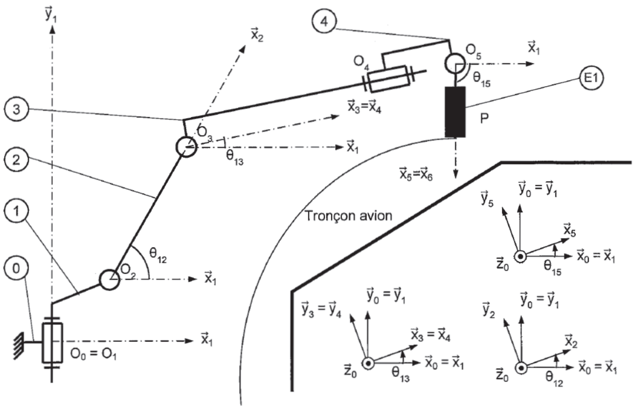
Exercice 1 – Robot avion ⋆⋆

C2-07

Objectif L'objectif est de déterminer le couple articulaire C_{12} à appliquer sur le bras 2 afin de garantir l'effort de perçage et l'effort presseur.



Hypothèses :

- l'étude est réalisée pour une demi couture orbitale (couture supérieure) ;
- le repère $\mathcal{R}_0\left(O_0;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ sera supposé galiléen ;
- $\overrightarrow{y_0}$ est l'axe vertical ascendant et $\overrightarrow{g}=-g\overrightarrow{y_0}$ avec $g=9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$;
- toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Repérage et paramétrage

Le repère associé à l'embase fixe (0) est le repère $\mathcal{R}_0\left(O_0;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$, $\overrightarrow{y_0}$ étant l'axe vertical ascendant.

L'embase de rotation (1), en liaison pivot d'axe $\left(O_1,\overrightarrow{y_1}\right)$, par rapport au bâti (0), a pour repère associé le repère $\mathcal{R}_1\left(O_1;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ tel que $O_0=O_1$, $\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_0}=\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_0}=\overrightarrow{z_1}$.

Le bras (2), en liaison pivot d'axe $\left(O_2,\overrightarrow{z_2}\right)$ par rapport à l'embase de rotation (1), a pour repère associé le repère $\mathcal{R}_2\left(O_2;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)$ tel que $\overrightarrow{O_1O_2}=L_1\overrightarrow{x_1}+L_2\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_1}=\overrightarrow{z_2}$ et $\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}\right)=\left(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2}\right)=\theta_{12}$.

Le bras (3), en liaison pivot d'axe $\left(O_3,\overrightarrow{z_3}\right)$ par rapport au bras (2), a pour repère associé le repère $\mathcal{R}_3\left(O_3;\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3}\right)$ tel que $\overrightarrow{O_2O_3}=L_3\overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{z_1}=\overrightarrow{z_3}$ et $\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_3}\right)=\left(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_3}\right)=\theta_{13}$.

Le bras (4), en liaison pivot d'axe $\left(O_4,\overrightarrow{x_4}\right)$ par rapport au bras (3), a pour repère associé le repère $\mathcal{R}_4\left(O_4;\overrightarrow{x_4},\overrightarrow{y_4},\overrightarrow{z_4}\right)$ tel que $\overrightarrow{O_3O_4}=L_4\overrightarrow{x_3}+l_5\overrightarrow{y_3}$, $\overrightarrow{x_3}=\overrightarrow{x_4}$ et $\left(\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{y_4}\right)=\left(\overrightarrow{z_3},\overrightarrow{z_4}\right)=\theta_{34}$.

L'ensemble (E1) composé du bras (5), du poignet et de l'outil, en liaison pivot d'axe $\left(O_5,\overrightarrow{z_5}\right)$ par rapport au bras (4), a pour repère associé le repère $\mathcal{R}_5\left(O_5;\overrightarrow{x_5},\overrightarrow{y_5},\overrightarrow{z_5}\right)$ tel que $\overrightarrow{O_4O_5}=L_5\overrightarrow{x_3}$, $\overrightarrow{z_1}=\overrightarrow{z_5}$ et $\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_5}\right)=\left(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_5}\right)=\theta_{15}$.

La masse du bras (2) est notée M_2 et la position du centre de gravité est définie par $\overrightarrow{O_2G_2}=\dfrac{1}{2}L_3\overrightarrow{x_2}$.

La masse du bras (3) et du bras (4) est notée M_{34} et la position du centre de gravité est définie par $\overrightarrow{O_3G_3}=\dfrac{1}{3}L_4\overrightarrow{x_3}+L_5\overrightarrow{y_3}$.

La masse de l'ensemble (E1) est notée M_{E1} et la position du centre de gravité est définie par $\overrightarrow{O_5G_5}=L_7\overrightarrow{x_5}$.

L'extrémité de l'outil est définie par le point P définie par $\overrightarrow{O_5P}=L_8\overrightarrow{x_5}$.

Le torseur d'action mécanique lié au perçage sera noté : $\left\{\mathcal{T}\left(\text{Tronçon (perçage)}\rightarrow E_1\right)\right\}=\left\{\begin{array}{cc}-F & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{array}\right\}_{P,\mathcal{R}_5}$.

Un effort presseur est de plus nécessaire pour le perçage optimal des deux tronçons. Le torseur d'action mécanique associé sera noté : $\left\{\mathcal{T}\left(\text{Tronçon (presseur)}\rightarrow E_1\right)\right\}=\left\{\begin{array}{cc}-P & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{array}\right\}_{P,\mathcal{R}_5}$.

Le torseur couple modélisant l'action du moteur sur la pièce **1** sur **2** : $\left\{\mathcal{T}(1_m\rightarrow 2)\right\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ C_{12}\overrightarrow{z_0}\end{array}\right\}_{\forall P}$.

La rotation entre les solides (0) et (1) est supposée bloquée dans la suite du sujet.

Question 1 *Réaliser le graphe de structure de l'ensemble en précisant les liaisons et les actions mécaniques extérieures.*

Question 2 *Quel est l'ensemble Σ à isoler afin de déterminer le couple C_{12}.*

Question 3 *Réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures appliquées à Σ et écrire les éléments de réduction de chaque torseur d'actions mécaniques.*

Question 4 *Quel théorème doit-être appliqué et sur quel axe de projection, pour déterminer le couple C_{12} ?*

La configuration correspondant à la position extrême supérieure de la couture orbitale correspond aux angles suivants : $\theta_{12}=60°$, $\theta_{13}=-4°$, $\theta_{15}=-90°$.

Dans la suite de l'étude, l'angle θ_{13} sera considéré nul.

Question 5 *Déterminer l'équation littérale du couple C_{12} en fonction de g, F, P, M_2, M_{34}, M_{E1}, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, θ_{12}, θ_{15}.*

Les valeurs du robot considéré sont :

- $M_2=264\,\text{kg}$, $M_{34}=430\,\text{kg}$, $M_{\text{E1}}=150\,\text{kg}$, $P=150\,\text{N}$, $F=1000\,\text{N}$;
- $L_1=0{,}405\,\text{m}$, $L_2=0{,}433\,\text{m}$, $L_3=1{,}075\,\text{m}$, $L_4=1{,}762\,\text{m}$, $L_5=0{,}165\,\text{m}$, $L_6=0{,}250\,\text{m}$, $L_7=0{,}550\,\text{m}$, $L_8=0{,}750\,\text{m}$.

Question 6 *Déterminer alors la valeur du couple C_{12}.*

La valeur limite supérieure du couple C_{12} est fixée par le constructeur à 9000 Nm.

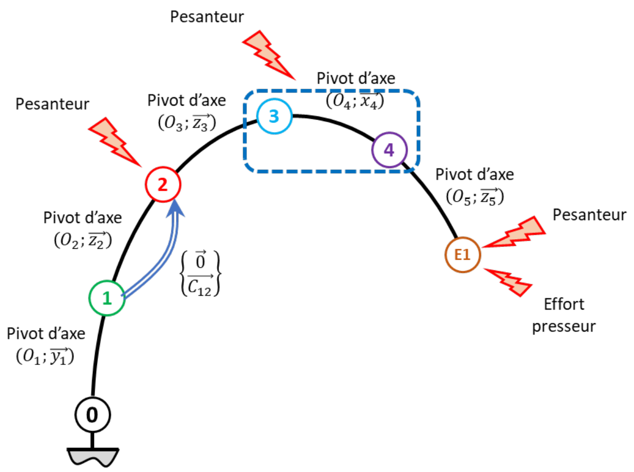
Question 7 *Le choix du robot permettra-t-il de garantir les conditions d'assemblage dans cette position ? Justifier la réponse.*

Corrigé voir 2.

Exercice 2 – Robot avion ★★

C2-07

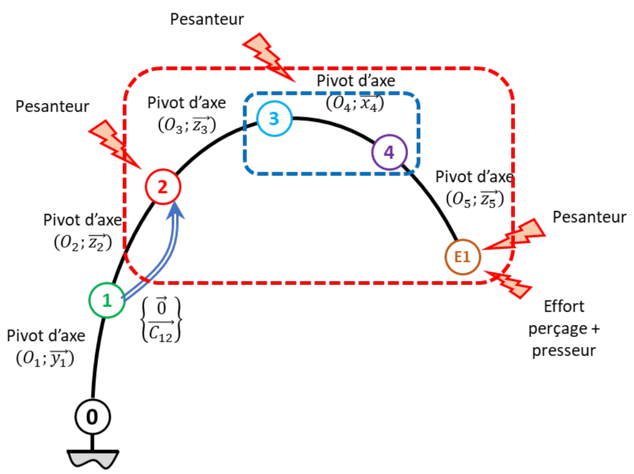
Question 1 *Réaliser le graphe de structure de l'ensemble en précisant les liaisons et les actions mécaniques extérieures.*



Question 2 *Quel est l'ensemble Σ à isoler afin de déterminer le couple C_{12}.*

En isolant l'ensemble $\Sigma = \{2+3+4+E_1\}$ on ne fera apparaître **QUE** C_{12} et les actions mécaniques extérieures. Les actions de liaison 2–3, 3–4, 4–E1 **n'interviendont pas**.

Question 3 *Réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures appliquées à Σ et écrire les éléments de réduction de chaque torseur d'actions mécaniques.*



Bilan des actions mécaniques :

- pivot 1–2 et couple moteur de 1 sur 2 ;
- pesanteur sur 2 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \to 2)\} = \left\{\begin{array}{c} -M_2\, g\, \overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_2}$. On a par ailleurs $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_2, \text{pes} \to 2)} = \overrightarrow{O_2G_2} \wedge -M_2\, g\, \overrightarrow{y_1} = \dfrac{1}{2} L_3 \overrightarrow{x_2} \wedge -M_2\, g\, \overrightarrow{y_1} = -\dfrac{1}{2} M_2\, g\, L_3 \cos\theta_{12}\, \overrightarrow{z_0}$;
- pesanteur sur 3 et 4 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \to 3+4)\} = \left\{\begin{array}{c} -M_{34}\, g\, \overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_3}$. On a par ailleurs $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_2, \text{pes} \to 3+4)} = \overrightarrow{O_2G_3} \wedge -M_{34}\, g\, \overrightarrow{y_1} = \left(L_3 \overrightarrow{x_2} + \dfrac{1}{3} L_4 \overrightarrow{x_3} + L_5 \overrightarrow{y_3}\right) \wedge -M_{34}\, g\, \overrightarrow{y_1} = -M_{34}\, g \left(L_3 \overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{y_1} + \dfrac{1}{3} L_4 \overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{y_1} + L_5 \overrightarrow{y_3} \wedge \overrightarrow{y_1}\right) = -M_{34}\, g \left(L_3 \cos\theta_{12} + \dfrac{1}{3} L\right.$
- pesanteur sur E_1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \to E1)\} = \left\{\begin{array}{c} -M_{E1}\, g\, \overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_{G_5}$. On a par ailleurs $\overrightarrow{\mathcal{M}(O_2, \text{pes} \to E1)} = \overrightarrow{O_2G_5} \wedge -M_{E1}\, g\, \overrightarrow{y_1}$;
$= -M_{E1}\, g \left(L_3 \overrightarrow{x_2} + L_4 \overrightarrow{x_3} + L_5 \overrightarrow{x_3} + l_5 \overrightarrow{y_3} + L_7 \overrightarrow{x_5}\right) \wedge \overrightarrow{y_1} = -M_{E1}\, g \left(L_3 \cos\theta_{12} + L_4 \cos\theta_{13} + L_5 \cos\theta_{13} - l_5 \sin\theta_{13} + L_7 \cos\theta_{15}\right) \overrightarrow{z_0}$;

- effort presseur + perçage $\left\{\mathscr{T}\left(\text{Tronçon} \rightarrow E_1\right)\right\} = \left\{ \begin{array}{cc} -F-P & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{P,\mathscr{R}_5}$. On a par ailleurs $\overrightarrow{\mathscr{M}\left(O_2, \text{Tronçon} \rightarrow E1\right)} =$ $\overrightarrow{O_2P} \wedge (-F-P)\overrightarrow{x_5} = \left(L_3\overrightarrow{x_2} + L_4\overrightarrow{x_3} + L_5\overrightarrow{x_3} + l_5\overrightarrow{y_3} + L_8\overrightarrow{x_5}\right) \wedge (-F-P)\overrightarrow{x_5} = -(F+P)\left(L_3\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{x_5} + L_4\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{x_5} + L_5\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{x_5} + l_5\overrightarrow{y_3} \wedge \overrightarrow{x_5}\right.$
$= -(F+P)\left(L_3\sin\left(\theta_{15} - \theta_{12}\right) + (L_4 + L_5)\sin\left(\theta_{15} - \theta_{13}\right) + l_5\sin\left(\theta_{15} - \theta_{13} - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)\overrightarrow{z_0}$.

Question 4 *Quel théorème doit-être appliqué et sur quel axe de projection, pour déterminer le couple C_{12} ?*

Pour ne pas faire apparaître les actions de la liaison 1–2 il faudra réaliser un théorème du moment statique en O_2 en projection sur $\overrightarrow{z_2}$ (la liaison pivot n'a pas de composante en ce point et sur cette projection).

On a donc : $-\dfrac{1}{2}M_2 g L_3\cos\theta_{12} - M_{34} g\left(L_3\cos\theta_{12} + \dfrac{1}{3}L_4\cos\theta_{12} - L_5\sin\theta_{13}\right) - M_{E1} g\left(L_3\cos\theta_{12} + L_4\cos\theta_{13} + L_5\cos\theta_{13} - l_5\sin\theta_{13} +\right.$
$(F+P)\left(L_3\sin\left(\theta_{15} - \theta_{12}\right) + (L_4 + L_5)\sin\left(\theta_{15} - \theta_{13}\right) + l_5\sin\left(\theta_{15} - \theta_{13} - \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 0.$

Question 5 *Déterminer l'équation littérale du couple C_{12} en fonction de g, F, P, M_2, M_{34}, M_{E1}, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, θ_{12}, θ_{15}.*

On a $C_{12} - \dfrac{1}{2}M_2 g L_3\cos\theta_{12} - M_{34} g\left(L_3\cos\theta_{12} + \dfrac{1}{3}L_4\cos\theta_{12}\right) - M_{E1} g\left(L_3\cos\theta_{12} + L_4 + L_5 + L_7\cos\theta_{15}\right) - (F+P)\left(L_3\sin\left(\theta_{15} - \theta\right.\right.$
0.

Les valeurs du robot considéré sont :

- $M_2 = 264\,\text{kg}$, $M_{34} = 430\,\text{kg}$, $M_{\text{E1}} = 150\,\text{kg}$, $P = 150\,\text{N}$, $F = 1000\,\text{N}$;
- $L_1 = 0{,}405\,\text{m}$, $L_2 = 0{,}433\,\text{m}$, $L_3 = 1{,}075\,\text{m}$, $L_4 = 1{,}762\,\text{m}$, $L_5 = 0{,}165\,\text{m}$, $L_6 = 0{,}250\,\text{m}$, $L_7 = 0{,}550\,\text{m}$, $L_8 = 0{,}750\,\text{m}$.

Question 6 *Déterminer alors la valeur du couple C_{12}.*

On a $C_{12} - \dfrac{1}{2}M_2 g L_3\cos\theta_{12} - M_{34} g\left(L_3\cos\theta_{12} + \dfrac{1}{3}L_4\cos\theta_{12}\right) - M_{E1} g\left(L_3\cos\theta_{12} + L_4 + L_5\right) - (F+P)\left(L_3\cos\left(\theta_{12}\right) - (L_4 + L_5)\right) =$
0. Soit $C_{12} - \dfrac{1}{4}M_2 g L_3 - M_{34} g\dfrac{1}{2}\left(L_3 + \dfrac{1}{3}L_4\right) - M_{E1} g\left(L_3\dfrac{1}{2} + L_4 + L_5\right) - (F+P)\left(L_3\dfrac{1}{2} - (L_4 + L_5)\right) = 0$. Au final $C_{12} =$
$\dfrac{1}{4}M_2 g L_3 + M_{34} g\dfrac{1}{2}\left(L_3 + \dfrac{1}{3}L_4\right) + M_{E1} g\left(L_3\dfrac{1}{2} + L_4 + L_5\right) + (F+P)\left(L_3\dfrac{1}{2} - (L_4 + L_5)\right)$.

La valeur limite supérieure du couple C_{12} est fixée par le constructeur à 9000 Nm.

Question 7 *Le choix du robot permettra-t-il de garantir les conditions d'assemblage dans cette position ? Justifier la réponse.*

$C_{12} = 7620\,\text{Nm}$. Compatible avec le cahier des charges.

Cycle 05