

## Colle



### Chariot élévateur à bateaux

X – ENS – PSI – 2012

Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

#### Présentation

Le chariot élévateur, objet de cette étude, permet la manutention de bateaux de 3000 kg à une hauteur de 8 m. Il est principalement constitué :

- du chariot qui assure le déplacement de l'ensemble et apporte la puissance pour la préhension et le levage ;
- du tablier, constitué du mât et des fourches, qui permet la préhension et la dépose du bateau.



#### Phase de levage du bateau

**Objectif** Permettre au conducteur de charger et décharger le bateau en toute sécurité :

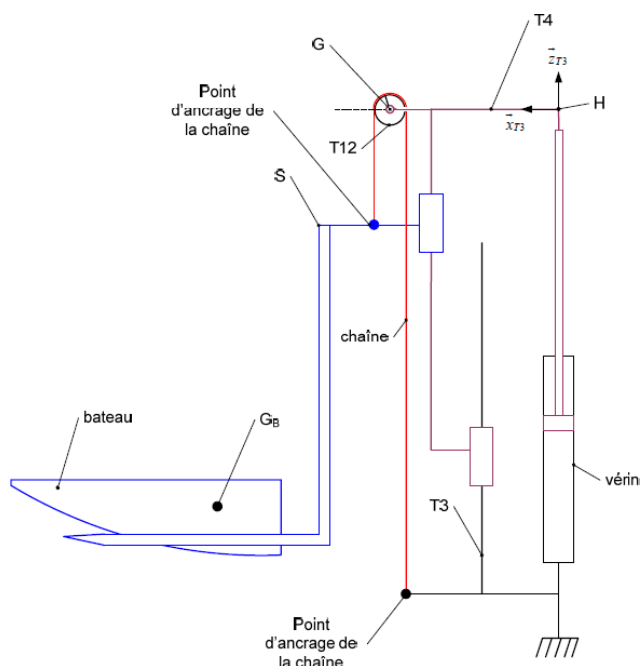
- req 102 : vitesse de levage en charge :  $0,33 \text{ m s}^{-1}$  ;
- req 103 : temps pour atteindre la vitesse de levage en charge : 0,4 s.

Dans cette partie, on considère que le chariot est à l'arrêt et que le levage est le seul mouvement actif. Le modèle retenu pour cette étude est le schéma de principe de la suivante. En raison de la symétrie du tablier par rapport à son plan médian vertical, le modèle d'étude peut se ramener à un système comprenant un seul vérin, une seule chaîne et une seule poulie. L'actionneur est un vérin hydraulique dont le corps est en liaison encastrement avec le mât inférieur. La tige est solidaire du mât supérieur. Le levage de l'ensemble  $S = \{T5, T6, T7, T8, T9, T10, T11\}$  est obtenu à l'aide d'une chaîne présentant un point d'ancrage sur le mât inférieur et un point d'ancrage sur l'ensemble S. Cette chaîne roule sans glisser sur le pignon  $T_{12}$  qui est en liaison pivot par rapport au mât supérieur. Le bateau étant à l'arrêt en position basse, le conducteur actionne le levage du bateau. L'effort de poussée fourni par le vérin est  $F_V$  (considéré comme constant). On note  $I_{T_{12}}$  le moment d'inertie de la poulie  $T_{12}$  par rapport à son axe de rotation,

$R_{T_{12}}$  son rayon. Sa masse est négligée. Les masses des différents solides sont rappelées dans le tableau ci-dessous :

Solide	Masse
Ensemble (S)	$m_S$
Bateau (B)	$m_B$
Mât inférieur (T3)	$m_{T3}$
Mât supérieur (T4)	$m_{T4}$
Chaîne (C)	négligée

Les liaisons sont parfaites. La chaîne est non dissipative. Le repère  $\mathcal{R}_3$  peut être considéré comme un référentiel galiléen pour les conditions de l'étude. Les axes  $\vec{z}_{T3}$  et  $\vec{z}_0$  sont confondus pour les conditions de l'étude.



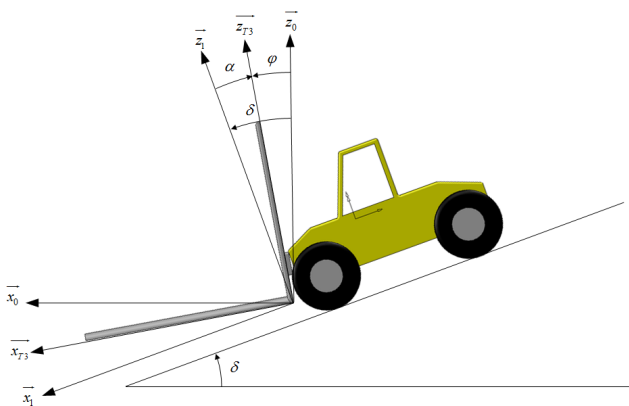
**Question 1** Déterminer l'accélération galiléenne du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système. Expliquer qualitativement comment cette valeur peut permettre de valider l'exigence 103.

#### Phase de déplacement

La zone de stockage des bateaux se situe nécessairement à une altitude supérieure à celle du quai de déchar-

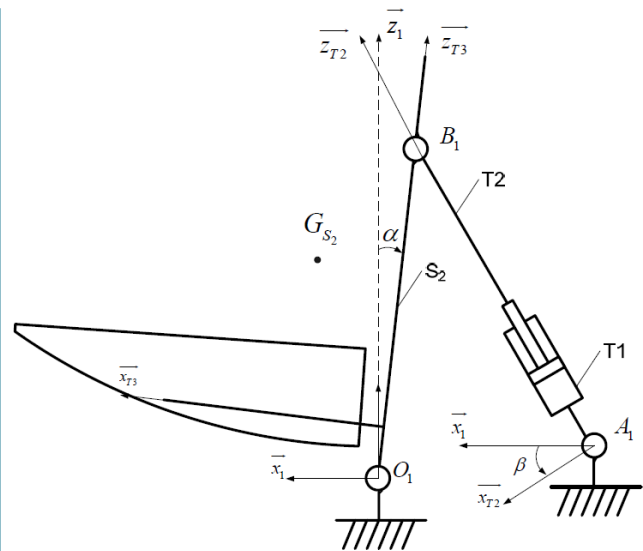
gement. Afin d'éviter le glissement du bateau lorsque le chariot descend une pente, un dispositif permet de maintenir les fourches horizontales durant le déplacement. Lors d'une phase de décélération, les fourches sont automatiquement inclinées vers l'arrière pour éviter le glissement du bateau. Ce mouvement, de faible amplitude, est assuré par l'asservissement des vérins d'inclinaison du tablier T1, T2 et T1', T2'. Ce dispositif présente l'avantage de prendre en charge de manière entièrement automatisée l'un des mouvements du tablier. Le conducteur peut alors charger et mettre à l'eau le bateau sans avoir à gérer manuellement le mouvement d'inclinaison. La figure suivante permet de définir :

- l'angle de basculement  $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}_{T3})$ ;
- l'angle de la pente  $\delta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ ;
- l'angle à asservir  $\varphi = (\vec{z}_0, \vec{z}_{T3}) = \alpha + \delta$ .



**Question 2** Quand le chariot circule à vitesse constante, quelle est la valeur de l'angle  $\varphi(t)$  qui permet d'assurer le maintien de l'horizontalité des fourches ? Justifier.

Nous considérons dans cette partie que le seul mouvement actif est le basculement. L'objectif est d'obtenir un modèle dynamique du mécanisme de basculement à partir de la modélisation plane proposée sur la figure suivante.



Les solides pris en compte pour l'étude sont :

- l'ensemble  $S_2 = \{T3, T4, T5, T6, T7, T8, T9, T10, T11, B\}$  en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{y}_0)$  par rapport au chariot 1 de centre de gravité  $G_{S_2}$ . Le moment d'inertie de l'ensemble  $S_2$  par rapport à l'axe sera noté  $J_{S_2}$  et sa masse  $m_{S_2}$ . La liaison pivot entre l'ensemble  $S_2$  et le chariot génère un couple résistant  $\vec{C}_\mu = -\mu \dot{\alpha} \vec{y}_0$  et  $\vec{O}_1 \vec{O}_{G_{S_2}} = x_{G_{S_2}} \vec{x}_{T3} + z_{G_{S_2}} \vec{z}_{T3}$ ;
- un vérin équivalent  $V = \{T1, T2\}$  dont la tige est en liaison pivot d'axe  $(A_1, \vec{y}_0)$  par rapport au chariot 1 et le corps en liaison pivot d'axe  $(B_1, \vec{y}_0)$  par rapport à l'ensemble  $S_2$ . La masse et l'inertie du vérin sont négligées. Le vérin développe un effort au cours du mouvement qui sera noté  $\vec{F}_V = p(t) S \vec{z}_{T2}$  où  $p(t)$  est la différence de pression entre les deux chambres du vérin.

On pose  $\vec{A}_1 \vec{B}_1 = (\lambda_0 + \lambda) \vec{z}_{T2}$ . Le paramétrage est tel que si  $\alpha = 0$  alors  $\lambda = 0$ .

**Question 3** En appliquant le théorème de l'énergie-puissance et en admettant que l'angle  $\alpha$  est petit, montrer que  $\alpha(t)$  et  $p(t)$  sont liés par l'équation différentielle suivante :  $J_{eq} \ddot{\alpha}(t) + \mu \dot{\alpha}(t) = \frac{Sp(t)}{k} + m_{S_2} g x_{G_{S_2}}$ . Exprimer  $J_{eq}$ .

## Colle



### Appareil de mammographie « ISIS » (General Electric)

Centrale MP 2004

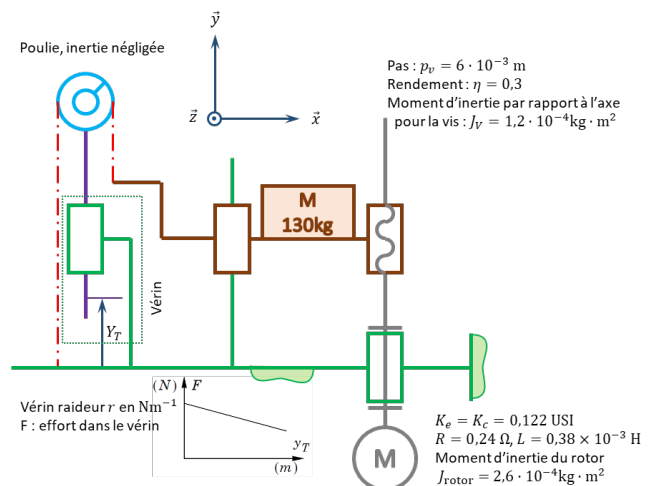
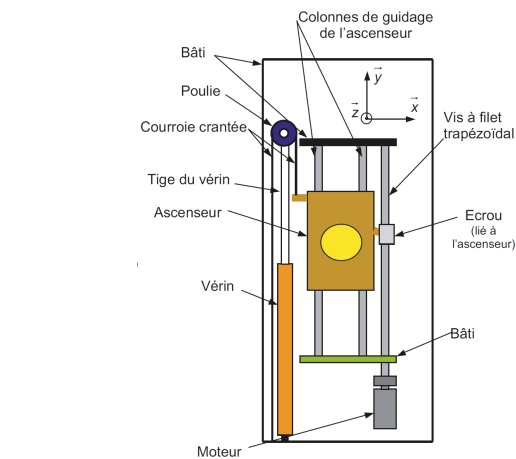
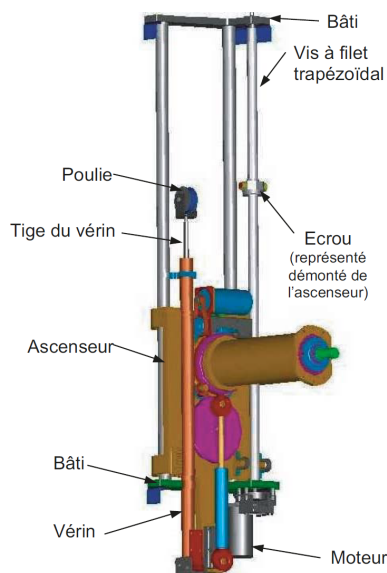
Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;

## Mise en situation

**Analyse de la fonction de service : « Adapter le mammographe à la taille de la patiente » et de la fonction technique associée : « faire monter et descendre l'ascenseur »**

Le mammographe doit être adapté à la taille de la patiente en faisant monter ou descendre l'ascenseur. La liaison glissière de l'ascenseur par rapport à la partie fixe du mammographe est réalisée par un guidage sur deux barres parallèles fixées sur le bâti. Le déplacement de l'ascenseur est obtenu à partir d'un moteur électrique qui entraîne en rotation une vis. La rotation de la vis entraîne ensuite l'écrou sur lequel est fixé l'ascenseur. Un vérin à gaz permet d'assister le moteur lors de la montée de l'ascenseur par l'intermédiaire d'une poulie montée à l'extrémité de la tige du vérin à gaz et d'une courroie crantée. Une des extrémités de la courroie est fixée sur le bâti du mammographe et l'autre extrémité est liée à l'ascenseur.



## Détermination de la motorisation

**Objectif** L'objectif de cette étude est de valider la solution utilisant un vérin à gaz pour assister le moteur, en la comparant à d'autres solutions classiques : pas d'assistance, assistance à l'aide d'un contre-poids, assistance à l'aide d'un ressort. Pour cela nous allons comparer les performances minimales que doit avoir le moteur d'entraînement et vérifier pour chaque cas la conformité au cahier des charges.

Faire monter ou descendre l'ascenseur	
Critères	Niveaux
Ne pas stresser la patiente en déplaçant trop rapidement l'ascenseur : limiter la vitesse de déplacement rapide	$V_R = 0,15 \text{ m s}^{-1}$
Ne pas blesser la patiente lors de l'approche du bucky : respecter une vitesse lente $V_L$ lors de l'accostage	$V_L = 0,02 \text{ m s}^{-1}$
Respecter une course de réglage de la position de l'ascenseur	course = 0,8 m $\delta_{\text{course}} = \pm 1 \times 10^{-3} \text{ m}$
Atteindre rapidement la vitesse de déplacement rapide $V_R$ : respecter la durée $t_a$ de la phase d'accélération constante	$t_a = 0,4 \text{ s}$ (mini)

**Question 1** Déterminer la fréquence de rotation du moteur  $\omega$  en fonction de la vitesse de déplacement  $V$  de l'ascenseur. En déduire la vitesse de rotation maximum  $\omega_{\text{maxi}}$  que doit avoir le moteur, faire l'application numérique.

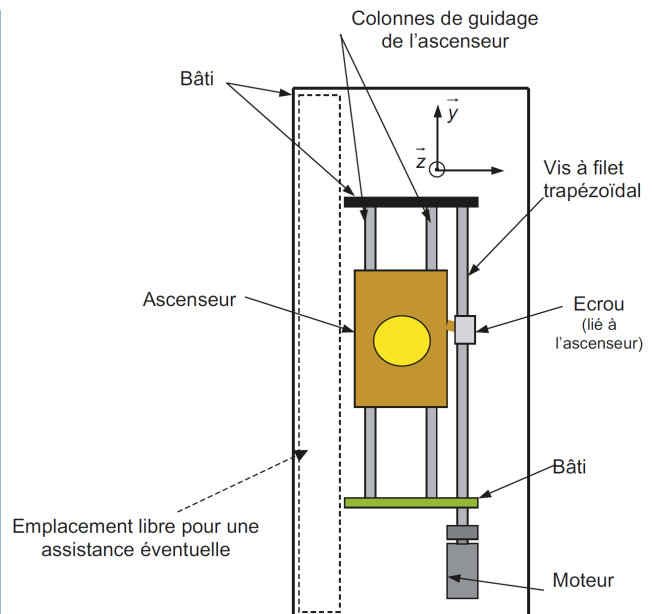
Pour déterminer les performances minimales du moteur, on étudie la phase de montée de l'ascenseur définie par :

- départ en position basse ( $y = 0$  à l'instant  $t = 0$ ) ;
- mise en mouvement ascendant de l'ascenseur à accélération constante  $a$  pour atteindre la vitesse  $V_R$  rapide en respectant les contraintes du cahier des charges ;
- arrêt de l'ascenseur à la position  $y = 0,8 \text{ m}$  (la phase de décélération est telle que la décélération est constante et sa durée égale à  $t_a$ ).

**Question 2** Afin d'avoir une meilleure représentation de cette phase de montée de l'ascenseur, représenter la loi d'accélération en fonction du temps ainsi que la loi de vitesse et celle du déplacement  $y$  de l'ascenseur. Indiquer les valeurs numériques de l'accélération, de la durée de la phase d'accélération, du déplacement réalisé pendant chaque phase de déplacement à accélération constante et de la durée du déplacement à vitesse constante.

### Solution sans assistance

On souhaite déterminer le couple moteur. Pour cela on propose d'appliquer le théorème de l'énergie-puissance au système isolé  $\Sigma$  (rotor du moteur + vis + ascenseur) en mouvement par rapport au bâti supposé galiléen.



On notera :

- $\vec{g} = -g \vec{y}$  l'accélération de la pesanteur. On prendra  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  ;
- $C$  le couple exercé par le stator sur le rotor du moteur.

**Question 3** Déterminer l'énergie cinétique galiléenne, notée  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$ , du système isolé. Mettre  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0)$  sous la forme :  $\mathcal{E}_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} M_e V^2$ . Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M_e$  et faire l'application numérique.

**Question 4** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, appliquer le théorème de l'énergie puissance au système isolé (rotor du moteur + vis + ascenseur). La démarche suivie doit être clairement indiquée. En déduire l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

**Question 5** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance nécessaire  $P_0$  de ce moteur.

**Question 6** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

### Cas d'une motorisation assistée par un contre-poids

Le dispositif d'assistance a pour rôle de diminuer le couple moteur en compensant le poids de l'ascenseur. L'emplacement disponible, pour ce dispositif, est celui occupé par le vérin à gaz, voir figures précédentes.

Dans cette solution un contrepoids est choisi pour compenser exactement le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti et d'inertie négligeable. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre au contrepoids.

**Question 7** Faire un schéma de principe de ce dispositif.

**Question 8** Donner l'expression littérale de la masse équivalente  $M'_e$  et faire l'application numérique.

**Question 9** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $V$  et/ou de ses dérivées,  $\omega$  et/ou ses dérivées n'apparaîtront pas dans l'expression littérale de  $C$ .

**Question 10** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur.

**Question 11** En déduire la puissance nécessaire  $P$  du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

**Question 12** Le contrepoids sera réalisé dans un alliage de masse volumique  $9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . L'emplacement disponible est un parallélépipède rectangle de section  $0,2 \times 0,1 \text{ m}^2$  et de hauteur  $1,4 \text{ m}$ . Cette solution est-elle envisageable?

### Motorisation assistée par un ressort de traction

Dans cette solution un ressort, travaillant en traction, est choisi pour compenser le poids de l'ascenseur. Une courroie crantée s'enroule sur un demi-tour d'une poulie d'axe fixe par rapport au bâti. Une des extrémités de cette courroie est attachée à l'ascenseur, l'autre à l'une des extrémités du ressort.

**Question 13** Faire un schéma de principe du dispositif.

**Question 14** L'effort minimal développé par le ressort doit compenser exactement le poids de l'ascenseur. La variation de l'effort de compensation, exercé par le ressort, sera limitée à 10 % sur l'ensemble de la course. Déterminer la raideur du ressort, ainsi que l'effort de compensation maximum  $F_{c \text{ maxi}}$  qu'il exercera. Représenter la courbe de variation de cet effort en fonction du déplacement  $y$  de l'ascenseur.

L'emplacement disponible ne permet pas de placer un ressort de diamètre nominal  $D$  supérieur à  $0,1 \text{ m}$ . Le ressort de traction sera réalisé dans un acier allié de résistance élastique au glissement  $R_{eg} = 560 \text{ MPa}$  et de module de Coulomb  $G = 82000 \text{ MPa}$ . On prendra un coefficient de sécurité  $s = 2$ . Pour que le ressort résiste à l'effort maximal

$F_{c \text{ maxi}}$ , il doit avoir un diamètre  $d \geq \sqrt[3]{\frac{8 F_{c \text{ maxi}} D s}{\pi R_{eg}}}$ , c'est-à-

dire  $d \geq 9,7 \times 10^{-4} \sqrt[3]{F_{c \text{ maxi}}}$ .

Pour obtenir un ressort de raideur  $r$  il faut un nombre de spires  $n = \frac{G d^4}{8 D^3 r}$ , c'est-à-dire  $n \simeq 10^{13} \frac{d^4}{r}$ .

**Question 15** La longueur du ressort est-elle compa-

tible avec l'emplacement disponible?

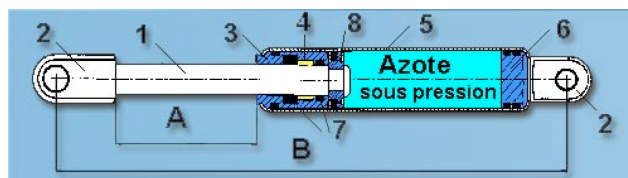
### Assistance à l'aide d'un vérin à gaz

Le schéma de principe de ce dispositif a été donné précédemment. Le corps du vérin est lié au bâti. Une poulie crantée est en liaison pivot avec l'extrémité de la tige du vérin. Une courroie crantée s'enroule (un demi-tour) sur la poulie et est liée au bâti à une de ses extrémités. L'autre extrémité de la courroie est liée à l'ascenseur.

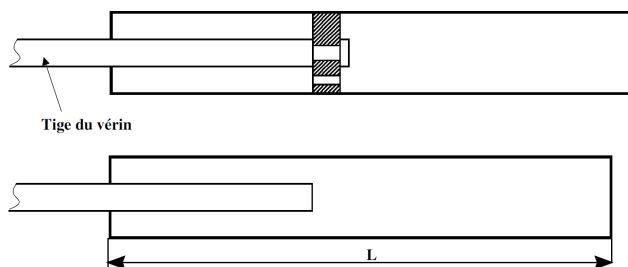
**Question 16** Déterminer la relation existant entre le déplacement  $y$  de l'ascenseur et le déplacement  $y_T$  de la tige du vérin. En déduire la course  $\Delta y_T$  nécessaire de la tige du vérin à gaz.

**Question 17** Le module de l'effort appliqué par la courroie sur l'ascenseur est noté  $F_c$ . C'est l'effort de compensation sur l'ascenseur. En isolant la poulie, déterminer la relation existant entre l'effort  $F$  développé par le vérin et l'effort de compensation  $F_c$ . En déduire l'effort minimum  $F_{\text{mini}}$  développé par le vérin.

Le vérin à gaz est présenté sur le dessin ci-dessous.



**Question 18** Pour étudier l'action exercée par l'azote sous pression sur la tige du vérin on propose les deux modèles ci-dessous. Montrer que lorsque la tige n'est pas en mouvement ces deux modèles de comportement du vérin à gaz, sont équivalents du point de vue des actions qu'exerce l'azote sur la tige du vérin. Remarque : pour la suite de cette étude on négligera les pertes de charge lors de l'écoulement du fluide à travers l'orifice du piston.



**Question 19** Compte tenu des efforts on prédimensionne la tige du vérin à un diamètre  $d = 15 \times 10^{-3} \text{ m}$ . On appelle pression de gonflage, la pression de l'azote que le vérin contient quand la tige est complètement sortie. Déterminer la pression de gonflage du vérin, cette pression sera notée  $p_2$ .

Dans la gamme de vérin à gaz on choisit le vérin de diamètre le plus grand  $D = 57 \times 10^{-3} \text{ m}$ . L'espace disponible permet de placer un vérin dont la chambre a une longueur maximale  $L = 1 \text{ m}$ . Soient  $p_1$ ,  $F_1$ ,  $V_1$  la pression, l'effort de poussée du vérin et le volume de gaz dans le vérin pour la



position ascenseur en bas et  $p_2$ ,  $F_{\text{mini}}$ ,  $V_2$  pour la position ascenseur en haut. Pour cette position, la tige du vérin est complètement sortie.

**Question 20** Donner l'expression littérale de la raideur de ce vérin à gaz en fonction de  $F_1$ ,  $F_{\text{mini}}$  et  $\Delta y_T$ . Exprimer  $F_{\text{mini}}$  en fonction de  $p_2$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. Exprimer  $F_1$  en fonction de  $p_1$  et d'une caractéristique géométrique du vérin. On suppose que la transformation de l'azote entre les états 1 et 2 est isotherme. Donner l'expression littérale de la raideur  $r$  de ce vérin à gaz en fonction de  $F_{\text{mini}}$ ,  $d$ ,  $D$ ,  $L$  et  $\Delta y_T$ .

**Question 21** On cherche à obtenir une raideur la plus faible possible, choisir alors la longueur  $L$  et calculer la raideur  $r$ .

On prendra  $r = 180 \text{ Nm}^{-1}$  pour la suite du problème.

**Question 22** Déterminer l'effort maximal  $F_{\text{Maxi}}$  développé par le vérin. Faire l'application numérique. Calculer la variation en % de  $F$ .

**Question 23** Déterminer la relation  $F = F(y_T)$ .

On considérera dans cette question que l'effort de compensation  $F_c$  est constant.

**Question 24** En supposant que toutes les liaisons sont parfaites, déterminer l'expression littérale de  $C$  en fonction de  $a$ ,  $M_e$ ,  $F_c$ ,  $M$ ...

**Question 25** Exprimer ensuite  $a$  en fonction de  $C$ ,  $M_e$ ,  $F_c$ ,  $M$ ...

**Question 26** En déduire la valeur du couple maximum  $C_{\text{Max}}$  que le moteur doit pouvoir appliquer sur la vis ainsi que la puissance  $P_0$  nécessaire de ce moteur (prendre  $F_c = 1300 \text{ N}$ ).

**Question 27** En déduire la puissance  $P$  nécessaire du moteur si le rendement du dispositif vis-écrou vaut  $\eta = 0,3$ .

## Synthèse

**Question 28** On se propose de résumer l'étude comparative précédente dans un tableau. Indiquer les valeurs calculées pour la puissance du moteur, le couple du moteur, la masse équivalente. On rappelle que le calcul de la masse équivalente a été effectué en prenant l'inertie de la vis dimensionnée pour la solution avec vérin à gaz. Compte tenu de cette remarque, indiquer si la masse équivalente, trouvée en réponse aux questions précédentes, a été obtenue par excès ou par défaut. L'encombrement est-il (oui ou non) compatible avec le cahier des charges? La masse de l'ensemble est-elle satisfaisante?

### Colle



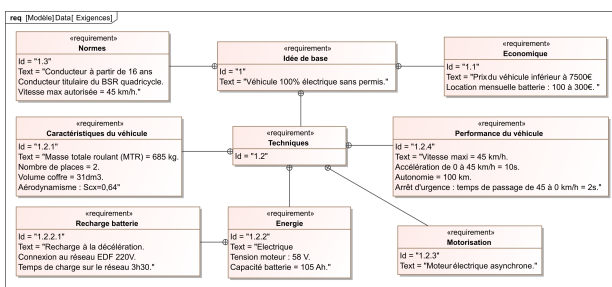
### Renault Twizy – A TERMINER

Concours Mines Ponts – PSI 2017

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

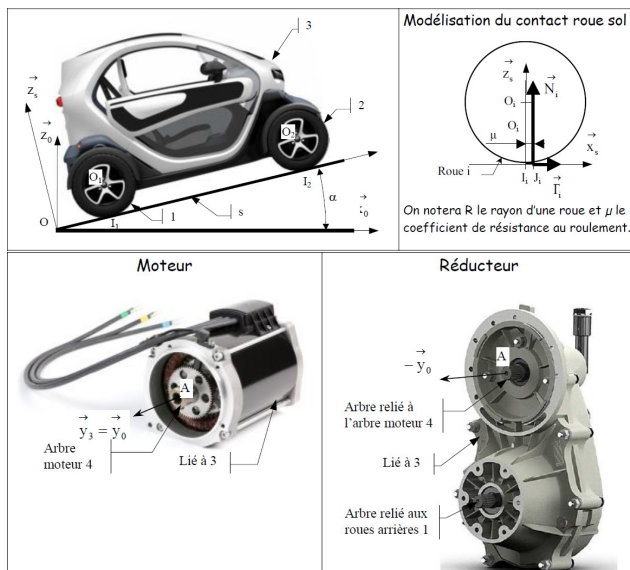
### Mise en situation



### Choix du motoréducteur

**Objectif** Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

On donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.



#### Hypothèses générales :

- le vecteur  $\vec{z}_0$  est vertical ascendant et on notera  $g$  l'accélération de la pesanteur;
- le repère  $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est galiléen; Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est sup-

posé rester dans le plan de symétrie de la voiture  $(O, \vec{z}_s, \vec{x}_s)$ ;

- toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue – sol;
- les roues roulent sans glisser sur le sol en  $I_i$ ;
- le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  est identique pour tous les contacts roue – sol :  $\mu = 3e - 3m$ . On pose  $\vec{I}_1 \vec{J}_1 = \mu \vec{x}_s$ , avec  $\mu > 0$  si le déplacement du véhicule est suivant  $+\vec{x}_s$ ;
- les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés; seules les roues arrière sont motrices.

**Actions mécaniques** Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est :  $\{\mathcal{F}(s \rightarrow i)\} = \left\{ \begin{matrix} T_i \vec{x}_s + N_i \vec{z}_s \\ 0 \end{matrix} \right\}_{J_i}$  avec  $J_i \in (O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$  et  $i = 1$  (roues arrières) ou 2 (roues avant). Le moteur permet d'appliquer un couple en 3 et 4 tel que  $\{\mathcal{F}(3 \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ C_m \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_-$ .

#### Masses et inerties :

- le moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe  $(A, \vec{y}_0)$  :  $J_m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ;
- le moment d'inertie d'une roue autour de son axe  $(O_i, \vec{y}_0)$  :  $J_R = 0,1 \text{ kg m}^2$  (masse de la roue négligée);
- la masse du véhicule en charge :  $m = 685 \text{ kg}$ ;
- le centre de gravité du véhicule en charge sera noté  $G$ ;
- les autres inerties seront négligées.

**Grandeurs cinématiques** : Soit  $\omega_m$  la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3,  $\omega_{13}$  la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et  $\omega_{23}$  la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera  $r$  le rapport de transmission du réducteur tel que  $\omega_m = r \omega_{13}$ . On appellera  $\vec{V}(G, 3/0) = \vec{V}_{3/0} = v \vec{x}_s$  la vitesse du véhicule. Les roues ont un rayon  $R = 280 \text{ mm}$ .

#### Choix de l'ensemble moto-réducteur

#### Équation de mouvement du véhicule

**Objectif** Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

#### Notations :

- puissance extérieure des actions mécaniques du solide  $i$  sur le solide  $j$  dans le mouvement de  $i$  par rapport à 0 :  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/0)$  ;
- puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide  $i$  et le solide  $j$  :  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$  ;
- énergie cinétique du solide  $i$  dans son mouvement par rapport à 0 :  $\mathcal{E}_c(i/0)$ .

**Question 1** Rédiger les réponses aux questions suivantes dans le cadre prévu à cet effet du document réponse :

- écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliqué au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes ;
- déterminer explicitement les différentes puissances extérieures ;
- déterminer explicitement les différentes puissances intérieures ;
- déterminer explicitement les énergies cinétiques ;
- en déduire une équation faisant intervenir  $C_m$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $v$ ,  $\omega_m$ ,  $\omega_{1/0}$ ,  $\omega_{2/0}$  . . . . . ;
- expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.

**Question 2** À partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer ( $N_1 + N_2$ ). Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.

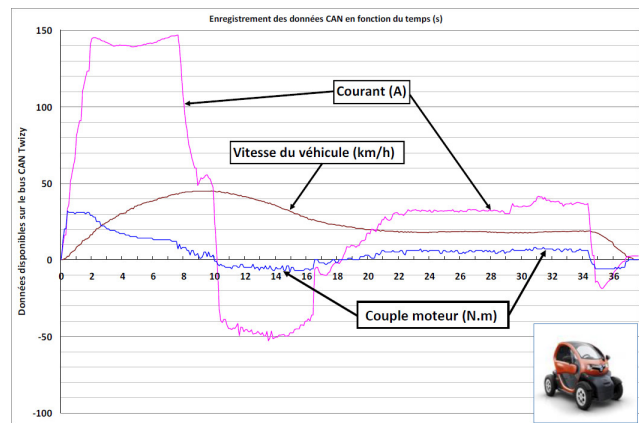
**Question 3** Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre  $(v, \omega_{10})$ ,  $(v, \omega_{20})$  et  $(\omega_m, \omega_{10})$ . Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme  $\frac{rC_m(t)}{R} - F_r(t) = M_{eq} \frac{dv(t)}{dt}$  avec  $F_r(t)$  fonction de  $m$ ,  $\mu$ ,  $g$ ,  $R$  et  $\alpha$  et  $M_{eq}$  fonction  $m$ ,  $J_m$ ,  $J_R$ ,  $R$  et  $r$ .

**Détermination du coefficient de résistance au roulement  $\mu$**

**Objectif** Déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  suite à une expérimentation.

**Question 4** En utilisant les résultats de l'essai routier effectué ci-dessous, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement  $\mu$ . Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :

- justifier dans quelle phase se placer ;
- définir la variable mesurée ;
- définir les hypothèses nécessaires ;
- énoncer les équations utilisées pour déterminer  $\mu$ .



### Choix du moto-réducteur

**Objectif** Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale  $\frac{dv(t)}{dt}$  du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission  $r$  issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies sur le document réponse.

**Question 5** Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission  $r_{\min}$  pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans le diagramme des exigences.

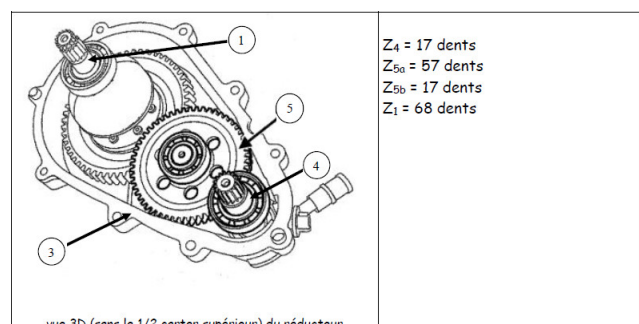
**Question 6** Déterminer la valeur maximale du rapport de transmission  $r_{\max}$  qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans le diagramme des exigences.

**Question 7** À partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.

### Validation du choix constructeur du moto-réducteur

**Objectif** Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

**Question 8** À partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, compléter le schéma cinématique du document réponse, calculer son rapport de transmission  $r = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{4/3}}$  et conclure.





## Colle

### Dispositif de mesure d'un moment d'inertie

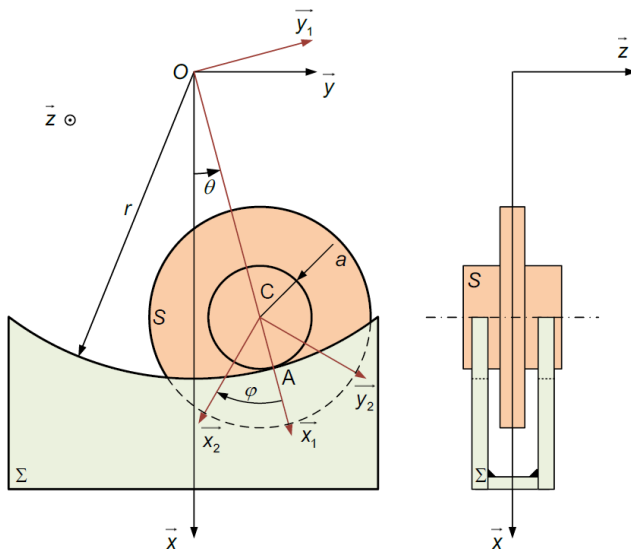
#### Sources multiples

#### Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;

### Mise en situation

La figure ci-contre représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide  $S$  par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti  $\Sigma$ .



Soit  $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère galiléen lié au bâti  $\Sigma$ . On désigne par  $\vec{g} = g \vec{x}$  l'accélération de la pesanteur. Les deux portées cylindriques de  $\Sigma$  sont deux éléments de la surface cylindrique de révolution d'axe  $(O, \vec{z})$ , de rayon  $r$ . Le solide  $S$  de masse  $m$ , de centre d'inertie  $C$ , possède deux tourillons de même rayon  $a$  ( $a < r$ ).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

- le tourillon  $S$ , de centre  $C$ , roule sans glisser au point  $A$  sur la portée cylindrique de  $\Sigma$ ;

- soit  $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  le repère, tel que le point  $C$  soit sur l'axe  $(O, \vec{x}_1)$ .  $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ ;
- soit  $\mathcal{R}_2(C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  un repère lié à  $S$ . On pose  $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . On suppose  $\varphi = 0$  lorsque  $\theta = 0$ .

Notons  $I$  le moment d'inertie de  $S$  par rapport à son axe de symétrie  $(C, \vec{z})$  et  $f$  le coefficient de frottement entre  $S$  et  $\Sigma$ .

On donne  $a = 12,3 \text{ mm}$ ;  $r = 141,1 \text{ mm}$ ;  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ ;  $m = 7217 \text{ g}$ ;  $f = 0,15$ .

**Question 1** Déterminer la relation entre  $\dot{\varphi}$  et  $\dot{\theta}$ .

**Question 2** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à  $S$  dans son mouvement par rapport à  $R$ . En déduire l'équation différentielle du mouvement sur  $\theta$ .

**Question 3** En supposant que l'angle  $\theta$  reste petit au cours du mouvement, déterminer la période  $T$  des oscillations de  $S$ .

**Question 4** En déduire le moment d'inertie  $I$  de  $S$ , sachant que  $T = 5 \text{ s}$ .

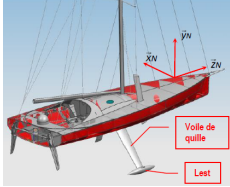
En supposant toujours que l'angle  $\theta$  reste petit, on pose  $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$  avec  $\omega = \sqrt{\frac{mg}{(r-a)\left(m + \frac{I}{a^2}\right)}}$ .

On suppose à la date  $t = 0$ , tel que  $\theta = \theta_0$  et  $\dot{\theta} = 0$ .

**Question 5** Déterminer la valeur maximale de  $\theta_0$  pour que  $S$  roule sans glisser sur  $\Sigma$ .



## Colle



### Quille pendulaire ★

Concours Commun Mines Ponts 2014

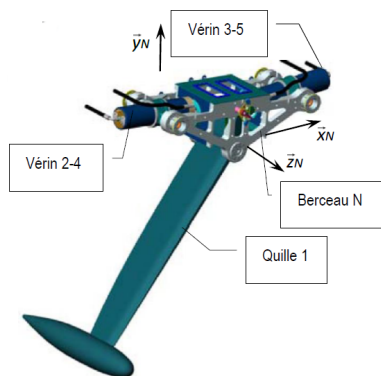
Savoirs et compétences :

- Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.
- Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.

### Mise en situation

Les actions de l'air et de l'eau permettent au voilier d'avancer mais provoquent aussi son inclinaison autour de l'axe longitudinal  $\vec{z}_N$ . C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids.

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire. Cette quille est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_N)$  avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci.



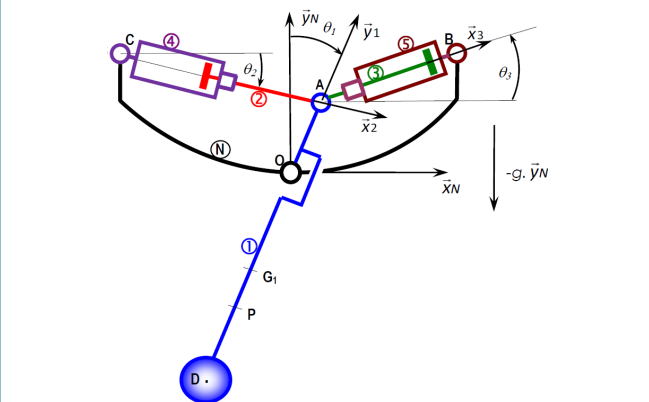
Modèle volumique 3D

**Objectif** L'objectif est de déterminer la puissance utile au déplacement de la quille et de la comparer à celle installée par le constructeur.

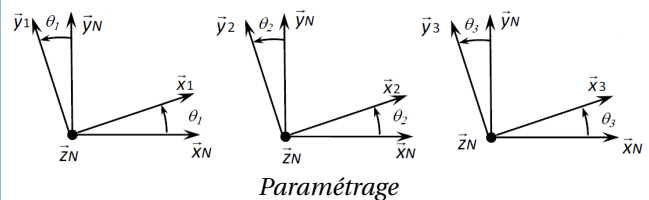
#### Hypothèses

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- Le bateau est à l'arrêt et son repère  $R_N$  est galiléen.
- Lors de la commande de basculement de la quille, les vérins sont alimentés de telle sorte que :  $F_{h2} > 0$  et  $F_{h3} = 0$ . Le vérin 2-4 est alors moteur et le vérin 3-5 est libre ( $F_{h2}$  désigne l'action hydraulique sur la tige du vérin 2; on a donc  $-F_{h2}$  qui agit sur 4).
- Le mouvement du fluide dans les diverses canalisations s'accompagne d'un phénomène de frottement visqueux défini. L'eau exerce sur le voile de quille une action hydrodynamique.

Le modèle de calcul est donné dans les figures suivantes.



Modèle 2D



Paramétrage

#### Données géométriques, massiques et inertielles

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= R\vec{y}_1; \vec{CA} = x_{24}(t)\vec{x}_2; \\ \vec{AB} &= x_{35}(t)\vec{x}_3, \\ \text{Solide 1, masse } M_1, \text{ centre d'inertie } G_1, \\ \vec{OG}_1 &= -L_1\vec{y}_1, I_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}. \\ \text{Solide 2, masse } M_2, \text{ centre d'inertie } G_2, \\ \vec{AG}_2 &= -L_2\vec{x}_2, I_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}. \\ \text{Solide 3, masse } M_3 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2, \text{ centre d'inertie } G_3, \\ \vec{AG}_3 &= L_2\vec{x}_3, I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}. \\ \text{Solide 4, masse } M_4, \text{ centre d'inertie } C, I_C(4) &= \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}. \\ \text{Solide 5, masse } M_5, \text{ centre d'inertie } B, I_B(5) &= \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}. \end{aligned}$$

#### Actions mécaniques

- Action de pression de l'huile sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 2)\} = \begin{pmatrix} F_{h2}\vec{x}_2 \\ 0 \end{pmatrix}_C$ .
- Action de pression de l'huile sur 3 :  $\{\mathcal{T}(\text{ph} \rightarrow 3)\} = \begin{pmatrix} -F_{h3}\vec{x}_3 \\ 0 \end{pmatrix}_B$ .

- Action de frottement visqueux de l'huile sur 2 :  $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -k \frac{dx_{24}(t)}{dt} \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$  avec  $k > 0$ .
- Action de frottement visqueux de l'huile sur 3 :  $\{\mathcal{T}(\text{phf} \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} -k \frac{dx_{35}(t)}{dt} \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$  avec  $k > 0$ .
- Action hydrodynamique de l'eau sur 1 :  $\{\mathcal{T}(\text{eau} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_p \vec{z}_1 + F_l \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$  avec  $\vec{OP} = -h \vec{y}_1$ .

## Vecteurs vitesse

**Question 1** Tracer le graphe de liaisons.

**Question 2** Exprimer les vitesses suivantes :

- $\vec{V}(G_1, 1/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres géométriques utiles;
- $\vec{V}(G_2, 2/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}$  et des paramètres géométriques utiles;
- $\vec{V}(G_3, 3/N)$  en fonction de  $\frac{d\theta_3(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{35}(t)}{dt}$ ,  $x_{35}$  et des paramètres géométriques utiles;
- $\vec{V}(A, 2/4)$  en fonction de  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ .

## Energie cinétique

Soit  $E$  l'ensemble constitué des solides 1, 2, 3, 4 et 5.

On note  $\mathcal{E}_c(i/N)$  l'énergie cinétique de  $i$  dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen  $R_N$ .

**Question 3** Exprimer les énergies cinétiques suivantes :

- $\mathcal{E}_c(1/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_1(t)}{dt}$  et des paramètres inertiels et géométriques utiles;
- $\mathcal{E}_c(2/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$ ,  $\frac{dx_{24}(t)}{dt}$ ,  $x_{24}(t)$  et des paramètres inertiels et géométriques utiles.
- $\mathcal{E}_c(4/N)$ , en fonction de  $\frac{d\theta_2(t)}{dt}$  et des paramètres inertiels et géométriques utiles.

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques intérieures à E

**Question 4** Recenser, puis exprimer les puissances non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \leftrightarrow j)$ ) développées par les actions mécaniques intérieures à  $E$  en fonction du (ou des) paramètre(s) propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

## Evaluation des puissances développées par les actions mécaniques extérieures à E

**Question 5** Recenser, puis exprimer les puissances galiléennes non nulles (notées  $\mathcal{P}(i \rightarrow j/k)$ ) développées par les actions mécaniques extérieures à  $E$ . Chaque puissance sera exprimée à l'aide du (ou des) paramètre(s)

propre(s) à la liaison ou au mouvement concerné.

**Question 6** Appliquer le théorème de l'énergie-puissance à  $E$  dans son mouvement par rapport à  $N$ . Écrire ce théorème de façon globale en utilisant uniquement les notations précédentes, sans leur développement. Exprimer dans ces conditions la puissance motrice que fournit le vérin moteur en fonction du reste : équation (1).

On se place dans le cas où une commande en vitesse est générée à destination du vérin [2, 4]. Le vérin [3, 5] est libre. Cette commande « en trapèze de vitesse » provoque le déplacement de la quille de la position  $\theta_1 = 0$  à la position  $\theta_1 = 45^\circ$  en 4 secondes, le maintien de la quille dans cette position pendant 1 seconde puis le retour à la position  $\theta_1 = 0$  en 4 secondes. Les phases d'accélération et de décélération (rampes) durent 1 seconde.

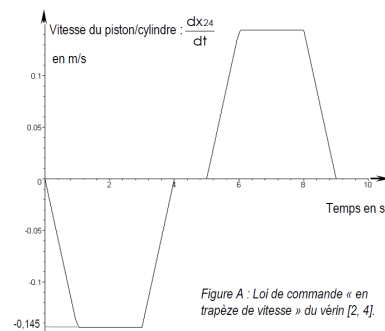
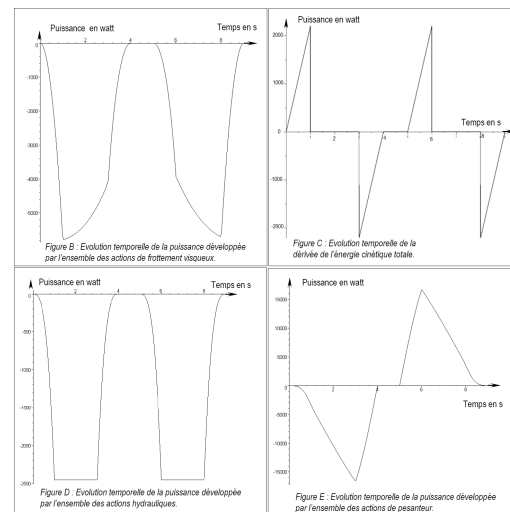


Figure A : Loi de commande « en trapèze de vitesse » du vérin [2, 4].

Un logiciel de calcul permet de tracer l'évolution temporelle des puissances mises en jeu. Ces puissances sont représentées sur la figure suivante.



**Question 7** Dans le but de chiffrer la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur pour réaliser le mouvement prévu, tracer, à l'aide de la figure précédente, l'allure de l'évolution temporelle de cette puissance. Pour cela, évaluer les valeurs aux instants  $t = 0$ s,  $t = 1$ s,  $t = 3$ s et  $t = 4$ s. Sur cet intervalle  $[0, 4]$ s, évaluer, en kW, la valeur maximale de la puissance que doit fournir l'actionneur. Expliquer pourquoi le maximum de puissance est situé sur cet intervalle.

**Question 8** Le constructeur indique une puissance

motrice installée sur son bateau de 30 kW. Dans les hypothèses utilisées pour constituer le modèle de calcul, indiquer ce qui peut expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur installée.