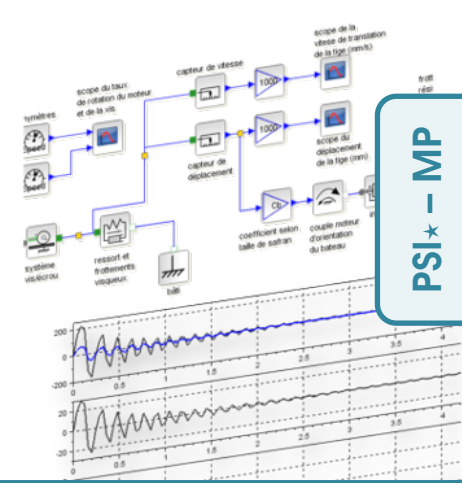


# Modéliser les systèmes asservis dans le but de prévoir leur comportement

Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur

PSI★ – MP



## Cours

### Chapitre 2 Rapidité des systèmes

*Savoirs et compétences :*

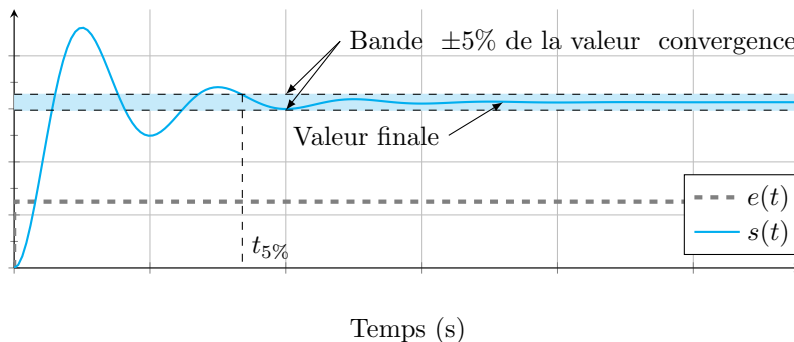
1	Rappel : critère de rapidité dans le domaine temporel	
2		
1.1	Temps de réponse à 5% . . . . .	2
1.2	Temps de montée . . . . .	2
2	Rapidité des systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2	2
2.1	Systèmes d'ordre 1 . . . . .	2
2.2	Systèmes d'ordre 2 . . . . .	3
3	Résultats dans le diagramme de Bode	3

## 1 Rappel : critère de rapidité dans le domaine temporel

### 1.1 Temps de réponse à 5%

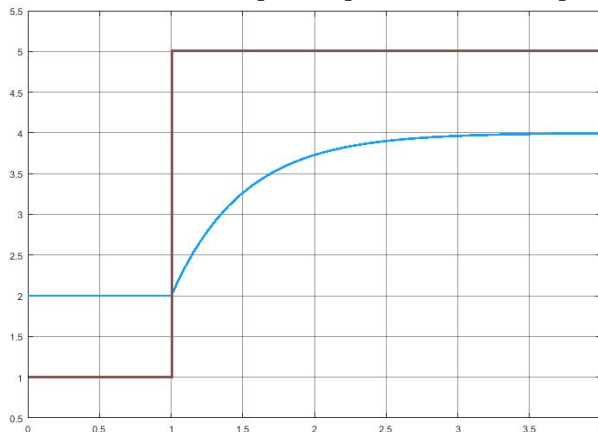
**Méthode** – Détermination du temps de réponse à  $n\%$  (En pratique  $n = 5$ ).

1. Tracer sur le même graphe la consigne  $e(t)$  et la réponse du système  $s(t)$ .
2. Tracer la droite correspondant à la valeur asymptotique de  $s(t)$ .
3. Tracer la bande correspondant à une variation de  $\pm n\%$  de la valeur asymptotique.
4. Relever la dernière valeur à partir de laquelle  $s(t)$  coupe la bande et n'en sort plus.



**Résultat** Plus le temps de réponse à 5% d'un système est petit, plus le régime transitoire disparaît rapidement.

■ **Exemple** Donner le temps de réponse à 5% de la réponse à un échelon donné dans la figure suivante.

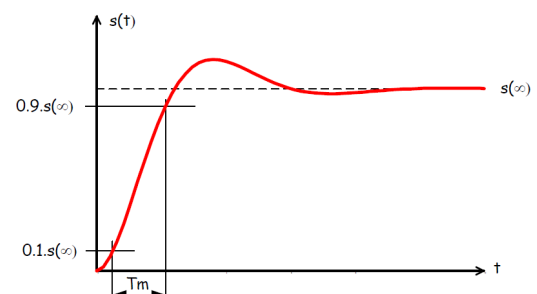


Les pièges du temps de réponse à 5% :

- le temps de réponse à 5% se mesure à plus ou moins 5% de la sortie (et pas de l'entrée). Ainsi, si le système est stable, le temps de réponse n'est **jamais l'infini** ;
- si le signal ne part pas de 0 (en ordonnée), il faut réaliser la bande à  $S_0 + \Delta s \pm 0.05\Delta s$  ;
- si le signal ne part pas de 0 (en abscisse), il faut tenir compte du décalage des temps.

### 1.2 Temps de montée

Pour caractériser la rapidité d'un système, on peut aussi utiliser le temps de montée. Il s'agit du temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur finale. Ce temps de montée caractérise la « vivacité » d'un système.



## 2 Rapidité des systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2

### 2.1 Systèmes d'ordre 1

Pour un système du premier ordre, le temps de réponse à 5% est donné par  $3\tau$ .

**Résultat** Pour un système du premier ordre, plus la constante de temps est petite, plus le système est rapide.

Soit un système du premier ordre bouclé avec un retour unitaire. L'expression de la FTBF est donnée par  $FTBF(p) = \frac{K}{1 + \tau p + K}$ . La constante de temps est alors  $\tau_{BF} = \frac{\tau}{1 + K}$ .

**Résultat** Pour un système du premier ordre bouclé (avec un retour unitaire), plus le gain statique est grand, plus le système est rapide.

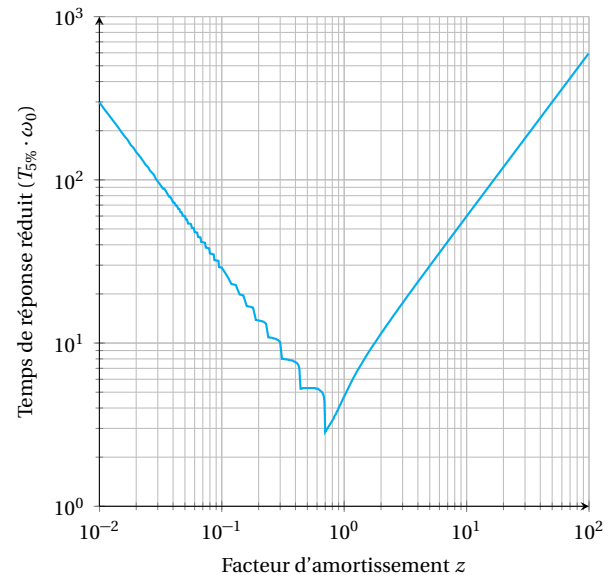
## 2.2 Systèmes d'ordre 2

**Résultat** Pour un système du second, à  $\xi$  constant, plus la pulsation propre est grande, plus le système est rapide.

Soit un système du deuxième ordre bouclé avec un retour unitaire. En déterminant les caractéristiques de la FTBF, on obtient  $K_{BF} = \frac{K}{1 + K}$ ,  $\omega_{BF} = \omega_0 \sqrt{1 + K}$ ,  $\xi_{BF} = \frac{\xi}{1 + K}$ .

**Résultat**

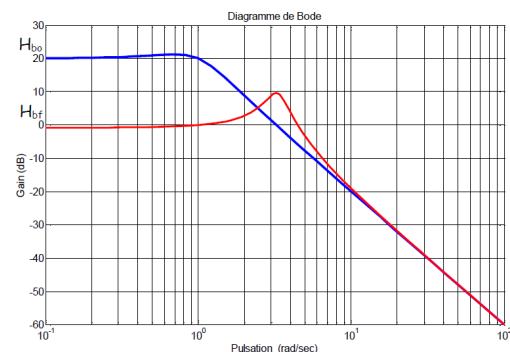
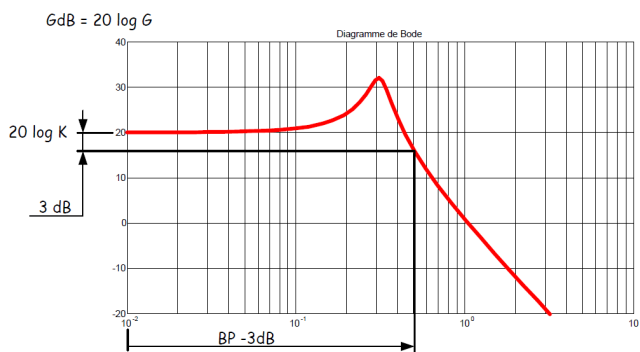
- L'augmentation du gain de FTBO augmente la pulsation de la FTBF.
- L'augmentation du gain de FTBO diminue le coefficient d'amortissement. Suivant la valeur de  $\xi_{BF}$  le système peut devenir plus ou moins rapide.



## 3 Résultats dans le diagramme de Bode

**Résultat** Plus la bande passante d'un système est élevée, plus le système est rapide.

**Résultat** Plus la pulsation de coupure à 0 dB de la boucle ouverte est grande, plus le système asservi est rapide.

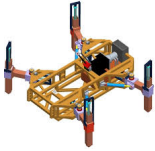


## Références

[1] Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année*, Lycée Dumont Durville, Toulon.

[2] Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI*, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

## TD 01



## Robot de consolidation de parois rocheuses Roboclimber

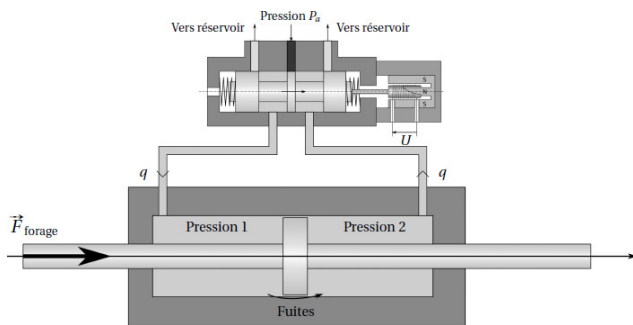
Mines Ponts PSI 2011 – Éditions Vuibert

## Savoirs et compétences :

## Mise en situation

Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au-dessus des routes ou des zones habitées. Il est issu d'un programme européen de recherche et est actuellement exploité par la société italienne d'ingénierie D'Appolonia.

L'objet de l'étude est de valider les performances de l'asservissement de position des pieds. Chaque pied est actionné par un vérin asservi en position. Le vérin est commandé par une servovalve, elle-même commandée en tension  $u$  par un correcteur. Lorsqu'une tension est appliquée à la servovalve, le tiroir se déplace, permettant au fluide sous pression de rejoindre une des chambres du vérin, tandis que l'autre chambre se vide vers le réservoir. Les quatre vérins ont pour fonction de mettre la plate-forme en position parallèle à la surface forée.



Ils doivent répondre au cahier des charges suivant :

- précision de la position des pieds : écart statique inférieur à 5% ;
- rapidité de l'asservissement :  $t_{5\%} = 0,15$  s ;
- stabilité : marge de phase de 45°, marge de gain de 10 dB ;
- sécurité du mouvement : aucun dépassement.

## Modélisation du comportement du vérin

Le comportement du vérin est régi par deux phénomènes : la dynamique de la tige du vérin et les flux de débits dans les chambres. **Données :**

- $S = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , surface utile des pistons ;
- $b = 10^9 \text{ Pa}$  : module de compressibilité du fluide utilisé ;
- $P_a = 150 \times 10^5 \text{ Pa}$  : pression d'alimentation de la servovalve ;

- $K = 1 \times 10^{-7} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1} \text{ Pa}^{-0.5}$  : constante de débit de la servovalve ;
- $\varphi = 1 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ Pa}^{-1}$  : facteur de fuite dans le vérin ;
- $q(t)$  : débit entrant et sortant du vérin ;
- $V_1$  et  $V_2$  : volumes des deux chambres du vérin (hypothèse :  $V_1 = V_2 = V = 6e - 4 \text{ m}^3$  ;
- $p(t) = p_1 - p_2$  : différence des pressions dans les chambres du vérin ;
- $z(t)$  : déplacement de la tige par rapport à la position d'équilibre ;
- $M = 700 \text{ kg}$  : masse équivalente pour chaque vérin, correspondant au quart de la masse totale du robot ;
- $k = 1 \times 10^5 \text{ Nm}^{-1}$  : raideur équivalente de la structure du robot ;
- $\mu = 100 \text{ N s m}^{-1}$  : coefficient de frottement visqueux dans le vérin ;
- $F_0 = 3000 \text{ N}$  : effort nominal sur le vérin ;
- $Z_0 = 50 \text{ cm}$  : position nominale du vérin.

Le vérin est soumis à l'effort de forage, aux efforts de pression de l'huile et à une force de frottement visqueux. Enfin, la rigidité de la structure du robot est modélisée par une raideur  $k$ .

L'équation de résultante du PFD, projetée sur l'axe  $\vec{z}$  du vérin, conduit à l'équation :

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dz(t)}{dt} - k(z(t) - Z_0) + Sp(t) - F_{\text{forage}}(t).$$

Le bilan de débit tient compte du déplacement de la tige du vérin évidemment, mais aussi du débit de fuite entre les deux chambres du vérin et de la compressibilité de l'huile. Il conduit à l'équation :

$$q(t) = S \frac{dz(t)}{dt} + \varphi p(t) + \frac{V}{2b} \frac{dp(t)}{dt}.$$

**Question 1** Identifier, dans les équations du PFD et de bilan de débit, les termes correspondant :

- l'inertie du robot ;
- à la raideur du robot ;
- au frottement visqueux ;
- à la pression dans la chambre ;
- à la compressibilité de l'huile ;
- au déplacement de la tige de vérin ;
- aux fuites entre les chambres.

**Question 2** En considérant une évolution au point de fonctionnement  $P_0$ ,  $F_0$  et  $Z_0$ , traduire l'équation d'équilibre

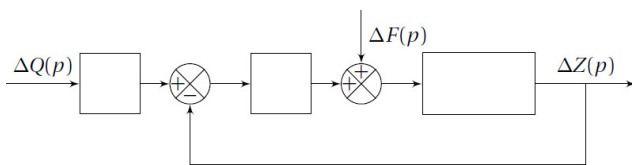
du vérin.

**Question 3** On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors  $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$ ,  $F_{\text{forç}(t)} = F_0 + \Delta F(t)$  et  $z(t) = Z_0 + \Delta z(t)$ . Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

**Question 4** En considérant une évolution au point de fonctionnement  $P_0$ ,  $Q_0$  et  $Z_0$ , traduire l'équation de bilan des débits.

**Question 5** On considère maintenant une petite variation autour du point de fonctionnement. On pose alors  $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$ . Traduire l'équation de comportement du vérin en fonction des petites variations.

**Question 6** À partir des équations obtenues, compléter le schéma-blocs traduisant son comportement.



### Modélisation du comportement de la servovalve

La servovalve permet de fournir le débit  $q(t)$  au vérin à partir d'une tension de commande  $u(t)$  appliquée en entrée : la tension  $u(t)$  est imposée aux bornes d'une bobine qui déplace le tiroir, permettant de distribuer l'énergie hydraulique. Elle est alimentée en entrée à une pression constante  $p_a$  et la sortie est à la pression relative nulle. Le débit dépend directement du déplacement du tiroir et donc de la tension  $u(t)$ , mais également de la différence de pression dans les chambres du vérin, par la relation non linéaire :  $q(t) = K u(t) \sqrt{p_a - p(t)}$ .

Afin d'implanter le comportement de la servovalve dans une modélisation linéaire, il est nécessaire de procéder à une linéarisation au voisinage d'un point de fonctionnement.

**Question 7** Déterminer la relation liant  $Q_0$ ,  $U_0$  et  $P_0$  au point de fonctionnement (en considérant qu'en ce point les variations de tension, pressions et débit sont nulles). Linéariser l'équation de comportement de la servovalve au voisinage du point de fonctionnement. On posera  $p(t) = P_0 + \Delta p(t)$ ,  $q(t) = Q_0 + \Delta q(t)$  et  $u(t) = U_0 + \Delta u(t)$ .

**Question 8** Compléter le schéma-blocs précédent pour modéliser l'ensemble servovalve et vérin, admettant en entrée la tension  $\Delta U(p)$  et la force  $\Delta F(p)$ , et en sortie la position  $\Delta Z(p)$ .

### Asservissement de position

Le vérin hydraulique est placé dans une boucle d'asservissement de position constituée de :

- la servovalve, qui fournit le débit  $q(t)$  au vérin à partir d'un signal de commande  $u(t)$ ;

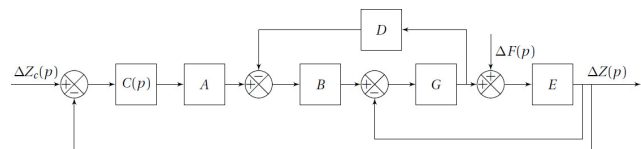
- un capteur de position de fonction de transfert  $k_c$ , qui fournit une tension  $\text{Im}(z(t))$  image de la position réelle  $z(t)$ ;
- un correcteur  $C(p)$  qui élabore la commande  $u(t)$  de la servovalve à partir de l'écart obtenu entre  $\text{Im}(z_c(t))$ , image de la consigne de position, et  $\text{Im}(z(t))$ .  $\text{Im}(z_c(t))$  est obtenue grâce à un adaptateur  $K_a$  situé à l'extérieur de la boucle d'asservissement.

**Question 9** Compléter le schéma-bloc de l'asservissement ébauché.

**Question 10** Préciser l'expression de l'adaptateur  $K_a$  pour que l'écart soit nul lorsque la réponse est égale à la consigne.

Le schéma-blocs obtenu est mis sous la forme du schéma où  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , et  $G$  sont utilisés pour simplifier les calculs.

**Question 11** À partir de modifications simples du schéma-bloc, déterminer la FTBO de l'asservissement en position du vérin selon les fonctions de transfert de la figure suivante. Exprimer la FTBF de l'asservissement en position du vérin en fonction de la FTBO.



### Validation des performances pour une correction unitaire $C(p) = 1$

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle fermée,  $0,975$

$$\text{FTBF}(p) = \frac{0,975}{1 + 3,38 \times 10^{-2}p + 1,78 \times 10^{-4}p^2 + 4,8 \times 10^{-6}p^3},$$
 ainsi que les valeurs numériques des pôles :  $p_{12} = -3,19 \pm 82,5j$  et  $p_3 = -30,4$  (en rad/s).

**Question 12** Le système est-il stable ? Est-il précis ?

**Question 13** À partir des pôles de la FTBF, déterminer le(s) pôle(s) dominant(s) et en déduire une valeur approchée du temps de réponse à 5%.

**Question 14** À partir des pôles de la FTBF, déterminer si le système est susceptible d'avoir des dépassements.

Le calcul sur Scilab a permis d'obtenir l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte,  $38,6$

$$\text{FTBO}(p) = \frac{38,6}{1 + 1,33 \times 10^{-2}p + 7,03 \times 10^{-3}p^2 + 1,9 \times 10^{-4}p^3},$$
 ainsi que les valeurs numériques des pôles :  $p_{12} = -18 \pm 81,6j$  et  $p_3 = -0,75$  (rad/s)

**Question 15** Déterminer la valeur de la pulsation propre et le facteur d'amortissement du deuxième ordre, puis tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO et l'allure des diagrammes réels. Déterminer les marges de gain et de phase du système corrigé par un gain unitaire.

## Optimisation du comportement : réduction des oscillations

La solution retenue pour atténuer la résonance est l'utilisation d'un filtre dit « réjecteur », de fonction de

$$\text{transfert : } C(p) = \frac{1 + \frac{2\xi_1}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2\xi_2}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \text{ avec } \xi_1 < \xi_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Question 16** Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain, asymptotique et réel de ce correcteur et expliquer son mode de fonctionnement.

On choisit de prendre  $\omega_0$  égal à la pulsation de résonance de la boucle ouverte et  $\xi_2 = 0,7$ .

**Question 17** Proposer une valeur pour le paramètre  $\xi_1$ . Le cahier des charges sera-t-il validé (aucun calcul n'est attendu pour cette question, hormis des applications numériques simples).

## Éléments de correction

1. ...

$$2. (Mp^2 + \mu p + k)\Delta Z(p) = S\Delta p(p) - \Delta F(p) \text{ et } \Delta Q(p) = Sp\Delta Z(p) + \left(\varphi + \frac{V}{2b}p\right)\Delta P(p).$$

3. ...

$$4. \Delta q = K\Delta U \sqrt{p_a - P_0} - \frac{KU_0}{2\sqrt{p_a - P_0}}\Delta p + \text{termes néglig.}$$

5. ...

6. ...

$$7. K_a = k_c.$$

$$8. \text{FTBO}(p) = \frac{ABC(p)GE}{1 + GDB + GE} \text{ et } \text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}.$$

9. ...

10. ...

11. ...

$$12. \omega_0 = 83,6 \text{ rad s}^{-1} \text{ et } \xi = 0,21, \omega_3 = 0,75 \text{ rad s}^{-1}.$$

13. ...

14. ...



## TD 02

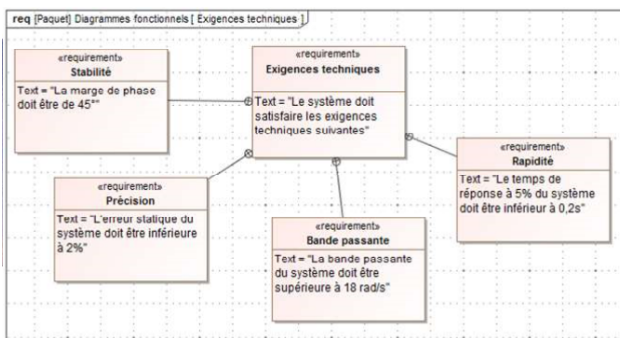


## Radar d'avion

F. Mathurin

## Savoirs et compétences :

Le support d'étude est un radar d'avion. Il permet au pilote de connaître la position des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...). L'objectif de cette étude est de vérifier les performances décrites dans l'extrait de cahier des charges de ce système.



On réalise un asservissement de position angulaire du radar d'avion : l'angle souhaité est  $\theta_c(t)$ , l'angle réel du radar est  $\theta_r(t)$ . La différence des deux angles est transformée en une tension  $u_m(t)$ , selon la loi  $u_m(t) = A(\theta_c - \theta_r(t))$ . La tension  $u_m(t)$  engendre, via un moteur de fonction de transfert  $H_m(p)$ , une vitesse angulaire  $\omega_m(t)$ . Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse, selon la relation  $\omega_r(t) = B\omega_m(t)$  ( $B < 1$ ),  $\omega_r(t)$  étant la vitesse angulaire du radar.

**Question 1** Réaliser le schéma-bloc du système.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes :

$$u_m(t) = e(t) + Ri(t) \quad e(t) = k_e \omega_m(t)$$

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) \quad c_m(t) = k_m i(t)$$

Avec :

- $u(t)$  : tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur) ;
- $e(t)$  : force contre-électromotrice (en V) ;
- $i(t)$  : intensité (en A) ;
- $\omega_m(t)$  : vitesse de rotation du moteur (en rad/s) ;
- $c_m(t)$  : couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner) ;
- $J$  : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en  $\text{kg.m}^2$ ) ;
- $R$  : résistance électrique du moteur ;

- $k_e$  : constante de force contre-électromotrice ;

- $k_m$  : constante de couple.

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert

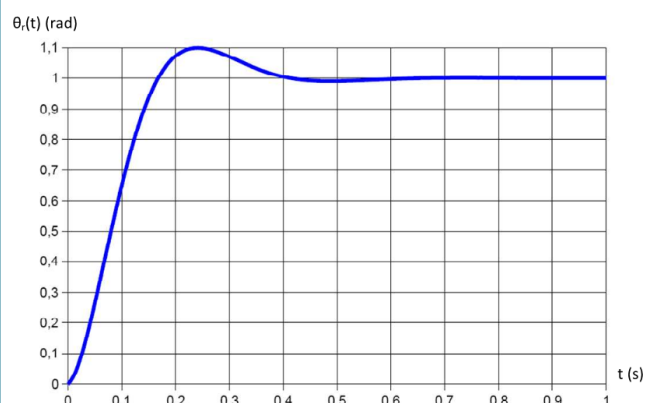
$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$$

**Question 3** Montrer que  $H_m(p)$  peut se mettre sous la forme canonique  $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$  et déterminer les valeurs littérales de  $K_m$  et  $T_m$ .

**Question 4** En considérant la réponse indicielle d'un système, préciser la valeur de  $\omega_m(t)$  à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de  $\omega_m(t)$  et la valeur finale atteinte par  $\omega_m(t)$  quand  $t$  tend vers l'infini.

**Question 5** Déterminer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$ . Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre dont on précisera les caractéristiques.

La réponse indicielle de  $H(p)$  à un échelon unitaire est donnée sur la figure suivante :



**Question 6** Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de  $K$ ,  $z$  et  $\omega_0$ .

Sans préjuger du résultat trouvé dans la question précédente, on prendra, pour la suite :  $K = 1$ ,  $z = 0,5$  et  $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$ .

**Question 7** Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du radar à vérifier le critère de rapidité du cahier des

charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un composant électronique (un correcteur) entre l'amplificateur et le moteur. La nouvelle fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + 0,05p)(1 + 0,0005p)(1 + 0,002p)}$$

**Question 8** Tracer le diagramme de Bode asymptotique (en gain et en phase) de cette fonction de transfert.

**Question 9** Déterminer  $G$  et  $\varphi$  pour  $\omega = 10$  rad/s.

**Question 10** Déterminer, en régime permanent,  $\theta_r(t)$  pour une entrée  $\theta_c(t) = 0,2 \sin(10t)$ .

Pour  $\omega < 20$  rad/s, on a  $H(p) \simeq \frac{1}{1 + 0,05p}$ .

**Question 11** Déterminer, sur cette approximation, la pulsation de coupure à  $-3$  dB. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de bande passante du cahier des charges.

**Question 12** Déterminer, sur cette approximation, le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant à la capacité du radar à satisfaire le critère de rapidité du cahier des charges.

