

# Concevoir la commande des systèmes asservis afin de valider leurs performances

Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur

PSI★ – MP

## Chapitre 2

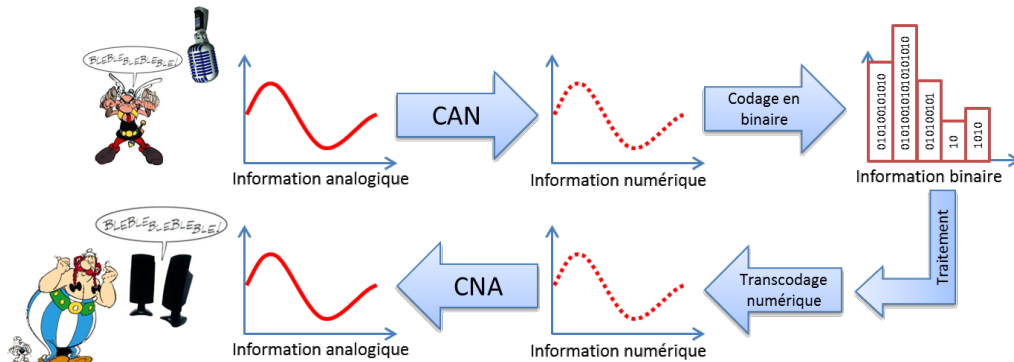
## Correction numérique des systèmes asservis

*Savoirs et compétences :*

<b>1</b>	<b>Rappels sur les caractéristiques des signaux numériques</b>	<b>2</b>
1.1	Echantillonnage et quantification . . . . .	2
1.2	Conversion analogique – numérique . . . . .	3
1.3	Conversion numérique – analogique . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Filtrage numérique</b>	<b>3</b>
2.1	Filtrage numérique passe-bas . . . . .	3
2.2	Filtrage numérique à moyenne glissante . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Correcteurs numériques</b>	<b>4</b>
3.1	Correcteur P . . . . .	4
3.2	Correcteur PI . . . . .	4
3.3	Correcteur PID . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Limite des correcteurs lors de la commande de systèmes</b>	<b>5</b>

# 1 Rappels sur les caractéristiques des signaux numériques

Lors du traitement des signaux par un ordinateur, un microcôntroleur, un automate ou autre dispositif, les signaux analogiques (continues) sont convertis en signaux numériques (discrets) pour être traités. On parle de conversion analogique – numérique (CAN). L'opération inverse est alors réalisée lorsqu'il est nécessaire de restituer de l'information à l'utilisateur.

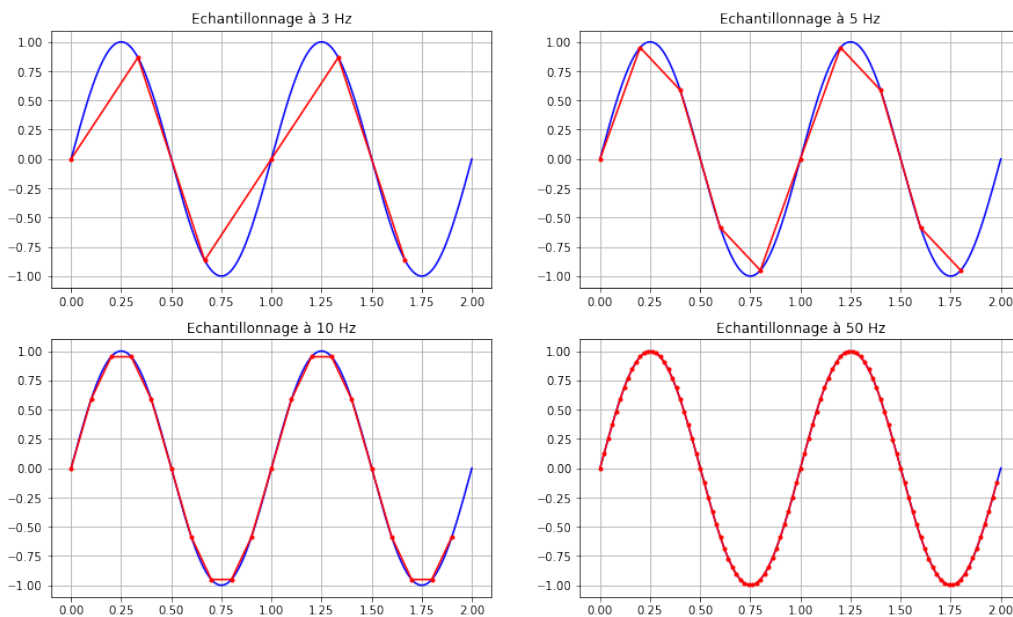


## 1.1 Échantillonnage et quantification

**Définition Échantillonnage** Échantillonner un signal consiste à prélever les valeurs de ce signal à intervalles définis. Si ces intervalles sont réguliers, on note  $T_e$  la période d'échantillonnage (en seconde), c'est-à-dire la durée entre deux prélèvements.

On note  $f_e = \frac{1}{T_e}$  la fréquence d'échantillonnage (en Hertz), c'est-à-dire le nombre d'échantillons par seconde.

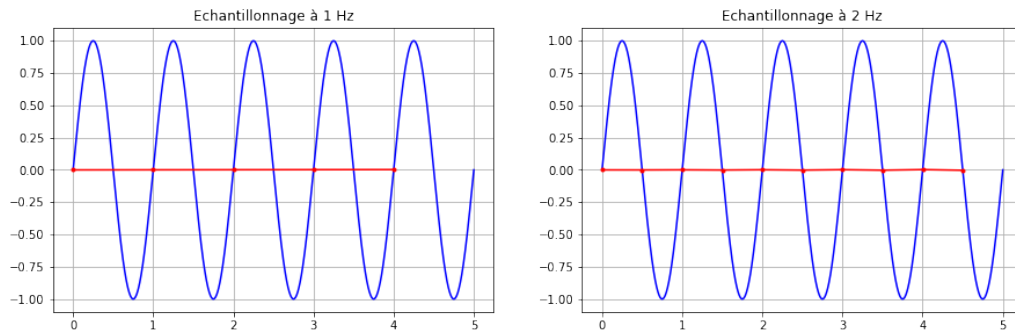
Si on note  $e(t)$  le signal continu, on notera  $e_k = e(k T_e)$  la valeur de l'échantillon  $e(t)$  à l'instant  $k T_e$ .



### Théorème Théorème de Shannon

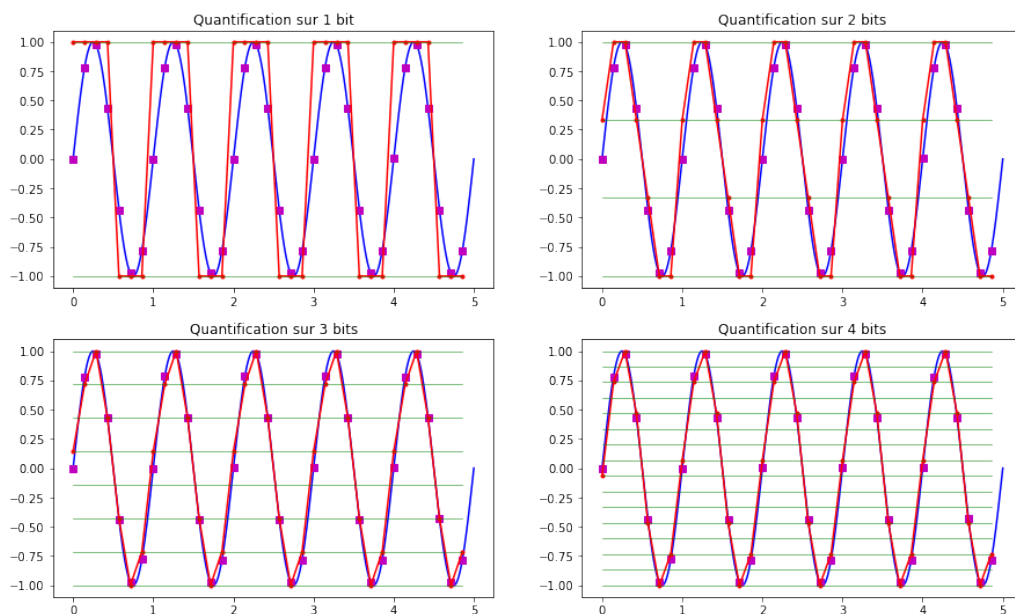
Soit un signal périodique décomposable en signaux périodiques dont la fréquence maximale présente est largement supérieure à celle minimale présente. La représentation discrète d'un signal par des échantillons régulièrement espacés exige une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale présente dans ce signal.

Dans le cas suivant, le signal est sinusoïdal de fréquence 1 Hz. Avec un échantillonnage de 1 Hz ou 2 Hz, on prélève le signal lorsqu'il est nul. Il est donc opportun de prendre une fréquence d'échantillonnage plus grande afin de ne pas perdre d'information.



**Définition Quantification** Quantifier un signal consiste à approcher un signal continu par les valeurs d'un ensemble discret. En général, le système étant échantillonné sur un système binaire sur  $N$  bits, on peut donc approcher le signal par  $2^N$  valeurs discrètes.

La figure ci-dessous illustre un signal échantillonné à 7 Hz. Il a ensuite été numérisé selon 4 niveaux de quantification. Plus le nombre de bits de codage est élevé, plus l'erreur entre signal numérisé et signal initial est faible.



**Définition Erreur de quantification** Soit un signal continu borné entre les valeurs  $e_{\min}$  et  $e_{\max}$  échantillonné sur  $N$  bits. Le pas de quantification donne aussi l'erreur maximale de quantification. On a  $q = \frac{e_{\max} - e_{\min}}{2^N}$ .

## 1.2 Conversion analogique – numérique

La conversion analogique consiste, lors de l'acquisition d'un signal, à échantillonner et numériser.

## 1.3 Conversion numérique – analogique

## 2 Filtrage numérique

### Définition Filtrage numérique

Soit  $e_k$  un signal discret. Soit  $s_k$  un signal discret filtré.  $k \in \mathbb{N}$  est le numéro de l'échantillon. On appelle filtrage numérique l'opération mathématique permettant de filtrer un signal, c'est-à-dire d'éliminer certaines composantes harmoniques.



## 2.1 Filtrage numérique passe-bas

### Définition Filtre passe-bas du premier ordre

On donne l'équation différentielle d'un filtre du premier ordre :  $s(t) + \tau \frac{d}{dt} [s(t)] = e(t)$ .  $T_e$  est la période d'échantillonnage du système. La pulsation de coupure à  $-3$  dB du filtre est donné par  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ .

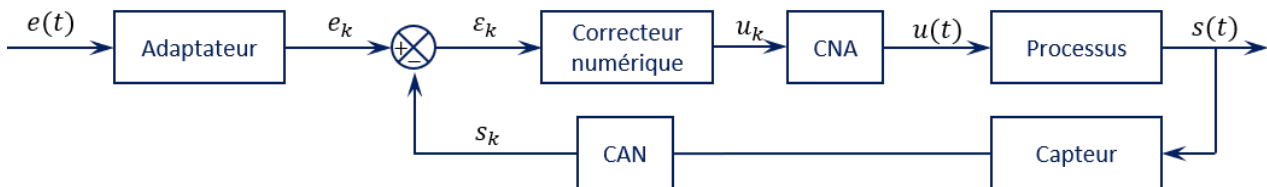
On montre que  $s_k = \frac{T_e}{T_e + \tau} e_k + \frac{\tau}{T_e + \tau} s_{k-1}$ .

**Démonstration** On a  $s(t) + \tau \frac{d}{dt} [s(t)] = e(t)$ . En approximant  $\frac{d}{dt} [s(t)]$  par  $\frac{s(t) - s(t - T_e)}{T_e}$ , puis en discrétisant l'équation différentielle, on a donc :  $s_k + \tau \frac{s_k - s_{k-1}}{T_e} = e_k \Leftrightarrow s_k \left(1 + \frac{\tau}{T_e}\right) - s_{k-1} \frac{\tau}{T_e} = e_k \Leftrightarrow s_k \frac{T_e + \tau}{T_e} = e_k + s_{k-1} \frac{\tau}{T_e}$   
 $\Leftrightarrow s_k = e_k \frac{T_e}{T_e + \tau} + s_{k-1} \frac{\tau}{T_e + \tau} \Leftrightarrow s_k = e_k \frac{T_e}{T_e + \tau} + s_{k-1} \frac{\tau}{T_e + \tau}$ .

## 2.2 Filtrage numérique à moyenne glissante

### 3 Correcteurs numériques

Les systèmes asservis utilisés sont en réalité le plus souvent numérique. Ainsi, le calcul de l'écart et la correction sont réalisés sous formes numériques par le microcontrôleur, la carte d'axe ou l'automate.



Ainsi le correcteur numérique va devoir synthétiser la commande numérique  $u_k$  en fonction de l'écart  $\varepsilon_k$ .

#### 3.1 Correcteur P

**Définition Correcteur proportionnel** Dans le domaine temporel, on a  $u(t) = K_p \varepsilon(t)$ . Cela est traduit par la relation de récurrence suivante :  $u_k = K_p \varepsilon_k$ .

#### 3.2 Correcteur PI

**Définition Correcteur proportionnel intégral** Dans le domaine temporel, on a  $u(t) = K_p \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)$ . Cela est traduit par la relation de récurrence suivante :  $u_k = u_{k-1} + K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - \varepsilon_{k-1} \right)$ .

**Démonstration** Pour déterminer la relation de récurrence, il faut calculer  $\int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$ . Pour cela, si on utilise la méthode des rectangles à droite, on a  $\int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \simeq \sum_{j=1}^k \varepsilon_j T_e$ ; donc  $u_k = K_p \left( \varepsilon_k + \frac{T_e}{T_i} \sum_{j=1}^k \varepsilon_j T_e \right)$ .

Par ailleurs, à l'instant  $k-1$ ,  $u_{k-1} = K_p \left( \varepsilon_{k-1} + \frac{T_e}{T_i} \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j \right)$

Cherchons une relation entre  $u_{k-1}$  et  $u_k$  :  $u_k = K_p \left( \varepsilon_k + \frac{T_e}{T_i} \sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j) + \frac{T_e}{T_i} \varepsilon_k \right)$

$= K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) + \frac{T_e}{T_i} \sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j) + \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_{k-1} \right)$

$= K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - \varepsilon_{k-1} \right) + K_p \left( \frac{T_e}{T_i} \sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j) + \varepsilon_{k-1} \right) = K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - \varepsilon_{k-1} \right) + u_{k-1}$ . CQFD.

#### 3.3 Correcteur PID

**Définition Correcteur proportionnel intégral et dérivé**

Dans le domaine temporel, on a  $u(t) = K_p \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)$ . Cela est traduit par la relation de récurrence suivante :  $u_k = u_{k-1} + K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{T_d}{T_e} \right) - \varepsilon_{k-1} \left( 1 + \frac{T_d}{T_e} \right) \right)$ .

**Démonstration** On a déjà vu que pour un correcteur PI,  $u_k = K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - \varepsilon_{k-1} \right) + u_{k-1}$ .

Par ailleurs,  $T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \simeq T_d \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{T_e}$ . On a donc  $u_k = K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - \varepsilon_{k-1} \right) + u_{k-1} + K_p T_d \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{T_e}$

$= K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - \varepsilon_{k-1} + T_d \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{T_e} \right) + u_{k-1}$

$$= K_p \left( \varepsilon_k \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{T_d}{T_e} \right) - \varepsilon_{k-1} \left( 1 + \frac{T_d}{T_e} \right) \right) + u_{k-1}$$

#### 4 Limite des correcteurs lors de la commande de systèmes Références