

**Modéliser le comportement des systèmes mécaniques
dans le but d'établir une loi de comportement ou de
déterminer des actions mécaniques en utilisant le PFD**

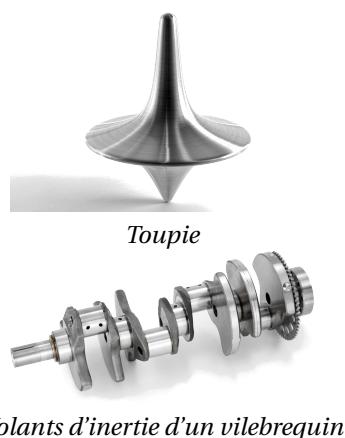
Sciences
Industrielles de
l'Ingénieur

Chapitre 2

Application du Principe Fondamental de la Dynamique

Savoirs et compétences :

- Mod2.C16 : torseur cinétique;*
- Mod2.C17 : torseur dynamique;*
- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide;*
- Mod2.C15 : matrice d'inertie;*
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique;*
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement;*
- Res1.C2.SF1 : proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison.*



1	Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général	2
1.1	Théorème de la résultante dynamique	2
1.2	Théorème du moment dynamique	2
2	Torseur cinétique	2
2.1	Définition	2
2.2	Écriture avec l'opérateur d'inertie	2
2.3	Cas particuliers	2
2.4	Méthodologie de Calcul	3
3	Torseur dynamique	3
3.1	Définition	3
3.2	Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques	4
3.3	Cas particuliers	4
3.4	Méthodologie de calcul	5

1 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique : cas général

Définition Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique Soit un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), alors la somme des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur E est égale au torseur dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\}.$$

De plus le **Principe Fondamental de la Dynamique** postule que pour tout mouvement, il existe au moins un référentiel dans lequel le PFD est vérifié. Ce sera donc un **référentiel galiléen**.

Le **torseur dynamique** est de la forme :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)} \\ \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)} \end{array} \right\}_A.$$

- On note $\overrightarrow{R_d(S/R_0)}$ la résultante dynamique où l'accélération est **toujours** calculée au centre d'inertie G .
- Le **moment dynamique** dépend du point A et se note $\overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}$.

Du Principe Fondamental de la dynamique découle plusieurs **théorèmes généraux**.

1.1 Théorème de la résultante dynamique

Théorème Théorème de la résultante dynamique Pour tout ensemble matériel (E) de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des résultantes des efforts extérieurs s'appliquant sur E est égale à la résultante dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 :

$$\overrightarrow{R(\bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{R_d(E/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma(G, E/R_0)}.$$

1.2 Théorème du moment dynamique

Théorème Théorème du moment dynamique Pour tout ensemble matériel (E) de masse m en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_0), la somme des moments des efforts extérieurs s'appliquant sur E en un point quelconque A est égale au moment dynamique du mouvement de E par rapport à R_0 en A :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \bar{E} \rightarrow E)} = \overrightarrow{\delta(A, E/R_0)}.$$

2 Torseur cinétique

2.1 Définition

Définition Le **torseur cinétique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{C}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{V}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- La résultante du torseur cinétique, $\overrightarrow{R_c(S/R_0)}$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie : $\overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V}(G/R_0)$.
- Le moment cinétique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point : $\overrightarrow{\sigma(B, S/R_0)} = \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_c(S/R_0)}$.

2.2 Écriture avec l'opérateur d'inertie

Propriété Pour un solide S de masse m dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

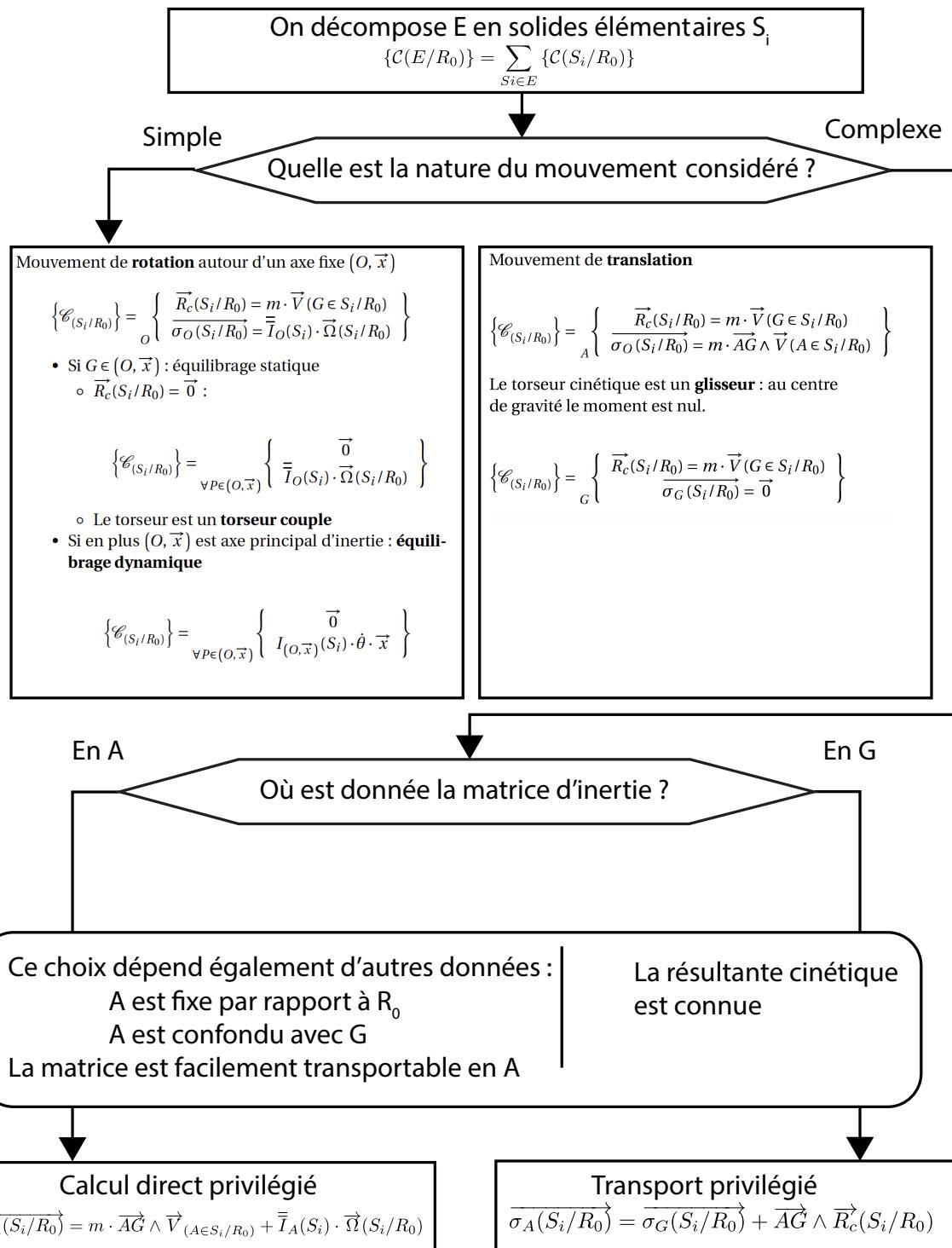
$$\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A, S/R_0)}.$$

2.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point A fixe dans le mouvement de S/R_0 , on a : $\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$.
- En appliquant cette formule en G , centre d'inertie de S , on a : $\overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)} = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$.

2.4 Méthodologie de Calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i . On étudie son mouvement dans le référentiel R_0 . On donne la méthodologie de calcul du moment cinétique en un point A sur la figure suivante.



3 Torseur dynamique

3.1 Définition

Définition Le **torseur dynamique** d'un solide S dans son mouvement par rapport à R_0 se définit de la façon suivante,

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \\ \overrightarrow{\delta}(A, S/R_0) = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/R_0) dm \end{array} \right\}_A$$

- La résultante du torseur dynamique, $\overrightarrow{R_d}(S/R_0)$ ne dépend pas du point A mais uniquement du centre de gravité G de S (de masse m) et vérifie : $\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = m \overrightarrow{\Gamma}(G/R_0)$.
- Le moment dynamique dépend du point A et peut s'exprimer avec la formule fondamentale de changement de point : $\overrightarrow{\delta}(B, S/R_0) = \overrightarrow{\delta}(A, S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_d}(S/R_0)$.

3.2 Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques

Propriété Relations entre les torseurs cinétiques et dynamiques Pour un solide S de masse M dans son mouvement par rapport au repère R_0 et soit un point A quelconque.

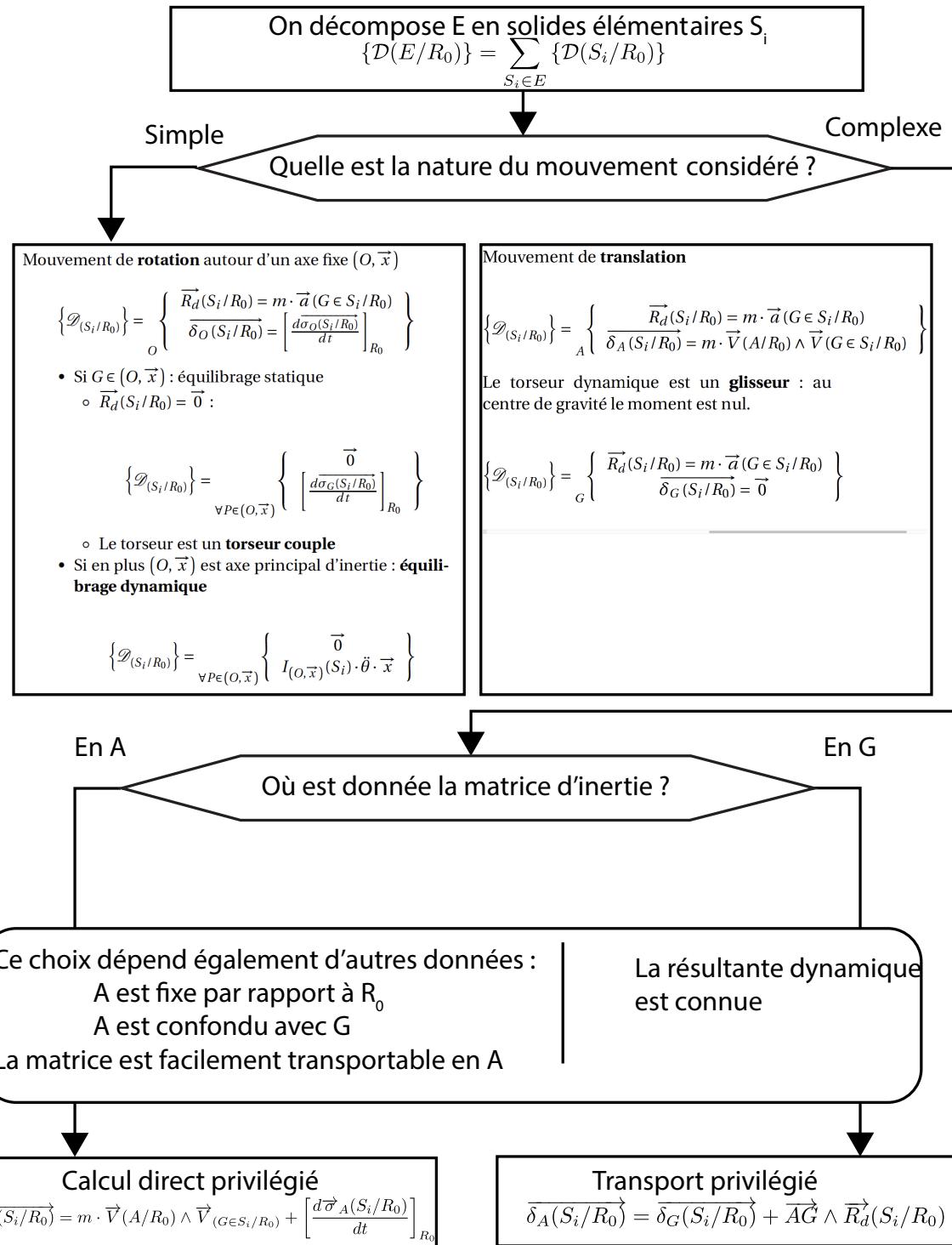
- Relation entre les **résultantes** : $\overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{R_c}(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$.
- Relation entre les **moments** : $\overrightarrow{\delta}(A, S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c}(S/R_0)$.

3.3 Cas particuliers

- En appliquant cette formule en un point O fixe dans R_0 , on a : $\overrightarrow{\delta}(O, S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(O, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$.
- En appliquant cette formule en un point G , centre d'inertie de S , on a : $\overrightarrow{\delta}(G, S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(G, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$.

3.4 Méthodologie de calcul

On considère un ensemble matériel E composé de solides S_i . On étudie son mouvement dans le référentiel R_0 . On donne l'algorithme de calcul du moment dynamique en un point A sur la figure ci-dessous.



Références

- [1] Emilien Durif, *Cinétique des solides*, Lycée La Martinière Monplaisir, Lyon.
- [2] Florestan Mathurin, *Cinétique*, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.

Point considéré	Point quelconque A	Centre de gravité G	Point fixe dans \mathcal{R}_0 A
Torseur cinétiqe $\{\mathcal{C}(S/R_0)\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V}(G/R_0) \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} + m \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A, S/R_0)} \end{array} \right\}_A$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V}(G/R_0) \\ \overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)} = I_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} \end{array} \right\}_G$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_0)} = m \overrightarrow{V}(G/R_0) \\ \overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)} = I_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega(S/R_0)} \end{array} \right\}_A$
Torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S/R_0)\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) \\ \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \left[\frac{d\sigma(A, S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{R_c(S/R_0)} \end{array} \right\}_A$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) \\ \overrightarrow{\delta(G, S/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(G, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_G$	$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_d(S/R_0)} = m \overrightarrow{\Gamma}(G/R_0) \\ \overrightarrow{\delta(A, S/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma(A, S/R_0)}}{dt} \right]_{R_0} \end{array} \right\}_A$

Activation 1



Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

Concours Centrale Supelec TSI 2017

Savoirs et compétences :

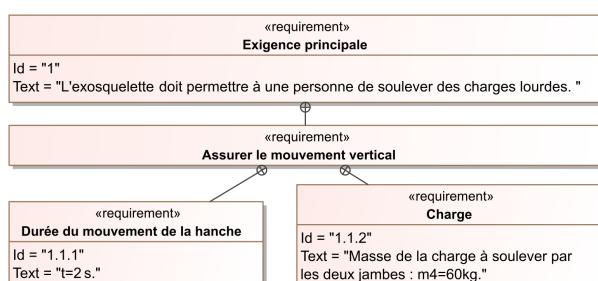
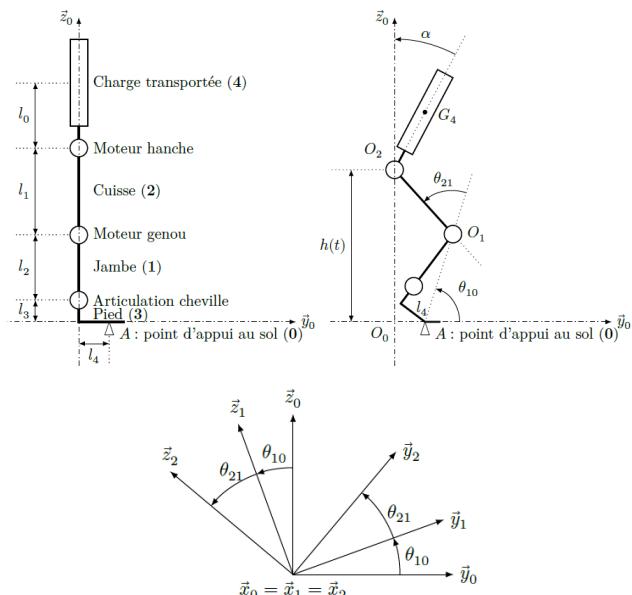
- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

Mise en situation – Assurer le mouvement vertical

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue. Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.



Le modèle d'étude est celui représenté à la figure suivante correspondant au modèle d'étude plan position fléchie.



Objectif Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement vertical » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges.

Élaboration du modèle dynamique

Objectif Dimensionner le moteur situé au niveau d'un genou permettant à l'exosquelette de soulever une masse de 60 kg de la position accroupie à la position debout.

Ces calculs visent à déterminer l'équation dynamique qui permet d'obtenir le couple moteur (minimal) en fonction des caractéristiques géométriques et massique de la charge à soulever ainsi que des conditions d'utilisation.

Hypothèses :

- L'étude est modélisable dans le plan.
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- Les inerties des pièces sont négligées sauf la masse de la charge à soulever.
- L'angle α entre la charge transportée et la verticale \vec{z}_0 reste constant.
- G_4 , centre de gravité de la charge transportée (4), reste en permanence à la verticale du point A d'appui au sol.

Données :

- $\vec{O}_1G_4 = \lambda(t)\vec{z}_0 - L \cos \theta_{10} \vec{y}_0$;
- accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$;
- longueur de la cuisse $l_1 = 43,1 \text{ cm}$.
- longueur de la jambe $l_2 = 43,3 \text{ cm}$.
- longueur de l'articulation de la cheville à la plante arrière du pied $l_3 = 6,9 \text{ cm}$.
- longueur de la plante arrière du pied au point d'appui sur le sol $l_4 = 13 \text{ cm}$.
- longueur $\vec{O}_0O_1 = L \vec{y}_1$ avec $L = 51,8 \text{ cm}$.
- rapport de réduction : $r = \frac{\omega_r}{\omega_m} = \frac{1}{120}$.

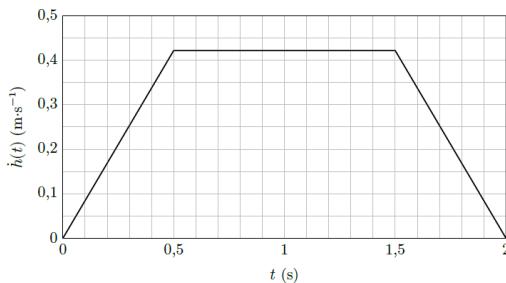
On note $E = \{ \text{cuisse}(2) + \text{charge transportée}(4) \}$.

Question 1 Donner qualitativement le mouvement de 4 par rapport à 0. Tracer le graphe de structure du système.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\dot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

Question 3 Déduire $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0$ en fonction de m_4 , $\ddot{h}(t)$, L et $\cos \theta_{10}$.

La loi d'évolution de la vitesse de la hanche est donnée à la figure suivante.



Question 4 Déterminer l'expression littérale du couple C_r exercé par l'arbre de sortie du réducteur sur le genou imposé par la loi d'évolution de la hanche. Calculer numériquement ce couple pour une valeur de θ_{10} égale à $54,5^\circ$ correspondant à la valeur maximale du couple.

Question 5 Calculer le couple C_m au niveau de l'arbre moteur du genou en prenant un facteur de perte $\eta = 0,75$ (estimé à l'aide du modèle multiphysique).

Question 6 Expliquer en moins de 5 lignes comment estimer un rendement à partir d'un modèle multiphysique.

Validation du dimensionnement du moteur

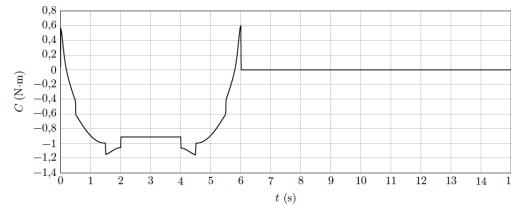
Objectif Vérifier que le moteur choisi convient pour une utilisation intensive comprenant 4 cycles par minute de descente suivie d'une montée.

Le cycle suivant obtenu à l'aide du modèle multiphysique de représente l'évolution du couple moteur, et ce en tenant compte du moment d'inertie du rotor, sur un cycle de période $T = 15$ s.

Quatre phases sont définies sur cette période :

- phase 1 pour $0 \leq t < 2$ s, valeur efficace du couple moteur $C_1 = 0,838 \text{ Nm}$;

- phase 2 pour $2 \leq t < 4$ s, couple moteur constant $C_2 = -0,912 \text{ Nm}$;
- phase 3 pour $4 \leq t < 6$ s, valeur efficace du couple moteur $C_3 = 0,838 \text{ Nm}$;
- phase 4 pour $6 \leq t < 15$ s, couple moteur nul.



Question 7 Préciser à quels mouvements correspondent les 4 phases de ce cycle.

Le couple efficace est également appelé couple thermiquement équivalent, il est défini par : $C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T c(t)^2 dt}$.

On a aussi $C_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n C_{i,\text{eff}}^2 T_i}$

Question 8 Calculer la valeur efficace du couple moteur du genou pour ce cycle périodique de 15 s.

Retour sur l'objectif

Le couple moteur varie entre $-1,156 \text{ Nm}$ et $0,596 \text{ Nm}$. Les caractéristiques du moteur choisi sont :

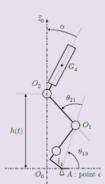
- vitesse à vide de 3120 tr min^{-1} pour une alimentation nominale en amont de l'onduleur de 36 V ;
- couple permanent admissible de $0,560 \text{ Nm}$;
- pente de la courbe de la vitesse en fonction du couple de $423 \text{ tr min}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

De plus une étude cinématique précédente a montré que le moteur permettant d'actionner le moteur doit pouvoir atteindre une vitesse de 2200 tr min^{-1} .

Question 9 Conclure quant au choix de ce moteur au regard de la valeur maximale de la vitesse angulaire calculée lors d'une étude précédente et du couple efficace calculé à la question précédente et compléter le schéma bilan.

Éléments de corrigé :

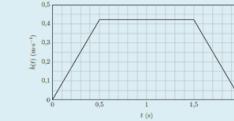
1. $\dot{\vec{x}}_0 = \overrightarrow{\sigma(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = -Lm_4 \cos \theta_{10} \dot{h}(t)$.
2. $\overrightarrow{\delta(O_1, E/0)} \cdot \vec{x}_0 = -Lm_4 \cos \theta_{10} \ddot{h}(t)$.
3. $C_r = -m_4 L \cos \theta_{10} (g + \ddot{h}(t)) \simeq 190,5 \text{ Nm}$.
4. $C_m \simeq 2,12 \text{ Nm}$.
5. \dots
6. \dots
7. \dots
8. $C_{\text{eff}} \simeq 0,546 \text{ Nm}$.

Problématique
Le moteur pré-choisi permet d'assurer le fonctionnement de l'exosquelette ?
Domaine de la modélisation
Modèle cinématique

Résolution Cinématique

- $N_{\text{mot}} = 2200 \text{ tr min}^{-1}$

Domaine du client
Moteur choisi

- Vitesse à vide : 3120 tr min^{-1}
- Couple permanent admissible : $0,56 \text{ Nm}$



Activation 2



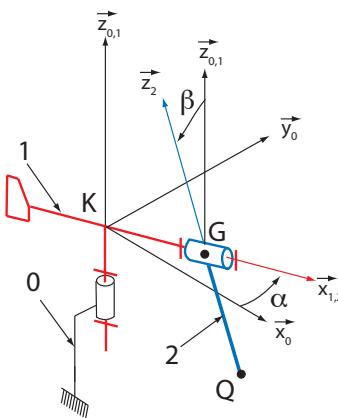
Éolienne

Émilien Durif

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de 4 solides. On cherche à dimensionner l'actionneur permettant l'orientation de l'éolienne lorsque les effets dynamiques d'un défaut de balourd sont prépondérants. On suppose donc que seule l'action mécanique due au moteur agissant entre 0 et 1 pour créer un couple C_m selon la direction \vec{z}_0 .

L'éolienne est composée de :

- un support **0**, auquel on associe un repère $R_0 = (K; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- une girouette **1** (de centre d'inertie K) en liaison pivot d'axe $(K, \vec{z}_{0,1})$ avec le support **0**. On lui associe un repère $R_1 = (K; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}_1) : $J = I_{(K, \vec{z}_1)}(1)$;
- une hélice **2**, en liaison pivot d'axe $(K, \vec{x}_{1,2})$ avec **1**. On lui associe un repère $R_2 = (K; \vec{x}_{1,2}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ choisi tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. On note M sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose $\vec{KG} = a \vec{x}_1$. On donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point G :

$$\bar{\bar{I}}_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}.$$

- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd **3** assimilé à une

masse ponctuelle m au point Q . On pose $\vec{GQ} = -b \vec{z}_2$.

Question 1 Tracer le graphe de structure de l'éolienne.

Question 2 Déterminer le théorème à utiliser pour relier C_m aux paramètres dynamiques du problème.

Question 3 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment cinétique au point K de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **0**, notée $\sigma(K, 1/0) \cdot \vec{z}_0$.

Question 4 Déterminer le moment cinétique $\sigma(K, 2/0)$ calculé au point K de l'hélice **2** dans son mouvement par rapport à **0**.

Question 5 Déterminer le moment cinétique $\sigma(K, 3/0)$

Question 6 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique au point K de la girouette **1** dans son mouvement par rapport au support **0**, notée $\vec{z}_0 \cdot \delta(K, 1/0)$.

Question 7 Déterminer la composante suivant \vec{z}_0 du moment dynamique $\vec{z}_0 \cdot \delta(K, 2/0)$.

Question 8 Déterminer la projection du moment dynamique de $3/0$ selon \vec{z}_0 : $\vec{z}_0 \cdot \delta(K, 3/0)$.

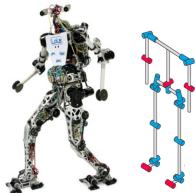
Question 9 Dans le cas d'une vitesse de rotation de l'hélice **2** ($\dot{\beta}$) constante et dans le cas où l'angle α est constant (pas de changement d'orientation de l'éolienne) déterminer l'expression du couple C_m que devrait fournir un moteur placé dans le mat (entre **0** et **1**) pour « contrer » les effets dynamiques du balourd.

Indications :

- 1.
2. $C_m = (\bar{\delta}(K, 1/R_0) + \bar{\delta}(K, 2/R_0) + \bar{\delta}(K, 3/R_0)) \cdot \vec{z}_0$

$$\begin{array}{ll}
 3. \overrightarrow{\sigma(K,1/0)} \cdot \overrightarrow{z_0} = J\dot{\alpha} & 5. \overrightarrow{\sigma(K,3/0)} = m [a \cdot b \cdot \dot{\beta} \overrightarrow{z}_2 + a^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z}_1 + b^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x}_2 + b \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta] \\
 4. \overrightarrow{\sigma(K,2/0)} : \overrightarrow{\sigma(K,2/0)} = \left(\begin{array}{c} A \cdot \dot{\beta} \\ B \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \sin \beta \\ C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M \cdot a^2 \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \end{array} \right) & 6. \overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,1/0)} = J \cdot \ddot{\alpha} \\
 & 7. \overrightarrow{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(K,2/0)} = m [a \cdot b \cdot (\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + a^2 \ddot{\alpha} + b^2 \cdot (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta - m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin \beta)] \\
 & 8. \overrightarrow{x_2} \cdot \overrightarrow{C_m} \cdot \overrightarrow{z_2} = -m \cdot a \cdot b \cdot \dot{\beta}^2 \sin \beta
 \end{array}$$

Activation 3



Le robot humanoïde Lola

Concours Mines Ponts – PSI 2015

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

Mise en situation

Le développement de robots à forme humaine est en croissance constante depuis quelques dizaines d'années. En robotique, il est difficile d'affirmer que tous les robots remplaçant l'homme dans ses tâches doivent être de forme humaine. Les véhicules autonomes, par exemple, ne sont pas anthropomorphes. Les tâches auxquelles sont destinées les robots définissent leur forme idéale. Si nous souhaitons un jour que les robots remplacent l'homme dans ses tâches ennuyeuses, ils devront s'intégrer au mieux à notre société, à notre environnement et à notre ergonomie.

Les dimensions d'une maison et la hauteur des meubles sont adaptées à notre forme humaine. L'avantage des robots humanoïdes devient alors économique : il n'est pas indispensable de modifier l'environnement quotidien pour les utiliser.

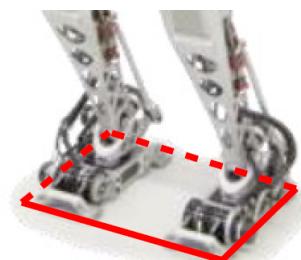
Le robot humanoïde LOLA, développé par l'Université de Munich, est un robot de forme humaine conçu pour un mode de marche rapide. LOLA possède une structure à 25 degrés de liberté lui permettant une flexibilité accrue. Chaque jambe possède 7 degrés de liberté, le haut du corps 8 et la tête 3. Le robot est équipé d'une caméra stééréoscopique haute définition afin de percevoir son environnement, d'une centrale inertielle équipée de 3 gyroscopes et de 3 accéléromètres. Chaque articulation possède un codeur angulaire absolu et chaque pied est muni d'un capteur d'effort 6 axes permettant d'obtenir l'effort de contact avec le sol. Les caractéristiques techniques de LOLA sont données dans le tableau suivant.

Caractéristiques	Valeurs
Hauteur	180cm
Masse	55 kg
Nombre de degrés de liberté	25
Vitesse de marche	5 km.h ⁻¹ maxi
Hauteur du centre de gravité	105 cm

Stabilité du robot

Par définition, le robot humanoïde bipède s'appuie sur ses deux jambes. Comme tout système de solides en équilibre statique, LOLA est à l'équilibre si la projection de son centre de gravité sur le sol est contenu dans le polygone de sustentation qui est tracé en rouge autour de ses deux pieds sur la figure suivante. Lorsque le robot marche, il

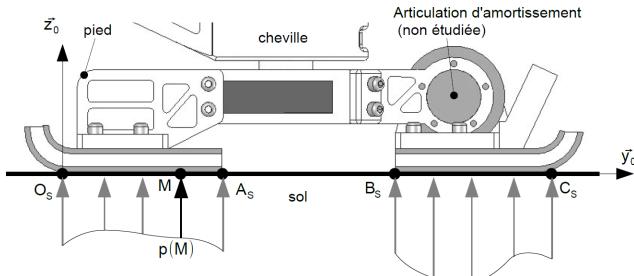
ya une phase où il n'est en appui que sur un seul pied. Dans ce cas, le polygone de sustentation est réduit à un seul pied.



Objectif L'objectif de cette partie est de trouver à quelle condition le maintien du contact sur le sol est possible lorsque le robot marche et si l'accélération est compatible avec le cahier des charges, dont un extrait est donné ci-après.

Exigence 1.3 : Le robot ne doit pas basculer lors de la marche	
Description : La position du ZMP* reste dans le polygone de sustentation : défini dans la suite	
Exigence 1.1 : Le robot doit pouvoir atteindre les performances cibles	
Sous-exigence	Description
Id=1.1.4	La longueur d'une foulée est de 150 cm au maximum
Id=1.1.3	Le robot peut accélérer jusqu'à 1,39 m.s ⁻²

Le contact du pied sur le sol est modélisé sans frottement sur la figure suivante.



Modélisation de l'effort de contact entre le sol et le robot

Sous la semelle du robot, la pression de contact avec le sol est supposée répartie de manière uniforme transversalement (suivant la direction \vec{x}_0). Le problème se ramène donc à une répartition linéaire de pression sur les deux segments de contact $[O_s; A_s]$ et $[B_s; C_s]$. En chaque point M (d'ordonnée \vec{y}) de ces segments, la densité d'efforts

de contact est $p(M)\vec{z}_0$, avec $p(M)$ en N m^{-2} . On notera que si le robot n'est pas équipé de semelles magnétiques ou adhésives, on a $p(M) > 0$. Ainsi, en notant b la largeur de la semelle suivant \vec{x}_0 et $\Sigma = [O_S, A_S] \cup [B_S, C_S]$, le modèle global d'action mécanique de contact du sol sur le pied peut être donné par le torseur : $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow \text{pied})} = b \int_{M \in \Sigma} p(M) \vec{z}_0 \, dy \\ \overrightarrow{\mathcal{M}(O_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = b \int_{M \in \Sigma} \overrightarrow{O_S M} \wedge p(M) \vec{z}_0 \, dy \end{array} \right\}_{O_S}$.

Question 1 Montrer que $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$ est un glisseur.

Soit H_S le point de la droite (O_S, \vec{y}_0) tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}(H_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = \vec{0}$, on notera $\overrightarrow{O_S H_S} = Y_{H_S} \vec{y}_0$. Ce point est fondamental en robotique humanoïde, il prend le nom de Zero Moment Point (ZMP) : de l'anglais « point de moment nul ».

Question 2 Montrer que $H_S \in [O_S; C_S]$, c'est à-dire qu'il est situé sous le pied du robot.

Question 3 Donner la forme du torseur $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\}$ dans le cas d'un contact avec frottement dans le plan sagittal (c'est-à-dire que la densité d'efforts de contact est $p(M)\vec{z}_0 + t(M)\vec{y}_0$). Montrer que les résultats des questions 1 et 2 sont inchangés.

Établissement de la condition de non-basculement

Considérons le robot en marche avec le torse ayant un mouvement de translation vers l'avant (suivant $+\vec{y}_0$). Le robot est toujours dans la phase d'appui d'un seul pied sur le sol, via une des deux jambes notées (2).

Données et paramètres :

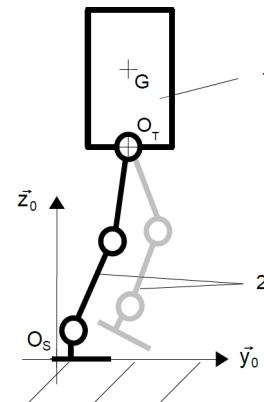
- Torse (1) :

- masse m_1 , accélération de la pesanteur : $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ avec $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$;
- centre de gravité : G , tel que $\overrightarrow{O_S G} = Y_G(t) \vec{y}_0 + Z_G(t) \vec{z}_0$;
- le torse est supposé en mouvement de translation rectiligne, de direction \vec{y}_0 par rapport au sol, on a : $\{\mathcal{V}(1/\text{Sol})\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \frac{dY_G}{dt} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_G$.

- Jambe avec les pieds (2) :

- masses et inerties négligeables dans cette phase;
- le pied d'appui est sans mouvement par rapport au sol;
- l'action mécanique du sol sur la semelle du pied est modélisée par le glisseur : $\{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow \text{pied})\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow \text{pied})} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{H_S}$ où :

H_S est le ZMP, point mis en évidence à la question 2 tel que $\overrightarrow{O_S H_S} = Y_{H_S} \vec{y}_0$, $\overrightarrow{R(\text{sol} \rightarrow \text{pied})} = N_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \vec{z}_0 + T_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} \vec{y}_0$, avec à la limite du glissement $|T_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}| = \mu N_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}$ où μ est le facteur de frottement du contact sol / semelle.



Question 4 En appliquant le théorème du moment dynamique, puis le théorème de la résultante dynamique au système {1+2}, montrer que la condition de stabilité (non basculement) s'écrit : $Y_{H_S} = Y_G - \frac{Z_G}{g} \frac{d^2 Y_G}{dt^2}$.

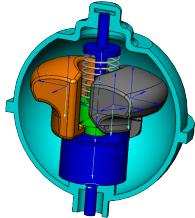
Conformément au résultat de la question 2, le calculateur du robot contrôle en permanence la position du point H_S (ZMP) : s'il est positionné à l'intérieur du segment $[O_S; C_S]$, le robot ne bascule pas. On appelle foulée, la longueur entre deux emplacements successifs d'appui du même pied. Lors du premier pas, le centre de gravité se déplace de sorte que $Y_G = \left[-\frac{\text{foulée}}{4}, +\frac{\text{foulée}}{4} \right]$, car pour une accélération constante, les deux pas qui constituent une foulée sont de même longueur.

Le cahier des charges stipule qu'à partir de la station immobile, le robot doit atteindre la vitesse cible de 5 kmh^{-1} en une seconde, avec une accélération constante du centre de gravité $\frac{d^2 Y_G}{dt^2} = 1,39 \text{ ms}^{-2}$. On rappelle que $Z_G = 105 \text{ cm}$.

Question 5 Sachant que la longueur de la semelle du robot $[O_S; C_S]$ est $L = 300 \text{ mm}$, déterminez la longueur de la première foulée du robot qui garantit la condition de non-basculement. Est-ce compatible avec le cahier des charges ?

Question 6 Dans le cas d'un sol relativement glissant, avec un facteur de frottement du contact sol/semelle $\mu = 0,1$, quelle accélération maximale $\left[\frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2} \right]_{\text{max}}$ le robot peut-il avoir ? Est-ce compatible avec le cahier des charges pour la phase de démarrage ?

Application 1



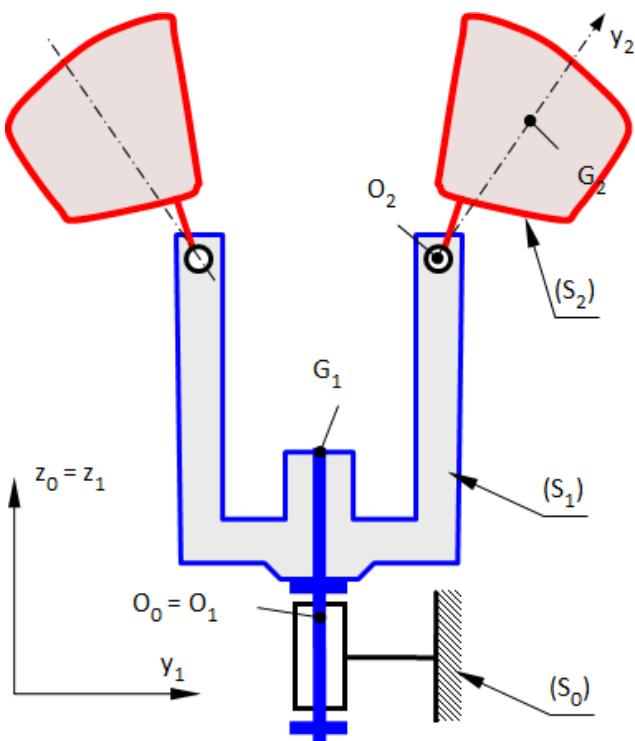
Application – Régulateur centrifuge

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- Mod2.C13 : centre d'inertie;
- Mod2.C14 : opérateur d'inertie;
- Mod2.C15 : matrice d'inertie.

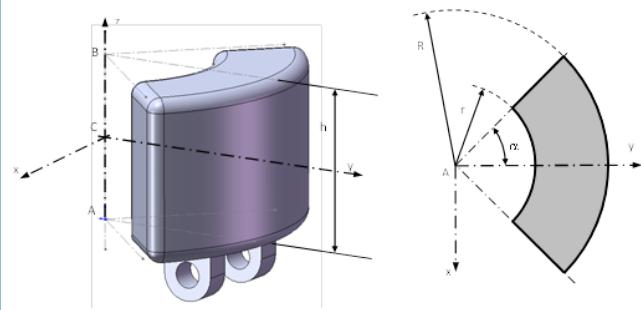
On considère le mécanisme de la figure ci-contre, qui représente le régulateur centrifuge utilisé dans la direction assistée « DIRAVI » de CITROËN. Ce système, dont la fréquence de rotation est liée à la vitesse du véhicule, agit sur un circuit hydraulique et permet de faire varier l'assistance en fonction de la vitesse. Considérons uniquement le rotor (S_1) et la masselotte (S_2) représentés schématiquement ci-dessous.



- (S_1) est en liaison pivot d'axe (O_1, \vec{z}_0) avec (S_0).
- (S_2) est en liaison pivot d'axe (O_2, \vec{x}_1) avec (S_1).
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$.
- $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta_2$.
- $\vec{O_0G_1} = h_1 \vec{z}_0$.
- $\vec{O_0O_2} = d_1 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_1$.
- $\vec{O_2G_2} = L_2 \vec{y}_2$.

Pour chacun des solides S_i on note m_i la masse, $I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{B_i}$.

On note $E = \{S_1, S_2\}$. Une vue 3D de la masselotte est donnée ci-dessous.



Question 1 Indiquer, sans développer de calculs, quelles sont les particularités des matrices d'inertie des solides (1) et (2).

Afin de ne pas trop alourdir les calculs, on suppose constantes les vitesses de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$.

Question 2 Discuter de la pertinence de ces hypothèses. Vous pourrez éventuellement les remettre en cause.

Question 3 Déterminer :

- le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_1/R_0)\}$ en O_1 ;
- le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_2/R_0)\}$ en O_2 .

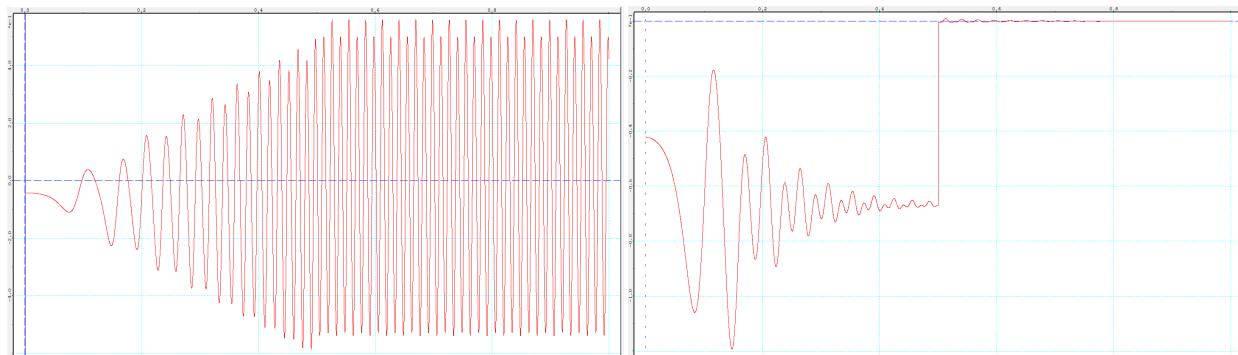
Question 4 Déterminer $\overrightarrow{\delta(O_2, 2/0)} \cdot \vec{x}_2$.

Question 5 Comment pourrait-on déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(E/R_0)\}$ en O_2 ?

Question 6 Donner une méthode qui permettrait d'obtenir le couple moteur nécessaire à la mise en mouvement du régulateur.

Pour mettre en mouvement le régulateur on réalise une montée en vitesse de 0 à 2000 tours par minute en 0,5 seconde. On reste ensuite à vitesse constante. On donne le résultats de deux simulation permettant de calculer le couple nécessaire à la mise en mouvement du régulateur : la première sans frottement dans la liaison entre S_1 et S_2 (couple maximal 0,46 Nm), une seconde avec frottement (couple maximal 0,1 Nm).

Question 7 Commenter ces résultats.



Application 2



Conducteur virtuel pour véhicule automobile

Centrale Supélec PSI 2014

Savoirs et compétences :

- Mod2.C13 : centre d'inertie
- Mod2.C14 : opérateur d'inertie
- Mod2.C15 : matrice d'inertie

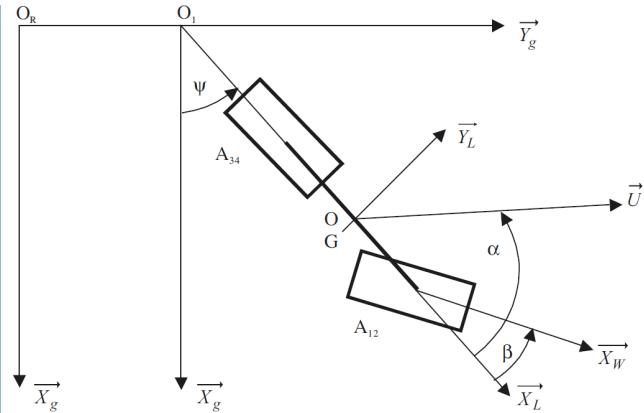
L'accroissement de la circulation automobile dans les grandes agglomérations menace de saturation leur réseau d'autoroutes. Une des solutions consiste à augmenter les flux en automatisant les voitures sur ces dernières. Après une évaluation du gain en terme de flux d'automobiles que peut apporter ce concept, l'étude portera sur le système de guidage automatique latéral d'une automobile sur une autoroute dite « intelligente ».

Objectif L'objet de cette partie est de déterminer un modèle mécanique du véhicule en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique au véhicule. L'idée est d'utiliser un modèle mécanique relativement simple, associé à une commande très robuste.

Une approche simplifiée permettant d'aborder le problème consiste à adopter un modèle dit « bicyclette », représenté sur la figure suivante, qui assimile le comportement du véhicule à celui d'une bicyclette :

- le train avant directeur se réduit à une seule roue (12) sur laquelle s'appliquent les actions exercées sur les deux roues avant (1) et (2) du véhicule, de même la roue arrière (34) supporte les actions exercées par l'essieu arrière portant les roues (3) et (4), les pneumatiques avant et arrière ont les mêmes caractéristiques, en particulier le même coefficient de dérive (celui-ci sera défini plus loin) ;
- le modèle choisi est un modèle à 2 degrés de liberté : l'angle de lacet $\psi(t) = (\vec{X}_g, \vec{X}_L)$ et l'angle d'attitude $\alpha(t) = (\vec{X}_L, \vec{U})$. La rotation de chaque roue autour de son axe n'est pas prise en compte ;
- on notera que l'angle de braquage des roues $\beta(t) = (\vec{X}_L, \vec{X}_W)$ avant est imposé au moyen d'un asservissement qui ne sera pas étudié dans le cadre de ce problème ;
- les roues ont une masse supposée négligeable.

Cette modélisation ne prend pas en compte les mouvements suivants : tangage (rotation autour de \vec{Y}_L) et roulis (rotation autour de \vec{X}_L).



Les différents repères sont les suivants :

- repère galiléen : $\mathcal{R}_g (O_g; \vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{Z}_g)$, O_g est lié à la route, $\Pi_R = (\vec{X}_g, \vec{Y}_g)$ plan fixe par rapport à la route ;
- repère intermédiaire : $\mathcal{R}_1 (O_1; \vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{Z}_g)$, $\vec{O}_R \vec{O}_1 = a \vec{Y}_g$;
- repère intermédiaire : $\mathcal{R}_0 (O; \vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{Z}_g)$, O lié au châssis et $\vec{O}_1 \vec{O} = b \vec{X}_L$, $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_0 / \mathcal{R}_g) = \vec{0}$, $\vec{V}(O, \mathcal{R}_0 / \mathcal{R}_g) = V \vec{U}$ avec $\vec{O}_R \vec{O} \cdot \vec{Z}_g = 0$ et V constante positive ;
- repère lacet $\mathcal{R}_L (G; \vec{X}_L, \vec{Y}_L, \vec{Z}_L)$, $\vec{O} \vec{G} = h \vec{Z}_g$ avec G centre d'inertie lié du châssis lié au véhicule, $\vec{Z}_L = \vec{Z}_g$ et $(\vec{Y}_g, \vec{Y}_L) = (\vec{X}_g, \vec{X}_L) = \psi(t)$ angle de lacet, h constante positive ;
- repère lié à la roue $\mathcal{R}_W (A_i; \vec{X}_W, \vec{Y}_W, \vec{Z}_W)$, A_i centre de la roue R_i (assimilée à un disque), $\vec{Z}_W = \vec{Z}_L$ avec $\vec{O} \vec{A}_{12} = l_1 \vec{X}_L$ et $\vec{O} \vec{A}_{34} = -l_2 \vec{X}_L$, $(\vec{Y}_L, \vec{Y}_W) = (\vec{X}_L, \vec{X}_W) = \beta(t)$ angle de braquage.

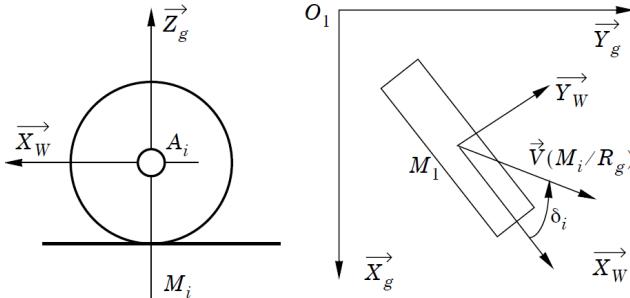
On appelle :

- $\alpha(t) = (\vec{X}_L, \vec{U})$: angle d'attitude,
- $\psi(t) = (\vec{X}_g, \vec{X}_L)$: angle de lacet,
- $\beta(t) = (\vec{X}_L, \vec{X}_W)$: angle de braquage de la roue avant.

Le torseur cinématique du mouvement du véhicule (VH) par rapport à \mathcal{R}_g , au point O , est noté : $\{\mathcal{V}(VH / \mathcal{R}_g)\} =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(VH/\mathcal{R}_g)} \\ V(O, VH/\mathcal{R}_g) = V \overrightarrow{U} \end{array} \right\}_O.$$

La roue munie d'un pneumatique se comporte différemment d'une roue rigide au niveau du contact avec le sol. On adoptera le modèle représenté sur la figure suivante.



Le contact roue/sol pour chaque roue est modélisé par le torseur d'efforts suivant : $\{\mathcal{T}(\text{Sol} \rightarrow \mathcal{R}_i)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{Sol} \rightarrow \mathcal{R}_i)} \\ \overrightarrow{M(M_i, \text{Sol} \rightarrow \mathcal{R}_i)} \end{array} \right\}_{M_i}$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ avec $\overrightarrow{OM_{12}} = \ell_1 \overrightarrow{X_L} - R \overrightarrow{Z_L}$ et $\overrightarrow{OM_{34}} = -\ell_2 \overrightarrow{X_L} - R \overrightarrow{Z_L}$.

L'angle de dérive d'un pneumatique est défini par : $\delta_i = (\overrightarrow{X_W}, \overrightarrow{V(M_i/\mathcal{R}_g)})$. Si D désigne le coefficient de dérive du pneumatique, on admettra qu'on peut écrire $Y_i = -D\delta_i$, soit ici $Y_{12} = -2D\delta_{12}$ et $Y_{34} = -2D\delta_{34}$. Comme la vitesse du véhicule est supposée constante et la roue arrière n'est pas motrice, on peut considérer : $X_{12} = 0$ et $X_{34} = 0$. La matrice d'inertie du véhicule de masse M , dans le repère \mathcal{R}_L , est de la forme : $I_G(VH) = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_L}$

Remarque : le véhicule comprend la caisse, les roues, et sera modélisé dans la mise en équation comme un solide indéformable.

Modélisation du comportement dynamique du véhicule

Question 1 Déterminer les composantes dans le repère \mathcal{R}_L du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma(O, VH/\mathcal{R}_g)}$ au point O , du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_g , en fonction de $\dot{\psi}$, $\dot{\alpha}$, h , V et des caractéristiques inertielles.

Question 2 Déterminer les composantes dans le repère \mathcal{R}_L du moment dynamique $\overrightarrow{\delta(O, VH/\mathcal{R}_g)}$ au point

O , du véhicule (VH) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_g , en fonction de $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$, $\dot{\alpha}$, α , h , V et des caractéristiques inertielles.

Question 3 On note $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)}$ le vecteur accélération de appartenant à (VH) dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_G . Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(G/\mathcal{R}_g)} \cdot \overrightarrow{Y_L}$ en fonction de $\dot{\psi}$, $\dot{\alpha}$, α , V . Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha = 0$, $\psi = 0$ et $\beta = 0$.

Question 4 En admettant que l'angle de dérive de la roue avant s'écrit : $\delta_{12} \simeq \alpha - \beta + \frac{\ell_1}{V} \dot{\psi}$ et celui de la roue arrière $\delta_{34} \simeq \alpha - \frac{\ell_2}{V} \dot{\psi}$, en déduire l'expression de $\overrightarrow{R(VH \rightarrow VH)} \cdot \overrightarrow{Y_L}$. Linéariser la relation obtenue au voisinage de la position d'équilibre définie par $\alpha = 0$, $\psi = 0$ et $\beta = 0$.

Question 5 Montrer que l'on obtient le système d'équations différentielles suivant en indiquant clairement (point, vecteur unitaire, résultante ou moment, ...) à quelle équation scalaire issue du PFD correspond chaque relation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(MV + \frac{2D(\ell_1 - \ell_2)}{V} \right) \dot{\psi} + MV \dot{\alpha} + 4D\dot{\alpha} = 2D\beta \\ C\ddot{\psi} + \frac{2D(\ell_1^2 + \ell_2^2)}{V} \dot{\psi} + 2D(\ell_1 - \ell_2)\alpha = 2D\ell_1\beta \end{array} \right.$$

Avec les valeurs numériques : $\ell_1 = 1\text{m}$, $\ell_2 = 1,5\text{m}$, $D = 21000\text{N rad}^{-1}$, $C = 3100\text{kg m}^2$, $M = 1500\text{kg}$, $V = 15\text{m s}^{-1}$, on obtient le système d'équations différentielles suivant, permettant de décrire l'évolution du véhicule (données en unités S.I.) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 211\dot{\psi}(t) + 225\dot{\alpha}(t) + 840\alpha(t) = 420\beta(t) \\ 31\ddot{\psi}(t) + 91\dot{\psi}(t) - 210\alpha(t) = 420\beta(t) \end{array} \right.$$

Question 6 En supposant que les conditions initiales sont nulles, déterminer l'expression numérique de la fonction de transfert $H_2(p)$ entre l'angle de lacet $\psi(p)$ et l'angle de braquage $\beta(p)$ de la roue avant : $H_2(p) = \frac{\psi(p)}{\beta(p)}$. Discuter de la stabilité de ce modèle.

Application 3

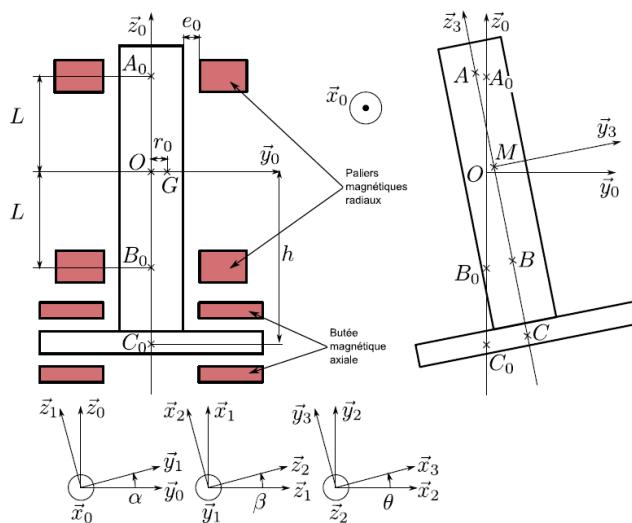
Pompe turbo-moléculaire

Centrale Supelec PSI 2009

Savoirs et compétences :

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique
- Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement

Le comportement dynamique du rotor est étudié sur un modèle à 6 degrés de liberté : le rotor n'étant en contact avec aucun solide, il dispose des 6 mouvements de corps rigide. On suppose le rotor indéformable. La figure suivante montre à gauche le rotor dans sa position nominale ($\alpha = \beta = \theta = x = y = z = 0$) et à droite le rotor dans une position quelconque. On note A_0 et B_0 les centres des paliers magnétiques radiaux et A et B les points appartenant à l'arbre et confondus avec et dans la position nominale.



On note O le milieu de $[A_0B_0]$ et M le milieu de $[AB]$. Bien qu'un soin très important soit apporté à la fabrication du rotor, il est impossible d'annuler totalement les défauts d'équilibrage. Le centre de gravité n'est donc pas exactement situé sur l'axe (AB) , mais à une distance de celui-ci telle que $\overrightarrow{MG} = r_0 \overrightarrow{y_3}$.

De même, la matrice d'inertie $I_{G,3}$ n'est pas parfaitement diagonale et présente un produit d'inertie D non nul. On admet toutefois que $r \ll L$ et $D \ll (A, B, C)$, où A, B, C sont les moments d'inertie. Le mouvement du rotor, auquel on associe le repère 3, par rapport au bâti est paramétré par les trois déplacements (x, y, z) du point M dans le repère $\mathcal{R}_0(0; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$: $\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{x_0} + y \overrightarrow{y_0} + z \overrightarrow{z_0}$ ainsi que par trois rotations (α, β, γ) telles que :

- α paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_1(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ par rapport à \mathcal{B}_0 autour de l'axe $\overrightarrow{x_0}$;

- β paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_2(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_2})$ par rapport à \mathcal{B}_1 autour de l'axe $\overrightarrow{y_1}$;
- θ paramètre la rotation d'une base $\mathcal{B}_3(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_2})$ par rapport à \mathcal{B}_2 autour de l'axe $\overrightarrow{z_2}$.

Si le rotor présente 6 degrés de liberté, il est bien évident qu'excepté la rotation propre principale θ , ces mouvements sont très petits.

En notant $\varepsilon(x)$ une fonction telle que $|\varepsilon(x)| \ll |x|$, on peut écrire : $\begin{cases} x, y, z \simeq \varepsilon(L) \\ \alpha, \beta \simeq \varepsilon(1) \end{cases}$.

On suppose que la vitesse de rotation du rotor est constante : $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{\theta} = 0$.

Efforts des paliers et du moteur sur le rotor

Pour le dimensionnement dynamique, on modélise les actions des trois paliers magnétiques et l'action du moteur électrique sous la forme :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3A)\} &= \left\{ \begin{array}{l} X_A \overrightarrow{x_0} + Y_A \overrightarrow{y_0} \\ 0 \end{array} \right\}_A, \quad \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3B)\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} X_B \overrightarrow{x_0} + Y_B \overrightarrow{y_0} \\ 0 \end{array} \right\}_B, \quad \{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3C)\} = \left\{ \begin{array}{l} Z_C \overrightarrow{z_0} \\ 0 \end{array} \right\}_C, \\ \{\mathcal{T}(\text{moteur} \rightarrow 3)\} &= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_G. \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} X_A \overrightarrow{x_0} + Y_A \overrightarrow{y_0} = -k \left[\overrightarrow{A_0A} \right]_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})} - c \left[\overrightarrow{V(A, 3/0)} \right]_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})} \\ X_B \overrightarrow{x_0} + Y_B \overrightarrow{y_0} = -k \left[\overrightarrow{B_0B} \right]_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})} - c \left[\overrightarrow{V(B, 3/0)} \right]_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})} \\ Z_C = -k \overrightarrow{C_0C} \overrightarrow{z_0} - c \overrightarrow{V(C, 3/0)} \cdot \overrightarrow{z_0} \end{cases}$$

et $k = 50 \times 10^4 \text{ Nm}^{-1}$ et $c = 970 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$. La notation $\left[\overrightarrow{V} \right]_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})}$ désigne la projection dans le plan $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$ du vecteur \overrightarrow{V} . Les actions de la pesanteur sont négligées. Le bâti est supposé être un référentiel galiléen.

Le rotor, tel que $L = 50 \text{ mm}$, a pour masse $m = 10 \text{ kg}$, pour centre de gravité G tel que $\overrightarrow{MG} = r_0 \overrightarrow{y_3}$ où $r_0 = 0,05 \text{ mm}$, et pour matrice d'inertie en G : $I_G(3) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{B_3}$ où $A = 0,08 \text{ kgm}^2$, $C = 0,04 \text{ kgm}^2$ et $D = 1 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$.

On admet que $r_0 \simeq \varepsilon(L)$ et $D \simeq \varepsilon(A) \simeq \varepsilon(C)$.

Objectif Proposer un modèle de comportement dynamique du rotor en phase de rotation.

Question 1 Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au rotor et l'exprimer sous forme torsorielle.

Les questions suivantes visent à déterminer le système d'équations issu de cette équation torsorielle.

Question 2 Montrer quel l'expression au premier ordre de la vitesse du centre de gravité G du rotor par rapport au bâti s'écrit : $\vec{V}(G, 3/0) = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 - r_0\omega\vec{x}_3$.

Question 3 Déterminer l'expression au premier ordre de l'accélération du centre de gravité G du rotor par rapport au bâti $0 : \vec{\Gamma}(G, 3/0)$.

On admet que par changement de base, la matrice $I_{G,3}$ s'écrit dans la base B_2 : $I_G(3) =$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & D\sin\theta \\ 0 & A & -D\cos\theta \\ D\sin\theta & -D\cos\theta & C \end{pmatrix}_{B_2}.$$

Question 4 Montrer que l'expression au premier ordre du moment cinétique en G du rotor par rapport au bâti s'écrit : $\overrightarrow{\sigma(G, 3/0)} = \begin{pmatrix} A\ddot{a} + D\omega\sin\theta \\ A\dot{\beta} - D\omega\cos\theta \\ C\omega \end{pmatrix}_{B_2}$.

Question 5 Déterminer l'expression au premier ordre du moment dynamique en G du rotor par rapport au bâti $0 : \overrightarrow{\delta(G, 3/0)}$, dans la base B_2 .

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au rotor 3, réduit en G , conduit alors à :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2c\dot{x} + 2kx = -mr_0\omega^2\sin\theta \\ m\ddot{y} + 2c\dot{y} + 2ky = mr_0\omega^2\cos\theta \\ A\ddot{a} + C\omega\dot{\beta} + 2cL\ddot{a} + 2kL\alpha = -D\omega^2\cos\theta \\ A\ddot{\beta} - C\omega\dot{a} + 2cL\dot{\beta} + 2kL\beta = -D\omega^2\sin\theta \\ C_m = 0 \end{cases}$$

TD 1



Orthèse d'épaule

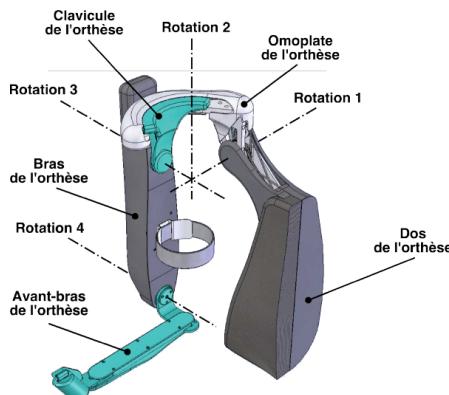
Concours Centrale Supelec PSI 2010

Savoirs et compétences :***

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

Mise en situation

Le support de cette étude est une orthèse portable, de type exosquelette, qui contribue au développement de la tonicité musculaire de l'épaule et du bras. Installée dans le dos de l'individu et liée à la fois au bras et à la main, elle offre une résistance aux mouvements de la main. Ainsi, le thérapeute peut réaliser des protocoles très fins de rééducation en programmant des spectres d'efforts résistants pour chaque mouvement du patient. Le travail du patient peut également être optimisé en le plaçant dans un environnement de réalité virtuelle permettant de visualiser les situations de travail conçues par le thérapeute.



Objectif L'objectif est de mettre en place une loi de commande utilisée, par exemple, pour des situations de travail où le patient peut déplacer le bras et doit appliquer une force prédéterminée par le physiothérapeute, dépendante des positions des articulations. Dans le cadre de cette étude, l'effort est élastique et caractérisé par une raideur de torsion.

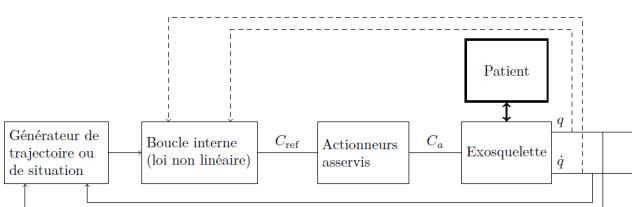
La synthèse de cette loi de commande sera faite en deux étapes : dans un premier temps, la mise en équation de l'exosquelette (limité à deux axes pour des raisons de simplicité) sera effectuée en vue d'obtenir un modèle dynamique ; dans un deuxième temps, la loi de commande sera déterminée en utilisant le modèle dynamique établi au préalable. Il s'agira, de plus, de valider le dimensionnement de la chaîne de motorisation.

Module de l'effort de manipulation maximal en régime permanent	50 N
Compensation du couple statique (dû à la pesanteur)	Totale
Raideurs (K_1, K_2) de maintien (pour ce critère, seule la force Z_F est considérée).	$ \Delta Z_F / \Delta \gamma = K_1 \geq 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$
	$ \Delta Z_F / \Delta \delta = K_2 \geq 500 \text{ N rad}^{-1} (\pm 5\%)$

L'actionneur ne peut fournir, en régime permanent, sur l'axe de l'articulation qu'un couple de module inférieur à 50 Nm. On suppose, de plus, qu'en régime transitoire le couple maximal peut atteindre quatre fois la valeur maximale autorisée en régime permanent. On s'intéresse ici à une situation de travail où les relations entre les variations des positions angulaires du bras et de l'avant bras (γ et δ) et la variation de la force Z_F (ces grandeurs seront définies par la suite) exercée par le patient sont équivalentes à des raideurs de torsion de valeurs (K_1, K_2).

La structure de commande retenue est représentée par le schéma de la figure suivante où :

- q et \dot{q} sont respectivement les vecteurs des angles et des vitesses angulaires des articulations ;
- une boucle externe génère les trajectoires (positions, vitesses et accélérations) et éventuellement un contexte de travail ;
- une boucle interne (de loi non linéaire) génère les couples souhaités sur chaque axe (articulation) à partir des mesures des angles et des vitesses angulaires des articulations et éventuellement des données issues du générateur de trajectoire ;
- un ensemble d'actionneurs fournit les couples, sur les axes des articulations, identiques aux couples de référence $C_a = C_{ref}$.



Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

Objectif Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

Le système étudié se réduit donc à l'ensemble {Bras + Avant-bras} relativement au reste du dispositif supposé fixe : on suppose que les angles d'abduction/adduction et de rotation interne/rotation externe de l'épaule sont maintenus identiquement nuls par l'action des moteurs situés dans la partie dorsale du dispositif (non étudiée ici). Le paramétrage se réduit donc à la situation de la figure suivante qui représente l'ensemble étudié dans un plan ($\vec{x}; \vec{z}$) donné, où l'on choisit \vec{z} vertical dans le sens descendant. Le tableau précise les différents paramètres utiles pour le calcul de dynamique envisagé.

Bâti		
Repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe, galiléen		
Bras (moteurs compris)		
Repère $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ Angle $\gamma = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$ $\vec{y} = \vec{y}_1$	Longueur $l_1 = 350$ mm Masse $m_1 = 2,3$ kg Centre d'inertie G_1 tel que : $\vec{OG}_1 = \lambda_1 \vec{z}_1$, $\lambda_1 = 50$ mm	Matrice d'inertie $I(G_1, 1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$ $A_1 = 2,4 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $B_1 = 2,3 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $D_1 = 2,1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Repère $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ Angle $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$	Longueur $l_2 = 270$ mm Masse $m_2 = 0,3$ kg Centre d'inertie G_2 tel que : $\vec{AG}_2 = \lambda_2 \vec{z}_2$, $\lambda_2 = 135$ mm	Matrice d'inertie $I(G_2, 2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$ $A_2 = 1,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $B_2 = 1,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $D_2 = 4,3 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Question 1 Exprimer littéralement, au point G_2 et dans le repère R_1 , le torseur dynamique du mouvement du solide {Avant-bras} par rapport au référentiel fixe R_0 supposé galiléen : $\{\mathcal{D}(\text{Avant-bras}/R_0)\}_{G_2, (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$.

Les différentes actions mécaniques agissant sur le dispositif sont les suivantes :

- l'action de la pesanteur sur les solides {Bras} et {Avant-bras} ;
- l'action du bâti sur le solide {Bras} au travers de la liaison pivot d'axe (O, \vec{y}) et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante : $\{\mathcal{T}(\text{Bâti} \rightarrow \text{Bras})\} = \begin{Bmatrix} X_1 \vec{x}_1 + Y_1 \vec{y}_1 + Z_1 \vec{z}_1 \\ L_1 \vec{x}_1 + M_1 \vec{y}_1 + N_1 \vec{z}_1 \end{Bmatrix}_O$ où les paramètres $(X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1)$ sont inconnus ;
- l'action du premier actionneur sur le solide {Bras} : $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 1} \rightarrow \text{Bras})\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_1(t) \vec{y} \end{Bmatrix}_O$ où le couple $C_1(t)$ exercé est connu au cours du temps ;

- l'action du solide {Bras} sur le solide {Avant-bras} au travers de la liaison pivot d'axe (A, \vec{y}) et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante : $\{\mathcal{T}(\text{Bras} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \begin{Bmatrix} X_2 \vec{x}_1 + Y_2 \vec{y} + Z_2 \vec{z}_1 \\ L_2 \vec{x}_1 + M_2 \vec{y} + N_2 \vec{z}_1 \end{Bmatrix}_A$ où les paramètres $(X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2)$ sont inconnus ;
- les actions du second actionneur sur le solide {Bras} et le solide {Avant-bras}, respectivement notées : $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Bras})\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -C_2(t) \vec{y} \end{Bmatrix}_A$ et $\{\mathcal{T}(\text{Actionneur 2} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_2(t) \vec{y} \end{Bmatrix}_A$ où le couple $C_2(t)$ exercé est connu au cours du temps ;
- l'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité B de l'avant-bras et définie par : $\{\mathcal{T}(\text{Force} \rightarrow \text{Avant-bras})\} = \begin{Bmatrix} X_F \vec{x} + Z_F \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$.

On veut déterminer les deux équations permettant de décrire le mouvement des deux axes de l'orthèse. On suppose pour cela que les deux liaisons pivots sont parfaites.

Le PFD permet d'obtenir la relation suivante :

$$C_1(t) = (B_1 + B_2 + m_1 \lambda_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 \lambda_2^2) \ddot{\gamma} + (B_2 + m_2 \lambda_2^2) \ddot{\delta} + m_2 l_1 (\lambda_2 (2\ddot{\gamma} + \ddot{\delta}) \cos \delta + \lambda_2 (\dot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2) \sin \delta) + m_1 g \lambda_1 \sin \gamma + m_2 g (l_1 \sin \gamma + \lambda_2 \sin (\gamma + \delta)) - X_F (l_1 \cos \gamma + l_2 \cos (\gamma + \delta)) + Z_F (l_1 \sin \gamma + l_2 (\gamma + \delta))$$

Question 2 Détaillez la démarche qui a permis d'obtenir cette équation, on précisera en particulier l'isolation, le bilan des Actions Mécaniques Extérieures et le choix des équations utilisées.

Question 3 Appliquer la démarche pour retrouver l'équation donnée.

Question 4 Écrire une deuxième relation issue du Principe Fondamental de la Dynamique, indépendante de la précédente, faisant intervenir le couple $C_2(t)$, et qui permette de ne pas faire apparaître les composantes $L_1, M_1, N_1, L_2, M_2, N_2$ des torseurs des actions de liaison. On détaillera la démarche de la même façon que lors de la première question.

Question 5 En déduire que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante : $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + Q \begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix}$ où C est un vecteur et A, B et Q sont des matrices 2×2 que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement (γ, δ) et de leurs dérivées premières $(\dot{\gamma}, \dot{\delta})$.

Question 6 Calculer les couples (C_1, C_2) exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ($X_F = 0, Z_F = 0$) et dans une position statique. Discuter de

la configuration angulaire la plus défavorable vis-à-vis du cahier des charges.

Question 7 Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique maximale peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

TD 2



Stabilisateur passif d'image

Mines Ponts 2018 – PSI

Savoirs et compétences :***

- Mod2.C17.SF1 : déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
- Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique

Mise en situation

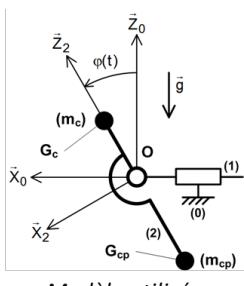
Les appareils photos modernes fonctionnent en rafales : 8 à 10 images par seconde et en mode vidéo. Le besoin de stabilisation de l'image dans de telles conditions est impératif. Le but de ce sujet est de s'intéresser au support de la caméra assurant la liaison entre le bras de l'utilisateur et la caméra elle-même.

Le stabilisateur se compose principalement de trois objets :

- une poignée orientable (1) manipulée directement par le photographe, liée au support (2) en O ;
- un support rigide (2) (**supposé sans masse**) sur lequel vient se fixer une caméra assimilée en première approximation à une masse ponctuelle m_c placée en G_c ;
- un contrepoids lié à (2) et assimilé à une masse ponctuelle m_{cp} placée en G_{cp} .



Système réel



Modèle utilisé

L'utilisateur tient fermement la poignée (1) dans une position angulaire quelconque, ce qui permet d'affirmer que le (**porteur + (1)**) ne forme qu'une seule classe d'équivalence. Afin de produire des images toujours fluides, sans à-coups, ce stabilisateur à main doit maintenir constamment la caméra dans une position verticale (parallèle au champ de gravité), que le porteur soit immobile (plan fixe) ou en mouvement (travelling).

Dans le cas général, le mouvement du bras par rapport au référentiel terrestre est quelconque (6 degrés de libertés). Ici, on se limite à un mouvement de translation. Dans le cas général, afin que la caméra soit en position verticale, le support doit permettre 3 rotations dans la liaison avec (**porteur + (1)**). Ici on se limite à la stabilisation d'une seule rotation.

Objectif Suite à une sollicitation brève de $0,5 \text{ m s}^{-2}$, l'amplitude des oscillations de la caméra ne doit pas dépasser les $0,5^\circ$.

Travail demandé

On se place à présent dans une phase dite « dynamique ». Le porteur (1) est en mouvement par rapport au sol. On suppose qu'à l'instant initial, l'ensemble (E)=**Support(2) + Caméra(C) + Contrepoids(Cp)** est en équilibre stable en position verticale. On note $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{V}(P, 1/0) = \vec{v}(t) \vec{X}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$. On note $a(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$. De plus, $\vec{OG}_C = L_C \vec{Z}_2$ et $\vec{OG}_{CP} = -L_{CP} \vec{Z}_2$.

Question 1 Par une étude dynamique que vous mettrez en œuvre, montrer que l'équation de mouvement de (E) dans (0) galiléen s'exprime comme $Q_1 \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + Q_2(t) = Q_3(t)a(t)$.

Afin de quantifier la modification d'attitude de (E), l'équation de mouvement est linéarisée autour de la position d'équilibre (verticale) en supposant que les valeurs de l'angle restent faibles. On transpose cette équation différentielle dans le domaine de Laplace et on note $\mathcal{L}(\varphi(t)) = \Phi(p)$ et $\mathcal{L}(a(t)) = A(p)$. Afin de conserver la fluidité des images lors de travelling, les fluctuations indésirables des mouvements du porteur ne doivent pas être intégralement transmises à (E).

On suppose que $a(t) = a_0 \sin(\omega_a t)$ avec $a_0 = 0,5 \text{ m s}^{-2}$ et $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Question 2 Établir sous forme canonique la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Phi(p)}{A(p)}$. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de m_c , m_{cp} , L_c , L_{cp} et g .

Question 3 Tracer l'allure du diagramme asymptotique de gain $G_{dB} = f(\omega)$ de la fonction de transfert $H(j\omega)$. Placer les caractéristiques remarquables.

Question 4 Pour un fonctionnement filtrant satisfaisant, on impose que $\omega_0 = 0,1\omega_a$. Le stabilisateur est réglé en conséquence par l'intermédiaire du couple (m_{cp}, L_{cp}) .

En utilisant le comportement asymptotique en gain de G_{dB} , estimer numériquement l'amplitude $\Delta\varphi$ (en degrés) des oscillations de (E) selon l'axe $(O, \vec{y_0})$.

Retour sur le cahier des charges

Question 5 Conclure vis-à-vis de l'objectif et sur les écarts obtenus.

Eléments de corrigé

1. $Q_1 = M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2, \quad Q_2(t) = (L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C)g \sin \varphi, \quad Q_3(t) = (M_{Cp}L_{Cp} - M_C L_C) \cos \varphi.$
2. $\omega_0^2 = \frac{(L_{Cp}M_{Cp} - L_C M_C)g}{M_{Cp}L_{Cp}^2 + M_C L_C^2}.$
3. .
4. $0,03^\circ.$
5. .