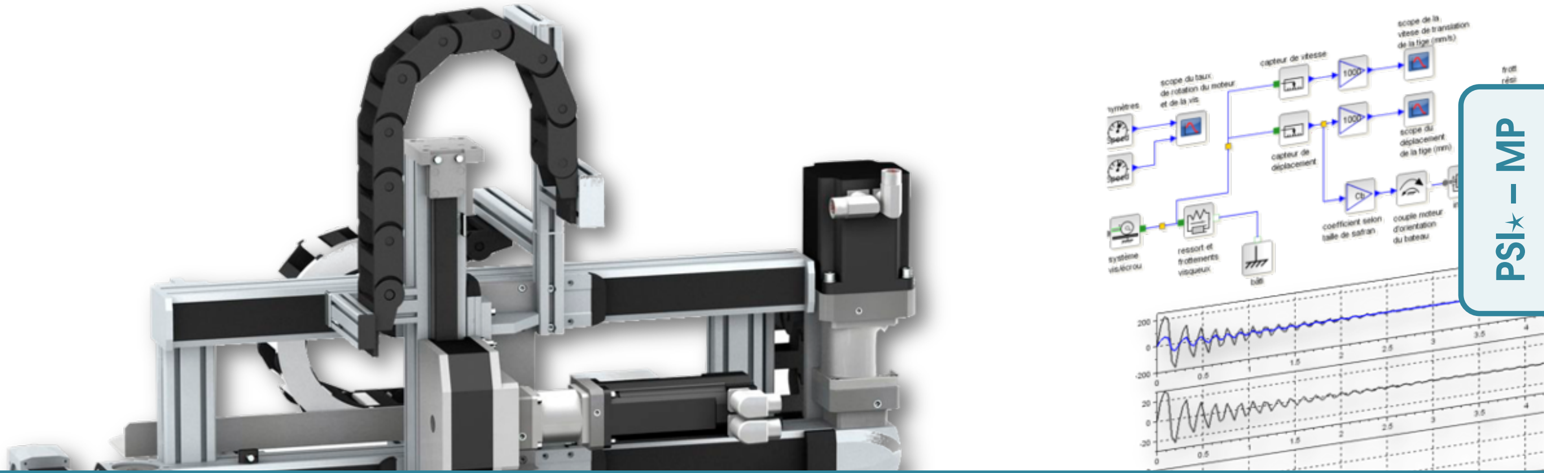


PSI⋆ – MP

Cycle 3

Concevoir la commande des systèmes asservis afin de valider leurs performances

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Cours

Chapitre 2

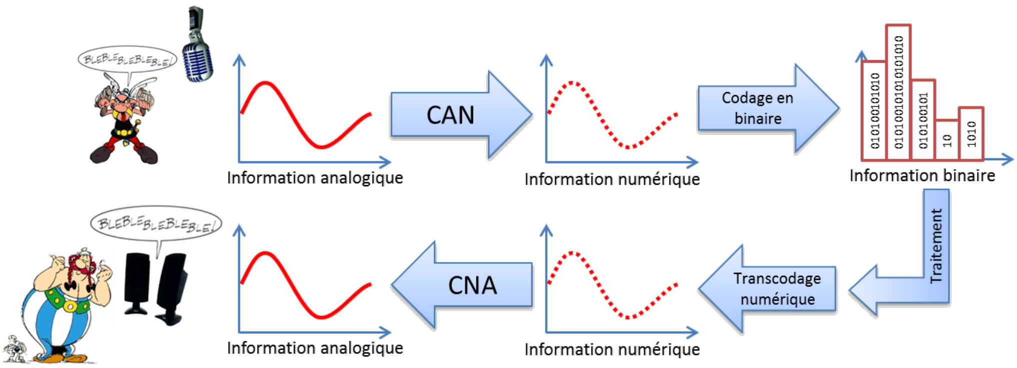
Correction numérique des systèmes asservis

Savoirs et compétences :

Xavier Pessoles
PSI⋆ – MP

1 Rappels sur les caractéristiques des signaux numériques

Lors du traitement des signaux par un ordinateur, un microcôntroleur, un automate ou autre dispositif, les signaux analogiques (continues) sont convertis en signaux numériques (discrets) pour être traités. On parle de conversion analogique – numérique (CAN). L'opération inverse est alors réalisée lorsqu'il est nécessaire de restituer de l'information à l'utilisateur.



1.1 Echantillonnage et quantification

Définition Echantillonnage Échantillonner un signal consiste à prélever les valeurs de ce signal à intervalles définis. Si ces intervalles sont réguliers, on note T_e la période d'échantillonnage (en seconde), c'est-à-dire la durée entre deux prélèvements. On note $f_e = \dfrac{1}{T_e}$ la fréquence d'écantillonnage (en Hertz), c'est-à-dire le nombre d'échantillons par seconde.

Si on note e(t) le signal continu, on notera $e_k = e(kT_e)$ la valeur de l'échantillon $e(t)$ à l'instant kT_e.

*** Choix de la période d'échantillonnage***

Théorème Théorème de Shannon Soit un signal périodique décomposable en signaux périodiques dont la fréquence maximale présente est largement supérieure à celle minimale présente. La représentation discrète d'un signal par des échantillons régulièrement espacés exige une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale présente dans ce signal.

*** Conséquences du théorème Shannon ***

Définition Quantification Quantifier in signal consiste à approcher un signal continu par les valeurs d'un ensemble discret.

En général, le système étant échantilloné sur un système binaire sur N bits, on peut donc approcher le signal par 2^N valeurs discrètes.

Définition Erreur de quantification Soit un signal continu borné entre les valeurs $e_{\min}$ et $e_{\max}$ échantilloné sur N bits. Le pas de quantification donne aussi l'erreur maximala de quantification. On a $q = \dfrac{e_{\max} - e_{\min}}{2^N}$.

1.2 Conversion analogique – numérique

1.3 Conversion numérique – analogique

2 Filtrage numérique

Définition Filtrage numérique
Soit e_k un signal discret. Soit s_k un signal discret filtré. $k \in \mathbb{N}$ est le numéro de l'échantillon. On appelle filtrage numérique l'opération mathématique permettant de filtrer un signal, c'est-à-dire d'éliminer certaines composantes harmoniques.

2.1 Filtrage numérique passe-bas

Définition Filtre passe-bas du premier ordre

On donne l'équation différentielle d'un filtre du premier ordre : $s(t) + \tau \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[s(t)] = e(t)$. T_e est la période d'échantillonnage du système.

On montre que $s_k = \dfrac{T_e}{T_e + \tau} e_k + \dfrac{\tau}{T_e + \tau} s_{k-1}$.

La pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$ du filtre est donné par $\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$.

Démonstration On a $s(t) + \tau \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[s(t)] = e(t)$. En approximant $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[s(t)]$ par $\dfrac{s(t) - s(t - T_e)}{T_e}$, puis en discrétisant

l'équation différentielle, on a donc : $s_k + \tau \dfrac{s_k - s_{k-1}}{T_e} = e_k \Leftrightarrow s_k \left(1 + \dfrac{\tau}{T_e}\right) - s_{k-1} \dfrac{\tau}{T_e} = e_k \Leftrightarrow s_k \dfrac{T_e + \tau}{T_e} = e_k + s_{k-1} \dfrac{\tau}{T_e}$
$\Leftrightarrow s_k = e_k \dfrac{T_e}{T_e + \tau} + s_{k-1} \dfrac{\tau}{T_e} \dfrac{T_e}{T_e + \tau} \Leftrightarrow s_k = e_k \dfrac{T_e}{T_e + \tau} + s_{k-1} \dfrac{\tau}{T_e + \tau}$.

2.2 Filtrage numérique à moyenne glissante

3 Correcteurs numériques

3.1 Correcteur P

Définition Correcteur proportionnel Dans le domaine temporel, on a $u(t) = K_P \varepsilon(t)$. Cela est traduit par le relation de récurrence suivante : $u_k = K_p \varepsilon_k$.

3.2 Correcteur PI

Définition Correcteur proportionnel intégral Dans le domaine temporel, on a $u(t) = K_P \left(\varepsilon(t) + \dfrac{1}{T_i} \displaystyle\int_0^t \varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$. Cela est traduit par la relation de récurrence suivante : $u_k = u_{k-1} + K_p \left(\varepsilon_k \left(1 + \dfrac{T_e}{T_i}\right) - \varepsilon_{k-1}\right)$.

3.3 Correcteur PID

Définition Correcteur proportionnel intégral et dérivé

Dans le domaine temporel, on a $u(t) = K_P \left(\varepsilon(t) + \dfrac{1}{T_i} \displaystyle\int_0^t \varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau + T_d \dfrac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\right)$. Cela est traduit par la relation de récurrence suivante : $u_k = u_{k-1} + K_p \left(\varepsilon_k \left(1 + \dfrac{T_e}{T_i} + \dfrac{T_d}{T_e}\right) - \varepsilon_{k-1} \left(1 + \dfrac{T_d}{T_e}\right)\right)$.

4 Limite des correcteurs lors de la commande de systèmes

Références

Cycle 3