

## DDS 3

Les p'tits devoirs du soir  
Xavier Pessoles

## Exercice 169 – Automate d'exploration de l'hémostase \*

C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Le principe de la chronométrie consiste à mesurer la variation de l'amplitude d'oscillation d'une bille placée dans la cuvette de mesure (Figure 3).

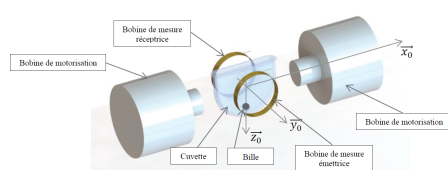


FIGURE 1 – Ensemble cuvette + bille avec bobines motrices et bobines de mesure

La bille, roulant sans glisser sur le fond cylindrique de la cuvette, est mise en mouvement par un champ magnétique variable induit par deux bobines motrices placées de part et d'autre de la tête de mesure. L'amplitude des oscillations est mesurée par deux autres bobines, l'une émettrice, l'autre réceptrice. Après amplification du signal mesuré, on obtient un signal quasi-sinusoïdal, reflet de l'oscillation de la bille. A viscosité constante, on obtient un balancement pendulaire constant de la bille. Quand la viscosité augmente (phénomène de coagulation), l'amplitude d'oscillation de la bille varie. Pour chaque mesure, le champ magnétique est ajusté en fonction de la viscosité initiale du milieu et du type de test.

Le schéma de calcul est donné Figure 2.

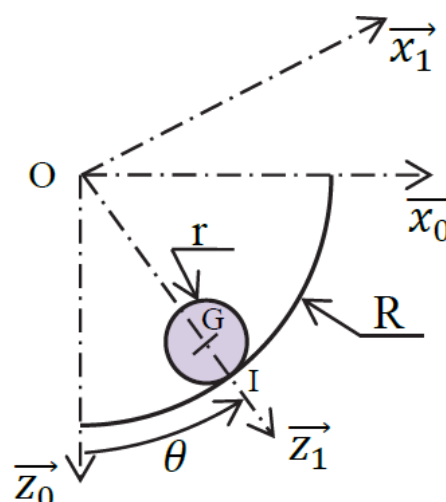


FIGURE 2 – Bille en contact avec le rail de la cuvette

Hypothèses :

- la bille de masse  $m$ , de centre de masse  $G$ , de rayon  $r$ , roule sans glisser sur un rail circulaire de rayon  $R$  dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ;
- $I$  est le point de contact entre la bille et le rail circulaire;
- la position de la bille sur le rail est repérée par :  $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ .

On note :

- $\{\mathcal{T}(\text{rail} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} -N_I \vec{z}_1 + T_I \vec{x}_1 \\ 0 \end{array} \right\}_I$ , le torseur associé à l'action mécanique du rail sur la bille;
- $f$  le coefficient d'adhérence au contact bille/cuvette :  $f = 0, 1$ ;

- $\{\mathcal{T}(\text{bob} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(\text{bob} \rightarrow \text{bille}) = F(t) \vec{x}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_G$ , le torseur associé à l'effort résultant des deux bobines de motorisation sur la bille, avec  $F(t) = F_0 \sin(\omega_{\text{bob}}(t))$ ;

- $\{\mathcal{T}(\text{fluide} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(\text{fluide} \rightarrow \text{bille}) = -f_v \overrightarrow{V(G, \text{bille}/0)} \\ 0 \end{array} \right\}_G$

le torseur associé à l'action du fluide sur la bille induite par la viscosité. On se place dans l'hypothèse simplificatrice d'un écoulement laminaire pour lequel le modèle de Stokes est applicable : le coefficient de frottement visqueux vaut alors  $f_v = 6\pi r \eta$  où  $\eta$  est la viscosité du sang qui varie

lors de la coagulation ;

- $\{\mathcal{T}(g \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \frac{mg \vec{z}_0}{0} \right\}_G$ , le torseur associé à l'action de la pesanteur sur la bille ;
- $\{\mathcal{V}(\text{bille}/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\text{bille}/0) = \omega_b \vec{y}_0 \\ V(G, \text{bille}/0) = v \vec{x}_1 \end{array} \right\}_G$ , le torseur cinématique de la bille par rapport au rail 0 ;
- $J = \frac{2}{5} m r^2$ , le moment d'inertie de la bille autour de l'axe  $(G, \vec{y}_0)$  ;
- $R = \|\vec{OI}\|$ , le rayon du rail,  $r = \|\vec{GI}\|$ , le rayon de la bille.

On notera  $F(p)$  la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  où  $p$  représente la variable de Laplace.

**Question 1** En exprimant la condition de roulement sans glissement en  $I$ , déterminer  $\omega_b$  et  $v$ , les composantes du torseur cinématique en  $G$  de la bille par rapport au rail 0, en fonction de  $\dot{\theta}$ ,  $r$  et  $R$ .

**Question 2** En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés : montrer que les efforts normal  $N_I$  et tangentiel  $T_I$  du rail sur la bille sont liés à l'angle  $\theta$  par les équations suivantes :

$$N_I = F(t) \sin \theta + mg \cos \theta + m(R-r)\dot{\theta}^2 \text{ et } T_I = \frac{2}{5} m(r-R)\ddot{\theta}.$$

**Question 3** En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés, montrer que  $\frac{7}{5} m(r-R)\ddot{\theta} + f_v(r-R)\dot{\theta} + mg \sin \theta = F(t) \cos \theta$ .

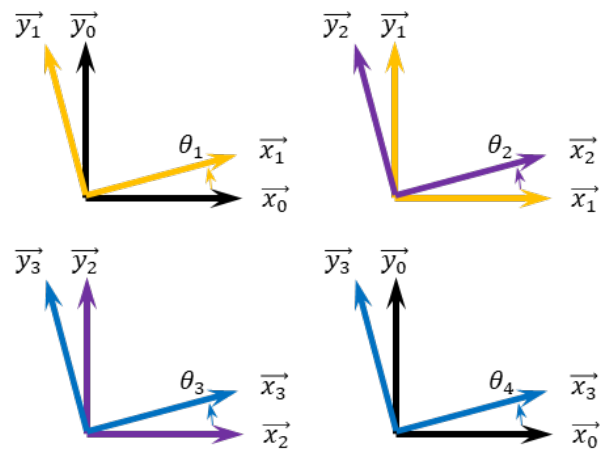
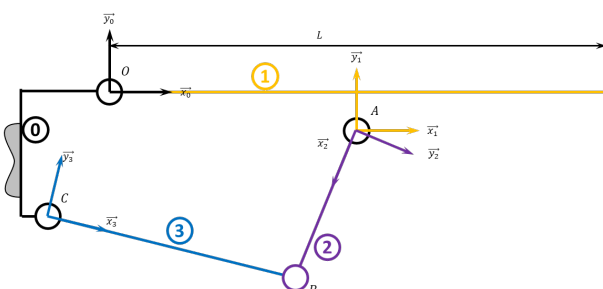
Corrigé voir 169.

### Exercice 168 – Système 4 barres \*\*

**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

On a :

- $\vec{OA} = a \vec{x}_1 - f \vec{y}_1$  avec  $a = 355 \text{ mm}$  et  $f = 13 \text{ mm}$  ;
- $\vec{AB} = b \vec{x}_2$  avec  $b = 280 \text{ mm}$  ;
- $\vec{BC} = -c \vec{x}_3$  avec  $c = 280 \text{ mm}$  ;
- $\vec{OC} = -d \vec{x}_0 - e \vec{y}_0$  avec  $d = 89,5 \text{ mm}$  et  $e = 160 \text{ mm}$  ;



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\theta_1(t)$  en fonction de  $\theta_4(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\theta}_1(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}_4(t)$ .

**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\dot{\theta}_1(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}_4(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

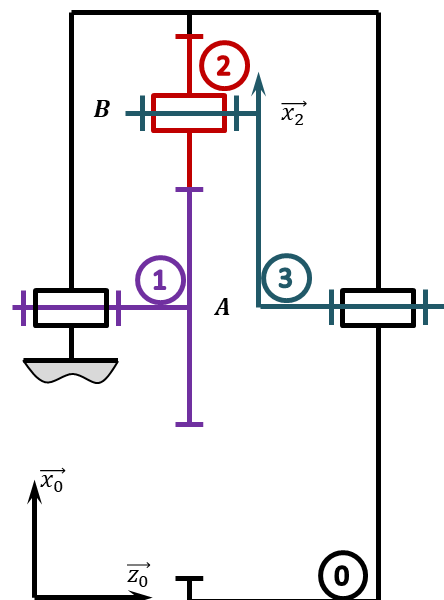
Corrigé voir 168.

### Exercice 167 – Train simple \*

**A3-05**

**C2-06**

Soit le train épicycloïdal suivant.



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction du nombre de dents des roues dentées.

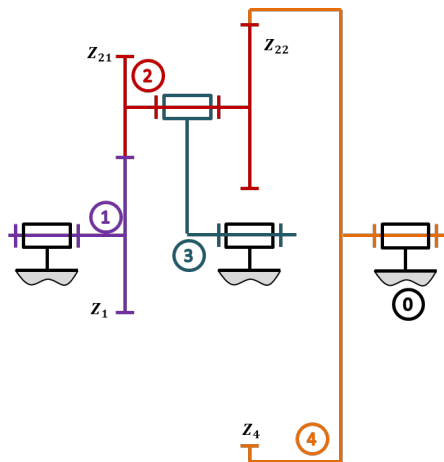
Corrigé voir 167.

## Exercise 166 – Train simple ★

**A3-05**

**C2-06**

Soit le train épicycloïdal suivant.



**Question 1** *Tracer le graphe des liaisons.*

**Question 2** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

**Question 3** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

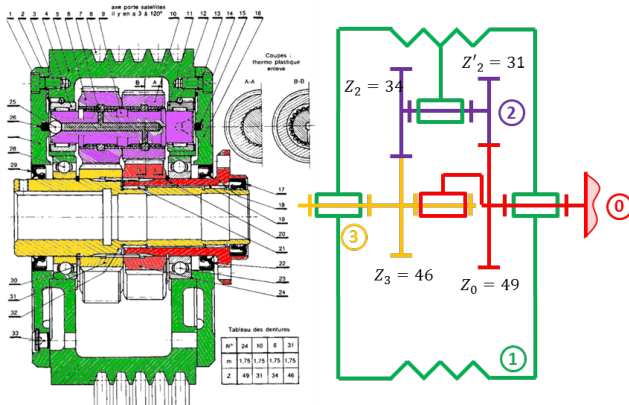
Corrigé voir 166.

**Exercice 165 – Poulie Redex** ★ *D'après ressources de Stéphane Genouël.*

**A3-05**

**C2-06**

Soit le train d'engrenages suivant.



**Question 1** *Tracer le graphe des liaisons.*

**Question 2** Déterminer littéralement, en fonction des nombres de dents, la loi E/S du système (c'est-à-dire le rapport de transmission).

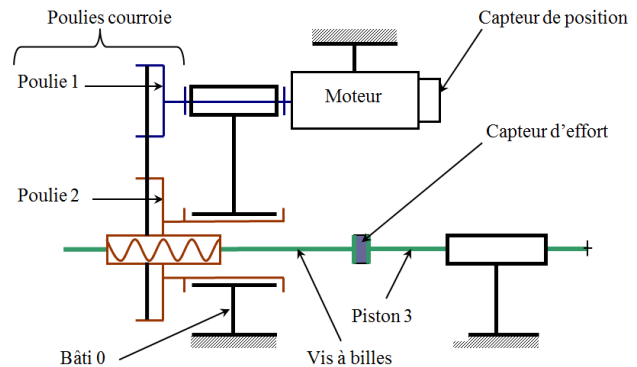
Corrigé voir 165.

**Exercice 164 – Système vis-écrou** ★ *D'après ressources Pole Chateaubriand – Joliot-Curie.*

**A3-05**

**C2-06**

Soit la chaîne de transmission suivante.



Le schéma du restituteur actif est donné ci-dessous. Le pas de la vis est  $p_v = 10 \text{ mm}$ . Le diamètre de la poulie 2 est le double de celui de la poulie 1.

**Question 1** Sur le schéma cinématique, repasser chaque solide d'une couleur différente.

**Question 2** Réaliser la chaîne d'énergie-puissance partielle en définissant les noms des transmetteurs et les grandeurs d'entrée et de sortie cinématiques.

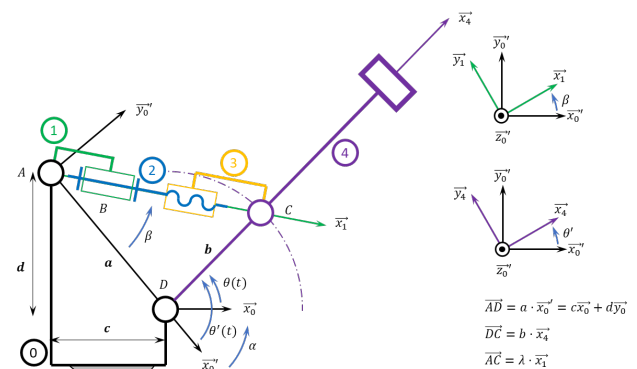
**Question 3** Définir la loi entrée-sortie entre la vitesse de translation du piston 3 et la vitesse de rotation du moteur 1.

Corrigé voir 164.

### Exercice 163 – Maxpid ★★★

**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le schéma suivant.



Par ailleurs  $a = 107,1 \text{ mm}$ ,  $b = 80 \text{ mm}$ ,  $c = 70 \text{ mm}$ ,  
 $d = 80 \text{ mm}$ . Le pas de la vis est de  $4 \text{ mm}$ .

**Question 1** *Tracer le graphe des liaisons.*

**Question 2** Exprimer  $\theta(t)$  en fonction de  $\lambda(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\dot{\lambda}(t)$ .

**Question 4** Exprimer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\omega(t)$ , vitesse de rotation du rotor moteur 2 par rapport au stator

1.

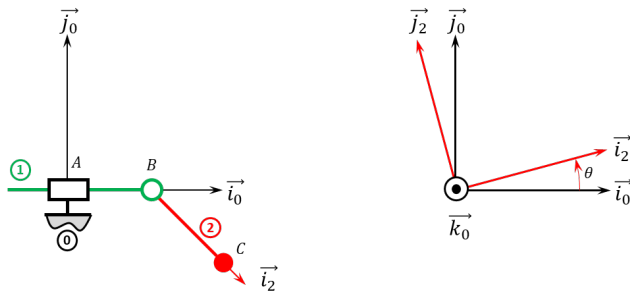
**Question 5** En utilisant Python, tracer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\omega(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 2 par rapport à 1 est de 500 tours par minute.

Corrigé voir 163.

### Exercice 162 – Mouvement RT \*

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{BC} = R \vec{i}_2$  avec  $R = 30$  mm.



**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V}(C, 2/0)$  par dérivation vectorielle ou par composition.

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0)$ .

Indications :

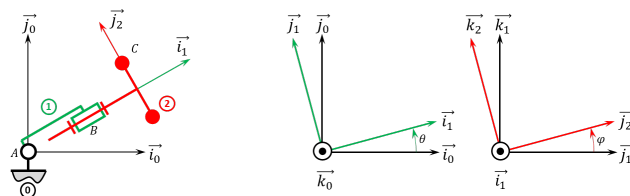
1.  $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R \dot{\theta} \vec{j}_2$ .
2.  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \Omega(2/0) = \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ \overrightarrow{V}(C, 2/0) \end{array} \right\}_C$ .
3.  $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0) = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + R(\ddot{\theta} \vec{j}_2 - \dot{\theta}^2 \vec{i}_2)$ .

Corrigé voir 162.

### Exercice 161 – Mouvement RR 3D \*

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{BC} = \ell \vec{i}_2 + r \vec{j}_2$ . On note  $R + \ell = L = 20$  mm et  $r = 10$  mm.



**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V}(C, 2/0)$  par dérivation vectorielle.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V}(C, 2/0)$  par composition.

**Question 3** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0)$ .

Indications :

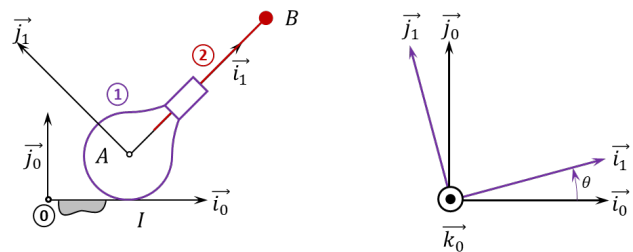
1.  $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = (R + \ell) \dot{\theta} \vec{j}_1 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\varphi} \vec{k}_2$ .
2.  $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = r \dot{\varphi} \vec{k}_2 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + \ell \dot{\theta} \vec{j}_1 + R \dot{\theta} \vec{j}_1$ .
3.  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{i}_1 \\ (R + \ell) \dot{\theta} \vec{j}_1 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\varphi} \vec{k}_2 \end{array} \right\}_C$ .
4.  $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0) = (R + \ell) \ddot{\theta} \vec{j}_1 - (R + \ell) \dot{\theta}^2 \vec{i}_1 - r \ddot{\varphi} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{i}_1 - r \dot{\theta}^2 \cos \varphi \vec{j}_1 + r \dot{\varphi} \vec{k}_2 + r \dot{\varphi} (\dot{\theta} \sin \varphi \vec{i}_1 - \dot{\varphi} \vec{j}_2)$ .

Corrigé voir ??.

### Exercice 160 – Mouvement RT – RSG \*\*

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{IA} = R \vec{j}_0$  et  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ . De plus  $R = 15$  mm. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I.



**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V}(B, 2/0)$ .

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point B.

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma}(B, 2/0)$ .

Indications :

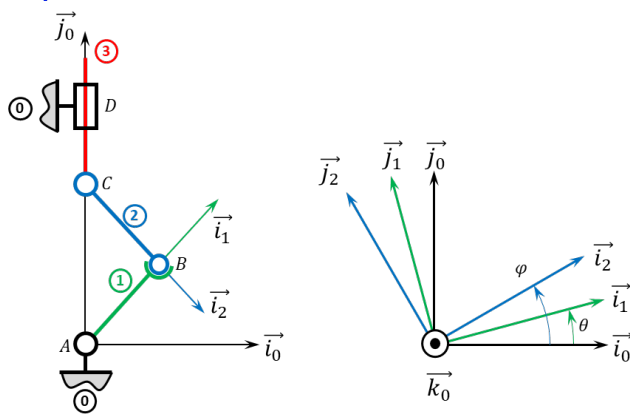
1.  $\overrightarrow{V}(B, 2/0) = \dot{\lambda} \vec{i}_1 + \dot{\theta} (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0)$ .
2.  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda} \vec{i}_1 + \dot{\theta} (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) \end{array} \right\}_B$ .
3.  $\overrightarrow{\Gamma}(B, 2/0) = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \ddot{\theta} (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) + \dot{\theta} (\dot{\lambda}(t) \vec{j}_1 - \dot{\lambda}(t) \dot{\theta} \vec{i}_1)$ .

Corrigé voir 160.

### Exercice 159 – Système bielle manivelle \*

B2-13 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AB} = R \vec{i}_1$  et  $\overrightarrow{CB} = L \vec{i}_2$ . De plus,  $R = 10$  mm et  $L = 20$  mm.



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme  $\lambda(t) = \pm \sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)} + R \sin \theta(t)$  et  $\dot{\lambda}(t) = \pm \left( \frac{R^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)}} \right) + \dot{\theta}(t) R \cos \theta(t)$ . (à vérifier – voir exercice ??).

**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point B.

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  et au point C.

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)}$ .

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$ .

Corrigé voir 159.

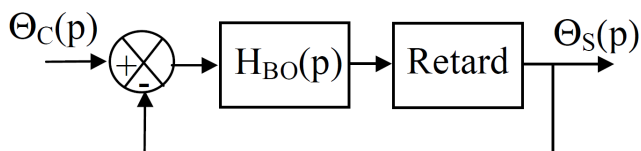
### Exercice 158 – \*

C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

On donne le système suivant dont la FTBF est donnée par  $G(p) = \frac{\Theta_s(p)}{\Theta_c(p)} = \frac{3,24}{p^2 + 3,24p + 3,24}$ . Le retard du système est de 0,2 s.

L'asservissement est donné par le schéma-blocs suivant.



**Question 1** En considérant le retard nul, déterminer l'écart statique.

**Question 2** En considérant le retard nul, déterminer l'écart statique, déterminer l'expression de la boucle ouverte  $H_{BO}(p)$ .

**Question 3** Déterminer l'expression de  $G_r(p)$ , transmittance en boucle fermée du système avec retard de 0,2 s.

Le système est soumise à une rampe de  $0,1 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 4** Donner la valeur de l'erreur de traînage correspondant à cette entrée, en négligeant le retard.

**Question 5** Donner la valeur de l'écart statique du système avec retard.

**Question 6** Donner la valeur de l'erreur de traînage du système avec retard.

Corrigé voir 158.

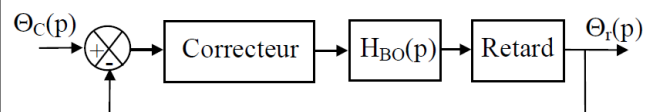


### Exercice 157 – \*

C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

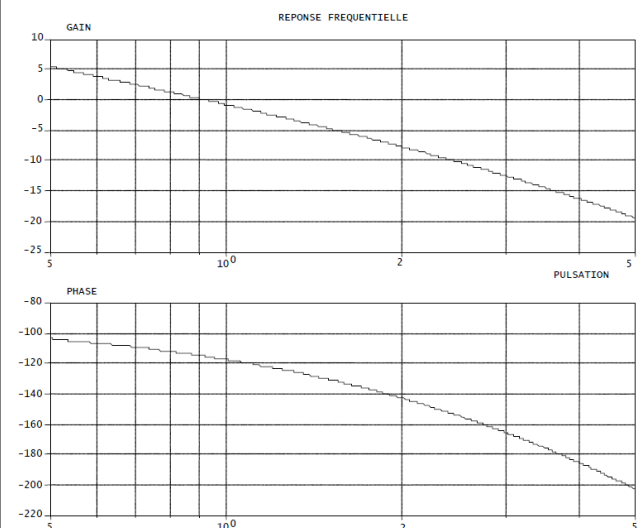
L'asservissement est donné par le schéma-blocs suivant.  $H_{BO}(p) = \frac{4}{p(p+3,6)}$ . Le retard du système est de 0,2 s. De plus,  $C(p) = K_c \frac{1 + T_c p}{T_c p}$



**Question 1** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de  $H_{BO}(p)$  pour des pulsations comprises entre  $0,5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $50 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 2** Tracer le diagramme de Bode du retard pour des pulsations comprises entre  $0,5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $50 \text{ rad s}^{-1}$ .

On donne le diagramme de la FTBO retardée.



**Question 3** Déterminer le gain  $K_c$  qui donne une marge de phase de  $50^\circ$ .

**Question 4** La constante  $T_c$  qui laisse subsister une marge de phase d'environ  $45^\circ$ .

**Question 5** Quelle est l'erreur de traînage du système corrigé pour l'entrée en rampe considérée (en négligeant le retard).

Corrigé voir 157.

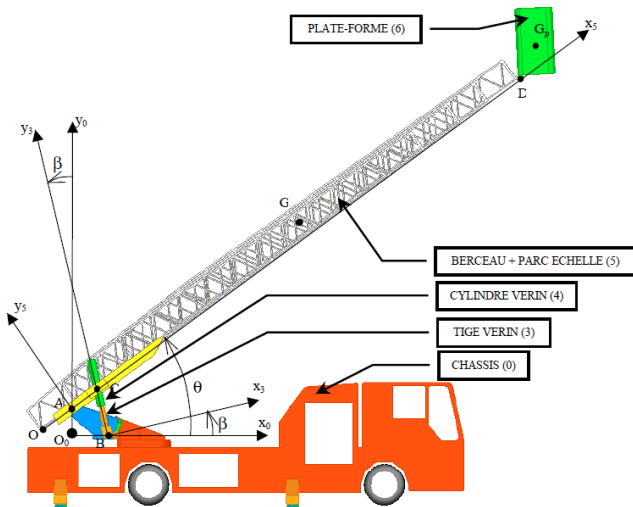
### Exercice 156 – Système EPAS \*

#### C2-06 Pas de corrigé pour cet exercice.

Nous allons déterminer la vitesse de sortie des vérins pour que la vitesse des points de la plate-forme soit constante.

On propose le paramétrage suivant :

- le repère  $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au châssis (0) ;
- le repère  $\mathcal{R}_5 = (A; \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  est lié à l'ensemble {berceau+parc échelle} (5) avec  $\vec{O_0A} = a \vec{y}_0$  et  $(x_0, x_5) = \theta$ ,  $\vec{AC} = c \vec{x}_5$ ,  $\vec{AD} = H \vec{x}_5$  ;
- le repère  $\mathcal{R}_3 = (B; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est lié au vérin (3+4) avec  $\vec{O_0B} = b \vec{x}_0$  et  $\vec{BC} = r \vec{y}_3$  et  $\beta = (x_0, x_3)$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer la vitesse du point D du parc échelle dans son mouvement par rapport au châssis :  $\vec{V}(D,5/0)$  en fonction de la vitesse angulaire de dressage  $\dot{\theta}$  et des paramètres géométriques.

**Question 3** En faisant une fermeture de chaîne cinématique, déterminez la vitesse de sortie du vérin  $\vec{V}(V,4/3) = v \vec{y}_3$  en fonction de la vitesse angulaire de dressage et des paramètres géométriques.

**Question 4** Etablir la relation  $\tan \beta = \frac{b - c \cos \theta}{a + c \sin \theta}$  en écrivant une fermeture de chaîne géométrique.

**Question 5** Dédurre des questions précédentes la vitesse de sortie des vérins  $v$  en fonction de  $\theta$  et  $H$  et des constantes  $a, b, c$  ; pour que la vitesse du point D du parc échelle soit constante.

Eléments de corrigé :

- $\vec{V}(D,5/0) = H \dot{\theta} \vec{y}_5$ .
- $v = c \dot{\theta} \cos(\theta - \beta)$ .
- $v = \dot{r} = \frac{c \dot{\theta} (a \cos \theta + b \sin \theta)}{\sqrt{(b - c \cos \theta)^2 + (a + c \sin \theta)^2}}$ .

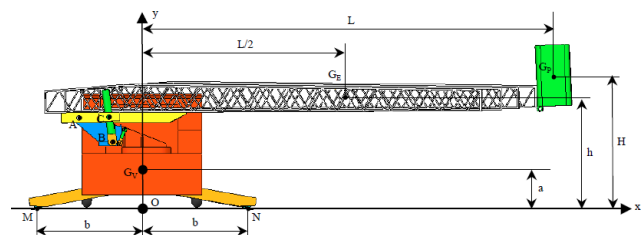
Corrigé voir 156.

### Exercice 155 – Pèse camion \*\*

#### C2-07 Pas de corrigé pour cet exercice.

Le véhicule porteur de l'E.P.A.S. doit être équipé de stabilisateurs. Une fois en place, les stabilisateurs le soulèvent, afin qu'il ne repose plus sur les roues (les roues touchent le sol mais ne supportent aucun poids) : le mouvement des suspensions du véhicule mettrait en danger sa stabilité.

L'objet de cette partie est de déterminer la longueur de déploiement maximale que le système de sécurité pourra autoriser.



Le véhicule est dans la configuration de la figure précédente :

- parc échelle horizontale ;
- stabilisateurs sortis au maximum ;
- charge maximale dans la plate-forme.

Le problème sera traité en statique plane dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  de la figure précédente.

Les efforts pris en compte sont :

- les actions de pesanteur sur chaque élément :
  - véhicule et charge utile, centre d'inertie  $G_V$ , masse  $m_V$ ,  $\vec{OG_V} = a \vec{y}$ ,
  - parc échelle, centre d'inertie  $G_E$ , masse  $m_E$ ,  $\vec{OG_E} = \frac{L}{2} \vec{x} + h \vec{y}$ ,
  - plate-forme et charge utile, centre d'inertie  $G_P$ , masse  $m_P$ ,  $\vec{OG_P} = L \vec{x} + H \vec{y}$  ;
- les actions de contact de la route sur les stabilisateurs.

Ces actions sont modélisées par des glisseurs passant l'un par M, tel que  $\vec{OM} = -b \vec{x}$  et l'autre par N tel que  $\vec{ON} = b \vec{x}$ . Les résultantes de ces glisseurs seront notées respectivement :  $\vec{R}_M = X_M \vec{x} + Y_M \vec{y}$  et  $\vec{R}_N = X_N \vec{x} + Y_N \vec{y}$ .

**Question 1** Exprimer la condition de non basculement de l'ensemble.



**Question 2** Calculer la longueur  $L_{max}$  de déploiement au-delà de laquelle il y aura basculement.

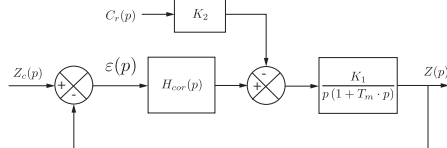
Corrigé voir 155.

### Exercice 154 – Hemostase – Stabilité\*

#### C2-03

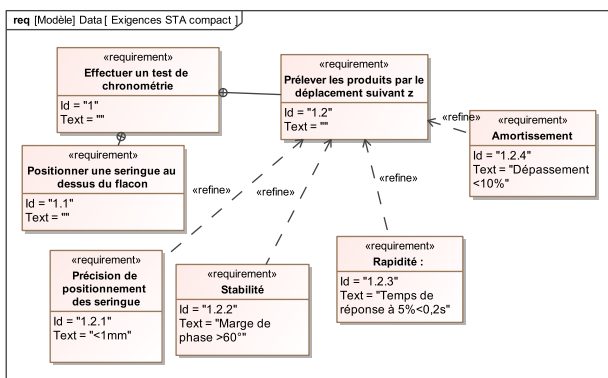
La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous dans lequel  $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} \text{N}^{-1}$ ,  $K_1 = 856 \text{s}^{-1}$ ,  $T_m = 3 \cdot 10^{-2} \text{s}$ .

Le couple résistant  $C_r$  est constant et vaut  $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{Nm}$ .



On suppose le correcteur proportionnel :  $H_{cor}(p) = K_p$ .

Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partiel.



**Question 1** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(p) = \left( \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} \right)_{C_r(p)=0}$  ainsi que la fonction de transfert  $H_{cr}(p) = \left( \frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$ .

**Question 2** Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude  $Z_{c0}$  dans l'hypothèse d'une perturbation nulle ( $C_{r0}$ ). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante  $C_{r0}$ , dans le cas d'une consigne de position nulle ( $Z_c = 0$ ). En déduire la valeur de  $K_p$  pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

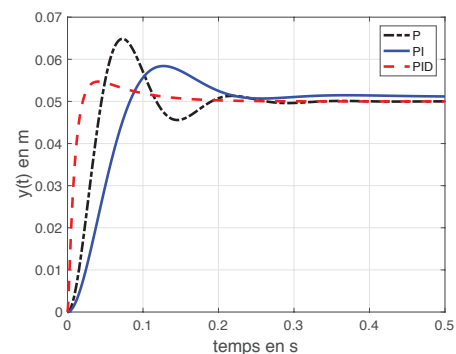
**Question 3** Sur le document réponse compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de  $H_{bo}(p)$  pour  $K_p$  déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.

Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert :  $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$  avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1 \text{s}$ .

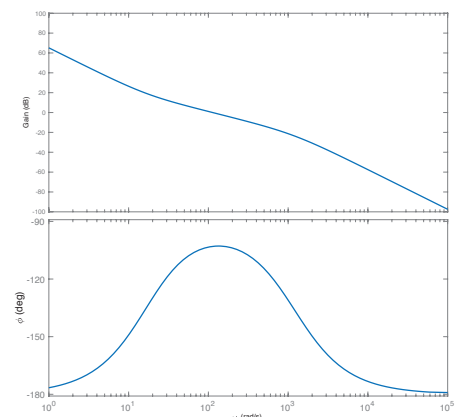
**Question 4** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1 \text{s}$ .

**Question 5** On souhaite une marge de phase d'au moins  $60^\circ$ . Proposer un réglage de  $K_p$  pour satisfaire au cahier des charges.

**Question 6** La figure suivante donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.



**Question 7** Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigée avec un PID optimisé.



Corrigé voir 154.

### Exercice 153 – Automate d'exploration de l'hémostase \*

#### C2-09 Pas de corrigé pour cet exercice.

Afin de valider le choix des moteurs, on étudie le déplacement sur l'axe  $\vec{x}$ . On note  $V_x$  la vitesse selon cet axe. On rappelle que la distance maximum à parcourir est  $x_M^{\max} = 550 \text{mm}$  en 1 seconde. La loi de commande sur chaque axe est définie par un trapèze de vitesse (Figure 3) avec les temps d'accélération et de décélération ( $T_a$ ) identiques. De plus, les moteurs se mettent en route et s'arrêtent en même temps.  $T$  est la durée totale du déplacement. Nous allons chercher à optimiser cette loi de commande de sorte que le moteur fournisse une puissance instantanée minimale.

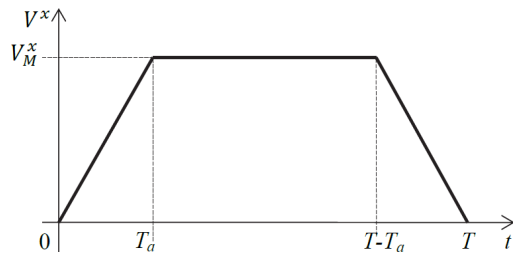


FIGURE 3 – Loi de commande de vitesse en trapèze

Le modèle de calcul pour cette commande d'axe est le suivant :

- le mouvement de rotation du moteur (vitesse  $\omega_m^x$ ) est transformé en mouvement de translation (vitesse  $V^x$ ) ;
- le rapport de transmission de la chaîne cinématique est  $\lambda = \frac{V^x}{\omega_m^x}$  ;
- la distance à parcourir est  $x_M^{\max}$  ;
- l'inertie équivalente de l'ensemble des pièces en mouvement ramenée à l'arbre moteur est  $J_e$  ;
- les frottements et la pesanteur sont négligés, il n'y a donc pas de couple résistant.

**Question 1** Exprimer la vitesse maximale  $V_M^x$  en fonction de  $x_M^{\max}$ ,  $T$  et  $T_a$ .

**Question 2** Par application du théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble des pièces en mouvement, exprimer le couple moteur  $C_m$  en fonction de  $V_x$ ,  $T_a$ ,  $J_e$  et  $\lambda$

durant les trois phases du mouvement.

**Question 3** Préciser à quel(s) instant(s)  $t$  la puissance fournie par le moteur est maximale ( $P_{\max}$ )

**Question 4** Exprimer cette puissance  $P_{\max}$  en fonction de  $V_M^x$ ,  $\lambda$ ,  $J_e$ , et  $T_a$ .

**Question 5** Donner alors l'expression de  $P_{\max}$  en fonction de  $x_M^{\max}$ ,  $\lambda$ ,  $J_e$ , et  $T_a$ .

**Question 6** À partir de cette expression, montrer que  $P_{\max}$  est minimale pour un réglage du temps d'accélération  $T_a$  tel que  $T_a = \frac{T}{3}$ .

Pour cette nouvelle commande avec  $T_a = \frac{T}{3}$ , on cherche à valider le choix du moteur en étudiant le déplacement maximum suivant  $\vec{x}$ . Les caractéristiques de la chaîne cinématique sont :

- vitesse maximale du moteur :  $N_{\max}^{\text{mot}} = 4150 \text{ tr min}^{-1}$  ;
- rapport de réduction du réducteur  $k = \frac{1}{10}$  ;
- rayon de poulie  $R_p = 20 \text{ mm}$ .

**Question 7** Déterminer la vitesse de rotation maximum  $\omega_{\max}^x$  que doit atteindre le moteur. Le choix de celui-ci est-il validé?

Corrigé voir 153.



**Exercice 169 – Automate d'exploration de l'hémostase \***

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** En exprimant la condition de roulement sans glissement en I, déterminer  $\omega_b$  et  $v$ , les composantes du torseur cinématique en G de la bille par rapport au rail 0, en fonction de  $\dot{\theta}$ ,  $r$  et  $R$ .

- On isole la bille.
- On réalise le bilan des actions mécaniques :
  - $\{\mathcal{T}(\text{rail} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} -N_I \vec{z}_1 + T_I \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} -N_I \vec{z}_1 + T_I \vec{x}_1 \\ r T_I \vec{y}_1 \end{array} \right\}_G$ .
  - $\{\mathcal{T}(\text{bob} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(\text{bob} \rightarrow \text{bille}) = F(t) \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$ .
  - $\{\mathcal{T}(\text{fluide} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(\text{fluide} \rightarrow \text{bille}) = -f_v \vec{V}(G, \text{bille}/0) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$ .
  - $\{\mathcal{T}(g \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} mg \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$ .
- On calcule le torseur dynamique de la bille  $\{\mathcal{D}(\text{bille}/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m\Gamma(G, \text{bille}/0) \\ -J \frac{R-r}{r} \ddot{\theta} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_G$  avec  $\Gamma(G, \text{bille}/0) = \frac{dV(G, \text{bille}/0)}{dt}$ .

$$(R-r)\ddot{\theta} \vec{x}_1 - (R-r)\dot{\theta}^2 \vec{z}_1.$$

En appliquant le TRD à la bille en projection sur  $\vec{z}_1$ , on a :  $-N_I + F(t) \vec{x}_0 \cdot \vec{z}_1 + mg \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_1 = -m(R-r)\dot{\theta}^2 \iff -N_I + F(t) \sin \theta + mg \cos \theta = -m(R-r)\dot{\theta}^2$ .

En appliquant le TMD à la bille, en G, en projection sur  $\vec{y}_0$ , on a :  $r T_I = -J \frac{R-r}{r} \ddot{\theta} \iff r T_I = -\frac{2}{5} m r^2 \frac{R-r}{r} \ddot{\theta} \iff T_I = \frac{2}{5} m(r-R)\ddot{\theta}$ .

**Question 2** En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés : montrer que les efforts normal  $N_I$  et tangentiel  $T_I$  du rail sur la bille sont liés à l'angle  $\theta$  par les équations suivantes :

$N_I = F(t) \sin \theta + mg \cos \theta + m(R-r)\dot{\theta}^2$  et  $T_I = \frac{2}{5} m(r-R)\ddot{\theta}$ . En appliquant le TRD à la bille en projection sur  $\vec{x}_1$ , on a :  $T_I + F(t) \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1 + mg \vec{z}_0 \cdot \vec{x}_1 - f_v(R-r)\dot{\theta} = m(R-r)\ddot{\theta} \iff T_I + F(t) \cos \theta - mg \sin \theta - f_v(R-r)\dot{\theta} = m(R-r)\ddot{\theta}$ .

En utilisant la question précédente, on a alors  $\frac{2}{5} m(r-R)\ddot{\theta} + F(t) \cos \theta - mg \sin \theta - f_v(R-r)\dot{\theta} = m(R-r)\ddot{\theta}$

$$\iff F(t) \cos \theta = mg \sin \theta + f_v(R-r)\dot{\theta} + \frac{7}{5} m(R-r)\ddot{\theta}$$

(Signe à revoir?).

**Question 3** En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés, montrer que  $\frac{7}{5} m(r-R)\ddot{\theta} + f_v(r-R)\dot{\theta} + mg \sin \theta = F(t) \cos \theta$ .

Si  $\theta$  est petit  $\frac{7}{5} m(r-R)\ddot{\theta} + f_v(r-R)\dot{\theta} + mg \theta = F(t)$ . En passant dans le domaine de Laplace, on a  $\frac{7}{5} m(r-R)p^2 \theta(p) + f_v(r-R)p \theta(p) + mg \theta(p) = F(p)$  soit  $H(p) = \frac{1}{\frac{7}{5} m(r-R)p^2 + f_v(r-R)p + mg}$

$$= \frac{1}{\frac{7}{5} m(r-R)p^2 + \frac{f_v}{mg}(r-R)p + 1}.$$

$$= \frac{1}{\frac{7}{5} m(r-R)p^2 + \frac{f_v}{mg}(r-R)p + 1}.$$

$$\text{On a donc } K_S = \frac{1}{mg}, \omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(r-R)}}, \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{f_v(r-R)}{mg} \text{ soit } \xi = \frac{f_v(r-R)}{2mg} \sqrt{\frac{5g}{7(r-R)}} = \frac{f_v}{2mg} \sqrt{\frac{5g(r-R)}{7}}$$

**Exercice 168 – Système 4 barres \*\***

**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\theta_1(t)$  en fonction de  $\theta_4(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\theta}_1(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}_4(t)$ .

**Question 4** En utilisant Python, tracer  $\dot{\theta}_1(t)$  en fonction de  $\dot{\theta}_4(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.

**Exercice 167 – Train simple \***

A3-05

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction du nombre de dents des roues dentées.

En bloquant le porte satellite, on a :  $\frac{\omega_{03}}{\omega_{13}} = -\frac{Z_1}{Z_0}$ . On a donc,  $\frac{\omega_{03}}{\omega_{10} + \omega_{03}} = -\frac{Z_1}{Z_0}$   
 $\Leftrightarrow \frac{\omega_{30}}{\omega_{30} - \omega_{10}} = -\frac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow \omega_{30} = -\frac{Z_1}{Z_0} \omega_{30} + \frac{Z_1}{Z_0} \omega_{10} \Leftrightarrow \omega_{30} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_0}\right) = \frac{Z_1}{Z_0} \omega_{10} \Leftrightarrow \omega_{30} = \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} \omega_{10}$ .

**Exercice 166 – Train simple \***

A3-05

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer  $\omega_{40}$  en fonction de  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$ .

En bloquant le porte satellite, on a :  $\frac{\omega_{43}}{\omega_{13}} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}$ . On a donc,  $\frac{\omega_{40} + \omega_{03}}{\omega_{10} + \omega_{03}} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \Leftrightarrow \omega_{40} + \omega_{03} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} + \omega_{03})$   
 $\Leftrightarrow \omega_{40} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} + \omega_{03}) - \omega_{03} \Leftrightarrow \omega_{40} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} (\omega_{10} + \omega_{03}) + \omega_{30} \Leftrightarrow \omega_{40} = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \omega_{30} \left(1 + \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)$ .

**Question 3** On suppose que  $\omega_{40}$  est bloqué. Exprimer le rapport  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ .

$$0 = -\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} + \omega_{30} \left(1 + \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4} \omega_{10} = \omega_{30} \left(1 + \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{\frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}}{1 + \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4}} = \frac{Z_1 Z_{22}}{Z_{21} Z_4 + Z_1 Z_{22}}$$

**Exercice 165 – Poulie Redex \*** D'après ressources de Stéphane Genouël.

A3-05

C2-06

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Déterminer littéralement, en fonction des nombres de dents, la loi E/S du système (c'est-à-dire le rapport de transmission).

On cherche  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$ . En bloquant le porte satellite 1, on a  $\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = \frac{Z_0 Z_2}{Z_2' Z_3}$ . En décomposant les vitesses, on a :  $\frac{\omega_{30} - \omega_{10}}{\omega_{10}} =$   
 $-\frac{Z_0 Z_2}{Z_2' Z_3} \Leftrightarrow \omega_{30} - \omega_{10} = -\frac{Z_0 Z_2}{Z_2' Z_3} \omega_{10} \Leftrightarrow \omega_{30} = \left(1 - \frac{Z_0 Z_2}{Z_2' Z_3}\right) \omega_{10} \Leftrightarrow \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = 1 - \frac{Z_0 Z_2}{Z_2' Z_3}$ .  
 AN :  $\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = 1 - \frac{49 \times 34}{31 \times 46} = -0,17$ .

**Exercice 164 – Système vis-écrou \*** D'après ressources Pole Chateaubriand – Joliot-Curie.

A3-05

C2-06

**Question 1** Sur le schéma cinématique, repasser chaque solide d'une couleur différente.

**Question 2** Réaliser la chaîne d'énergie-puissance partielle en définissant les noms des transmetteurs et les grandeurs d'entrée et de sortie cinématiques.

**Question 3** Définir la loi entrée-sortie entre la vitesse de translation du piston 3 et la vitesse de rotation du moteur 1.

**Exercice 163 – Maxpid \*\*\***

**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

Par ailleurs  $a = 107,1 \text{ mm}$ ,  $b = 80 \text{ mm}$ ,  $c = 70 \text{ mm}$ ,  $d = 80 \text{ mm}$ . Le pas de la vis est de 4 mm.

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer  $\theta(t)$  en fonction de  $\lambda(t)$ .

**Question 3** Exprimer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\dot{\lambda}(t)$ .

**Question 4** Exprimer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\omega(t)$ , vitesse de rotation du rotor moteur 2 par rapport au stator 1.

**Question 5** En utilisant Python, tracer  $\dot{\theta}(t)$  en fonction de  $\omega(t)$ . On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 2 par rapport à 1 est de 500 tours par minute.

**Exercice 162 – Mouvement RT \***

**B2-13**

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$  par dérivation vectorielle ou par composition.

**Méthode 1 – Dérivation vectorielle**

$$\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d}{dt} [\overrightarrow{BC}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_2}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R \dot{\theta} \overrightarrow{j_2}$$

**Méthode 2 – Composition du torseur cinématique**

$$\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \overrightarrow{V(C, 2/1)} + \overrightarrow{V(C, 1/0)}$$

Pour tout point  $P$ ,  $\overrightarrow{V(P, 1/0)} = \dot{\lambda} \overrightarrow{i_0}$ .

$$\overrightarrow{V(C, 2/1)} = \overrightarrow{V(B, 2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \Omega(2/1) = -R \overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} = R \dot{\theta} \overrightarrow{j_2}.$$

On a donc  $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \dot{\lambda} \overrightarrow{i_0} + R \dot{\theta} \overrightarrow{j_2}$ .

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \Omega(2/0) = \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \\ \overrightarrow{V(C, 2/0)} = \dot{\lambda} \overrightarrow{i_0} + R \dot{\theta} \overrightarrow{j_2} \end{array} \right\}_C.$$

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$ .

$$\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V(C, 2/0)}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R \frac{d}{dt} [\dot{\theta} \overrightarrow{j_2}]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \overrightarrow{i_0} + R (\ddot{\theta} \overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_2}).$$

**Exercice 161 – Mouvement RR 3D \***

**B2-13**

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$  par dérivation vectorielle.

$$\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \overrightarrow{i_1} + \ell \overrightarrow{i_2} + r \overrightarrow{j_2}]_{\mathcal{R}_0}.$$

Calculons :

$$\bullet \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_1}]_{\mathcal{R}_0} = \Omega(1/0) \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{j_1}.$$

$$\bullet \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_2}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} \quad (\overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{i_2}).$$

$$\bullet \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_2}]_{\mathcal{R}_0} = \Omega(2/0) \wedge \overrightarrow{j_2} = (\dot{\theta} \overrightarrow{k_0} + \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1}) \wedge \overrightarrow{j_2} = \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_2} + \dot{\varphi} \overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{j_2} = -\dot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{i_1} + \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2}.$$

On a donc,  $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = (R + \ell) \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} - r \dot{\theta} \cos \varphi \overrightarrow{i_1} + r \dot{\varphi} \overrightarrow{k_2}$ .

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V(C, 2/0)}$  par composition.

On a  $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = \overrightarrow{V(C, 2/1)} + \overrightarrow{V(C, 1/0)}$ .

- $\overrightarrow{V(C, 2/1)}$  : on passe par B car B est le centre de la pivot entre 2 et 1 et que  $\overrightarrow{V(B, 2/1)} = \vec{0}$ .  $\overrightarrow{V(C, 2/1)} = \overrightarrow{V(B, 2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = (-\ell \vec{i}_2 - r \vec{j}_2) \wedge \dot{\varphi} \vec{i}_1$   
 $= -\ell \vec{i}_2 \wedge \dot{\varphi} \vec{i}_1 - r \vec{j}_2 \wedge \dot{\varphi} \vec{i}_1$   
 $= r \dot{\varphi} \vec{k}_2$ .

- $\overrightarrow{V(C, 1/0)}$  : on passe par A car A est le centre de la pivot entre 1 et 0 et que  $\overrightarrow{V(A, 1/0)} = \vec{0}$  est nul.  $\overrightarrow{V(C, 1/0)} = \overrightarrow{V(A, 1/0)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)}$   
 $= (-r \vec{j}_2 - \ell \vec{i}_2 - R \vec{i}_1) \wedge \dot{\theta} \vec{k}_1$   
 $= -r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + \ell \dot{\theta} \vec{j}_1 + R \dot{\theta} \vec{j}_1$

Au final,  $\overrightarrow{V(C, 2/0)} = r \dot{\varphi} \vec{k}_2 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + \ell \dot{\theta} \vec{j}_1 + R \dot{\theta} \vec{j}_1$ .

**Question 3** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{k}_1 + \dot{\varphi} \vec{i}_1 \\ (R + \ell) \dot{\theta} \vec{j}_1 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\varphi} \vec{k}_2 \end{array} \right\}_C$$

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)}$ .

$$\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{V(C, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

$$= \frac{d}{dt} \left[ (R + \ell) \dot{\theta} \vec{j}_1 - r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\varphi} \vec{k}_2 \right]_{\mathcal{R}_0}$$

Calculons :

- $\frac{d}{dt} [\vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{j}_1$ .

- $\frac{d}{dt} [\vec{j}_1]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \vec{j}_1 = \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge \vec{j}_1 = -\dot{\theta} \vec{i}_1$ .

- $\frac{d}{dt} [\vec{k}_2]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \vec{k}_2 = (\dot{\theta} \vec{k}_0 + \dot{\varphi} \vec{i}_1) \wedge \vec{k}_2 = \dot{\theta} \vec{k}_1 \wedge \vec{k}_2 + \dot{\varphi} \vec{i}_2 \wedge \vec{k}_2 = \dot{\theta} \sin \varphi \vec{i}_1 - \dot{\varphi} \vec{j}_2$ .

$$\overrightarrow{\Gamma(C, 2/0)} = (R + \ell) \ddot{\theta} \vec{j}_1 - (R + \ell) \dot{\theta}^2 \vec{i}_1 - r \ddot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 + r \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{i}_1 - r \dot{\theta}^2 \cos \varphi \vec{j}_1 + r \ddot{\varphi} \vec{k}_2 + r \dot{\varphi} (\dot{\theta} \sin \varphi \vec{i}_1 - \dot{\varphi} \vec{j}_2).$$

**Exercice 160 – Mouvement RT – RSG \*\***

**B2-13**

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V(B, 2/0)}$ .

$$\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \overrightarrow{V(B, 2/1)} + \overrightarrow{V(B, 1/0)}.$$

D'une part,  $\overrightarrow{V(B, 2/1)} = \dot{\lambda} \vec{i}_1$ .

D'autre part, en utilisant le roulement sans glissement en I,  $\overrightarrow{V(B, 1/0)} = \overrightarrow{V(I, 1/0)} + \overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \vec{0} + (-\lambda(t) \vec{i}_1 - R \vec{j}_0) \wedge \dot{\theta} \vec{k}_0 = -\dot{\theta} (\lambda(t) \vec{i}_1 \wedge \vec{k}_0 + R \vec{j}_0 \wedge \vec{k}_0) = \dot{\theta} (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0)$ .

Au final,  $\overrightarrow{V(B, 2/0)} = \dot{\lambda} \vec{i}_1 + \dot{\theta} (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0)$ .

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point B.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda} \vec{i}_1 + \dot{\theta} (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) \end{array} \right\}_B$$

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)}$ .

$$\overrightarrow{\Gamma(B, 2/0)} = \frac{d}{dt} \left[ \overrightarrow{V(B, 2/0)} \right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_1 + \dot{\lambda}(t) \dot{\theta} \vec{j}_1 + \ddot{\theta}(t) (\lambda(t) \vec{j}_1 - R \vec{i}_0) + \dot{\theta}(t) (\dot{\lambda}(t) \vec{j}_1 - \lambda(t) \dot{\theta} \vec{i}_1).$$

**Exercice 159 – Système bielle manivelle \***

**B2-13** Pas de corrigé pour cet exercice.

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme  $\lambda(t) = \pm \sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)} + R \sin \theta(t)$  et  $\dot{\lambda}(t) = \pm \left( \frac{R^2 \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cos^2 \theta(t)}} \right) + \dot{\theta}(t) R \cos \theta(t)$ . (à vérifier – voir exercice ??).

**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point B.

On commence par calculer  $\overrightarrow{V}(B, 2/0) = \overrightarrow{V}(B, 2/1) + \overrightarrow{V}(B, 1/0) = \overrightarrow{V}(B, 1/0)$ .

- **Méthode 1 – dérivation vectorielle :**  $\overrightarrow{V}(B, 1/0) = \frac{d}{dt} [AB]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \vec{i}_1]_{\mathcal{R}_0} = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1$ .
- **Méthode 2 – formule de changement de point :**  $\overrightarrow{V}(B, 1/0) = \overrightarrow{V}(A, 1/0) + \vec{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = -R \vec{i}_1 \wedge \dot{\theta} t \vec{k}_0 = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1$ .

On a alors,  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi}(t) \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 \end{array} \right\}_B$ .

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  et au point C.

On a,  $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi}(t) \vec{k}_0 \\ \dot{\lambda}(t) \vec{j}_0 \end{array} \right\}_C$ .

Par ailleurs, on peut remarquer que  $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = \overrightarrow{V}(B, 2/0) + \vec{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/0) = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 + L \vec{i}_2 \wedge \dot{\varphi}(t) \vec{k}_0 = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 - L \dot{\varphi}(t) \vec{j}_2$ .

On a donc nécessairement  $\dot{\lambda}(t) \vec{j}_0 = R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1 - L \dot{\varphi}(t) \vec{j}_2$   
 $\Rightarrow \dot{\lambda}(t) \vec{j}_0 = R \dot{\theta}(t) (\cos \theta(t) \vec{j}_0 - \sin \theta(t) \vec{i}_0) - L \dot{\varphi}(t) (\cos \varphi(t) \vec{j}_0 - \sin \varphi(t) \vec{i}_0)$ .

On a donc :

$$\begin{cases} 0 = -R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) + L \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \\ \dot{\lambda}(t) = R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) - L \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) = L \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \\ \dot{\lambda}(t) - R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) = L \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi(t) = \frac{R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)}{\dot{\lambda}(t) - R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)}$$

Il resterait à supprimer  $\varphi(t)$  pour (espérons-le) retomber sur la loi entrée-sortie cinématique.

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma}(B, 2/0)$ .

$$\overrightarrow{\Gamma}(B, 2/0) = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V}(B, 2/0)]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \dot{\theta}(t) \vec{j}_1]_{\mathcal{R}_0} = R \ddot{\theta}(t) \vec{j}_1 - R \dot{\theta}^2(t) \vec{i}_1$$

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0)$ .

$$\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0) = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V}(C, 2/0)]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{j}_0$$

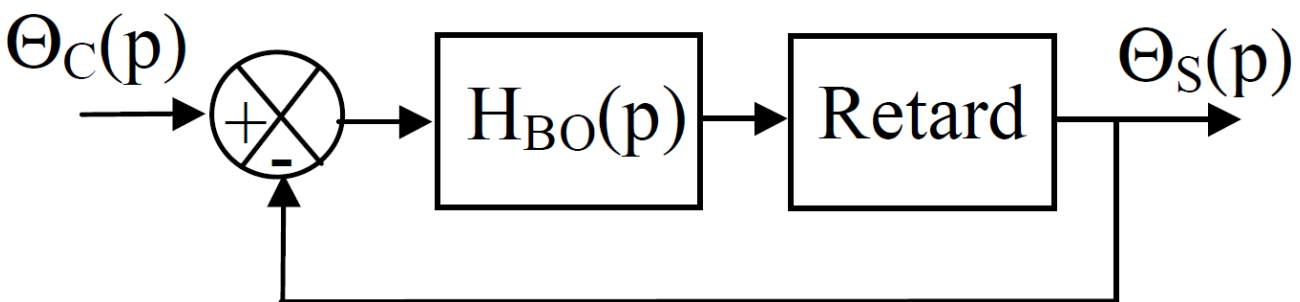
**Exercice 158** – \*

**C2-03**

**Pas de corrigé pour cet exercice.**

On donne le système suivant dont la FTBF est donnée par  $G(p) = \frac{\Theta_s(p)}{\Theta_c(p)} = \frac{3,24}{p^2 + 3,24p + 3,24}$ . Le retard du système est de 0,2 s.

L'asservissement est donné par le schéma-blocs suivant.



**Question 1** En considérant le retard nul, déterminer l'écart statique.

**Question 2** En considérant le retard nul, déterminer l'écart statique, déterminer l'expression de la boucle ouverte  $H_{Bo}(p)$ .

**Question 3** Déterminer l'expression de  $G_r(p)$ , transmittance en boucle fermée du système avec retard de 0,2 s. Le système est soumise à une rampe de  $0,1 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 4** Donner la valeur de l'erreur de traînage correspondant à cette entrée, en négligeant le retard.

**Question 5** Donner la valeur de l'écart statique du système avec retard.

**Question 6** Donner la valeur de l'erreur de traînage du système avec retard.



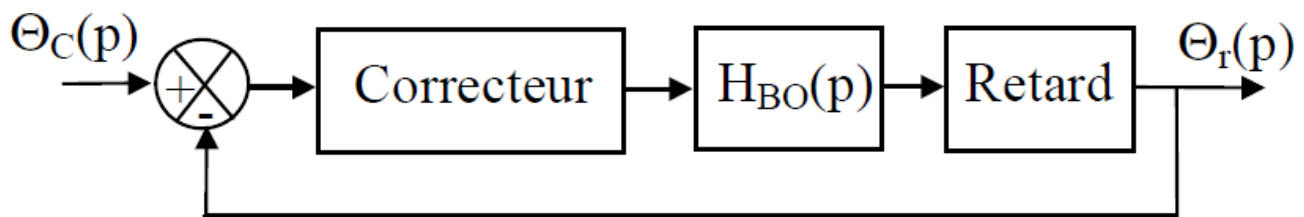
**Exercice 157** – \*

C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

L'asservissement est donné par le schéma-blocs suivant.  $H_{BO}(p) = \frac{4}{p(p+3,6)}$ . Le retard du système est de 0,2 s.

De plus,  $C(p) = K_c \frac{1 + T_c p}{T_c p}$

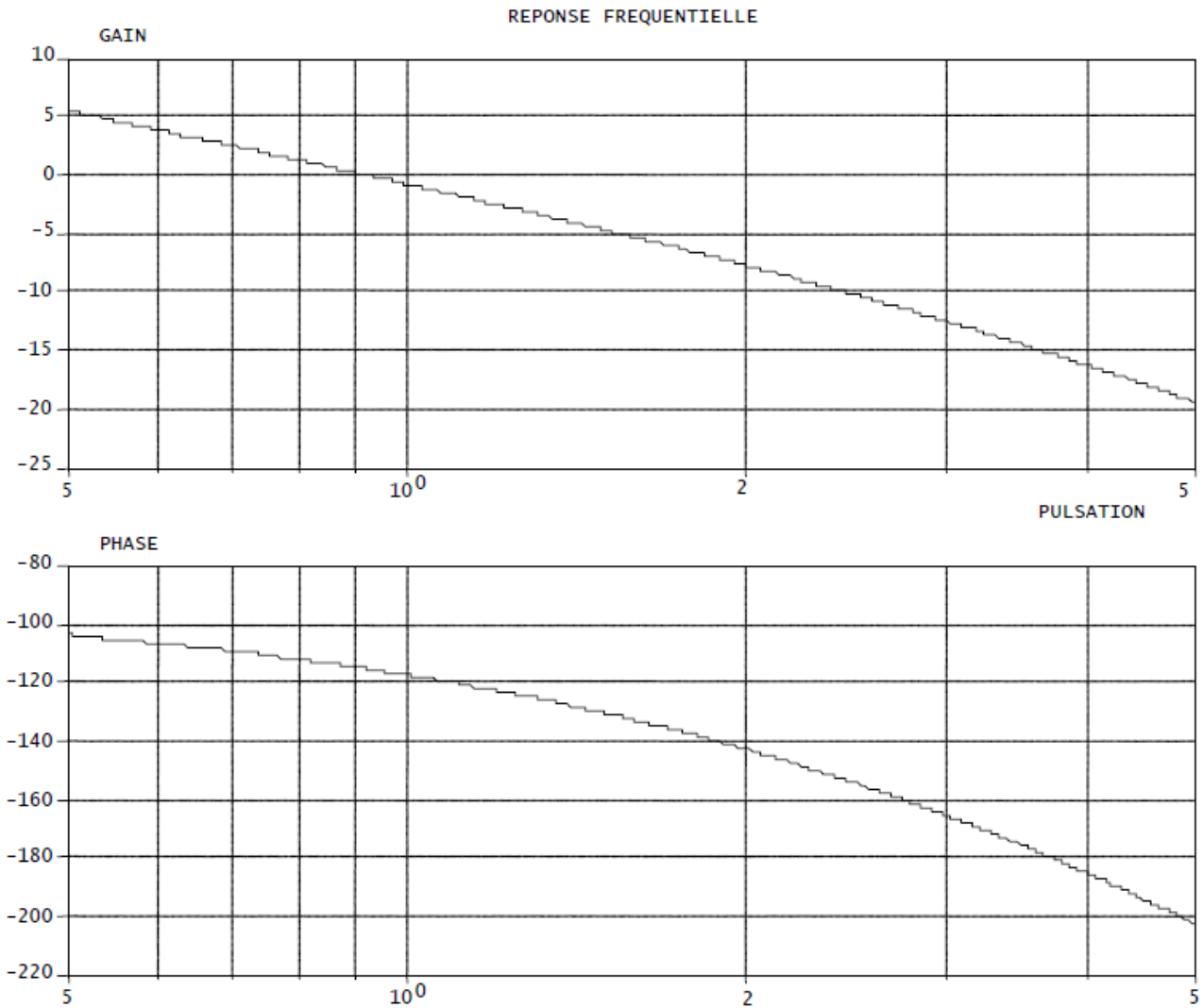


**Question 1** Tracer le diagramme de Bode asymptotique de  $H_{BO}(p)$  pour des pulsations comprises entre  $0,5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $50 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Question 2** Tracer le diagramme de Bode du retard pour des pulsations comprises entre  $0,5 \text{ rad s}^{-1}$  et  $50 \text{ rad s}^{-1}$ .

On donne le diagramme de la FTBO retardée.





**Question 3** Déterminer le gain  $K_c$  qui donne une marge de phase de  $50^\circ$ .

**Question 4** La constante  $T_c$  qui laisse subsister une marge de phase d'environ  $45^\circ$ .

**Question 5** Quelle est l'erreur de traînage du système corrigé pour l'entrée en rampe considérée (en négligeant le retard).

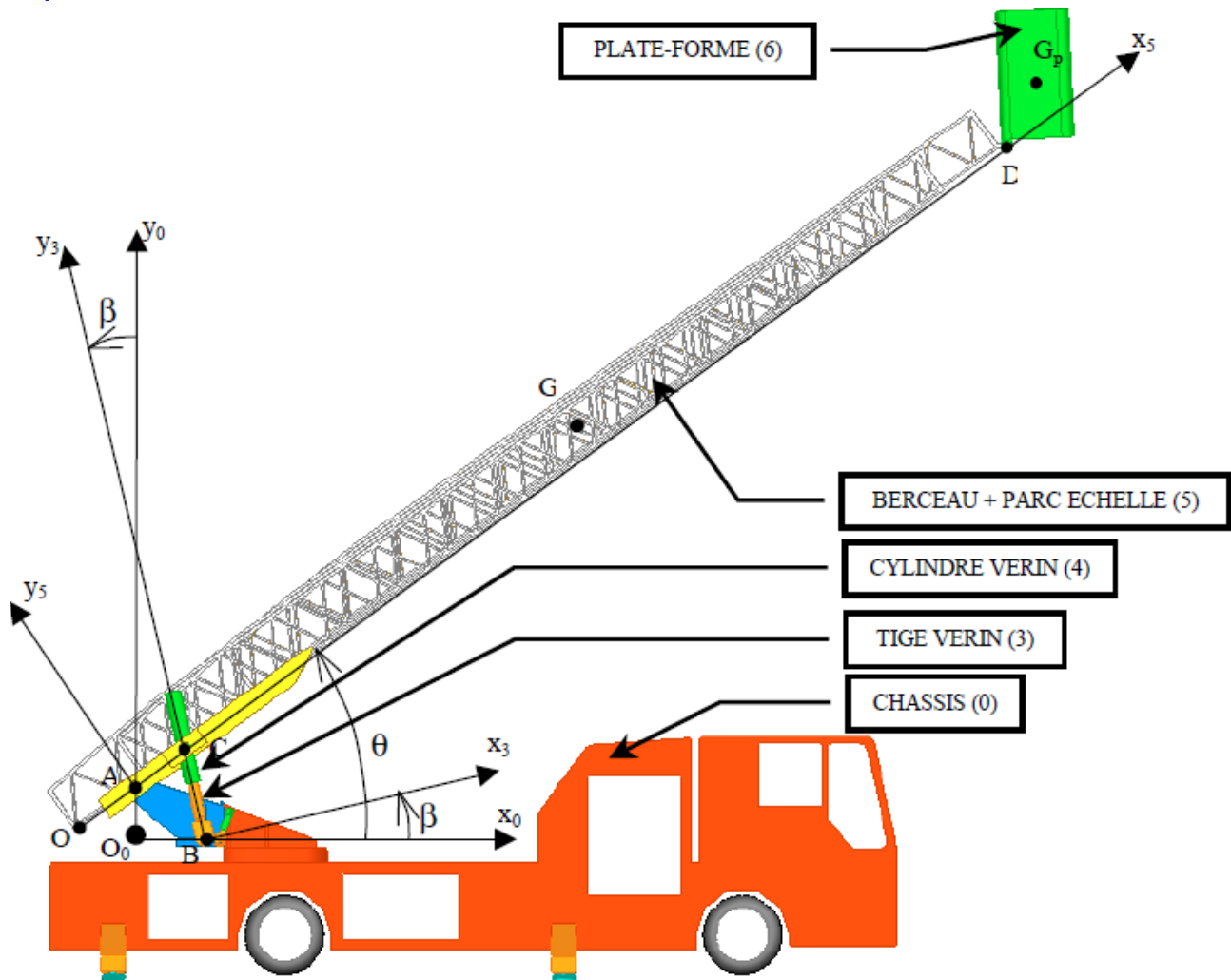
### Exercice 156 – Système EPAS \*

**C2-06** Pas de corrigé pour cet exercice.

Nous allons déterminer la vitesse de sortie des vérins pour que la vitesse des points de la plate-forme soit constante.

On propose le paramétrage suivant :

- le repère  $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au châssis (0) ;
- le repère  $\mathcal{R}_5 = (A; \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)$  est lié à l'ensemble {berceau+parc échelle} (5) avec  $\vec{O_0A} = a \vec{y}_0$  et  $(x_0, \vec{x}_5) = \theta$ ,  $\vec{AC} = c \vec{x}_5$ ,  $\vec{AD} = H \vec{x}_5$  ;
- le repère  $\mathcal{R}_3 = (B; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$  est lié au vérin (3+4) avec  $\vec{O_0B} = b \vec{x}_0$  et  $\vec{BC} = r \vec{y}_3$  et  $\beta = (x_0, \vec{x}_3)$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Exprimer la vitesse du point D du parc échelle dans son mouvement par rapport au châssis :  $\vec{V}(D, 5/0)$  en fonction de la vitesse angulaire de dressage  $\dot{\theta}$  et des paramètres géométriques.

**Question 3** En faisant une fermeture de chaîne cinématique, déterminez la vitesse de sortie du vérin  $\vec{V}(V, 4/3) = v \vec{y}_3$  en fonction de la vitesse angulaire de dressage et des paramètres géométriques.

**Question 4** Etablir la relation  $\tan \beta = \frac{b - c \cos \theta}{a + c \sin \theta}$  en écrivant une fermeture de chaîne géométrique.

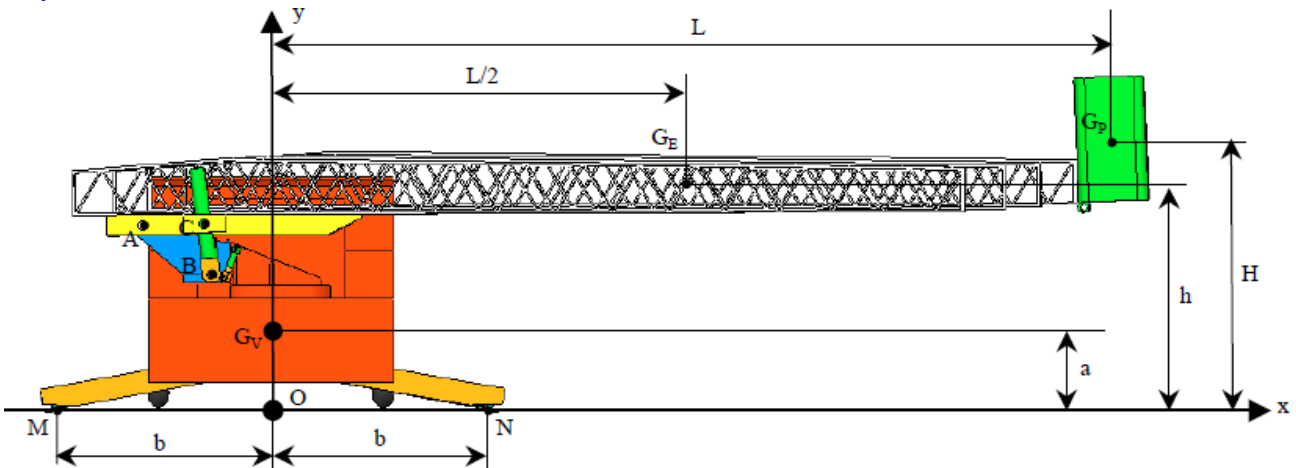
**Question 5** Dédurre des questions précédentes la vitesse de sortie des vérins  $v$  en fonction de  $\theta$  et  $H$  et des constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ; pour que la vitesse du point D du parc échelle soit constante.

### Exercice 155 – Pèse camion \*\*

#### C2-07 Pas de corrigé pour cet exercice.

Le véhicule porteur de l'E.P.A.S. doit être équipé de stabilisateurs. Une fois en place, les stabilisateurs le soulèvent, afin qu'il ne repose plus sur les roues (les roues touchent le sol mais ne supportent aucun poids) : le mouvement des suspensions du véhicule mettrait en danger sa stabilité.

L'objet de cette partie est de déterminer la longueur de déploiement maximale que le système de sécurité pourra autoriser.



Le véhicule est dans la configuration de la figure précédente :

- parc échelle horizontale ;
- stabilisateurs sortis au maximum ;
- charge maximale dans la plate-forme.

Le problème sera traité en statique plane dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  de la figure précédente.

Les efforts pris en compte sont :

- les actions de pesanteur sur chaque élément :
  - véhicule et charge utile, centre d'inertie  $G_V$ , masse  $m_V$ ,  $\overrightarrow{OG_V} = a \vec{y}$ ,
  - parc échelle, centre d'inertie  $G_E$ , masse  $m_E$ ,  $\overrightarrow{OG_E} = \frac{L}{2} \vec{x} + h \vec{y}$ ,
  - plate-forme et charge utile, centre d'inertie  $G_P$ , masse  $m_P$ ,  $\overrightarrow{OG_P} = L \vec{x} + H \vec{y}$  ;
- les actions de contact de la route sur les stabilisateurs.

Ces actions sont modélisées par des glisseurs passant l'un par  $M$ , tel que  $\overrightarrow{OM} = -b \vec{x}$  et l'autre par  $N$  tel que  $\overrightarrow{ON} = b \vec{x}$ . Les résultantes de ces glisseurs seront notées respectivement :  $\vec{R}_M = X_M \vec{x} + Y_M \vec{y}$  et  $\vec{R}_N = X_N \vec{x} + Y_N \vec{y}$ .

**Question 1** Exprimer la condition de non basculement de l'ensemble.

**Question 2** Calculer la longueur  $L_{\max}$  de déploiement au-delà de laquelle il y aura basculement.

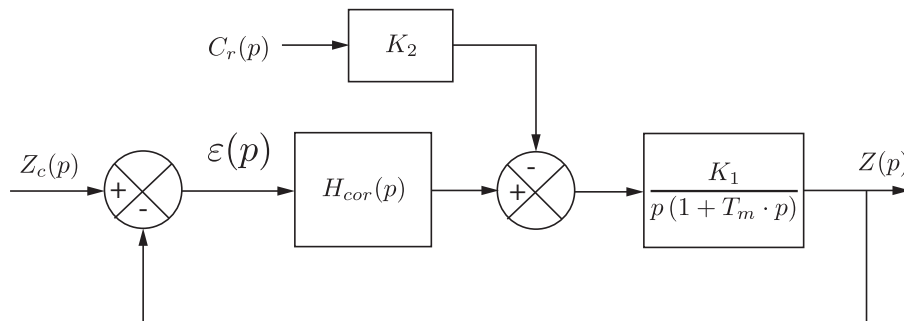
1. .
2.  $L_{\max} = 2b \frac{m_P + m_E + m_V}{2m_P + m_E}$ .

### Exercice 154 – Hemostase – Stabilité★

C2-03

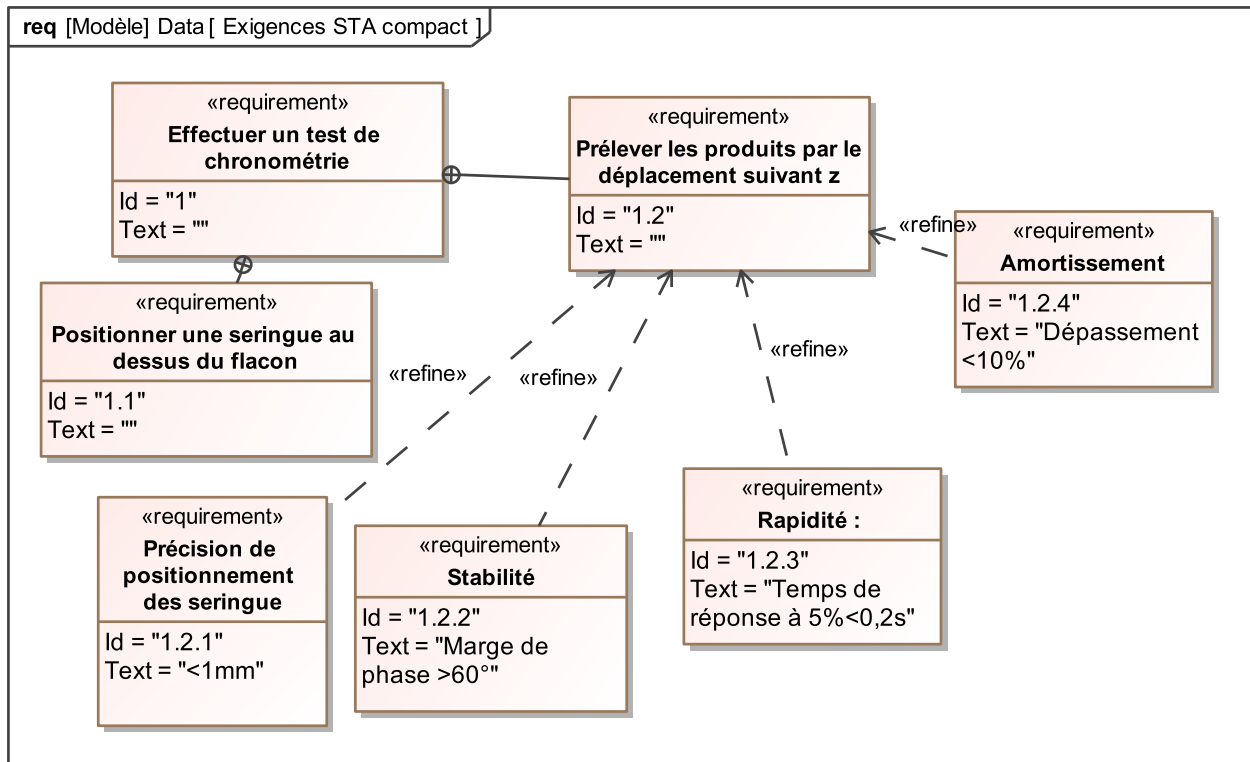
La modélisation de l'asservissement de position est donnée par le schéma-bloc ci-dessous dans lequel  $K_2 = 2,78 \cdot 10^{-2} \text{N}^{-1}$ ,  $K_1 = 856 \text{s}^{-1}$ ,  $T_m = 3 \cdot 10^{-2} \text{s}$ .

Le couple résistant  $C_r$  est constant et vaut  $C_{r0} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{Nm}$ .



On suppose le correcteur proportionnel :  $H_{\text{cor}}(p) = K_p$ .

Les performances du système sont détaillées dans le diagramme des exigences partiel.



**Question 1** Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo}(p) = \left( \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} \right)_{C_r(p)=0}$  ainsi que la fonction de transfert  $H_{cr}(p) = \left( \frac{Z(p)}{C_r(p)} \right)_{Z_c=0}$ .

**Correction**

$$H_{bo}(p) = H_{cor}(p) \frac{K_1}{p(1+T_m p)} = \frac{K_1 K_p}{p(1+T_m p)}$$

$$H_{cr}(p) = -K_2 \frac{\frac{K_1}{p(1+T_m p)}}{1 + H_{cor}(p) \frac{K_1}{p(1+T_m p)}} = -K_2 \frac{K_1}{p(1+T_m p) + H_{cor}(p) K_1} = -\frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p) + K_p K_1}$$

**Question 2** Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude  $Z_{c0}$  dans l'hypothèse d'une perturbation nulle ( $C_{r0}$ ). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante  $C_{r0}$ , dans le cas d'une consigne de position nulle ( $Z_c = 0$ ). En déduire la valeur de  $K_p$  pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

**Correction** Exprimons  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $Z_c(p)$  et  $C_r(p)$  :

$$\varepsilon(p) = Z_c(p) - Z(p) = Z_c(p) - (\varepsilon(p) H_{cor}(p) - K_2 C_r(p)) \frac{K_1}{p(1+T_m p)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) \left( 1 + H_{cor}(p) \frac{K_1}{p(1+T_m p)} \right) = Z_c(p) - K_2 C_r(p) \frac{K_1}{p(1+T_m p)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) = Z_c(p) \frac{1}{1 + H_{cor}(p) \frac{K_1}{p(1+T_m p)}} - K_2 C_r(p) \frac{K_1}{p(1+T_m p) + H_{cor}(p) K_1}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) = Z_c(p) \frac{p(1+T_m p)}{p(1+T_m p) + H_{cor}(p) K_1} - K_2 C_r(p) \frac{K_1}{p(1+T_m p) + H_{cor}(p) K_1}$$

En prenant une entrée échelon et une perturbation échelons, on a  $Z_c(p) = \frac{Z_{c0}}{p}$  et  $C_r(p) = \frac{C_{r0}}{p}$ .

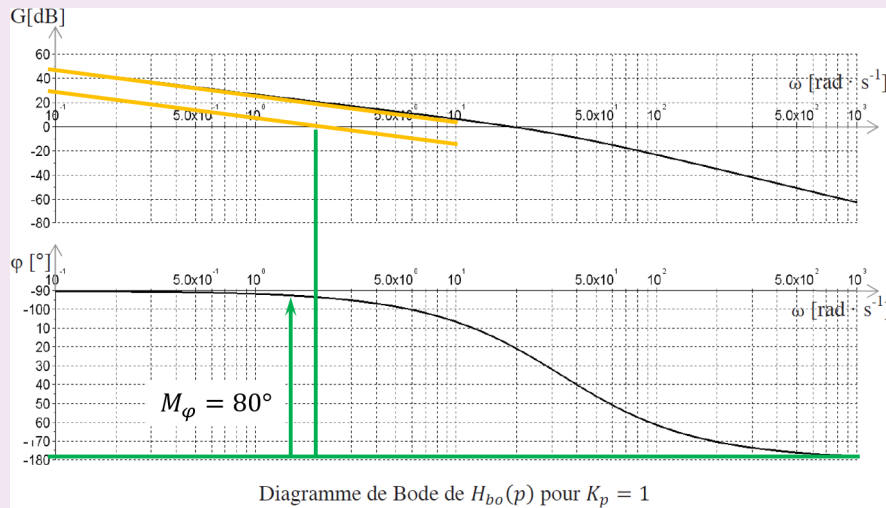
On a donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} Z_{c0} \frac{p(1+T_m p)}{p(1+T_m p) + H_{cor}(p)K_1} - K_2 C_{r0} \frac{K_1}{p(1+T_m p) + H_{cor}(p)K_1} = -\frac{K_2 C_{r0}}{K_p}$ .

AN :  $\varepsilon_s < 1 \text{ mm} \Leftrightarrow \frac{K_2 C_{r0}}{K_p} < 1 \text{ mm} \Leftrightarrow 2,78 \cdot 10^{-2} \times 2,7 \cdot 10^{-3} \times 10^3 < K_p$  soit  $K_p > 0,08$ .

**Question 3** Sur le document réponse compléter les diagrammes de Bode en gain et en phase de  $H_{bo}(p)$  pour  $K_p$  déterminé précédemment. Indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par des tracés nécessaires.

**Correction**

En ajoutant le gain de 0,08, il faut translater la courbe de gain vers le bas de 22 dB.



La marge de phase est supérieure à  $60^\circ$ .

Afin d'améliorer le comportement, on implante un correcteur Proportionnel Intégral ayant pour fonction de transfert :  $H_{cor}(p) = \frac{K_p(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$  avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1 \text{ s}$ .

**Question 4** Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec ce correcteur avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 1 \text{ s}$ .

**Correction**

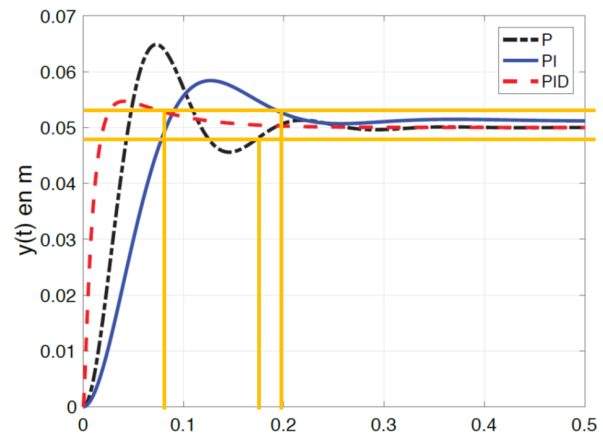
**Question 5** On souhaite une marge de phase d'au moins  $60^\circ$ . Proposer un réglage de  $K_p$  pour satisfaire au cahier des charges.

**Correction**

**Question 6** La figure suivante donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec trois types de correcteurs. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.

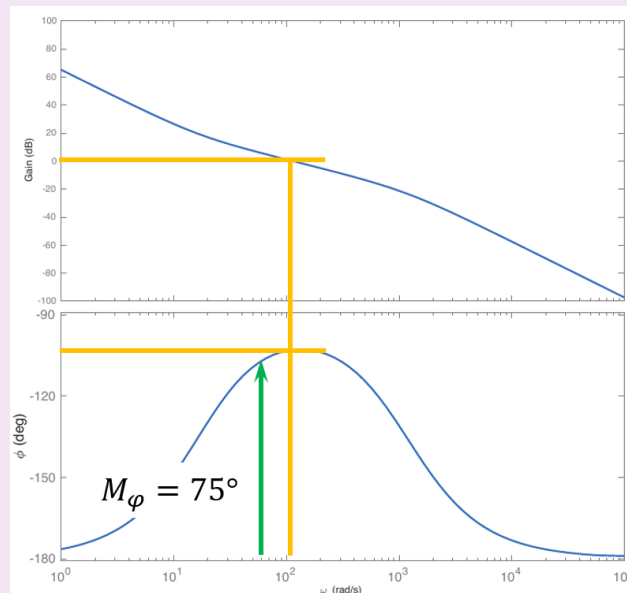
**Correction**

|                                  | P      | PI     | PID |
|----------------------------------|--------|--------|-----|
| Temps de réponse < à 5 % < 0,2 s | Ok     | Ok     | Ok  |
| Précision < 1 mm                 | Ok (?) | Ok     | Ok  |
| Dépassement < à 10 % < 0,2 s     | Pas Ok | Pas Ok | Ok  |



**Question 7** Analyser les résultats à l'aide du diagramme de Bode de la FTBO corrigé avec un PID optimisé.

### Correction



La marge de phase est supérieure à 60°.

### Exercice 153 – Automate d'exploration de l'hémostase \*

**C2-09** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Question 1** Exprimer la vitesse maximale  $V_M^x$  en fonction de  $x_M^{\max}$ ,  $T$  et  $T_a$ .

La distance  $x_M^{\max}$  correspond à l'aire sous la courbe de la loi de commande de vitesse. On a alors  $x_M^{\max} = (T - T_a) V_M^x$   
 $\Leftrightarrow V_M^x = \frac{x_M^{\max}}{T - T_a}$ .

**Question 2** Par application du théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble des pièces en mouvement, exprimer le couple moteur  $C_m$  en fonction de  $V_x$ ,  $T_a$ ,  $J_e$  et  $\lambda$  durant les trois phases du mouvement.

- Expression de l'énergie cinétique :  $\mathcal{E}_c(E/0) = \frac{1}{2} J_e (\omega_m^x)^2$ .
- Puissance intérieure :  $\mathcal{P}_{\text{int}}(E) = 0$ .
- Puissance extérieure :  $\mathcal{P}_{\text{ext}}(E) = C_m \omega_m^x$ .
- Application du TEC :  $J_e \omega_m^x \dot{\omega}_m^x = C_m \dot{\omega}_m^x$  soit  $J_e \dot{\omega}_m^x = C_m$ .

On a alors sur chacune des phases :

- Phase 1 :  $C_m = J_e \dot{\omega}_m^x$  avec  $\dot{\omega}_m^x = \dot{V}_M^x / \lambda = \frac{V_M^x}{\lambda T_a}$  et  $C_m = J_e \frac{V_M^x}{\lambda T_a}$ .
- Phase 2 :  $C_m = 0$ .



- Phase 3 :  $C_m = -J_e \frac{V_M^x}{\lambda T_a}$ .

**Question 3** Préciser à quel(s) instant(s)  $t$  la puissance fournie par le moteur est maximale ( $P_{\max}$ )

**Question 4** Exprimer cette puissance  $P_{\max}$  en fonction de  $V_M^x$ ,  $\lambda$ ,  $J_e$ , et  $T_a$ .

$$P_{\max} = J_e \frac{V_M^x}{\lambda T_a} \omega_m^x = J_e \frac{(V_M^x)^2}{\lambda^2 T_a}.$$

**Question 5** Donner alors l'expression de  $P_{\max}$  en fonction de  $x_M^{\max}$ ,  $\lambda$ ,  $J_e$ , et  $T_a$ .

$$\text{On a alors } P_{\max} = J_e \frac{(x_M^{\max})^2}{\lambda^2 (T - T_a)^2 T_a}.$$

**Question 6** À partir de cette expression, montrer que  $P_{\max}$  est minimale pour un réglage du temps d'accélération  $T_a$  tel que  $T_a = \frac{T}{3}$ .

On résout  $\frac{dP_{\max}}{dT_a} = 0$  et on cherche la valeur de  $T_a$  pour laquelle  $P_{\max}$  est minimale.

**Question 7** Déterminer la vitesse de rotation maximum  $\omega_{\max}^x$  que doit atteindre le moteur. Le choix de celui-ci est-il validé ?

$$\text{On a } V_M^x = \frac{x_M^{\max}}{T - T_a}. \text{ D'autre part, } V_M^x = \omega_M^x k R_p \text{ soit } \omega_M^x = \frac{V_M^x}{k R_p} = \frac{x_M^{\max}}{k R_p (T - T_a)}.$$

$$\text{AN : } \omega_M^x = \frac{550 \times 10^{-3}}{0,1 \times 20 \times 10^{-3} (1 - 1/3)} = \frac{550 \times 3}{4} = 412,5 \text{ rad s}^{-1} \text{ soit } 3941 \text{ tr min}^{-1}.$$

Cette valeur est bien compatible avec la vitesse du moteur.