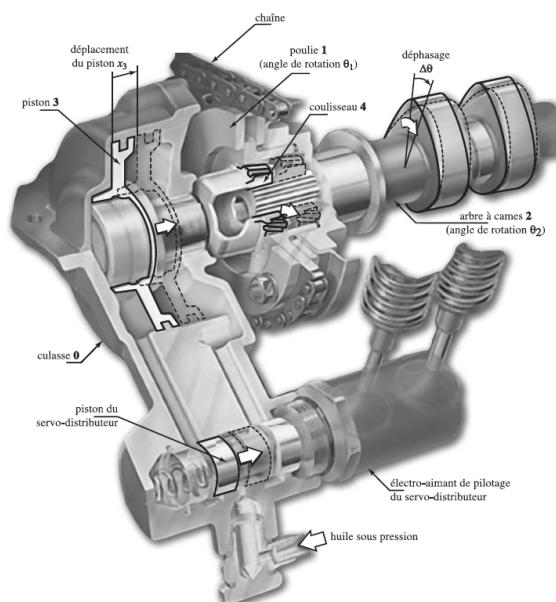
- des conditions d'assemblage (intuitivement) ;
- un modèle isostatique.



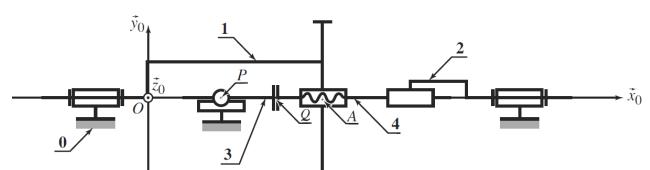
### Exercice 2 – Déphasage d'arbre à cames

Banque PT SIA – 2008.

L'optimisation d'un moteur 4 temps passe (entre autre) par une bonne maîtrise des lois de levée des soupapes. Il est ainsi possible de positionner entre la poulie 1 (entraînée par le vilebrequin via une chaîne) et l'arbre à came 2 un système permettant de créer un déphasage entre ces pièces.



On propose ci-dessous un modèle cinématique du système de déphasage. On retrouve la culasse 0, la poulie d'entraînement 1, l'arbre à cames 2, le piston 3 et le coulisseau 4.



**Question 3** Établir le graphe des liaisons du mécanisme.

## Correction

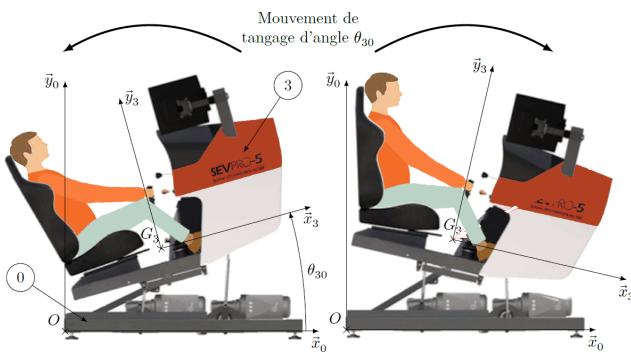
**Question 4** Déterminer le degré d'hyperstatisme en précisant la démarche utilisée. (On utilisera la méthode cinématique et la méthode statique).

## Correction

## Exercice 3 – Simulateur de vol pour la formation de pilotes en aéroclub

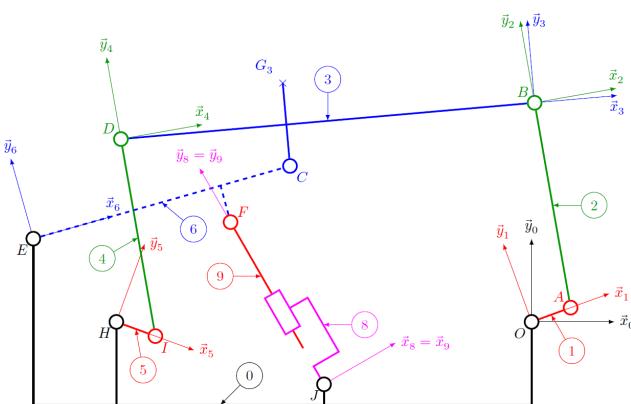
Centrale Supelec 2017 – PSI.

On s'intéresse à un simulateur de vol à plate-forme dynamique. Deux moteurs permettent d'assurer le mouvement de tangage. Ils entraînent respectivement les liaisons pivots de centres  $H$  et  $O$ .



On propose le modèle plan suivant (la pièce 6 est en traits pointillés pour la démarquer des autres pièces).

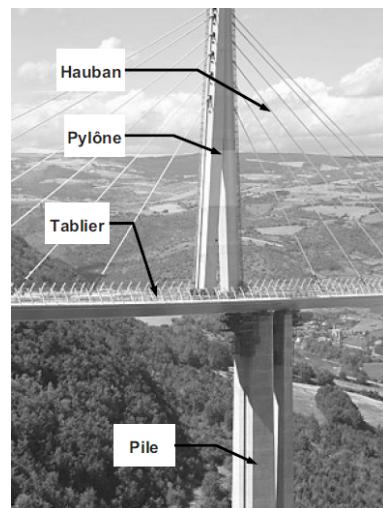
### Question 5 Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.



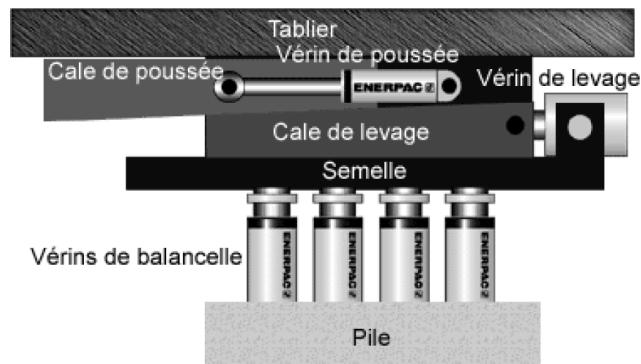
## Exercice 5 – Pousseur de tablier

Banque PT 2008 – SIC.

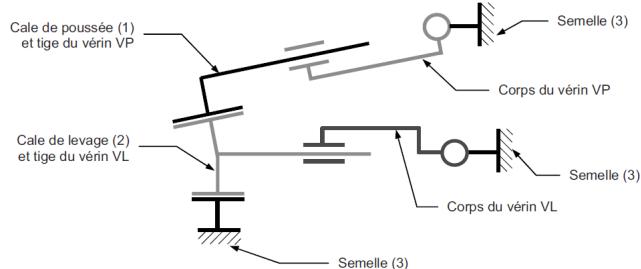
Une technique pour construire un pont et de commencer par ériger les piles définitives en béton et les piles temporaires en acier. On peut alors assembler tronçon par tronçon, les 2 tabliers sur la terre ferme et enfin pousser les deux parties du tablier assemblées sur les piles afin de réaliser la jonction. Cette opération de poussée est réalisée à l'aide de systèmes hydrauliques nommés « pousseurs de tablier ».



Le pousseur de tablier est soutenu par plusieurs vérins de balancelle verticaux (non étudiés) qui assurent le positionnement de la semelle afin que la cale de poussée soit parallèle et à la bonne distance du plan inférieur du tablier.



On suppose dans cette partie, que l'angle que fait le plan supérieur de la cale de levage avec l'horizontale est petit. Ce qui revient à considérer que les contacts dans les liaisons planes sont maintenus durant tout le mouvement. Une première étude conduit à la modélisation suivante.



**Question 6** Proposer un modèle pour tenir compte de l'hypothèse des angles « petits ».

## Correction

**Question 7** Estimer le degré de mobilité du modèle proposé.

## Correction

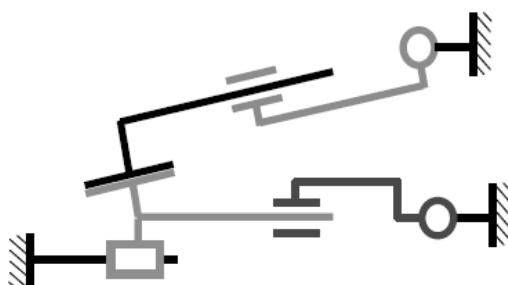
**Question 8** Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé.

**Correction**

**Question 9** Proposer des modifications pour rendre le système isostatique. Faire un nouveau schéma cinématique tenant compte de ces modifications.

**Correction**

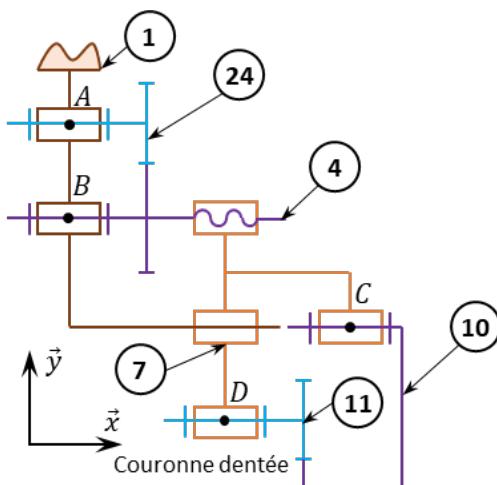
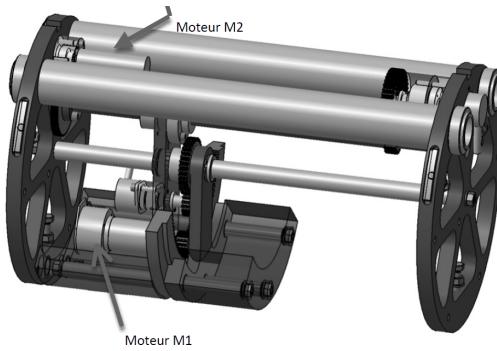
**Question 10** Le constructeur a fait le choix de mettre une liaison glissière de direction horizontale à la place de la liaison plane entre la cale de levage (2) et la semelle (3) (figure 6). Qu'est-ce qui justifie un tel choix? Comment peut-on rendre ce modèle isostatique?

**Correction**

**Exercice 6 – Planeur sous marin**

Banque PT 2012 – SIC.

Le planeur sous-marin est un dispositif autonome développé par l'IFREMER dont le but est de réaliser des mesures océanographiques. Il ressemble à un mini sous-marin qui plane en dents de scie vers un point prédéfini. Il remonte régulièrement à la surface afin de communiquer avec son opérateur par satellite afin d'envoyer les données acquises pendant sa plongée pour évaluer sa dérive due aux courants.

Dans le but de modifier l'orientation et l'équilibrage du planeur, l'apartie centrale du planeur comporte un dispositif qui permet de positionner le centre de gravité axialement 24 et radialement 11.



Cycle 06

**Question 11** Réaliser le graphe de liaison associé au schéma cinématique minimal proposé. Identifier le nombre de mobilités.

**Correction**

On supposera que la liaison entre deux roues dentées est une liaison ponctuelle.

**Question 12** Déterminer le degré d'hyperstatisme. Si celui-ci est non nul, indiquer la ou les contraintes géométriques associées.

**Correction**

## TD 1 – Corrigé



### Suspension de l'AddBike

Agrégation Sciences Industrielles de l'Ingénieur – 2018

#### Savoirs et compétences :

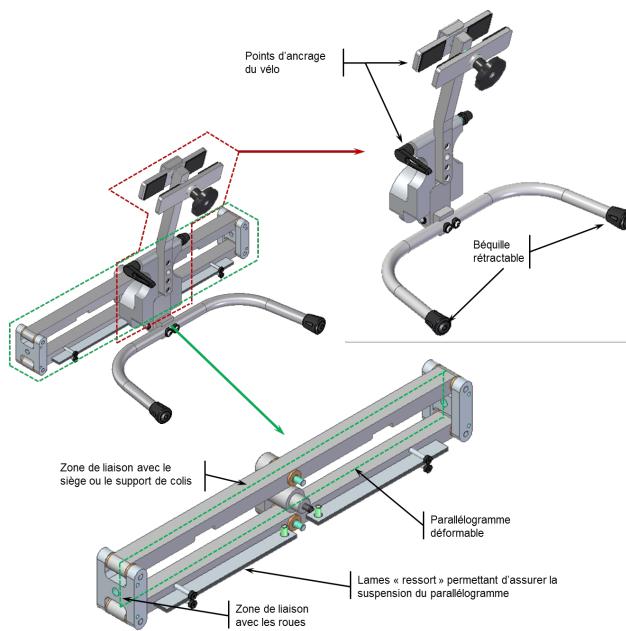
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

#### Présentation

L'Add-Bike est un système pouvant s'adapter à tous types de vélo et doit permettre de transporter des marchandises (colis ou courses du quotidien) ou des enfants.

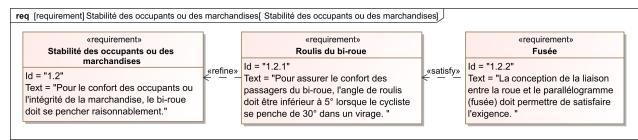


Il est équipé d'un système de suspension permettant de limiter le mouvement de roulis dans les virages.

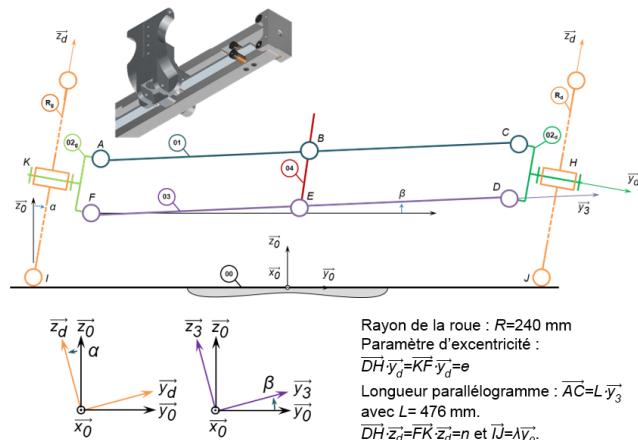


#### Exigence 1.2 : Stabilité des occupants et des marchandises

**Objectif** Pour assurer la stabilité des occupants du bi-roue, il est nécessaire de déterminer les conditions géométriques permettant de limiter l'angle de roulis (exigence 1.2.1). Ainsi, cet angle roulis ne doit pas dépasser  $\beta = 5^\circ$  lorsque le cycliste penche le mât vertical de  $\alpha = 30^\circ$ .



Pour pouvoir tourner, le cycliste penche le mât vertical 04 par l'intermédiaire du guidon, ce qui conduit à la déformation du parallélogramme ACDF donné dans la figure suivante et à la rotation des roues autour de l'axe horizontal longitudinal  $\vec{x}_0$ . Lors de la déformation du parallélogramme, les bielles 01 et 03 ne restent pas parfaitement horizontales; le passager assis dans le siège lié à la bielle 03, subit donc du roulis, c'est-à-dire un pivotement autour de l'axe horizontal longitudinal  $\vec{x}_0$ .



L'angle  $\beta$  correspond à l'angle de roulis des bielles 01 et 03.

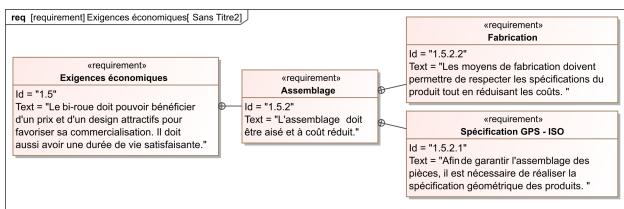
**Question 1** En réalisant une fermeture géométrique, déterminer la relation liant l'angle  $\beta$  et l'excentricité  $e$  des fusées 02g et 02d.

**Question 2** En déduire une valeur de l'excentricité  $e$  permettant de valider l'exigence 1.2.1.

#### Correction

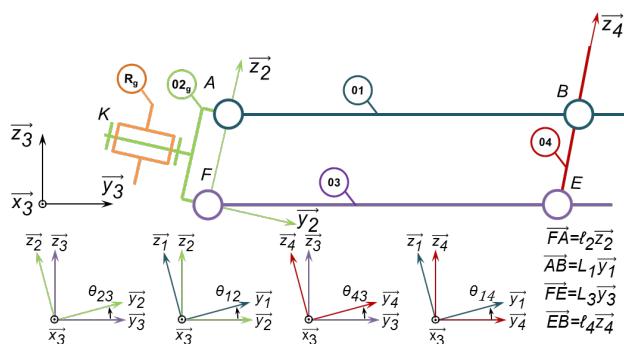
## Exigence 1.5 : Exigences économiques – Assemblage

**Objectif** Afin de pouvoir vendre son produit à un prix attractif, la start-up doit pouvoir fabriquer et assembler son produit à un coût satisfaisant. Une maîtrise des coûts passe par la maîtrise des spécifications garantissant l'assemblage du système et par des coûts de fabrication réduits. Les objectifs sont ici de : spécifier des conditions géométriques sur les dimensions de la bielle inférieure (03) à partir des conditions de fonctionnement.



**Question 3** Après avoir fait un graphe de structure et sans tenir compte des roues et de leurs liaisons au sol, donner le degré d'hyperstatisme du modèle cinématique suivant.

### Correction



**Question 4** Donner les torseurs cinématiques  $\{\mathcal{V}(2/3)\}, \{\mathcal{V}(1/2)\}, \{\mathcal{V}(4/3)\}, \{\mathcal{V}(1/4)\}$ .

### Correction

**Question 5** En utilisant une fermeture de chaîne cinématique, donner le système d'équations liant les différentes variables.

### Correction

**Question 6** En déduire les conditions géométriques à imposer sur la bielle (03) afin de satisfaire l'assemblage du mécanisme.

### Correction

### Synthèse

**Question 7** Conclure sur les méthodes qui ont permis de répondre aux exigences 1.4 et 1.5.

### Correction

## TD 2 – Corrigé



### Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC<sup>2</sup>E)

Concours Commun Mines Ponts 2016

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

## Mise en situation

### Travail demandé

On s'intéresse à la phase de vie pendant laquelle la pince est introduite dans le trocart au travers d'un guide (étanche). Une phase de calibration du robot démarre ensuite.

#### Objectif

- Modéliser la liaison entre l'abdomen et la pince (4) en analysant la chaîne ouverte de solides du robot.
- Analyser les conséquences de la fermeture de la chaîne par la liaison peau-trocart.

**Question 1** On considère la chaîne ouverte de solides (0+1+2+3+4). Par la méthode de votre choix, définir le torseur cinématique de la liaison équivalente 4/0 noté  $\{\mathcal{V}^{\text{eq}}(4/0)\}$ . En déduire la mobilité cinématique  $m_c$  de cette chaîne de solides.

#### Correction

Les 4 solides étant en série, on a  $\{\mathcal{V}^{\text{eq}}(4/0)\} = \{\mathcal{V}(4/3)\} + \{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$ .  $O$  étant le point de concours de chacun des axes, les torseurs des liaisons pivots sont tous de la forme :  $\{\mathcal{V}(i/i-1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_i \vec{z}_i \\ 0 \end{array} \right\}_O$ . De plus,  $\{\mathcal{V}(4/3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \vec{z}_3 \end{array} \right\}_O$ . Au final,  $\{\mathcal{V}^{\text{eq}}(4/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 + \dot{\theta}_3 \vec{z}_3 \\ \dot{\lambda} \vec{z}_3 \end{array} \right\}_O$ . Il s'agit d'une liaison sphère-cylindre (linéaire annulaire) d'axe  $(O, \vec{z}_3)$ . En conséquences  $m_c = 4$ .

**Question 2** Dans le cadre des deux modélisations retenues, quels sont alors le degré d'hyperstatisme et la mobilité cinématique de la chaîne fermée. Compléter le tableau du document réponse concernant les implications du modèle retenu sur le robot et les interactions patient / robot. Quelle modélisation vous paraît la plus proche de la réa-

lité ? Argumenter votre réponse.

#### Correction

	Liaison linéaire annulaire	Liaison libre
$m_c =$	4	4
$h =$	$m - I_c + E_c = 4 - (4+4) + 6 = 2$	0 (Chaîne ouverte)
$h =$	$m - E_s + I_s = 4 - 24 + 22 = 2$	0 (Chaîne ouverte)
Efforts au point d'insertion*	Oui (à cause de l'hyperstatisme)	Non
Facilité de montage?*	Non (à cause de l'hyperstatisme)	Oui
Rigidité du robot*	Oui...	Oui...

\* : Remplir par oui ou non

Les réponses données dans le tableau sont qualitative et critiquable... L'hyperstatisme impose des contraintes dans la fabrication l'assemblage du robot qui peuvent se traduire par des efforts à «vaincre» lors de l'assemblage ou de la mise en position du robot.

Un système hyperstatique est réputé plus rigide qu'un système isostatique. Cependant, lorsqu'un système est isostatique, sans jeu et avec des frottements, on peut aussi le considérer comme étant rigide...

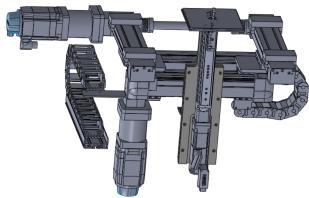
#### Retour sur le cahier des charges

**Question 3** Quelle exigence le mécanisme utilisé permet-il de satisfaire ? Expliquer en 2 lignes comment cette exigence est satisfaite.

#### Correction

La structure du robot permet de satisfaire l'exigence 1.3 : « Ne pas endommager l'abdomen du patient ». En effet, le fait que les axes des 3 pivots s'intersectent en un point permet d'avoir un seul point d'entrée de la pince dans l'abdomen. Ainsi, on diminue les risques de « blesser » davantage le patient lors de l'opération de la vésicule.

## TD 3 – Corrigé



## Système de dépose de poudre

Concours Centrale Supelec – TSI 2016

## Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

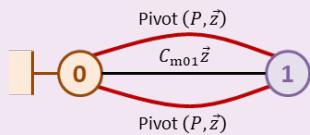
## Mise en situation

**Objectif** L'objectif de cette partie est de proposer un modèle du mécanisme constituant le déplacement de l'axe  $\vec{x}$  et de justifier certains choix technologiques.

## Travail demandé

**Question 1** Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison entre les solides 0 et 1.

## Correction



## Méthode cinématique :

- mobilité utile :  $m_u = 1$ ;
- mobilité interne :  $m_i = 0$ ;
- nombre de cycles :  $\gamma = 1$ ;
- nombre d'équations cinématiques :  $E_c = 6\gamma = 6$ ;
- nombres d'inconnues cinématiques :  $I_c = 2 \cdot 1 = 2$ .

Au final :  $h = m - I_c + E_c = 1 - 2 + 6 = 5$ .

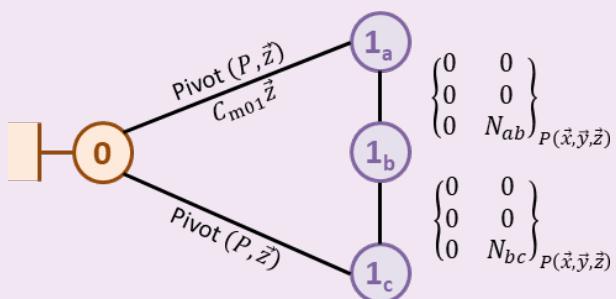
## Méthode statique

- mobilité utile :  $m_u = 1$ ;
- mobilité interne :  $m_i = 0$ ;
- nombre d'équations cinématiques :  $E_s = 6(p - 1) = 6(2 - 1) = 6$ ;
- nombres d'inconnues cinématiques :  $I_s = 2 \cdot 5 = 10$ .

Au final :  $h = m - E_s + I_s = 1 - 6 + 10 = 5$ .

**Question 2** Tracer le nouveau graphe de liaisons en tenant compte de l'introduction des deux soufflets métalliques.

## Correction



**Question 3** Déterminer en le justifiant le degré de mobilité du mécanisme ainsi modélisé en question précédente.

## Correction

En réalisant une fermeture cinématique, on a  $\{\mathcal{V}(1_a/0)\} + \{\mathcal{V}(1_b/1_a)\} + \{\mathcal{V}(1_c/1_b)\} = \{\mathcal{V}(1_c/0)\}$ . Les torseurs étant considérés écrits au même point  $P$ , on a :

$$\begin{cases} p_{ba} + p_{cb} = 0 \\ q_{ba} + q_{cb} = 0 \\ r_{a0} = r_{c0} \end{cases} \quad \begin{cases} v_{xba} + v_{xcb} = 0 \\ v_{yba} + v_{ycb} = 0 \\ v_{zba} + v_{zcb} = 0 \end{cases}.$$

Il s'agit d'un système de rang 6 avec 12 inconnues. On a donc  $m = I_c - r_c = 12 - 6 = 6$ .

**Question 4** En déduire le degré d'hyperstatisme du système avec ses deux soufflets métalliques.

## Correction

On a  $h = m - I_c + E_c = 6 - 12 + 6 = 0$ .

## Retour sur le cahier des charges

**Question 5** Conclure en justifiant l'utilisation des soufflets.

### Correction

Le soufflet permet donc de rendre le système isostatique. Il est ainsi possible de monter le système sans avoir à imposer des contraintes géométriques sur le mécanisme.