

Activation Corrigé

Activation

Patrick Dupas, <http://patrick.dupas.chez-alice.fr/>.

Savoirs et compétences :

- ☐ Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- ☐ Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

Exercice 2 – Pôles de la FTBF

Question 1 Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

Exercice 3 – Applications du critère du Revers

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF.

Question 2 Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.

Exercice 4 – Étude de la stabilité

On a $K = 1$, $\tau = 0,1$ et $G = 20$.

Question 1 Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

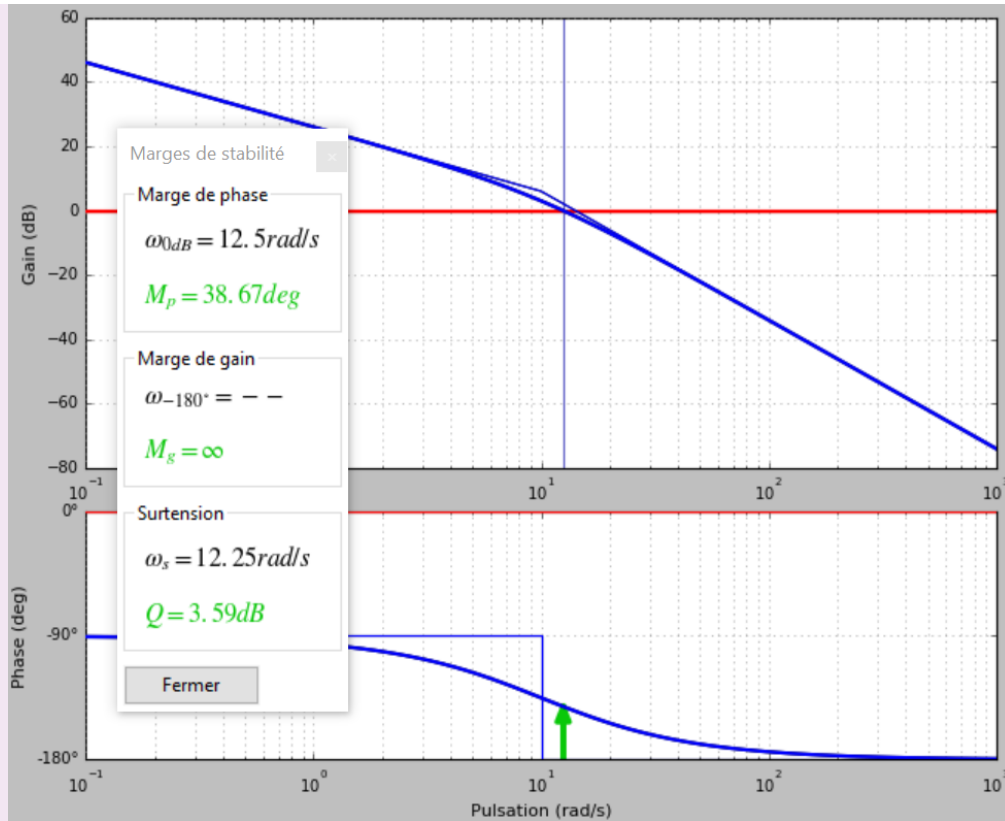
Correction Ici on a $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$.

$$\text{Erreur statique (entrée échelon) : } \varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = 0$$

$$\text{Erreur trainage (entrée rampe) : } \varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{20}{(1+0,1p)p}} = 1/20$$

Question 2 Effectuer les tracés des diagrammes de Bode de la FTBO.

Correction



Question 3 Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

Correction

Question 4 Confirmer ces résultats par le calcul.

Correction

La phase ne coupe jamais l'axe des abscisses. Ainsi, La marge de gain n'est pas définie (elle est infinie). Pour déterminer la marge de phase analytiquement :

1. On cherche ω_c tel que $G_{dB}(\omega_c) = 0$;
2. On calcule $\varphi(\omega_c)$;
3. La marge de phase est de $\varphi(\omega_c) - (-180)$.

Cherchons ω_c tel que $G_{dB}(\omega_c) = 0$. On a $FTBO(j\omega) = \frac{20}{(1 + 0,1j\omega)j\omega} = \frac{20}{j\omega - 0,1\omega^2}$. $20\log|FTBO(j\omega)| = 20\log 20 - 20\log \sqrt{\omega^2 + 0,01\omega^4} = 20\log 20 - 20\log \omega \sqrt{1 + 0,01\omega^2}$.
 $G_{dB}(\omega_c) = 0 \Leftrightarrow 20 = \omega_c \sqrt{1 + 0,01\omega_c^2} \Leftrightarrow 400 = \omega_c^2 (1 + 0,01\omega_c^2)$ On pose $x = \omega_c^2$ et on a : $400 = x(1 + 0,01x) \Leftrightarrow x^2 + 100x - 40000 = 0$. On a donc $\Delta = 412,3^2$ et $x_{1,2} = \frac{-100 \pm 412,3}{2}$ on conserve la racine positive et $x_1 = 156,15$ et $\omega_c = 12,5 \text{ rad s}^{-1}$.

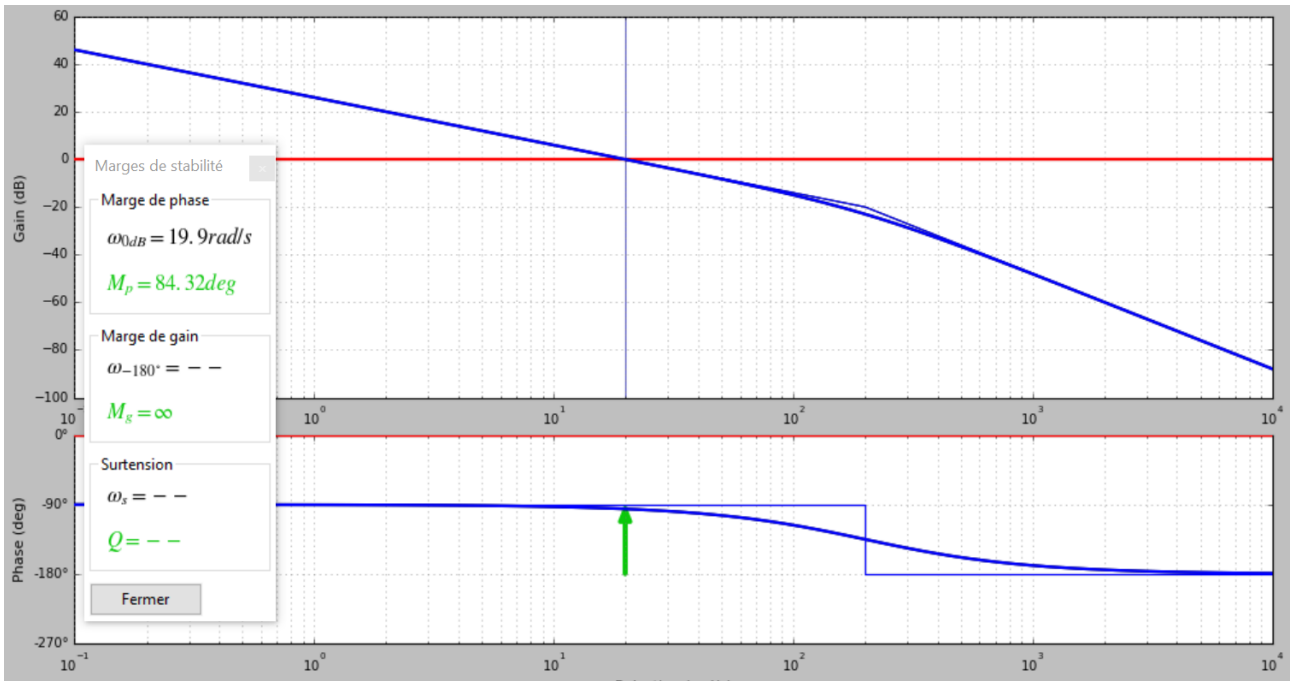
$\varphi(\omega_c) = \arg(20) - 90 - \arg(1 + 0,1j\omega_c) = 0 - 90 - \arctan(0,1\omega_c) = 0 - 90 - 51,34 = -141,34^\circ$.

La marge de phase est donc de $38,66^\circ$.

Question 5 Conclure par rapport au cahier des charges.

Correction Le système ne sera pas stable vis-à-vis du cahier des charges.

Pour $\tau = 0,005$



Application –
Corrigé

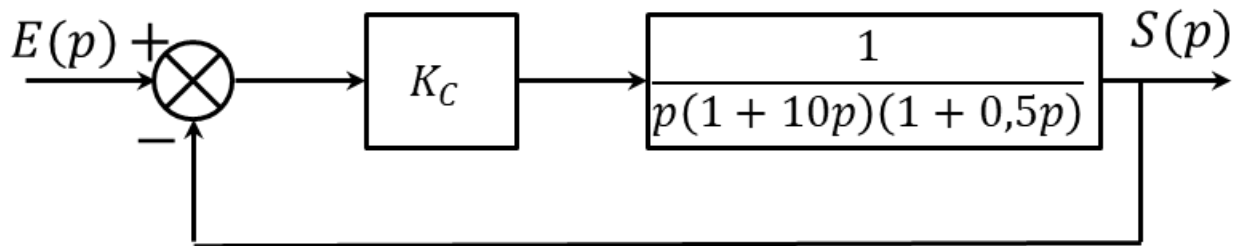
Application

Xavier Pessoles

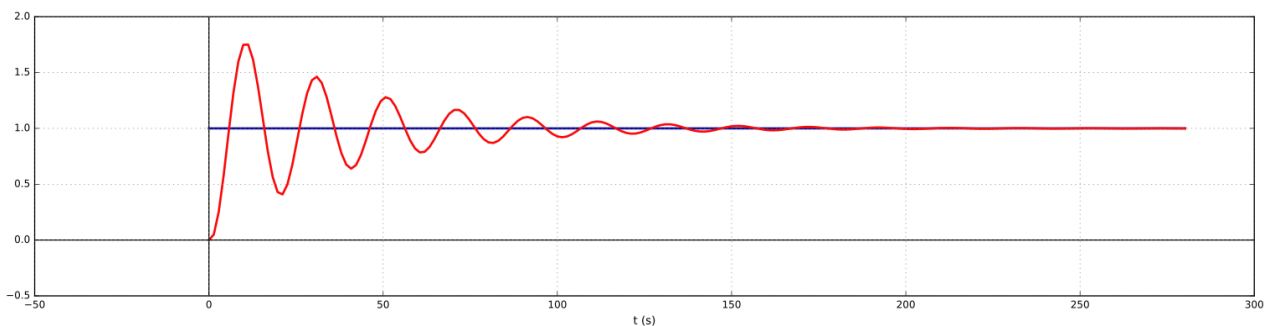
Savoirs et compétences :

- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

On considère le schéma-blocs suivant.

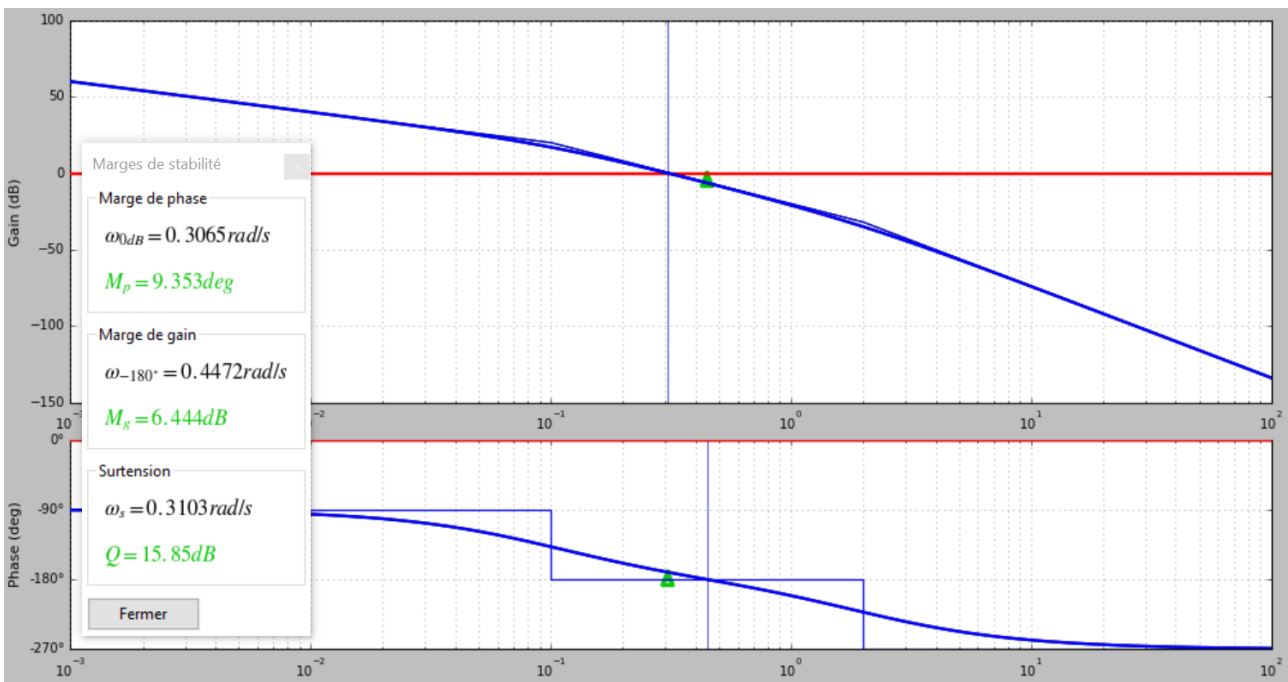


On donne ci-dessous la réponse indicielle pour $K_C = 1$.



Question 1 Justifier l'allure du diagramme du diagramme de Bode donné ci-dessous pour $K_C = 1$.

Question 2 Donner graphiquement les marges de phase et de gain pour $K_C = 1$.



Question 3 Donner analytiquement les marges de phase et de gain pour $K_C = 1$ (méthode).

Correction Calcul de la marge de gain

- On détermine ω_{180} tel que $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{180})) = -180^\circ$.
 $\arg(\text{FTBO}(j\omega)) = -\arg(j\omega) - \arg(1 + 10j\omega) - \arg(1 + 0,5j\omega) = -90 - \arctan(10\omega) - \arctan(0,5\omega)$.
 $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{180})) = -180^\circ \Leftrightarrow -90 - \arctan(10\omega) - \arctan(0,5\omega) = -180$

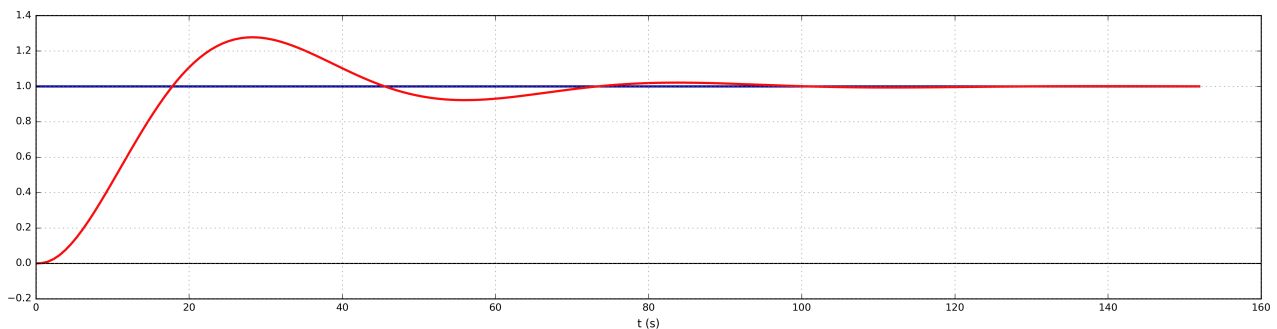
```
import math as m
from pylab import *
from scipy.optimize import bisect

def f(x):
    res = m.pi/2 - m.atan(10*x) - m.atan(0.5*x)
    return res

zero1 = bisect(f, .1, 10)
```

On a $\omega = 0,447 \text{ rads}^{-1}$.

Question 4 Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de 12 dB et 40°. Déterminer la plus grande valeur de K_C permettant de vérifier ce cahier des charges



Application –
Corrigé

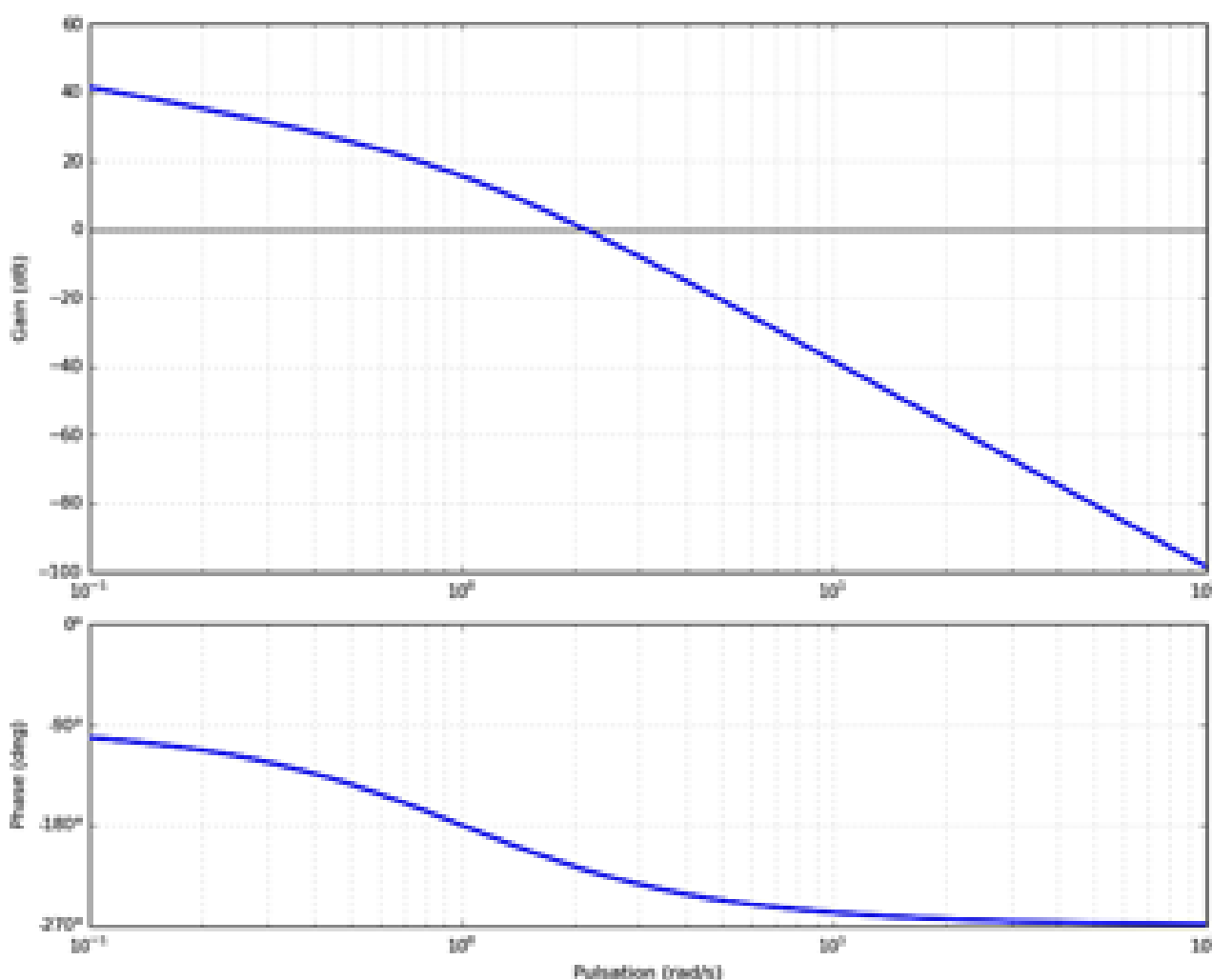
Application

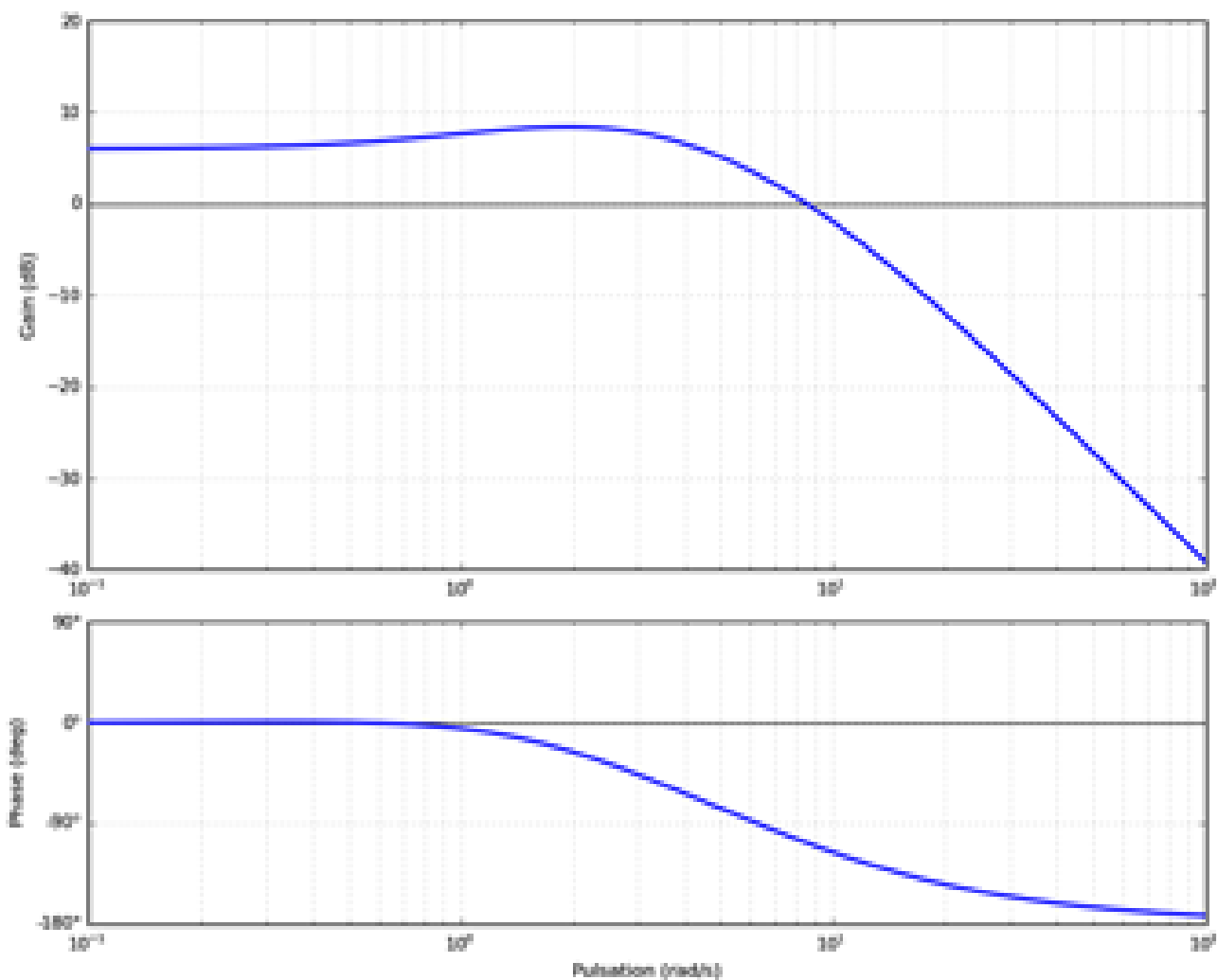
Xavier Pessoles

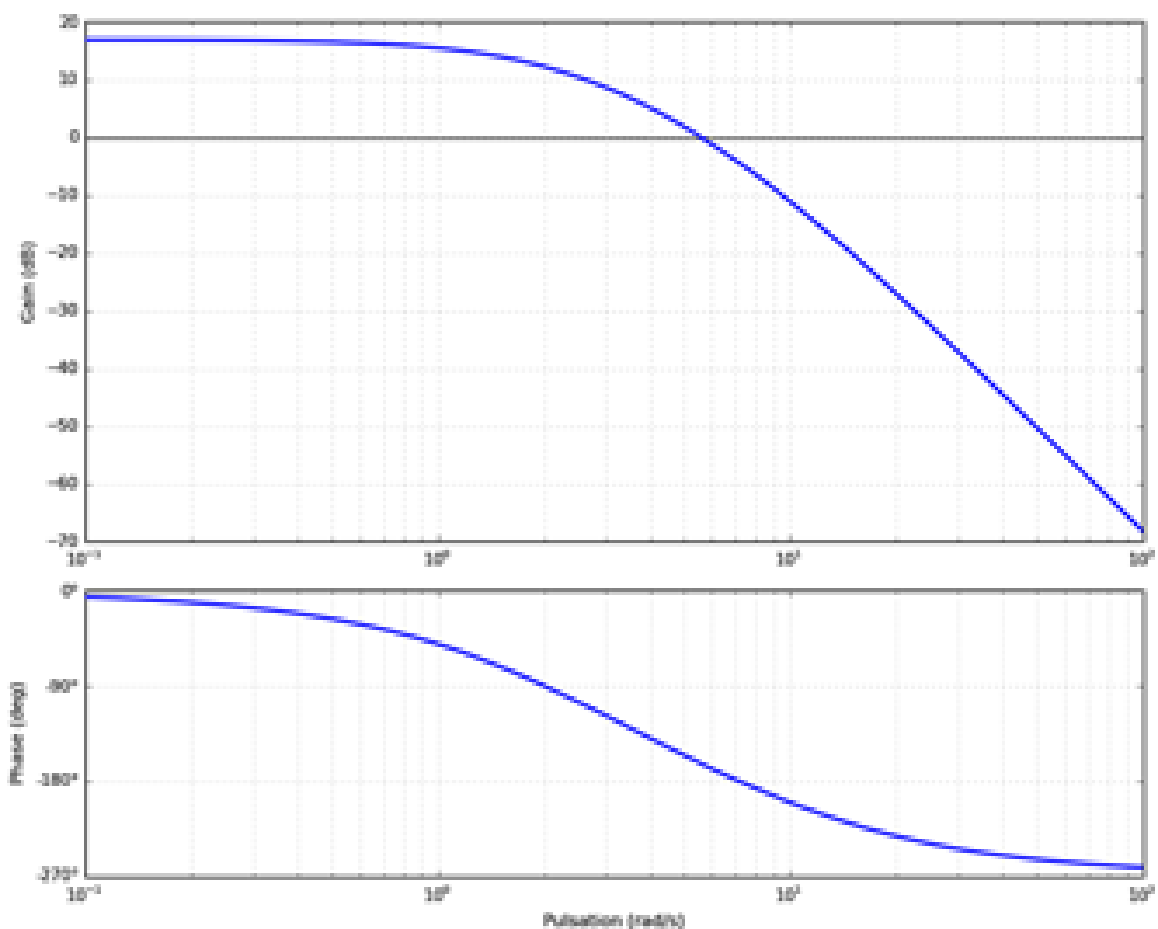
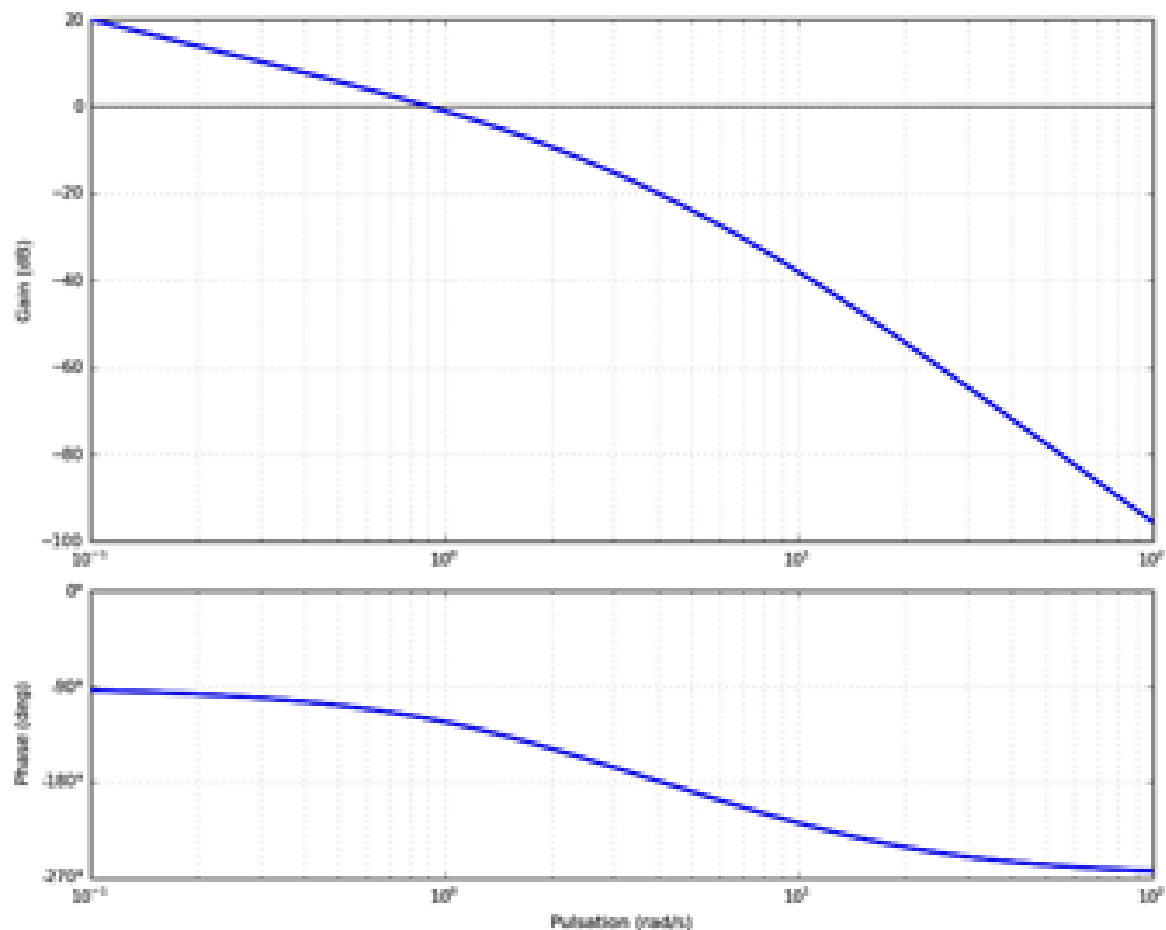
Savoirs et compétences :

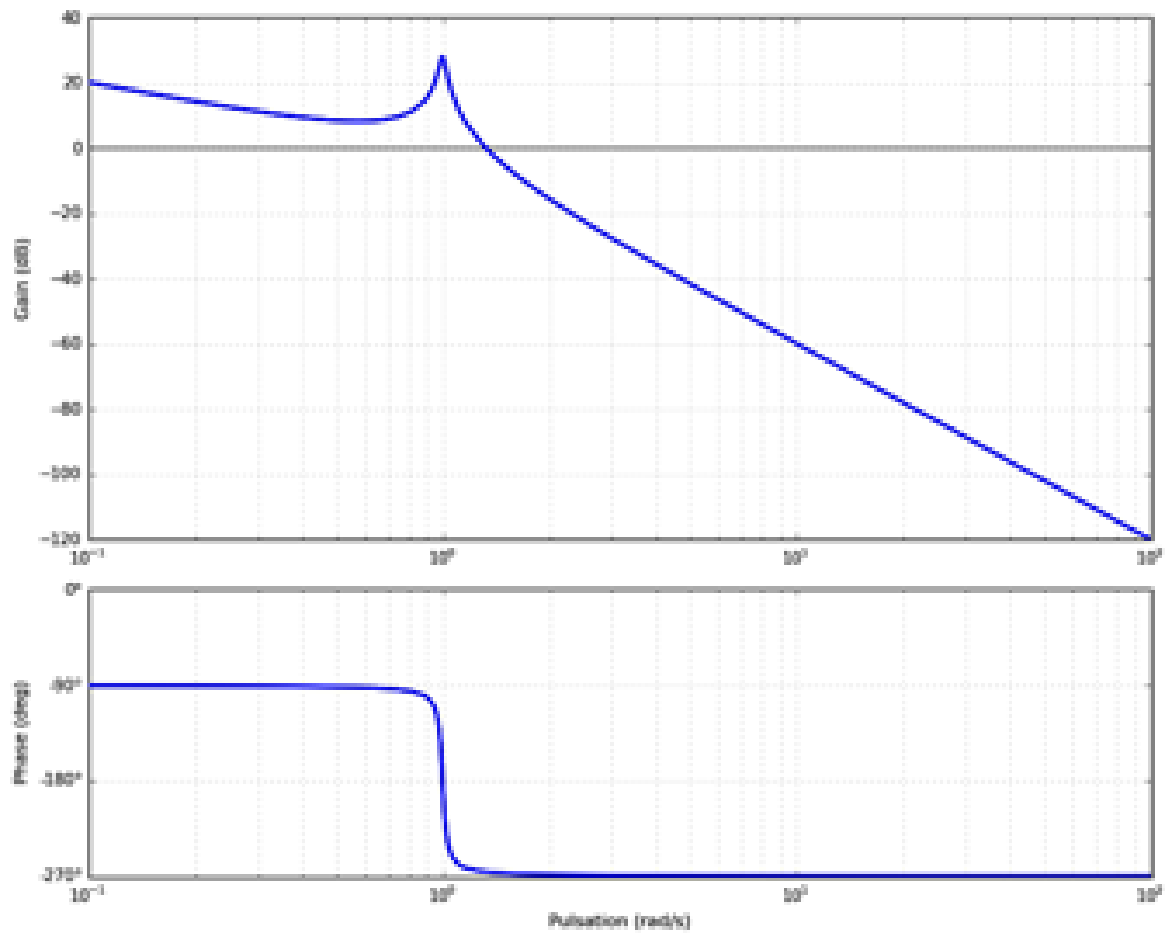
- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

Question 1 On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.









TD 01 – Corrigé



Drone quadri-rotor

Pole SII Chateaubriand – Joliot Curie

Savoirs et compétences :

- ☐ Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- ☐ Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

Présentation

Objectif

- Étudier le comportement du quadri-rotor lors du décollage.
- Vérifier les performances imposées par le cahier des charges.

Linéarisation du modèle de moteur

Question 1 Déterminer l'équation stationnaire liant ω_0 et u_0 .

Correction En vol stationnaire, dans les conditions idéales, la vitesse de rotation des hélices est constante ; donc $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$. De plus, il n'y a pas de variation de la vitesse de rotation des hélices et donc pas de variation de la tension d'alimentation. En conséquence, $\delta u = 0$ et $\delta \omega = 0$.

On a donc $\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u$ En notant ω_0 et u_0 les vitesses en tensions à l'état stationnaire, on a $\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0$.

Question 2 Montrer que l'équation différentielle liant $\delta \omega$ et δu est de la forme $\frac{d\delta \omega(t)}{dt} = -A\delta \omega(t) + B\delta u$. Exprimer A et B en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Correction On utilise le changement de variable proposé autour d'un point de fonctionnement et on a : $\frac{d\omega(t)}{dt} =$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\tau}\omega(t) - k_q\omega(t)^2 + \frac{k_v}{\tau}u \\
 \Rightarrow \frac{d(\omega_0 + \delta \omega)}{dt} &= -\frac{1}{\tau}(\omega_0 + \delta \omega) - k_q(\omega_0 + \delta \omega)^2 + \frac{k_v}{\tau}(u_0 + \delta u) \\
 \Rightarrow \frac{d(\delta \omega)}{dt} &= -\frac{1}{\tau}\omega_0 - \frac{1}{\tau}\delta \omega - k_q\omega_0^2 - k_q(\delta \omega)^2 - k_q2\omega_0\delta \omega + \frac{k_v}{\tau}u_0 + \frac{k_v}{\tau}\delta u \\
 \text{Or } \frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 &= \frac{k_v}{\tau}u_0 \text{ (question précédente); donc : } \frac{d(\delta \omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\delta \omega - k_q(\delta \omega)^2 - k_q2\omega_0\delta \omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u \\
 \text{En négligeant les termes d'ordre 2, on a donc : } & \frac{d(\delta \omega)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\delta \omega - k_q2\omega_0\delta \omega + \frac{k_v}{\tau}\delta u \\
 \text{Au final, } A &= \frac{1}{\tau} + k_q2\omega_0 \text{ et } B = \frac{k_v}{\tau}.
 \end{aligned}$$

On note $\Delta\Omega(p)$ la transformée de Laplace de $\delta \omega$ et $\Delta U(p)$ celle de δu .

Question 3 Calculer la fonction de transfert $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)}$ du moteur. Donner l'expression de ses paramètres caractéristiques K_m et T_m en fonction des paramètres τ , k_v , k_q et ω_0 .

Correction En utilisant la transformée de Laplace, on obtient $p\Delta\Omega(s) = -A\Delta\Omega(s) + B\Delta U(s)$ et donc $\frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)} = \frac{B}{p+A} = \frac{B/A}{p/A+1}$. En conséquence, $K_m = \frac{B}{A} = \frac{\frac{k_v}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + k_q 2\omega_0} = \frac{k_v}{1 + \tau k_q 2\omega_0} \cdot \tau_m = \frac{\tau}{1 + \tau k_q 2\omega_0}$

Recherche du point de fonctionnement ω_0

Question 4 Calculer numériquement la poussée F_0 que doit exercer chacun des quatre moteurs pour maintenir l'appareil en vol stationnaire à l'altitude z_0 .

Correction On a $4F_0 = mg$. Le poids du drone est de $0,240 \times 9,81 = 2,3544$ N. Chaque moteur doit donc exercer $\frac{2,3544}{4} = 0,59$ N.

Question 5 Déterminer la fréquence de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire.

Correction En lisant le graphe, on obtient $\omega_0 = 340 \text{ rad s}^{-1}$.

Question 6 Déterminer l'expression des coefficients k_v et k_q en fonction de a , b et τ . Préciser leur unité.

Correction Lorsque $\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$, on a $u = a\omega^2 + b\omega_0$. Par ailleurs en régime stationnaire, on a $\frac{1}{\tau}\omega_0 + k_q\omega_0^2 = \frac{k_v}{\tau}u_0$. Il en résulte que $u_0 = \frac{1}{k_v}\omega_0 + \frac{k_q\tau}{k_v}\omega_0^2$. On a donc $a = \frac{k_q\tau}{k_v}$ et $b = \frac{1}{k_v}$. On a donc b tel que $[V] = [B][s^{-1}]$ et $[B] = [V][s]$. On a donc k_v en $[V^{-1}s^{-1}]$. Par ailleurs, $[V] = [k_q][s][Vs][s^{-2}]$ et k_q n'a pas d'unité.

On peut ainsi déduire le modèle $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)}$ du moteur linéarisé autour de son point de fonctionnement. Pour la suite, on retiendra le modèle suivant : $\frac{\Delta\Omega(p)}{\Delta U(p)} = \frac{37,5}{1 + \frac{p}{77}}$.

Vérification des performances

Question 7 Déterminer la fonction de transfert $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)}$ à partir de l'équation du principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Correction On a vu que $4_0 F = mg$. Par ailleurs, $m\ddot{z} = 4F - mg$ et donc, $m\frac{d(z_0 + \delta z(t))}{dt} = 4(F_0 + \delta F(t)) - mg$ et $m\frac{d(\delta z(t))}{dt} = 4\delta F(t)$. Dans le domaine de Laplace, on a $mp^2\Delta Z(p) = 4\Delta F(p)$. En conséquences, $\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2}$. La FTBO s'exprime alors par $H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1 + Tp}{\left(1 + \frac{p}{77}\right)\left(1 + \frac{p}{30}\right)}$.

Question 8 Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain avec le correcteur $T = 0,2$ s et $K = 1$. Préciser les pentes et les pulsations de brisure. Le diagramme sera tracé entre 1 et 1000 rad s^{-1} , le gain sera compris entre -120 dB et 10 dB.

Correction On a $H_{BO}(p) = \frac{2,5K}{p^2} \frac{1 + Tp}{\left(1 + \frac{p}{77}\right)\left(1 + \frac{p}{30}\right)}$. Les pulsations de cassure sont alors : 5 rad s^{-1} , 30 rad s^{-1} et

77 rad s^{-1} . Les pentes sont alors :

- pour $\omega < 5 \text{ rad s}^{-1}$: -40 dB/décade ;
- pour $5 \text{ rad s}^{-1} < \omega < 30 \text{ rad s}^{-1}$: -20 dB/décade ;
- pour $30 \text{ rad s}^{-1} < \omega < 77 \text{ rad s}^{-1}$: -40 dB/décade
- pour $\omega > 77 \text{ rad s}^{-1}$: -60 dB/décade .

Pour une pulsation de $10 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}$, on a $FTBO(p) \simeq \frac{2,5}{p^2}$. On a donc un gain $\simeq 20 \log\left(\frac{2,5}{0,01^2}\right) \simeq 88 \text{ dB}$. Reste à tracer...

Question 9 Justifier que pour $K = 1$, on a $\omega_{c0\text{dB}} = 1,5 \text{ rad s}^{-1}$. En déduire graphiquement la marge de phase pour $K = 1$. Commenter.

Correction Si on considère que pour $\omega < 5 \text{ rad s}^{-1}$, on a $H_{BO}(p) \simeq \frac{2,5K}{p^2}$. Dans ces conditions, pour $K = 1$, on a

$$\left| \frac{2,5}{-\omega^2} \right| = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{2,5} \simeq 1,58 \text{ rad s}^{-1}.$$

Question 10 Procéder au réglage du gain K du correcteur afin d'assurer le respect du critère de stabilité du cahier des charges.

Correction En raisonnant analytiquement, on cherche la pulsation ω_{-145} pour laquelle la phase est de $-180^\circ + 35^\circ = -145^\circ$, soit $\arg FTBO(j\omega) = -145^\circ$. (Résolution à faire à la calculatrice, sur Python ou autre. Il y a sûrement 2 solutions vu le profil de courbe de phase). On cherche ensuite K tel que $|FTBO(j\omega_{-145})| = 1$. (Résolution à faire à la calculatrice, sur Python ou autre.)

Question 11 Le critère de précision du cahier des charges est-il vérifié? Justifier.

Correction La boucle ouverte comporte 2 intégrateurs. L'écart statique est donc nul. Le cahier des charges est vérifié.

Question 12 Repérer le(s) pôle(s) dominant(s) et donner sa (leur) valeur(s) numérique(s).

Correction Les pôles dominants sont $P2 \simeq -15$, $P3 \simeq -5 + 8i$, $P4 \simeq -5 - 8i$.

Question 13 À l'aide des droites d'iso-amortissement, indiquer la valeur du coefficient d'amortissement ξ de la fonction de transfert du deuxième ordre pouvant modéliser l'asservissement vertical du drone lorsque l'on néglige les autres pôles par rapport à ces pôles dominants.

Correction Dans ce cas, on ne prend que $P3$ et $P4$. $\xi = 0,6$.

Question 14 En déduire la présence ou l'absence d'oscillations verticales du drone lors d'un décollage supposé modélisé par un échelon d'amplitude 1 mètre. Le critère de stabilité est-il intégralement vérifié?

Correction Le coefficient d'amortissement est inférieur à 0,69. Il y aura donc des oscillations verticales lors du drone. Le dépassement sera supérieur à 5 % de la valeur finale. En conséquence, le critère de stabilité n'est pas totalement respecté.

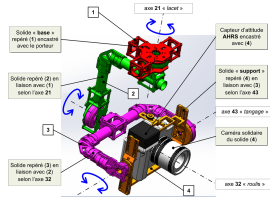
Question 15 Donner l'expression littérale des pôles d'un système du deuxième ordre de pulsation propre ω_n et de coefficient d'amortissement $\xi < 1$. En déduire une estimation de la pulsation propre ω_n de la fonction de transfert approchée de l'asservissement vertical du drone.

Correction

Question 16 Vérifier si le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

Correction

TD 02 – Corrigé



Stabilisateur actif d'image

Mines Ponts 2018 – PSI

Savoirs et compétences :

- Mod2.C7.SF2 : déterminer les fonctions de transfert;
- Res2.C5 : stabilité des SLCI : équation caractéristique;
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase).

Mise en situation

Objectif Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

Travail demandé

Question 1 Avec $K_m A = 1$, calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

Correction Attention au signe du comparateur de la boucle imbriquée!

On définit la FTBO par $FTBO(p) = \frac{\varepsilon(p)}{\text{Mes}\varphi(p)}$ avec $\varepsilon(p)$ la sortie du premier comparateur.

$$\text{On a d'une part } G(p) = \frac{\frac{K_m A}{1 + \tau_m p}}{1 - \frac{K_m A K_D}{1 + \tau_m p}} = \frac{K_m A}{1 + \tau_m p - K_m A K_D}. \text{ On a alors } FTBO(p) = \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}.$$

$$\text{Si on définit la FTBF par } FTBF(p) = \frac{\varphi(p)}{\varphi^*(p)}, \text{ on a } FTBF(p) = A_i(p) \frac{\frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}{1 + \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D)}}$$

$$= A_i(p) \frac{K_m A K_P}{p(1 + \tau_m p - K_m A K_D) + K_m A K_P}.$$

$$\text{Au final, } FTBO(p) = \frac{K_P}{p(1 + \tau_m p - K_D)} \text{ et } FTBF(p) = A_i(p) \frac{K_P}{p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P}.$$

Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas : $A_1(p) = 1$.

Question 2 Quelle est la valeur maximale de K_D pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).

Correction Pour que le système soit stable, tous les coefficients du dénominateur $D(p)$ de la FTBF doivent être de même signe (ainsi toutes les racines sont à partie réelle négative). On a $D(p) = p(1 + \tau_m p - K_D) + K_P = \tau_m p^2 + (1 - K_D)p + K_P$ et donc nécessairement, $1 - K_D > 0$ et $K_D < 1$.

Question 3 Lorsque $A_i(p) = 1$, le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

Correction On a : $FTBF(p) = \frac{K_P}{p + \tau_m p^2 - K_D p + K_P} = \frac{K_P}{\tau_m p^2 + p \frac{1 - K_D}{K_P} + 1}.$

On a alors $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}}$ et $\xi = \frac{1-K_D}{K_P} \frac{\sqrt{\frac{K_P}{\tau_m}}}{2} = \frac{1-K_D}{2\sqrt{K_P \tau_m}} = \frac{0,5}{2\sqrt{2}} < 1$. Il y a donc du dépassement. L'exigence n'est pas vérifiée.

Question 4 Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert $Stab(p) = \frac{Com(p)}{Pe(p)}$ qui lie la commande à la perturbation.

Correction On a $\varepsilon_2(p) = -\text{Mes}(\varphi(p)) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p) \frac{1}{p}$. Par ailleurs, $\varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1+\tau_m p}$. Enfin, $\varepsilon_3(p) = K_P \varepsilon_2(p) + K_D \varepsilon_1(p) \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p) \left(K_D - \frac{K_P}{p} \right) \Leftrightarrow \varepsilon_1(p) = \varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}}$.

On a donc $\varepsilon_3(p) \frac{1}{K_D - \frac{K_P}{p}} = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \left(\frac{p}{pK_D - K_P} - \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right) = \text{Pe}(p)$

$\Leftrightarrow \varepsilon_3(p) \frac{p(1+\tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}{(pK_D - K_P)(1+\tau_m p)} = \text{Pe}(p)$.

On a donc $Stab(p) = \frac{Com(p)}{Pe(p)} = \frac{(pK_D - K_P)(1+\tau_m p)}{p(1+\tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)}$.

Question 5 Avec le modèle 2 et une entrée $Pe(p)$ échelon unitaire, déterminer la limite quand t tend vers l'infini de la commande : $com(t)$. Quel sens physique donner à ce résultat ?

Correction On a $\lim_{t \rightarrow \infty} com(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p Com(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p Stab(p) Pe(p)$

$= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{(pK_D - K_P)(1+\tau_m p)}{p(1+\tau_m p) - AK_m(pK_D - K_P)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-K_P}{AK_m K_P} = -1$ si $AK_m = 1$.

Ainsi, pour une perturbation angulaire dans un autre sens, le système commande les moteurs avec une consigne dans le sens opposé.

Question 6 Avec le modèle 2 déterminer la FTBO $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)}$ de ce schéma puis calculer la fonction de transfert liant la perturbation et la sortie $Pert(p) = \frac{\varphi(p)}{Pe(p)}$.

Correction On a $\frac{\text{Mes}\varphi(p)}{\varepsilon_2(p)} = \frac{K_m AK_P}{p(1+\tau_m p - K_m AK_D)}$ (c'est la même que pour le premier modèle).

On a vu que $\varepsilon_2(p) = -\varphi(p) = -\varepsilon_1(p) \frac{1}{p}$, $\varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1+\tau_m p}$ et $\varepsilon_3(p) = \varepsilon_1(p) \left(K_D - \frac{K_P}{p} \right)$.

En conséquences, $\varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_3(p) \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \Leftrightarrow \varepsilon_1(p) = \text{Pe}(p) + \varepsilon_1(p) \left(K_D - \frac{K_P}{p} \right) \frac{AK_m}{1+\tau_m p}$

$\Leftrightarrow \varepsilon_1(p) \left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D \right) \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right) = \text{Pe}(p) \Leftrightarrow p \varphi(p) \left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D \right) \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right) = \text{Pe}(p)$

et donc $Pert(p) = \frac{1}{p \left(1 + \left(\frac{K_P}{p} - K_D \right) \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right)} = \frac{1}{p \left(1 + \frac{K_P - pK_D}{p} \frac{AK_m}{1+\tau_m p} \right)} = \frac{1+\tau_m p}{p(1+\tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m}$.

Question 7 Déterminer la valeur lorsque t tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat ?

Correction On a $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Phi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p Pert(p) Pe(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} \frac{1+\tau_m p}{p(1+\tau_m p) + (K_P - pK_D)AK_m}$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{K_p A K_m} = \frac{1}{K_p} = 0,1^\circ.$$

Le système n'est pas précis s'il y a une perturbation échelon.

Question 8 On désire une marge de gain de $M_G \geq 5 \text{ dB}$ et une marge de phase $M_\varphi \geq 20^\circ$ (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de K_p en utilisant les données ci-dessous.

Correction Pour une marge de phase de 20° , la phase doit être de -160° lorsque le gain est nul. Or en -160° le gain est de -3 dB . Pour respecter la marge de phase, il faut donc déterminer K_p tel que $20 \log K_p = 3$ soit

$$K_p < 10^{\frac{3}{20}} \simeq 1,41.$$

Le système étant d'ordre 2, la marge de gain sera forcément infinie.

Question 9 Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de $Com(t)$ relativement à $Pe(t)$ en utilisant le résultat de la question .

Correction La commande s'oppose à la perturbation (comme évoqué question). Le stabilisateur a au final un mouvement sinusoïdal dont les valeurs maximales et minimales sont voisines de $0,1^\circ$ et $-0,1^\circ$.

Question 10 Analyser comparativement ce nouveau tracé.

Correction Dans ce cas, les mouvements du porteur sont inférieurs à $0,1$ degrés (en valeur absolue).

Synthèse

Question 11 En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.

Correction

