

TD 03 – Corrigé



Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec TSI 2017

Savoirs et compétences :



Mise en situation

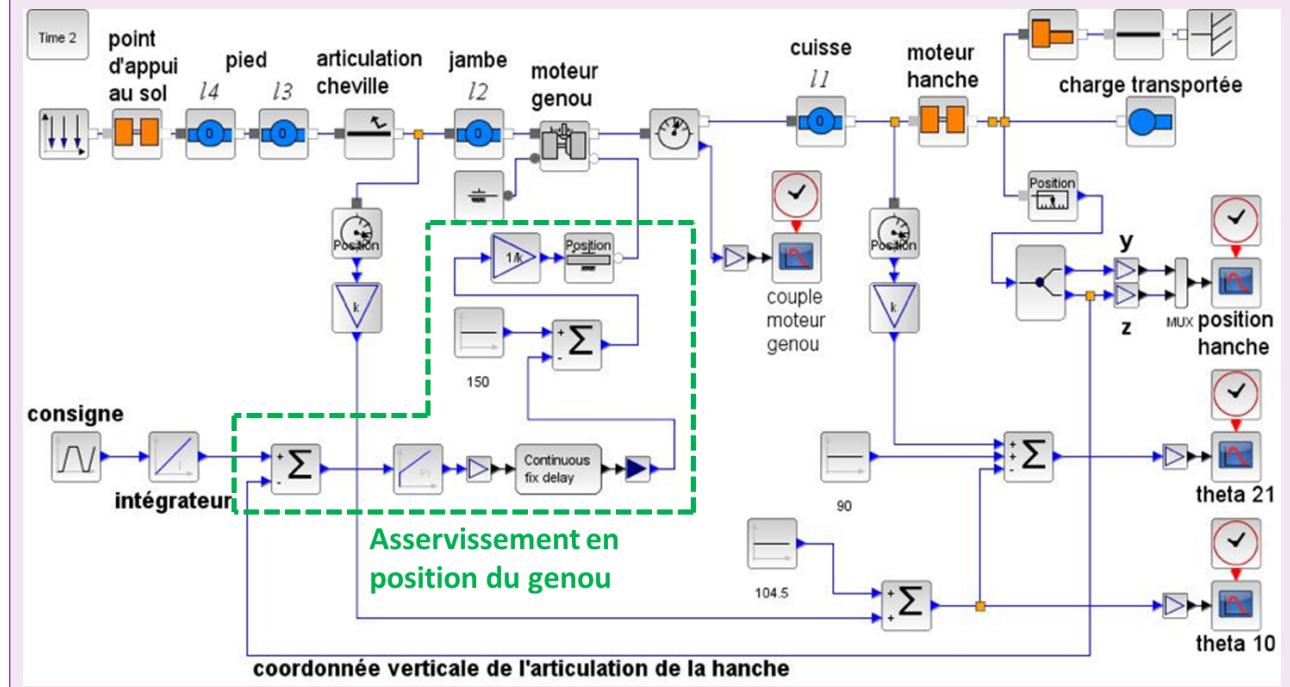
Gestion du mouvement vertical

Objectif Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Question 1 Déterminer la grandeur physique de la consigne et la grandeur physique asservie à partir du modèle multiphysique présenté plus bas et préciser leurs unités de base dans le système international d'unités (SI).

Correction

Il s'agit d'un asservissement en position.



Question 2 Exprimer $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$ en fonction de J , K_2 et p .

Correction En faisant l'hypothèse que le couple perturbateur est nul, on a : $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} = \frac{C_\Omega(p)M_C(p)}{1 + C_\Omega(p)M_C(p)} \frac{1}{Jp + f}$.

En conséquences : $H_\Omega(p) = \frac{K_2}{Jp + K_2} = \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1}$.

Question 3 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, $H_\Omega(p)$, K_1 et p .

Correction D'une part, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$. D'autre part, $\theta_m(p) = H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \varepsilon(p)$. Par suite, $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \varepsilon(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p) \left(1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p} \right) = \theta_{mC}(p)$. En conséquences, $\varepsilon(p) = \frac{\theta_{mC}(p)}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}}$.

Question 4 Déterminer l'erreur de position ε_p puis l'erreur de traînage ε_v . Conclure sur la valeur de K_1 pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

Correction On a :

- $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{K_1}{p}} = 0$ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1) ;

- $\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \frac{1}{K_1}$ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1 et de gain K_1 en BO).

Ainsi, pour avoir une erreur de traînage inférieure à 1%, il faut $\frac{1}{K_1} < 0,01$ et $K_1 > 100$.

Question 5 Déterminer l'erreur en accélération et conclure quant au respect du cahier des charges.

Correction En raisonnant de même, on a : $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + H_\Omega(p) \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} \frac{K_1}{p}} \frac{1}{p^2} = 0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + \frac{1}{\frac{Jp}{CK_2} + 1} K_1} = \infty$ (ce qui était prévisible pour un système de classe 1).
Ainsi, le correcteur choisi ne permet pas de vérifier le cahier des charges.

Question 6 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_{mC}(p)$, T , K_1 , K_3 et p .

Correction En utilisant le schéma-blocs, on a :

- $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \theta_m(p)$;
- $\Omega_{mC}(p) = K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)$;
- $\theta_m(p) = \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp}$.

On a donc : $\varepsilon(p) = \theta_{mC}(p) - \Omega_{mC}(p) \frac{1}{p} \frac{1}{1 + Tp} = \theta_{mC}(p) - (K_3 p \theta_{mC}(p) + K_1 \varepsilon(p)) \frac{1}{p(1 + Tp)} = \theta_{mC}(p) - \frac{K_3 p}{p(1 + Tp)} \theta_{mC}(p) - \frac{K_1}{p(1 + Tp)} \varepsilon(p)$.

On a alors $\varepsilon(p) \left(1 + \frac{K_1}{p(1 + Tp)} \right) = \theta_{mC}(p) \left(1 - \frac{K_3}{1 + Tp} \right)$
 $\Leftrightarrow \varepsilon(p) \frac{p(1 + Tp) + K_1}{p(1 + Tp)} = \theta_{mC}(p) \frac{1 + Tp - K_3}{1 + Tp}$.

$$\text{Enfin, } \varepsilon(p) = \theta_{mc}(p) \frac{p(1+Tp - K_3)}{p(1+Tp) + K_1}.$$

Le second modèle avec anticipation de la figure précédente n'a pas d'incidence sur la valeur de l'erreur de position.

Question 7 Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de K_3 permettant l'annuler cette erreur.

Correction $\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1+Tp - K_3)}{p(1+Tp) + K_1} \frac{1}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+Tp - K_3)}{p(1+Tp) + K_1} = \frac{1-K_3}{K_1}.$

Au final, pour annuler l'erreur de traînage, on doit avoir $K_3 = 1$.

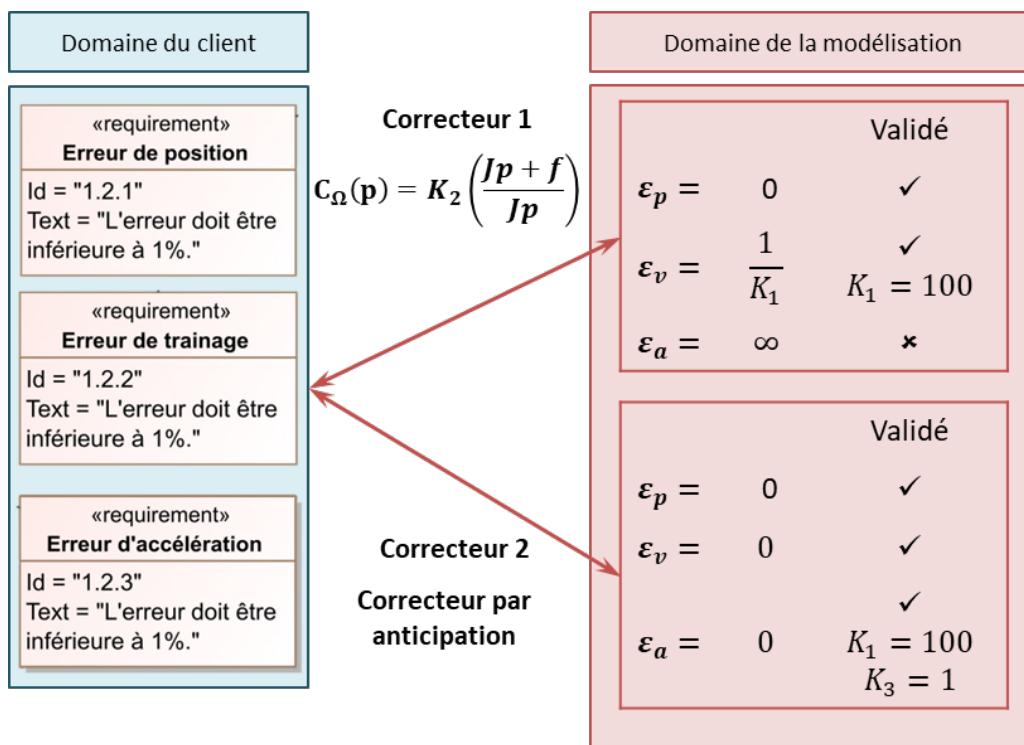
Question 8 Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération en prenant les valeurs de K_3 et de K_1 déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

On a :

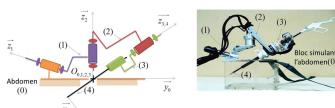
Correction $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p(1+Tp - K_3)}{p(1+Tp) + K_1} \frac{1}{p^3} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1+Tp - K_3)}{p(1+Tp) + K_1} \frac{1}{p}.$ En prenant $K_3 = 1$ et $K_1 = 100$, on obtient : $\varepsilon_a = \frac{T}{33 \times 10^{-3}} = \frac{1}{100}$. L'erreur est donc de 33×10^{-5} . Le cahier des charges est donc validé.

Synthèse

Question 9 En utilisant la figure ci-dessous, conclure sur les actions qui ont mené à une validation du cahier des charges.



Colle 01 – Corrigé



Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique

Mines Ponts 2016

Savoirs et compétences :

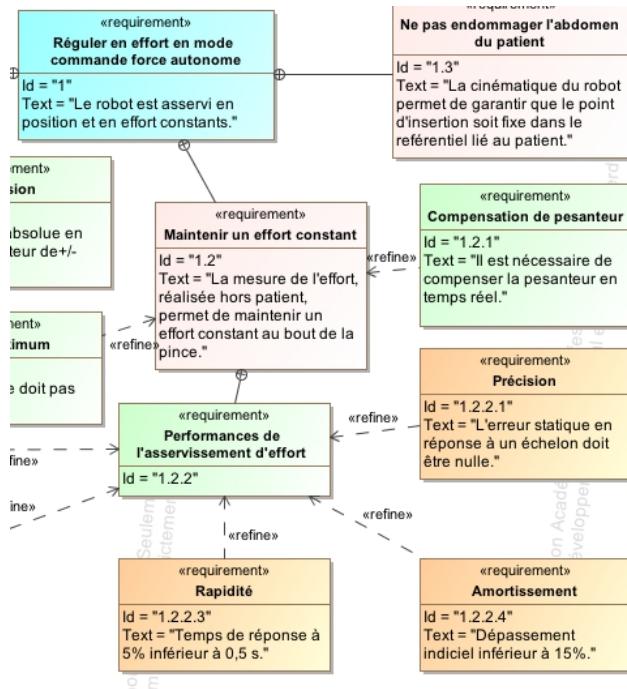


1 Micromanipulateur compact pour la chirurgie endoscopique (MC²E)

1.1 Présentation générale

L'objet de cette étude est un robot appelé MC²E utilisé en chirurgie endoscopique. Ce type de robots médico-chirurgicaux est équipé de capteurs (caméra, capteur d'efforts...) permettant de maîtriser les interactions avec des environnements souvent déformables et difficilement modélisables comme le corps humain.

La figure suivante décrit les principales exigences auxquelles est soumis le MC²E.



1.2 Validation des performances de l'asservissement d'effort

Modèle de connaissance de l'asservissement

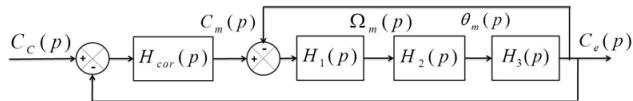
Objectif Modéliser l'asservissement en effort.

L'équation de mouvement est définie par l'équation différentielle suivante : $J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = C_m(t) - C_e(t)$ avec :

- J , inertie équivalente à l'ensemble en mouvement, ramenée sur l'arbre moteur;

- $C_e(t)$, couple regroupant l'ensemble des couples extérieurs ramenés à l'arbre moteur, notamment fonction de la raideur du ressort.

On notera $\theta_m(p)$, $\Omega_m(p)$, $C_m(p)$ et $C_e(p)$ les transformées de Laplace des grandeurs de l'équation de mouvement. On pose $C_e(t) = K_{C\theta} \theta_m(t)$ où $K_{C\theta}$ est une constante positive. On a de plus $\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$. La régulation se met alors sous la forme du schéma-blocs à retour unitaire simplifié que l'on admettra :



Modèle simplifié du montage du capteur d'effort.

Avec :

- $C_e(p)$, couple de sortie mesuré par le capteur d'effort situé sur le MC²E;
- $C_c(p)$, couple de consigne;
- $C_m(p)$, couple moteur;
- $H_{cor}(p)$, fonction de transfert du correcteur.

Dans un premier temps, on prendra $H_{cor}(p) = 1$.

Question 1 Déterminer les expressions des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$.

Correction

Question 2 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ de l'asservissement d'effort.

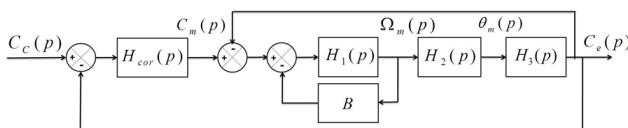
Correction

Question 3 Quel sera le comportement de cet asservissement en réponse à un échelon d'amplitude C_0 ? Conclure.

Correction

Pour remédier au problème ainsi mis en évidence, le concepteur a choisi de mettre en place une boucle interne numérique, dite tachymétrique, de gain B . On s'intéresse

ici à la définition analytique de B . Le schéma-blocs modifié est donné figure suivante.



Régulation avec retour tachymétrique

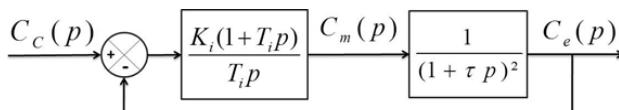
On règle B de telle façon que, pour $H_{cor}(p) = 1$, la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $H_{BO}(p)$, puisse être mise sous la forme suivante : $H_{BO}(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$.

Question 4 Donner l'expression analytique du gain B , en fonction de J et $K_{C\theta}$, permettant d'obtenir cette forme de fonction de transfert. En déduire l'expression analytique de la constante de temps τ .

Correction

Les exigences du cahier des charges sont données plus haut (exigences 1.2.2.1, 1.2.2.3 et 1.2.2.4).

Afin de répondre à ces exigences, on choisit un correcteur proportionnel-intégral de gain K_i et de constante de temps T_i . Le schéma-blocs de la régulation se met sous la forme de la figure qui suit.



Régulation avec correcteur PI.

Question 5 Donner l'expression de l'erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude C_0 . Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

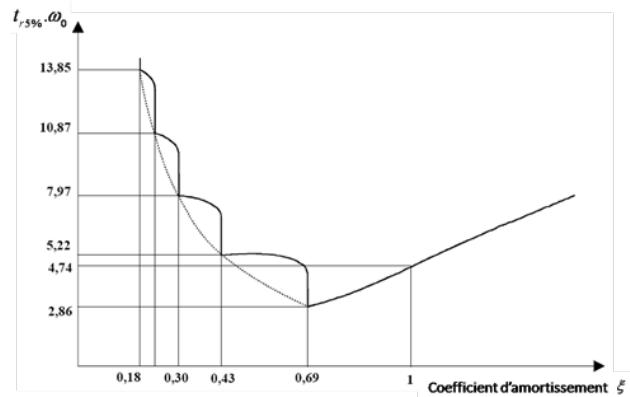
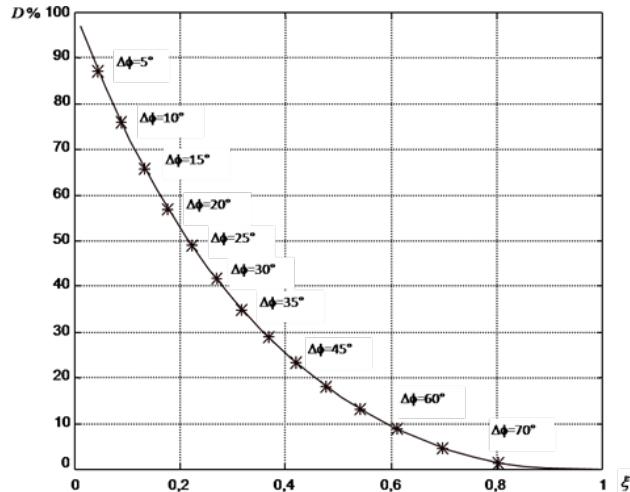
Correction

On souhaite régler le correcteur pour que le système asservi ait une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2 de la forme : $\frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$.

Question 6 Proposer une expression simple pour la constante de temps T_i .

Correction

Question 7 À partir des courbes suivantes, proposer une valeur de coefficient d'amortissement et de pulsation propre.



On donne $K_i = 1$.

Question 8 Les critères de performance du cahier des chartes sont-ils respectés ? Tracer l'allure de la réponse temporelle à un échelon C_{e0} en indiquant toutes les valeurs caractéristiques nécessaires.

Correction

Diagrammes de Bode

On prend $K_i = 0,4$, $T_i = 0,01$ s et $\tau = 0,5$ s.

Question 9 Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert $G(p) = \frac{K_i (1 + T_i p)}{T_i p (1 + \tau p^2)}$.

Question 2.

D'après l'équation de mouvement, $Jp\Omega_m(p) = C_m(p) - C_e(p)$. On a donc $H_1(p) = \frac{1}{Jp}$. 2

On a $p\theta_m(p) = \Omega_m(p)$; donc $H_2(p) = \frac{1}{p}$. 2

Enfin, $C_e(p) = K_{C\theta}\theta_m(p)$ et donc $H_3(p) = K_{C\theta}$. 1

Question 3.

On a dans un premier temps $\frac{C_e(p)}{C_m(p)} = F(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{1}{Jp}K_{C\theta}}{1+\frac{1}{Jp}K_{C\theta}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}$.

Dans un second temps, $H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}H_{cor}(p)}{1+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2+K_{C\theta}}H_{cor}(p)} = \frac{K_{C\theta}H_{cor}(p)}{Jp^2+K_{C\theta}+K_{C\theta}H_{cor}(p)}$.

Avec $H_{cor}(p) = 1$: $H_{BF}(p) = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+2K_{C\theta}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{J}{2K_{C\theta}}p^2+1}$. 5

Question 4.

On peut mettre la fonction précédente sous forme canonique. On a : $H_{BF}(p) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{Jp^2}{2K_{C\theta}}+1}$. Il s'agit d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement nul. On a alors un oscillateur harmonique et la réponse du système à un échelon d'amplitude C_0 est une sinusoïde (d'amplitude C_0 et de moyenne $\frac{C_0}{2}$). 3

Un mouvement sinusoïdal est sûrement incompatible avec l'asservissement d'un axe sur un robot chirurgical. 2

Question 5.

On a $H_{BO}(p) = \frac{\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B}H_2(p)H_3(p)}{1+\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)B}H_2(p)H_3(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)B+H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1+\frac{B}{Jp}+\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} = \frac{K_{C\theta}}{Jp^2+pB+K_{C\theta}} = \frac{1}{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}+\frac{pB}{K_{C\theta}}+1}$.

Par ailleurs, $(1+tp)^2 = 1 + \tau^2 p^2 + 2\tau p$. 3

En identifiant, $\tau^2 = \frac{J}{K_{C\theta}}$ et $2\tau = \frac{B}{K_{C\theta}}$. On a donc $B = 2\tau K_{C\theta} = 2K_{C\theta} \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}} = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$ et $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$. 2

Question 6.

On a : $\varepsilon(p) = \frac{C_e(p)}{1+FTBO(p)} = \frac{C_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+tp)^2}}$. En conséquences, $\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{C_0}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+tp)^2}} =$

$\lim_{p \rightarrow 0} C_0 \cdot \frac{1}{1+\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+tp)^2}} = 0$ Nm. 3 L'exigence 1.2.2.1 est vérifiée. 2

Question 7.

On a $\frac{\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+tp)^2}}{1+\frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+tp)^2}} = \frac{K_i(1+T_i p)}{T_i p(1+tp)^2 + K_i(1+T_i p)}$. Avec $T_i = \tau$, on a $\frac{K_i}{tp(1+tp)+K_i}$. La FTBF est bien d'ordre 2. 5



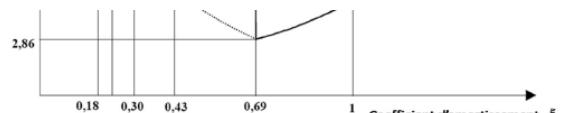
Pour avoir $D\% \leq 15\%$ il faut $\xi \geq 0,5$

Cependant, on trouve sur ce diagramme qu'il faut avoir $\xi \geq 0,8$ pour avoir une marge de phase de 70° .

Si on souhaite obtenir le temps de réponse à 5% le plus rapide, comme $\xi \geq 0,8 > 0,7$, il faut prendre ξ le plus faible

possible. Cela impose $\xi = 0,8$ et comme $\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_i}}$ on a

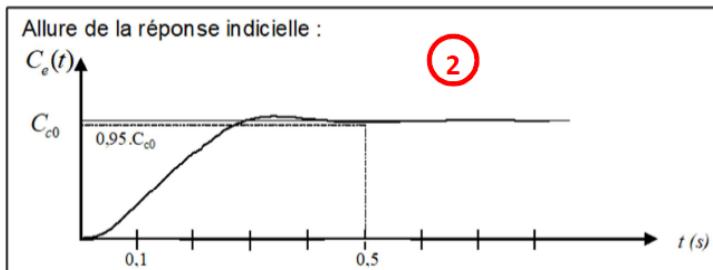
alors $K_i = \frac{1}{4\xi^2} = 0,4$.



Pour $\xi = 0,8$, la lecture de l'abaque donne donc $t_{R5\%} \cdot \omega_0 \geq 3,5$ et avec $t_{R5\%} \leq 0,5s$ on a $\omega_0 \geq 7 \text{ rad/s}$

Question 9.

| Critère | Valeur |
|---|--|
| Dépassement | 2% 1 |
| Tr5% | <0,5 s 1 |
| Erreur statique en réponse à un échelon | 0 1 |



Colle 03 –
Corrigé

Tour en fosse utilisé pour le reprofilage des roues ferro-viaires – Asservissement du porte-outil

Concours Centrale Supelec – PSI 2018

Savoirs et compétences :



Modélisation du mouvement pour la commande

Question 1 Exprimer les fonctions $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$ en fonction de K , λ , m_1 et m_2 .

Correction D'après le schéma-blocs $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p))$. D'après la première équation différentielle, on a : $m_1p^2Z_1(p) + \lambda pZ_1(p) + KZ_1(p) = \lambda pZ_2(p) + KZ_2(p) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p)(m_1p^2 + \lambda p + K) = Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p) \Leftrightarrow Z_1(p) = \frac{Z_2(p)(\lambda p + K) + F_m(p)}{m_1p^2 + \lambda p + K}$. On a donc par identification $H_2(p) = \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K}$ et $H_1(p) = \lambda p + K$.

D'après le schéma-blocs $Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p))$. D'après la seconde équation différentielle, $m_2p^2Z_2(p) + \lambda pZ_2(p) + KZ_2(p) = \lambda pZ_1(p) + KZ_1(p) + F_c(p) \Leftrightarrow Z_2(p)(m_2p^2 + \lambda p + K) = Z_1(p)(\lambda p + K) + F_c(p) \Leftrightarrow Z_2(p) = \frac{Z_1(p)(\lambda p + K) + F_c(p)}{m_2p^2 + \lambda p + K}$. On a donc par identification $H_4(p) = \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$ et $H_3(p) = \lambda p + K$.

Au final,

$$H_1(p) = \lambda p + K \quad H_2(p) = \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K} \quad H_3(p) = \lambda p + K \quad H_4(p) = \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}$$

Question 2 Exprimer $N_1(p)$ et $N_2(p)$ en fonction de $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$.

Correction En utilisant le premier modèle, on avait : $\begin{cases} Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)Z_2(p)) \\ Z_2(p) = H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)) \end{cases}$.

Ainsi, $Z_1(p) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)(H_4(p)(F_c(p) + H_3(p)Z_1(p)))) = H_2(p)F_m(p) + H_1(p)H_2(p)H_4(p)F_c(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)Z_1(p) \Leftrightarrow Z_1(p)(1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)) = H_2(p)(F_m(p) + H_1(p)H_4(p)F_c(p))$.

En utilisant le schéma-blocs, $Z_1(p) = (F_c(p)N_1(p) + F_m(p))N_2(p)$. Par identification, on obtient $N_1(p) = H_1(p)H_4(p)$ et $N_2(p) = \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$.

Question 3 Montrer que $N_2(p)$ peut s'écrire sous la forme $N_2(p) = A \frac{p^2 + 2\xi_1\omega_1p + \omega_1^2}{p^2(p^2 + 2\xi_2\omega_2p + \omega_2^2)}$. Exprimer ξ_1 , ξ_2 , ω_1 , ω_2 et A en fonction de m_1 , m_2 , λ et K .

Correction $N_2(p) = \frac{H_2(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)} = \frac{\frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K}}{1 - (\lambda p + K) \frac{1}{m_1p^2 + \lambda p + K} (\lambda p + K) \frac{1}{m_2p^2 + \lambda p + K}} = \frac{1}{(m_1p^2 + \lambda p + K) - \frac{(\lambda p + K)^2}{m_2p^2 + \lambda p + K}} = \frac{m_2p^2 + \lambda p + K}{(m_1p^2 + \lambda p + K)(m_2p^2 + \lambda p + K) - (\lambda p + K)^2} = \frac{m_2p^2 + \lambda p + K}{m_2m_1p^4 + \lambda m_1p^3 + Km_1p^2 + \lambda m_2p^3 + \lambda^2p^2 + \lambda pK + Km_2p^2 + K\lambda p + K^2 - \lambda^2p^2 - K^2 - 2\lambda pK}$

$$= \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{m_2 m_1 p^4 + \lambda m_1 p^3 + K m_1 p^2 + \lambda m_2 p^3 + K m_2 p^2} = \frac{m_2 p^2 + \lambda p + K}{p^2 (m_1 m_2 p^2 + (m_1 + m_2) \lambda p + K (m_1 + m_2))}$$

$$= \frac{m_2 \left(p^2 + \frac{\lambda}{m_2} p + \frac{K}{m_2} \right)}{p^2 m_1 m_2 \left(p^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \lambda p + K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)}.$$

Par identification, on a : $A = \frac{1}{m_1}$, $\omega_1^2 = \frac{K}{m_2}$, $2\xi_1\omega_1 = \frac{\lambda}{m_2}$ et $\xi_1 = \frac{\lambda}{2\omega_1 m_2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{K m_2}} =, \omega_2^2 = K \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$,

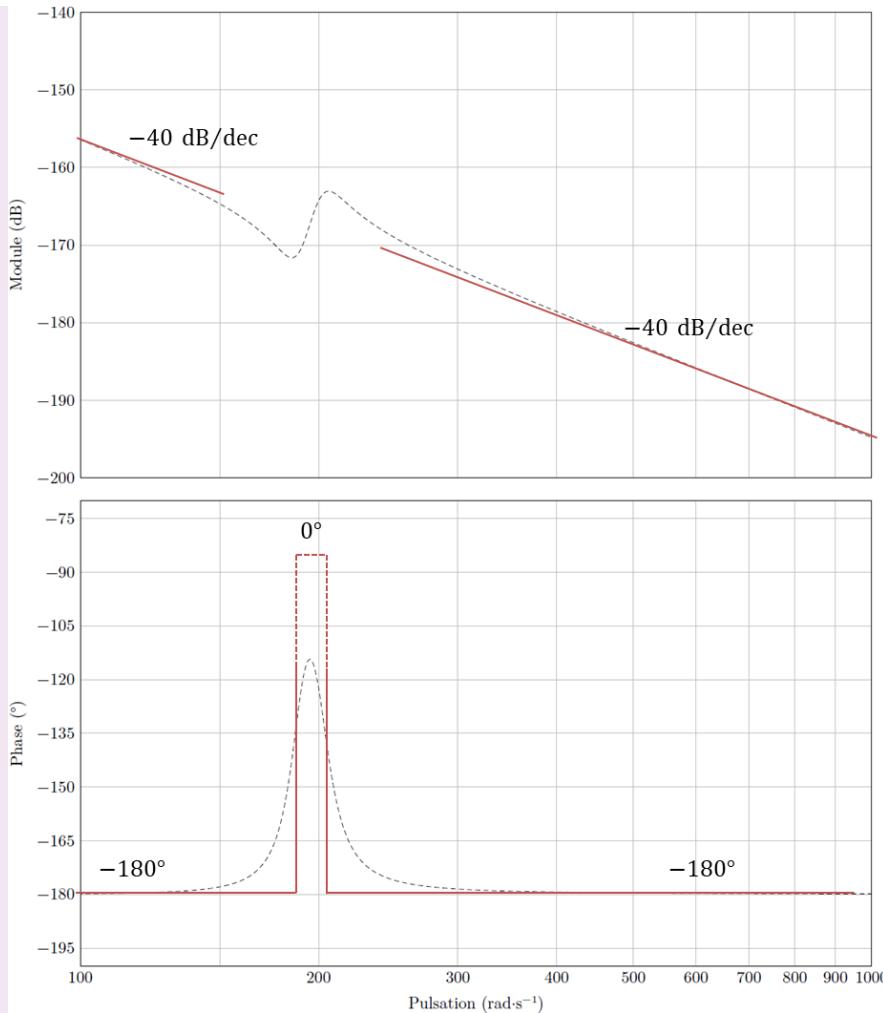
$$2\xi_2\omega_2 = \lambda \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \text{ et } \xi_2 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 K}}.$$

$$\text{On a donc } \xi_1 = \frac{\lambda}{2\sqrt{m_2 K}} \text{ et } \xi_2 = \lambda \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{2\sqrt{K m_1 m_2}}.$$

Question 4 Compléter ce diagramme par les tracés asymptotiques en module et en phase, et conclure sur la cohérence du diagramme donné.

Correction D'après le diagramme asymptotique donné, on a nécessairement $\omega_1 < \omega_2$. On peut dresser un tableau des variations à partir de la fonction de transfert $N_2(p)$.

| | ω_1 | | |
|---|--------------|------------|--------------|
| | ω_1 | ω_1 | ω_1 |
| $\frac{A}{p^2}$ | -40 dB/dec | -40 dB/dec | -40 dB/dec |
| $p^2 + 2\xi_1\omega_1 p + \omega_1^2$ | 0 dB/dec | 40 dB/dec | 40 dB/dec |
| $\frac{1}{p^2 + 2\xi_2\omega_2 p + \omega_2^2}$ | 0 dB/dec | 0 dB/dec | -40 dB/dec |
| $20 \log N_2(p) $ | -40 dB/dec | 0 dB/dec | -40 dB/dec |
| $\text{Arg}(N_2(p))$ | -180° | 0° | -180° |



Question 5 Au regard des valeurs numériques, montrer que la fonction de transfert $N_2(p)$ peut être approchée par la fonction $N_{2app}(p) = \frac{A}{p^2}$. En utilisant une couleur différente, tracer le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $N_{2app}(p)$ sur le document réponse et conclure sur la validité de ce modèle approché.

Correction Si le système n'est pas sollicité par des pulsations comprises entre 150 et 250 rad s⁻¹, on peut modéliser $N_2(p)$ par un double intégrateur. Le gain dB est donc $20\log A - 20\log \omega^2$. Pour $\omega = 500 \text{ rad s}^{-1}$ on a $20\log A - 20\log 500^2 = -182,5 \Rightarrow \log A = \frac{20\log 500^2 - 182,5}{20}$ et $A = 1,87 \cdot 10^{-4}$.

Question 6 Justifier qu'une correction proportionnelle ne permet pas de respecter l'ensemble des critères du diagramme des exigences de la ??.

Correction Dans le cas, la FTBO est de classe 2.

- **req 1.1** : $M\varphi = 60^\circ$: impossible à respecter la phase sera toujours de -180° .
 - **req 1.2** : $\omega_{0dB} = 200 \text{ rad s}^{-1}$: critère non respecté (cf diagramme de Bode).
 - **req 1.4** : erreur en régime permanent : $\Delta c < 40 \mu\text{m}$ pour un échelon d'amplitude $f_{c0} = 1 \text{ kN}$: critère non respecté (pas d'intégrateur avant la perturbation).
 - **req 1.5** : défaut de la roue $\Delta u < 30 \mu\text{m}$ lorsque la perturbation est sinusoïdale.
- La correction proportionnelle ne permet donc pas de respecter tous les critères du cahier des charges.

Analyse de l'influence d'un paramètre

On a d'une part $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$.

D'autre part, la quantité de matière enlevée est donnée par $q(t) = q_c(t) - z_2(t) + z_2(t - \tau)$ où τ est la durée nécessaire à la roue pour effectuer un tour complet.

D'un point de vue numérique, $K_f = 1,5 \times 10^9 \text{ N m}^{-2}$ et $\tau = 1 \text{ s}$.

Question 7 Déterminer $H_r(p)$ en fonction de τ .

Correction D'après le schéma-blocs, $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p)H_r(p)$. D'après les équations données et en utilisant le théorème du retard, on a $Q(p) = Q_c(p) - Z_2(p) + Z_2(p)e^{-\tau p} = Q_c(p) - Z_2(p)(1 - e^{-\tau p})$. En conséquence, $H_r(p) = 1 - e^{-\tau p}$.

Le schéma-blocs retenu est le suivant.

Question 8 Préciser l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de la figure 16 puis vérifier la cohérence du diagramme de Bode de la?? en analysant les « zéros de transmission ».

Correction $FTBO(p) = bK_f S(p)H_r(p) = \frac{bK_f}{K + \lambda p + m_2 p^2} (1 - e^{-\tau p}) = H_2(p) \cdot H_r(p)$.

On a $G_{dB}(\omega) = G_{dB2}(\omega) + G_{dB1}(\omega)$.

$$G_{dB1}(\omega) = 20 \log |1 - e^{-j\tau\omega}| = 20 \log \sqrt{(1 - \cos(-\tau\omega))^2 + (\sin(-\tau\omega))^2} = 20 \log \sqrt{2 - 2 \cos(\tau\omega)}$$

On a donc :

- pour $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$ et $G_{dB1}(\omega) \rightarrow -\infty$;
- pour $\omega = \frac{\pi + k2\pi}{\tau}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$ et $G_{dB1}(\omega) = 20 \log 2$.

Le diagramme en gain montre alors l'addition d'un gain du second ordre et d'un gain périodique. Les « zéros de transmission » correspondent aux pulsations $\omega = \frac{k2\pi}{\tau}$.

Pour la phase, $\varphi_{BO}(\omega) = \varphi_2(\omega) + \arg(1 - \cos(-\tau\omega) - j \sin(-\tau\omega))$. Or $1 - \cos(-\tau\omega) = 1 - \cos(\tau\omega) \geq 0$. On a donc $\varphi_{BO} = \varphi_2(\omega) + \arctan\left(\frac{\sin(\tau\omega)}{1 - \cos(\tau\omega)}\right)$.

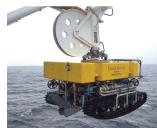
Le diagramme de phase est la somme d'une phase d'un système du second ordre et d'un signal $\frac{2\pi}{\tau}$ périodique.

Question 9 Déterminer un ordre de grandeur du paramètre b permettant de conserver la stabilité du système en boucle fermée. Conclure sur la compatibilité de cette valeur maximale avec un bon amortissement de l'asservissement.

Correction Pour garantir la stabilité en BF, il faut assurer un gain négatif en BO. D'après le diagramme de gain, le gain maximal relevé est de 45 dB. Il faudrait donc ajouter un gain supplémentaire b' tel que $20 \log b' = 45$ soit $b' = 10^{45/20} = 177$. Au bilan, on aurait donc $b_{lim} = b'b = 177 \times \frac{5 \cdot 10^{-2}}{\pi} = 2,83 \text{ mm rad}^{-1}$.

Il faudrait déterminer si une augmentation de b réduit l'amortissement de l'asservissement.

Synthèse 01 – Corrigé



Bateau support de ROV

Concours Centrale Supelec – MP 2019

Savoirs et compétences :



Introduction

Objectif Vérifier si le bateau support est capable de limiter suffisamment les effets de la houle.

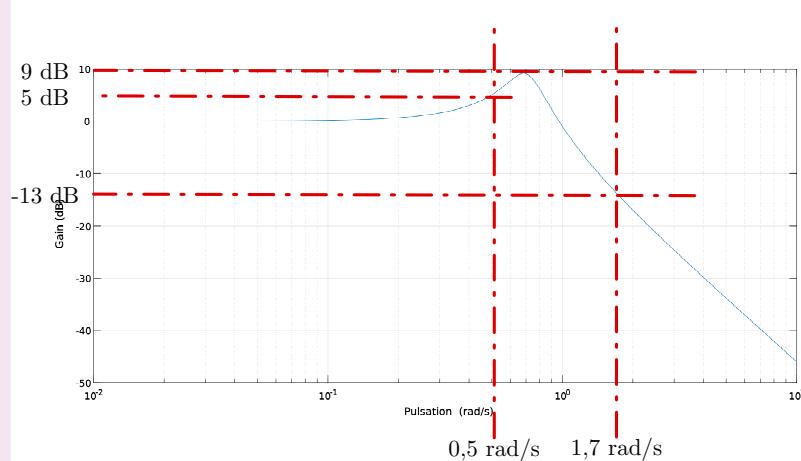
Question 1 Rappeler la définition du gain en décibel. En déduire la valeur en décibel traduisant l'exigence Id 1.1.

Correction La définition du gain en décibel de la fonction de transfert $B(j\omega)$ est $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{Y_S(j\omega)}{Y_{vague}(j\omega)} \right|$. L'exigence Id 1.1 impose une amplitude maximale du ROV de 1 m pour 5 m de houle soit :

$$G_{dB(\omega)} < 20 \log \frac{1}{5} \approx -14 \text{ dB} \quad \forall \omega \in [0,5; 1,7] \text{ rad/s.}$$

Question 2 En faisant apparaître le domaine d'utilisation, montrer que le système ne répond pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.

Correction On observe un phénomène de résonance, le système amplifie la houle entre 0,5 et 1 rad/s et l'atténue à une valeur maximale de 13-14 dB pour 1,7 rad/s. Le système ne répond donc pas à l'exigence d'atténuation d'une houle de 5 m.



Étude du système de compensation de houle PHC (Passiv Heave Compensator)

Objectif Dimensionner un système passif de compensation de la houle et tester sa conformité aux exigences du cahier des charges.

Question 3 Réécrire l'équation (1) en tenant compte de cette hypothèse. Après avoir appliqué les transformées de

Laplace aux équations (1) et (2) et en considérant les conditions initiales nulles aux équations précédentes, déterminer l'équation, notée (3), sous la forme :

$\Delta P_E(p) = K_1(1 + \tau_1 p)(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p))$. Exprimer K_1 et τ_1 en fonction de A , V_{G0} , r , C_{qR} et P_{G0} .

Correction On écrit les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace en tenant compte de l'hypothèse de fluide incompressible :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)) + C_{qR}(\Delta P_G(p) - \Delta P_E(p)) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}}(\Delta P_E(p) - \Delta P_G(p)) = p\Delta P_G(t). \quad (2)$$

L'équation (2) donne :

$$\begin{aligned} \Delta P_G(t) \left(p + \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \right) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \Delta P_E(p), \\ \Delta P_G(t) &= \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$Sp(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)) + C_{qR} \left(\frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \Delta P_E(p) - \Delta P_E(p) \right) = 0,$$

$$Sp(Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)) = C_{qR} \left(1 - \frac{rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}} \right) \Delta P_E(p),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{Sp}{C_{qR}} \frac{pV_{G0} + rP_{G0}C_{qR}}{pV_{G0}} (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)),$$

$$\Delta P_E(p) = \frac{S}{C_{qR}} \frac{rP_{G0}C_{qR}}{V_{G0}} \left(\frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)).$$

Enfin, on obtient :

$$\Delta P_E(p) = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \left(\frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}} p + 1 \right) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)).$$

Par identification :

$$K_1 = \frac{SrP_{G0}}{V_{G0}} \text{ et } \tau = \frac{V_{G0}}{rP_{G0}C_{qR}}.$$

Question 4 Appliquer les transformées de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles à l'équation (3) et à l'équation (4). Donner la fonction de transfert : $H(p) = \frac{Y_{\text{ROV}}(p)}{Y_h(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$. Exprimer ω_0 , ζ et τ en fonction des constantes définies précédemment.

Correction La transformée de Laplace de (3) est :

$$\alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) = \gamma \Delta P_E(p).$$

En utilisant (4), on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha p^2 Y_{\text{ROV}}(p) + \beta p (Y_{\text{ROV}}(p) - Y_h(p)) &= \gamma K_1 (\tau_1 p + 1) (Y_h(p) - Y_{\text{ROV}}(p)), \\ (\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)) Y_{\text{ROV}}(p) &= (\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p) Y_h(p). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{\gamma K_1 (\tau_1 p + 1) + \beta p}{\alpha p^2 + \beta p + \gamma K_1 (\tau_1 p + 1)}, \\ H(p) &= \frac{\gamma K_1 + (\gamma K_1 \tau_1 + \beta) p}{\alpha p^2 + (\beta + \gamma K_1 \tau_1) p + K_1 \gamma}. \end{aligned}$$

Donc :

$$H(p) = \frac{1 + \frac{\gamma K_1 \tau_1 + \beta}{K_1 \gamma} p}{1 + \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{K_1 \gamma} p + \frac{\alpha}{K_1 \gamma} p^2}.$$

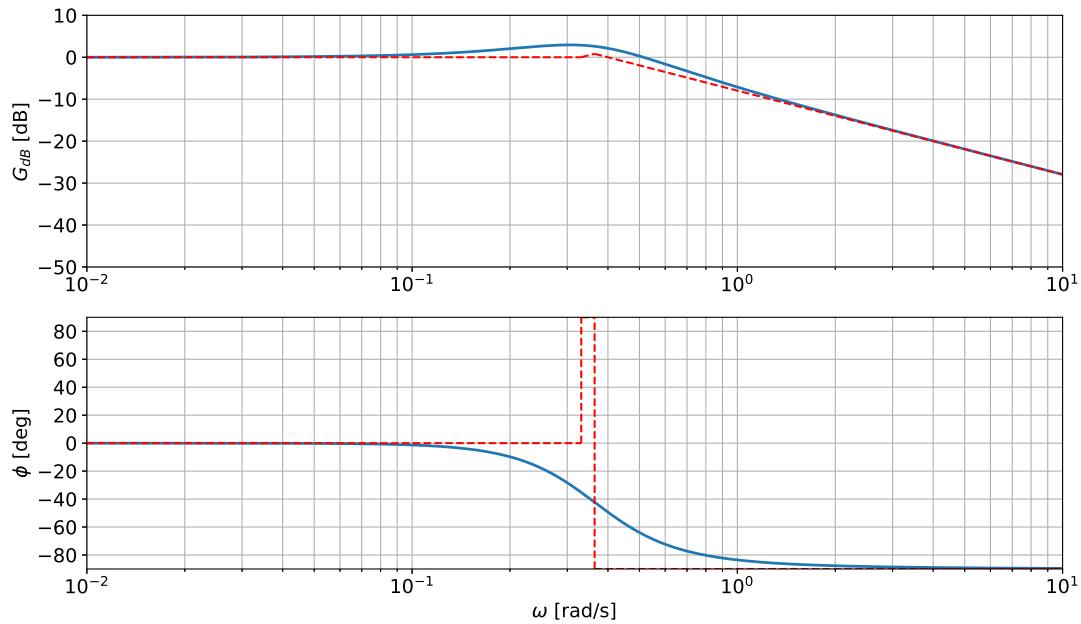
Par identification, on obtient :

$$\tau = \tau_1 + \frac{\beta}{\gamma K_1} ; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\gamma K_1}{\alpha}} ; \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma K_1 \tau_1}{\sqrt{\alpha \gamma K_1}}.$$

Question 5 Tracer en vert le diagramme asymptotique du gain de la fonction de transfert du compensateur PHC, $H(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_h(p)}$, en faisant apparaître ses caractéristiques. Tracer en bleu, sur la même figure, l'allure du gain réel du compensateur. Préciser la valeur du gain maximal.

Correction Diagrammes de Bode de $H(p)$. On identifie 2 pulsations caractéristiques : $\omega_1 = 1/\tau \approx 0,33$ rad/s et $\omega_n = 0,364$ rad/s. On verra apparaître un phénomène de résonance à la pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ car $\zeta = 0,55 < \sqrt{2}/2$. La résonance sera toutefois faible.

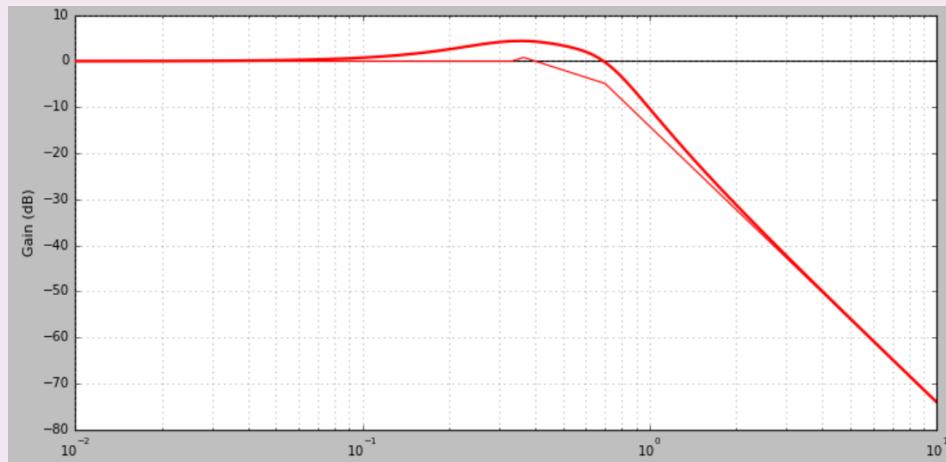
| ω | $\text{BF } \omega \ll \omega_1$ | $\text{MF } \omega_1 \ll \omega \ll \omega_n$ | $\text{HF } \omega_n \ll \omega$ |
|-----------------|----------------------------------|---|---|
| $H(j\omega)$ | 1 | $\tau j\omega$ | $\frac{\tau \omega_n^2}{j\omega}$ |
| G_{dB} | 0 | $20 \log \tau + 20 \log \omega$ | $20 \log(\tau \omega_n^2) - 20 \log \omega$ |
| ϕ | 0 | 90° | -90° |



La valeur du gain maxi est de +3 dB (due au premier ordre au numérateur, l'influence du dénominateur est négligeable car la résonance est faible).

Question 6 Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble {bateau support + ROV + PHC}, $G(p) = \frac{Y_{ROV}(p)}{Y_{vague}(p)}$ en fonction de $H(p)$ et $B(p)$. Tracer en rouge l'allure du gain du diagramme de Bode de $G(p)$.

Correction On a la relation $G(p) = B(p)G(p)$.



Question 7 Choisir, en justifiant la réponse, le réglage du compensateur adapté à l'exigence Id 1.1.

Correction Le réglage de PHC 4 est celui qui respecte le mieux l'exigence Id1.1.

