DDS 3

Les ptits devoirs du soir

Xavier Pessoles

Exercice 170 – Automate d'exploration de l'hémostase ⋆

C2-09 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Afin de valider le choix des moteurs, on étudie le déplacement sur l'axe $\overrightarrow{x}$.On note V_x la vitesse selon cet axe. On rappelle que la distance maximum à parcourir est $x_M^{\max} = 550\,\text{mm}$ en 1 seconde. La loi de commande sur chaque axe est définie par un trapèze de vitesse (Figure 2) avec les temps d'accélération et de décélération (T_a) identiques. De plus, les moteurs se mettent en route et s'arrêtent en même temps. T est la durée totale du déplacement. Nous allons chercher à optimiser cette loi de commande de sorte que le moteur fournisse une puissance instantanée minimale.

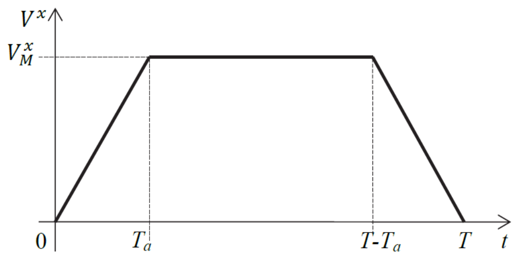


FIGURE 1 – Loi de commande de vitesse en trapèze

Le modèle de calcul pour cette commande d'axe est le suivant :

- le mouvement de rotation du moteur (vitesse ω_m^x) est transformé en mouvement de translation (vitesse V^x) ;
- le rapport de transmission de la chaîne cinématique est $\lambda = \dfrac{V^x}{\omega_m^x}$;
- la distance à parcourir est $x_M^{\max}$;
- l'inertie équivalente de l'ensemble des pièces en mouvement ramenée à l'arbre moteur est J_e ;
- les frottements et la pesanteur sont négligés, il n'y a donc pas de couple résistant.

Question 1 *Exprimer la vitesse maximale V_M^x en fonction de x_M^{max}, T et T_a.*

Question 2 *Par application du théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble des pièces en mouvement, exprimer le couple moteur C_m en fonction de V_x, T_a, J_e et λ durant les trois phases du mouvement.*

Question 3 *Préciser à quel(s) instant(s) t la puissance fournie par le moteur est maximale (P_{max})*

.

Question 4 *Exprimer cette puissance P_{max} en fonction de V_M^x, λ, J_e, et T_a.*

Question 5 *Donner alors l'expression de P_{max} en fonction de x_M^{max}, λ, J_e, et T_a.*

Question 6 *À partir de cette expression, montrer que P_{max} est minimale pour un réglage du temps d'accélération T_a tel que $T_a = \dfrac{T}{3}$.*

Pour cette nouvelle commande avec $T_a = \dfrac{T}{3}$, on cherche à valider le choix du moteur en étudiant le déplacement maximum suivant $\overrightarrow{x}$. Les caractéristiques de la chaîne cinématique sont :

- vitesse maximale du moteur : $N_{\max}^{\text{mot}} = 4150\,\text{tr}\,\text{min}^{-1}$;
- rapport de réduction du réducteur $k = \dfrac{1}{10}$;
- rayon de poulie $R_p = 20\,\text{mm}$.

Question 7 *Déterminer la vitesse de rotation maximum ω_{max}^x que doit atteindre le moteur. Le choix de celui-ci est-il validé ?*

Corrigé voir 170.

Exercice 170 – Automate d'exploration de l'hémostase ⋆

C2-09 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Le principe de la chronométrie consiste à mesurer la variation de l'amplitude d'oscillation d'une bille placée dans la cuvette de mesure (Figure 2).

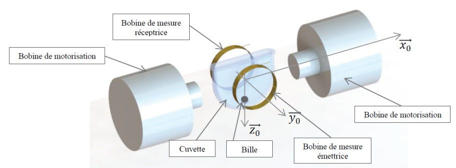


FIGURE 2 – Ensemble cuvette + bille avec bobines motrices et bobines de mesure

La bille, roulant sans glisser sur le fond cylindrique de la cuvette, est mise en mouvement par un champ magnétique variable induit par deux bobines motrices placées de part et d'autre de la tête de mesure. L'amplitude des oscillations est mesurée par deux autres bobines, l'une émettrice, l'autre réceptrice. Après amplification du signal mesuré, on obtient un signal quasi-sinusoïdal, reflet de l'oscillation de la bille. A viscosité constante, on obtient un balancement pendulaire constant de la bille. Quand la viscosité augmente (phénomène de coagulation), l'amplitude d'oscillation de la bille varie. Pour chaque mesure, le champ magnétique est ajusté en fonction de la viscosité initiale du milieu et du type de test.

Le schéma de calcul est donné Figure 3.

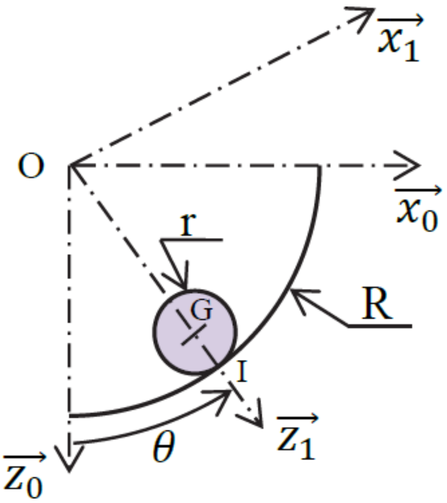


FIGURE 3 – Bille en contact avec le rail de la cuvette

Hypothèses :

- la bille de masse m, de centre de masse G, de rayon r, roule sans glisser sur un rail circulaire de rayon R dans le plan $\left(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0}\right)$;
- I est le point de contact entre la bille et le rail circulaire;
- la position de la bille sur le rail est repérée par : $\theta=\left(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_1}\right)=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)$.

On note :

- $\{\mathcal{T}(\text{rail}\rightarrow\text{bille})\}=\left\{\begin{array}{c}-N_I\overrightarrow{z_1}+T_I\overrightarrow{x_1}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_I$, le torseur associé à l'action mécanique du rail sur la bille;
- f le coefficient d'adhérence au contact bille/cuvette : $f=0,1$;
- $\{\mathcal{T}(\text{bob}\rightarrow\text{bille})\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F}(\text{bob}\rightarrow\text{bille})=F(t)\overrightarrow{x_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$, le torseur associé à l'effort résultant des deux bobines de motorisation sur la bille, avec $F(t)=F_0\sin(\omega_{\text{bob}}(t))$;
- $\{\mathcal{T}(\text{fluide}\rightarrow\text{bille})\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F}(\text{fluide}\rightarrow\text{bille})=-f_v\overrightarrow{V(G,\text{bille}/0)}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$, le torseur associé à l'action du fluide sur la bille induite par la viscosité. On se place dans l'hypothèse simplificatrice d'un écoulement laminaire pour lequel le modèle de Stokes est applicable : le coefficient de frottement visqueux vaut alors $f_v=6\pi r\eta$ où η est la viscosité du sang qui varie lors de la coagulation;
- $\{\mathcal{T}(g\rightarrow\text{bille})\}=\left\{\begin{array}{c}mg\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$, le torseur associé à l'action de la pesanteur sur la bille;
- $\{\mathcal{V}(\text{bille}/0)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(\text{bille}/0)}=\omega_b\overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{V(G,\text{bille}/0)}=v\overrightarrow{x_1}\end{array}\right\}_G$, le torseur cinématique de la bille par rapport au rail 0;
- $J=\dfrac{2}{5}mr^2$, le moment d'inertie de la bille autour de l'axe $\left(G,\overrightarrow{y_0}\right)$;
- $R=||\overrightarrow{OI}||$, le rayon du rail, $r=||\overrightarrow{GI}||$, le rayon de la bille.

On notera $F(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ où p représente la variable de Laplace.

Question 1 *En exprimant la condition de roulement sans glissement en I, déterminer ω_b et v, les composantes du torseur cinématique en G de la bille par rapport au rail 0, en fonction de $\dot{\theta}$, r et R.*

Question 2 *En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés : montrer que les efforts normal N_I et tangentiel T_I du rail sur la bille sont liés à l'angle θ par les équations suivantes :*
$N_I=F(t)\sin\theta+mg\cos\theta+m(R-r)\dot{\theta}^2$ et $T_I=\dfrac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta}$.

Question 3 *En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés, montrer que $\dfrac{7}{5}m(r-R)\ddot{\theta}+f_v(r-R)\dot{\theta}+mg\sin\theta=F(t)\cos\theta$.*

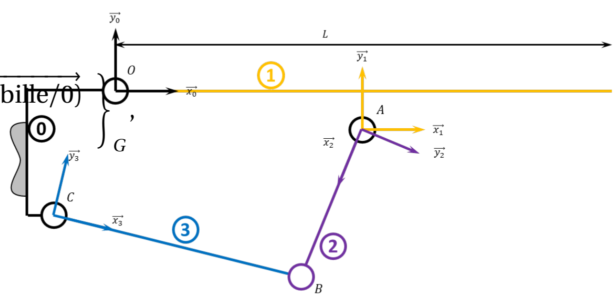
Corrigé voir 170.

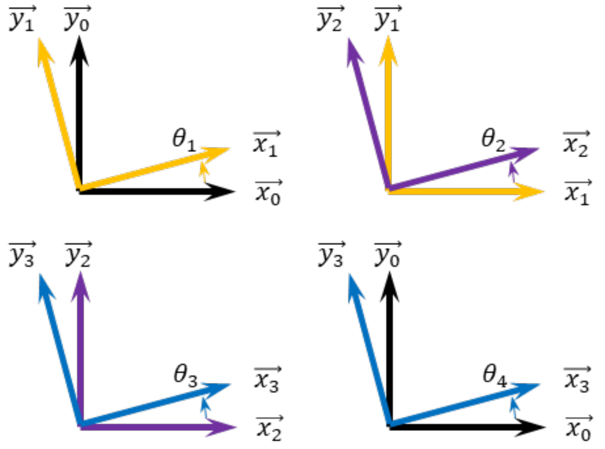
Exercice 170 – Système 4 barres ★★

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

On a :

- $\overrightarrow{OA}=a\overrightarrow{x_1}-f\overrightarrow{y_1}$ avec $a=355$ mm et $f=13$ mm;
- $\overrightarrow{AB}=b\overrightarrow{x_2}$ avec $b=280$ mm;
- $\overrightarrow{BC}=-c\overrightarrow{x_3}$ avec $c=280$ mm;
- $\overrightarrow{OC}=-d\overrightarrow{x_0}-e\overrightarrow{y_0}$ avec $d=89,5$ mm et $e=160$ mm;





Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\theta_1(t)$ en fonction de $\theta_4(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

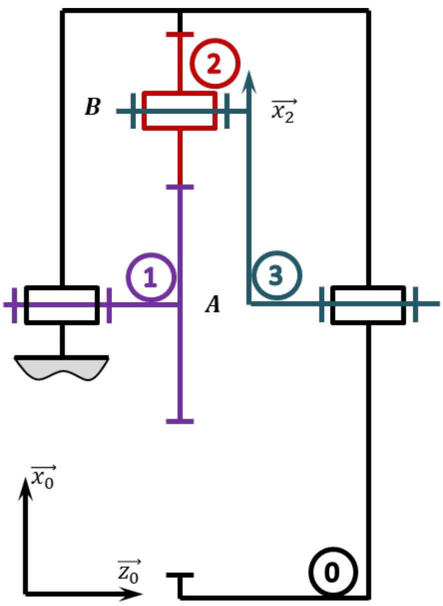
Corrigé voir 170.

Exercice 170 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Soit le train épicycloïdal suivant.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer $\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

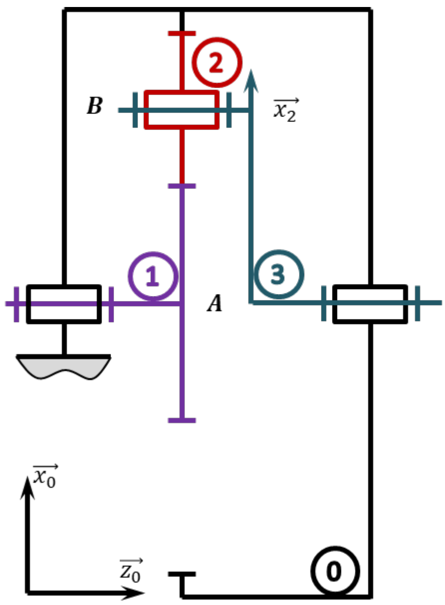
Corrigé voir 170.

Exercice 170 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Soit le train épicycloïdal suivant.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer ω_{40} en fonction de ω_{30} et ω_{10}.*

Question 3 *On suppose que ω_{40} est bloqué. Exprimer le rapport $\dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$.*

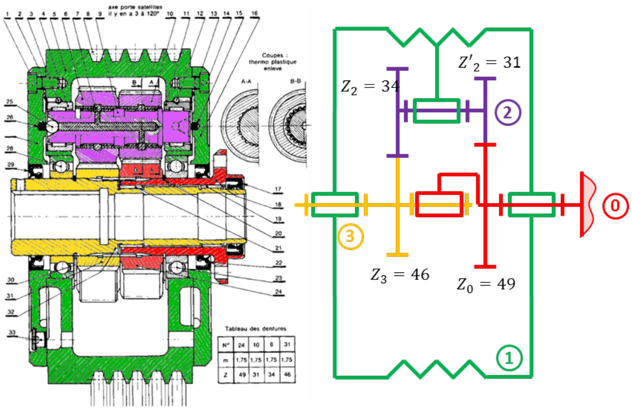
Corrigé voir 170.

Exercice 170 – Poulie Redex ⋆ *D'après ressources de Stéphane Genouël.*

A3-05

C2-06

Soit le train d'engrenages suivant.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Modéliser

Question 2 *Déterminer littéralement, en fonction des nombres de dents, la loi E/S du système (c'est-à-dire le rapport de transmission).*

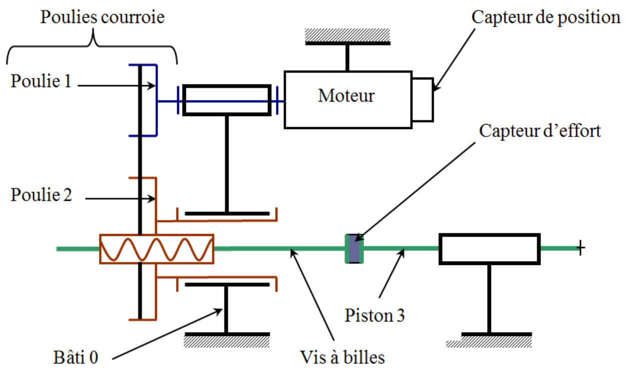
Corrigé voir 170.

Exercice 170 – Système vis-écrou ⋆ *D'après ressources Pole Chateaubriand – Joliot-Curie.*

A3-05

C2-06

Soit la chaîne de transmission suivante.



Le schéma du restituteur actif est donné ci-dessous. Le pas de la vis est $p_v = 10\,\text{mm}$. Le diamètre de la poulie 2 est le double de celui de la poulie 1.

Question 1 *Sur le schéma cinématique, repasser chaque solide d'une couleur différente.*

Question 2 *Réaliser la chaîne d'énergie-puissance partielle en définissant les noms des transmetteurs et les grandeurs d'entrée et de sortie cinématiques.*

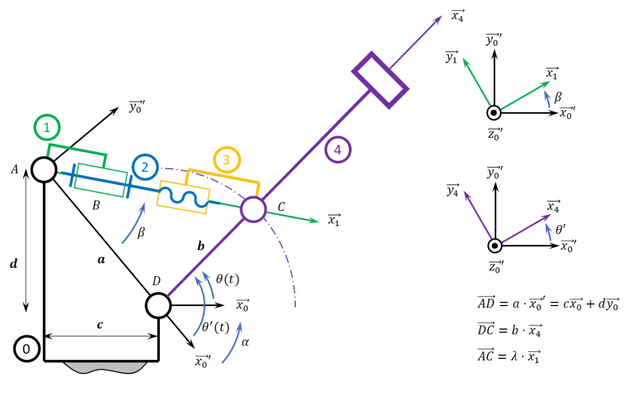
Question 3 *Définir la loi entrée-sortie entre la vitesse de translation du piston 3 et la vitesse de rotation du moteur 1.*

Corrigé voir 170.

Exercice 170 – Maxpid ⋆⋆⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le schéma suivant.



Par ailleurs $a = 107{,}1\,\text{mm}$, $b = 80\,\text{mm}$, $c = 70\,\text{mm}$, $d = 80\,\text{mm}$. Le pas de la vis est de 4 mm.

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\theta(t)$ en fonction de $\lambda(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\dot{\lambda}(t)$.*

Question 4 *Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$, vitesse de rotation du rotor moteur **2** par rapport au stator **1**.*

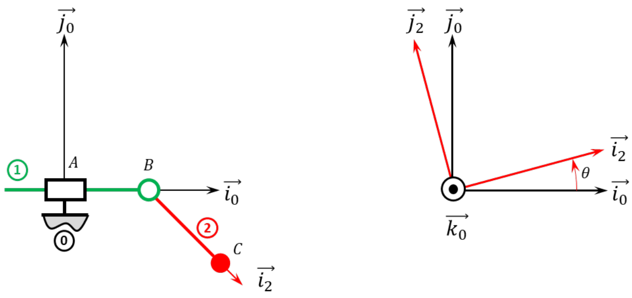
Question 5 *En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **2** par rapport à **1** est de 500 tours par minute.*

Corrigé voir 170.

Exercice 170 – Mouvement RT ⋆

[redacted]

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{BC} = R\overrightarrow{i_2}$ avec $R = 30\,\text{mm}$.



Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.*

Question 2 *Donner le torseur cinématique $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ au point C.*

Question 3 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

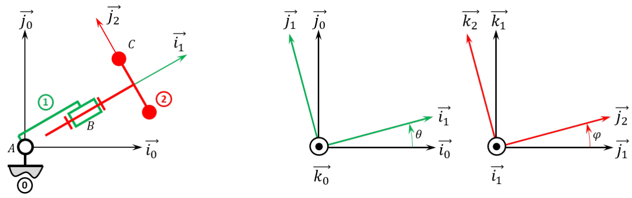
Indications :
1. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\dot{\theta}\overrightarrow{j_2}$.
2. $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_0} \\ \overrightarrow{V(C,2/0)} \end{array} \right\}_C$.
3. $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\left(\ddot{\theta}\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{i_2}\right)$.

Corrigé voir 170.

Exercice 170 – Mouvement RR 3D ⋆

[redacted]

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{BC} = \ell\overrightarrow{i_2} + r\overrightarrow{j_2}$. On note $R + \ell = L = 20\,\text{mm}$ et $r = 10\,\text{mm}$.



Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par composition.*

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.*

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

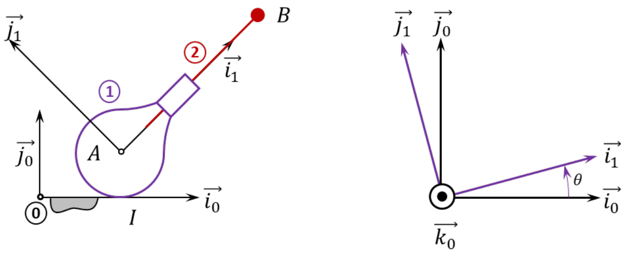
Indications :
1. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = (R+\ell)\dot\theta\,\overrightarrow{j_1} - r\dot\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{i_1} + r\dot\varphi\,\overrightarrow{k_2}$.
2. $\overrightarrow{V(C,2/0)} = r\dot\varphi\,\overrightarrow{k_2} - r\dot\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{i_1} + \ell\dot\theta\,\overrightarrow{j_1} + R\dot\theta\,\overrightarrow{j_1}$.
3. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot\theta\,\overrightarrow{k_1} + \dot\varphi\,\overrightarrow{i_1} \\ (R+\ell)\dot\theta\,\overrightarrow{j_1} - r\dot\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{i_1} + r\dot\varphi\,\overrightarrow{k_2} \end{array} \right\}_C$.
4. $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = (R+\ell)\ddot\theta\,\overrightarrow{j_1} - (R+\ell)\dot\theta^2\,\overrightarrow{i_1} - r\ddot\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{i_1} + r\dot\theta\dot\varphi\sin\varphi\,\overrightarrow{i_1} - r\dot\theta^2\cos\varphi\,\overrightarrow{j_1} + r\ddot\varphi\,\overrightarrow{k_2} + r\dot\varphi\left(\dot\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{i_1} - \dot\varphi\,\overrightarrow{j_2}\right)$.

Corrigé voir ??.

Exercice 170 – Mouvement RT – RSG ⋆⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{IA} = R\,\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_1}$. De plus $R = 15$ mm. On fait l'hypothèse de roulement sans glissement au point I.



Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$.*

Question 2 *Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.*

Question 3 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.*

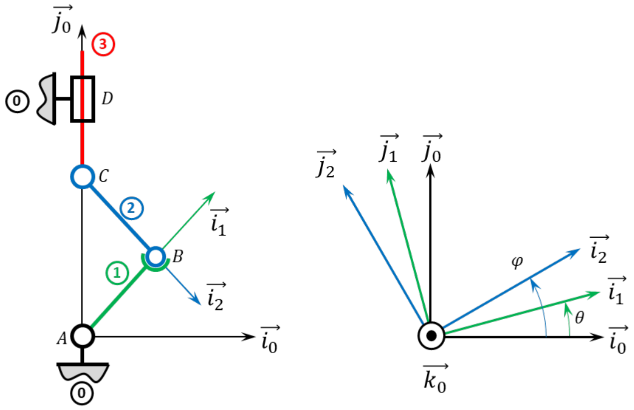
Indications :
1. $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot\lambda\,\overrightarrow{i_1} + \dot\theta\left(\lambda(t)\,\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right)$.
2. $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot\theta\,\overrightarrow{k_0} \\ \dot\lambda\,\overrightarrow{i_1} + \dot\theta\left(\lambda(t)\,\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right) \end{array} \right\}_B$.
3. $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \ddot\lambda(t)\,\overrightarrow{i_1} + \dot\lambda(t)\dot\theta\,\overrightarrow{j_1} + \ddot\theta(t)\left(\lambda(t)\,\overrightarrow{j_1} - R\,\overrightarrow{i_0}\right) + \dot\theta(t)\left(\dot\lambda(t)\,\overrightarrow{j_1} - \lambda(t)\dot\theta\,\overrightarrow{i_1}\right)$.

Corrigé voir 170.

Exercice 170 – Système bielle manivelle ⋆

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\,\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{CB} = L\,\overrightarrow{i_2}$. De plus, $R = 10$ mm et $L = 20$ mm.



Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme $\lambda(t) = \pm\sqrt{L^2 - R^2\cos^2\theta(t)} + R\sin\theta(t)$ et $\dot\lambda(t) = \pm\left(\dfrac{R^2\dot\theta(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2\cos^2\theta(t)}}\right) + \dot\theta(t)R\cos\theta(t)$. (à vérifier – voir exercice ??).

Question 1 *Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.*

Question 2 *Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ et au point C.*

Question 3 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.*

Question 4 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

Corrigé voir 170.

Exercice 170 – Automate d'exploration de l'hémostase ⋆

C2-09 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Exprimer la vitesse maximale V_M^x en fonction de x_M^{max}, T et T_a.*

La distance $x_M^{\max}$ correspond à l'aire sous le courbe de la loi de commande de vitesse. On a alors $x_M^{\max} = (T - T_a) V_M^x$ $\iff V_M^x = \dfrac{x_M^{\max}}{T - T_a}$.

Question 2 *Par application du théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble des pièces en mouvement, exprimer le couple moteur C_m en fonction de V_x, T_a, J_e et λ durant les trois phases du mouvement.*

- Expression de l'énerige cinétique : $\mathscr{E}_c(E/0) = \dfrac{1}{2} J_e (\omega_m^x)^2$.
- Puissance intérieure : $\mathscr{P}_{\text{int}}(E) = 0$.
- Puissance extérieure : $\mathscr{P}_{\text{ext}}(E) = C_m \omega_m^x$.
- Application du TEC : $J_e \omega_m^x \dot{\omega}_m^x = C_m \omega_m^x$ soit $J_e \dot{\omega}_m^x = C_m$.

On a alors sur chacune des phases :

- Phase 1 : $C_m = J_e \dot{\omega}_m^x$ avec $\dot{\omega}_m^x = \dot{V_M}^x / \lambda = \dfrac{V_M^x}{\lambda T_a}$ et $C_m = J_e \dfrac{V_M^x}{\lambda T_a}$.
- Phase 2 : $C_m = 0$.
- Phase 3 : $C_m = -J_e \dfrac{V_M^x}{\lambda T_a}$.

Question 3 *Préciser à quel(s) instant(s) t la puissance fournie par le moteur est maximale (P_{max})*

.

Question 4 *Exprimer cette puissance P_{max} en fonction de V_M^x, λ, J_e, et T_a.*

$P_{\max} = J_e \dfrac{V_M^x}{\lambda T_a} \omega_m^x = J_e \dfrac{(V_M^x)^2}{\lambda^2 T_a}$.

Question 5 *Donner alors l'expression de P_{max} en fonction de x_M^{max}, λ, J_e, et T_a.*

On a alors $P_{\max} = J_e \dfrac{\left(x_M^{\max}\right)^2}{\lambda^2 (T - T_a)^2 T_a}$.

Question 6 *À partir de cette expression, montrer que P_{max} est minimale pour un réglage du temps d'accélération T_a tel que $T_a = \dfrac{T}{3}$.*

On résout $\dfrac{\mathrm{d}P_{\max}}{\mathrm{d}T_a} = 0$ et on cherche la valeur de T_a pour laquelle $P_{\max}$ est minimale.

Question 7 *Déterminer la vitesse de rotation maximum ω_{max}^x que doit atteindre le moteur. Le choix de celui-ci est-il validé ?*

On a $V_M^x = \dfrac{x_M^{\max}}{T - T_a}$. D'autre part, $V_M^x = \omega_M^x k R_p$ soit $\omega_M^x = \dfrac{V_M^x}{k R_p} = \dfrac{x_M^{\max}}{k R_p (T - T_a)}$.

AN : $\omega_M^x = \dfrac{550 \times 10^{-3}}{0,1 \times 20 \times 10^{-3} (1 - 1/3)} = \dfrac{550 \times 3}{4} = 412{,}5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ soit $3941\,\text{tr}\,\text{min}^{-1}$.

Cette valeur est bien compatible avec la vitesse du moteur.

Exercice 170 – Automate d'exploration de l'hémostase ⋆

C2-09 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *En exprimant la condition de roulement sans glissement en I, déterminer ω_b et v, les composantes du torseur cinématique en G de la bille par rapport au rail 0, en fonction de $\dot{\theta}$, r et R.*

- On isole la bille.
- On réalise le bilan des actions mécaniques :
  - $\{\mathscr{T}(\text{rail} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} -N_I \overrightarrow{z_1} + T_I \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} -N_I \overrightarrow{z_1} + T_I \overrightarrow{x_1} \\ r T_I \overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}_G$.
  - $\{\mathscr{T}(\text{bob} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F}(\text{bob} \rightarrow \text{bille}) = F(t)\overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G$.
  - $\{\mathscr{T}(\text{fluide} \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F}(\text{fluide} \rightarrow \text{bille}) = -f_v \overrightarrow{V(G, \text{bille}/0)} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G$.
  - $\{\mathscr{T}(g \rightarrow \text{bille})\} = \left\{ \begin{array}{c} mg\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G$.

- On calcule le torseur dynamique de la bille $\left\{\mathscr{D}(\text{bille}/0)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} m\overrightarrow{\Gamma(G,\text{bille}/0)} \\ -J\dfrac{R-r}{r}\ddot{\theta}\overrightarrow{y_0} \end{array}\right\}_G$ avec $\overrightarrow{\Gamma(G,\text{bille}/0)} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V(G,\text{bille}/0)}}{\mathrm{d}t} =$

$(R-r)\ddot{\theta}\overrightarrow{x_1} - (R-r)\dot{\theta}^2\overrightarrow{z_1}$.

En appliquant le TRD à la bille en projection sur $\overrightarrow{z_1}$, on a : $-N_I + F(t)\overrightarrow{x_0}\cdot\overrightarrow{z_1} + mg\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{z_1} = -m(R-r)\dot{\theta}^2 \Longleftrightarrow -N_I + F(t)\sin\theta + mg\cos\theta = -m(R-r)\dot{\theta}^2$.

En appliquant le TMD à la bille, en G, en projection sur $\overrightarrow{y_0}$, on a : $rT_1 = -J\dfrac{R-r}{r}\ddot{\theta} \Longleftrightarrow rT_1 = -\dfrac{2}{5}mr^2\dfrac{R-r}{r}\ddot{\theta}$ $\Longleftrightarrow T_1 = \dfrac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta}$.

Question 2 *En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés : montrer que les efforts normal N_I et tangentiel T_I du rail sur la bille sont liés à l'angle θ par les équations suivantes :*

$N_I = F(t)\sin\theta + mg\cos\theta + m(R-r)\dot{\theta}^2$ et $T_I = \dfrac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta}$. En appliquant le TRD à la bille en projection sur $\overrightarrow{x_1}$, on a : $T_I + F(t)\overrightarrow{x_0}\cdot\overrightarrow{x_1} + mg\overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{x_1} - f_v(R-r)\dot{\theta} = m(R-r)\ddot{\theta} \Longleftrightarrow T_I + F(t)\cos\theta - mg\sin\theta - f_v(R-r)\dot{\theta} = m(R-r)\ddot{\theta}$.

En utilisant la question précédente, on a alors $\dfrac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta} + F(t)\cos\theta - mg\sin\theta - f_v(R-r)\dot{\theta} = m(R-r)\ddot{\theta}$

$\Longleftrightarrow F(t)\cos\theta = mg\sin\theta + f_v(R-r)\dot{\theta} + \dfrac{7}{5}m(R-r)\ddot{\theta}$

(Signe à revoir ?).

Question 3 *En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés, montrer que $\dfrac{7}{5}m(r-R)\ddot{\theta} + f_v(r-R)\dot{\theta} + mg\sin\theta = F(t)\cos\theta$.*

Si θ est petit $\dfrac{7}{5}m(r-R)\ddot{\theta} + f_v(r-R)\dot{\theta} + mg\theta = F(t)$. En passant dans le domaine de Laplace, on a $\dfrac{7}{5}m(r-R)p^2\theta(p) + f_v(r-R)p\theta(p) + mg\theta(p) = F(p)$ soit $H(p) = \dfrac{1}{\dfrac{7}{5}m(r-R)p^2 + f_v(r-R)p + mg}$

$$= \dfrac{\dfrac{1}{mg}}{\dfrac{7}{5g}(r-R)p^2 + \dfrac{f_v}{mg}(r-R)p + 1}.$$

On a donc $K_S = \dfrac{1}{mg}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{5g}{7(r-R)}}$, $\dfrac{2\xi}{\omega_0} = \dfrac{f_v(r-R)}{mg}$ soit $\xi = \dfrac{f_v(r-R)}{2mg}\sqrt{\dfrac{5g}{7(r-R)}} = \dfrac{f_v}{2mg}\sqrt{\dfrac{5g(r-R)}{7}}$

Exercice 170 – Système 4 barres ⋆⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\theta_1(t)$ en fonction de $\theta_4(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}_1(t)$ en fonction de $\dot{\theta}_4(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **1** est de 10 tours par minute.*

Exercice 170 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer $\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

En bloquant le porte satellite, on a : $\dfrac{\omega_{03}}{\omega_{13}} = -\dfrac{Z_1}{Z_0}$. On a donc, $\dfrac{\omega_{03}}{\omega_{10}+\omega_{03}} = -\dfrac{Z_1}{Z_0}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\omega_{30}}{\omega_{30}-\omega_{10}} = -\dfrac{Z_1}{Z_0} \Leftrightarrow \omega_{30} = -\dfrac{Z_1}{Z_0}\omega_{30} + \dfrac{Z_1}{Z_0}\omega_{10} \Leftrightarrow \omega_{30}\left(1+\dfrac{Z_1}{Z_0}\right) = \dfrac{Z_1}{Z_0}\omega_{10} \Leftrightarrow \omega_{30} = \dfrac{Z_1}{Z_0+Z_1}\omega_{10}$.

Exercice 170 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer ω_{40} en fonction de ω_{30} et ω_{10}.*

En bloquant le porte satellite, on a : $\dfrac{\omega_{43}}{\omega_{13}}=-\dfrac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4}$. On a donc, $\dfrac{\omega_{40}+\omega_{03}}{\omega_{10}+\omega_{03}}=-\dfrac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4} \Leftrightarrow \omega_{40}+\omega_{03}=-\dfrac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4}(\omega_{10}+\omega_{03})$ $\Leftrightarrow \omega_{40}=-\dfrac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4}(\omega_{10}+\omega_{03})-\omega_{03} \Leftrightarrow \omega_{40}=-\dfrac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4}(\omega_{10}+\omega_{03})+\omega_{30} \Leftrightarrow \omega_{40}=-\dfrac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4}\omega_{10}+\omega_{30}\left(1+\dfrac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4}\right)$.

Question 3 *On suppose que ω_{40} est bloqué. Exprimer le rapport $\dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$.*

$$0=-\frac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4}\omega_{10}+\omega_{30}\left(1+\frac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4}\omega_{10}=\omega_{30}\left(1+\frac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}=\frac{\frac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4}}{1+\frac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4}}=\frac{Z_1Z_{22}}{Z_{21}Z_4+Z_1Z_{22}}.$$

Exercice 170 – Poulie Redex ⋆ *D'après ressources de Stéphane Genouël.*

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer littéralement, en fonction des nombres de dents, la loi E/S du système (c'est-à-dire le rapport de transmission).*

On cherche $\dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$. En bloquant le porte satellite 1, on a $\dfrac{\omega_{31}}{\omega_{01}}=\dfrac{Z_0Z_2}{Z_2'Z_3}$. En décomposant les vitesses, on a : $\dfrac{\omega_{30}-\omega_{10}}{\omega_{10}}=-\dfrac{Z_0Z_2}{Z_2'Z_3} \Leftrightarrow \omega_{30}-\omega_{10}=-\dfrac{Z_0Z_2}{Z_2'Z_3}\omega_{10} \Leftrightarrow \omega_{30}=\left(1-\dfrac{Z_0Z_2}{Z_2'Z_3}\right)\omega_{10} \Leftrightarrow \dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}}=1-\dfrac{Z_0Z_2}{Z_2'Z_3}$.

AN : $\dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}}=1-\dfrac{49\times 34}{31\times 46}=-0,17$.à

Exercice 170 – Système vis-écrou ⋆ *D'après ressources Pole Chateaubriand – Joliot-Curie.*

A3-05

C2-06

Question 1 *Sur le schéma cinématique, repasser chaque solide d'une couleur différente.*

Question 2 *Réaliser la chaîne d'énergie-puissance partielle en définissant les noms des transmetteurs et les grandeurs d'entrée et de sortie cinématiques.*

Question 3 *Définir la loi entrée-sortie entre la vitesse de translation du piston 3 et la vitesse de rotation du moteur 1.*

Exercice 170 – Maxpid ⋆⋆⋆

C2-06 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Par ailleurs $a=107{,}1\,\text{mm}$, $b=80\,\text{mm}$, $c=70\,\text{mm}$, $d=80\,\text{mm}$. Le pas de la vis est de 4 mm.

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\theta(t)$ en fonction de $\lambda(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\dot{\lambda}(t)$.*

Question 4 *Exprimer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$, vitesse de rotation du rotor moteur **2** par rapport au stator **1**.*

Question 5 *En utilisant Python, tracer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\omega(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce **2** par rapport à **1** est de 500 tours par minute.*

Exercice 170 – Mouvement RT ⋆

[redacted]

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle ou par composition.*

Méthode 1 – Dérivation vectorielle

$$\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\mathcal{R}_0} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{BC}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\dot{\theta}\overrightarrow{j_2}$$

Méthode 2 – Composition du torseur cinématique

$\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)} + \overrightarrow{V(C,1/0)}$

Pour tout point P, $\overrightarrow{V(P,1/0)} = \dot{\lambda}\,\overrightarrow{i_0}$.

$\overrightarrow{V(C,2/1)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = -R\overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_2}$.

On a donc $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dot{\lambda}\,\overrightarrow{i_0} + R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_2}$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.*

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} \\ \overrightarrow{V(C,2/0)} = \dot{\lambda}\,\overrightarrow{i_0} + R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_2} \end{array} \right\}_C .$$

Question 3 *Déterminer $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.*

$$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_0} + R\left(\ddot{\theta}\,\overrightarrow{j_2} - \dot{\theta}^2\,\overrightarrow{i_2}\right).$$

Exercice 170 – Mouvement RR 3D ⋆

[redacted]

Question 1 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par dérivation vectorielle.*

$$\overrightarrow{V(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{AC}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\,\overrightarrow{i_1} + \ell\,\overrightarrow{i_2} + r\,\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathcal{R}_0}.$$

Calculons :

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_2}\right]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}$ $(\overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{i_2})$.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_2}\right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{j_2} = \left(\dot{\theta}\,\overrightarrow{k_0} + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{i_1}\right) \wedge \overrightarrow{j_2} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{j_2} + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{j_2} = -\dot{\theta}\cos\varphi\,\overrightarrow{i_1} + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{k_2}$.

On a donc, $\overrightarrow{V(C,2/0)} = (R+\ell)\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} - r\dot{\theta}\cos\varphi\,\overrightarrow{i_1} + r\dot{\varphi}\,\overrightarrow{k_2}$.

Question 2 *Déterminer $\overrightarrow{V(C,2/0)}$ par composition.*

On a $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(C,2/1)} + \overrightarrow{V(C,1/0)}$.

- $\overrightarrow{V(C,2/1)}$: on passe par B car B est le centre de la pivot entre 2 et 1 et que $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \overrightarrow{0}$. $\overrightarrow{V(C,2/1)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \left(-\ell\,\overrightarrow{i_2} - r\,\overrightarrow{j_2}\right) \wedge \dot{\varphi}\,\overrightarrow{i_1}$
  $= -\ell\,\overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi}\,\overrightarrow{i_1} - r\,\overrightarrow{j_2} \wedge \dot{\varphi}\,\overrightarrow{i_1}$.
  $= r\dot{\varphi}\,\overrightarrow{k_2}$.
- $\overrightarrow{V(C,1/0)}$: on passe par A car A est le centre de la pivot entre 1 et 0 et que $\overrightarrow{V(A,1/0)} = \overrightarrow{0}$ est nul. $\overrightarrow{V(C,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)}$
  $= \left(-r\,\overrightarrow{j_2} - \ell\,\overrightarrow{i_2} - R\,\overrightarrow{i_1}\right) \wedge \dot{\theta}\,\overrightarrow{k_1}$
  $= -r\dot{\theta}\cos\varphi\,\overrightarrow{i_1} + \ell\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} + R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}$

Au final, $\overrightarrow{V(C,2/0)} = r\dot{\varphi}\,\overrightarrow{k_2} - r\dot{\theta}\cos\varphi\,\overrightarrow{i_1} + \ell\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1} + R\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_1}$.

Question 3 *Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point C.*

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}\overrightarrow{k_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{i_1} \\ (R+\ell)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} - r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2} \end{array} \right\}_C$$

Question 4 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.

$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}$
$= \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(R+\ell)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} - r\dot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + r\dot{\varphi}\overrightarrow{k_2}\right]_{\mathscr{R}_0}$
Calculons :

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{j_1} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta}\overrightarrow{i_1}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{k_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{k_2} = \left(\dot{\theta}\overrightarrow{k_0} + \dot{\varphi}\overrightarrow{i_1}\right) \wedge \overrightarrow{k_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{k_2} + \dot{\varphi}\overrightarrow{i_2} \wedge \overrightarrow{k_2} = \dot{\theta}\sin\varphi\overrightarrow{i_1} - \dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}$.

$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} = (R+\ell)\ddot{\theta}\overrightarrow{j_1} - (R+\ell)\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_1} - r\ddot{\theta}\cos\varphi\overrightarrow{i_1} + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\overrightarrow{i_1} - r\dot{\theta}^2\cos\varphi\overrightarrow{j_1} + r\ddot{\varphi}\overrightarrow{k_2} + r\dot{\varphi}\left(\dot{\theta}\sin\varphi\overrightarrow{i_1} - \dot{\varphi}\overrightarrow{j_2}\right)$.

Exercice 170 – Mouvement RT – RSG ⋆⋆

B2-13

Question 1 *Déterminer* $\overrightarrow{V(B,2/0)}$.

$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{V(B,1/0)}$.

D'une part, $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \dot{\lambda}\overrightarrow{i_1}$.

D'autre part, en utilisant le roulement sans glissement en I, $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(I,1/0)} + \overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \overrightarrow{0} + \left(-\lambda(t)\overrightarrow{i_1} - R\overrightarrow{j_0}\right) \wedge \dot{\theta}\overrightarrow{k_0} = -\dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{k_0} + R\overrightarrow{j_0} \wedge \overrightarrow{k_0}\right) = \dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right)$.

Au final, $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\lambda}\overrightarrow{i_1} + \dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right)$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ *au point* B.

$$\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}\overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}\overrightarrow{i_1} + \dot{\theta}\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right) \end{array} \right\}_B.$$

Question 3 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.

$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} = \ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{i_1} + \dot{\lambda}(t)\dot{\theta}\overrightarrow{j_1} + \ddot{\theta}(t)\left(\lambda(t)\overrightarrow{j_1} - R\overrightarrow{i_0}\right) + \dot{\theta}(t)\left(\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_1} - \lambda(t)\dot{\theta}\overrightarrow{i_1}\right)$.

Exercice 170 – Système bielle manivelle ⋆

B2-13 **Pas de corrigé pour cet exercice.**

Il est possible de mettre la loi entrée-sortie sous la forme $\lambda(t) = \pm\sqrt{L^2 - R^2\cos^2\theta(t)} + R\sin\theta(t)$ et $\dot{\lambda}(t) = \pm\left(\dfrac{R^2\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{\sqrt{L^2 - R^2\cos^2\theta(t)}}\right) + \dot{\theta}(t)R\cos\theta(t)$. (à vérifier – voir exercice **??**).

Question 1 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ *au point* B.

On commence par calculer $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(B,1/0)}$.

- **Méthode 1 – dérivation vectorielle :** $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[AB\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathscr{R}_0} = R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.
- **Méthode 2 – formule de changement de point :** $\overrightarrow{V(B,1/0)} = \overrightarrow{V(A,1/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)} = -R\overrightarrow{i_1} \wedge \dot{\theta}t\overrightarrow{k_0} = R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1}$.

On a alors, $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0} \\ R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} \end{array} \right\}_B$.

Question 2 *Donner le torseur cinématique* $\{\mathscr{V}(2/0)\}$ *et au point* C.

On a, $\{\mathscr{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0} \\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0} \end{array} \right\}_C$.

Par ailleurs, on peut remarquer que $\overrightarrow{V(C,2/0)} = \overrightarrow{V(B,2/0)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/0)} = R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} + L\overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi}(t)\overrightarrow{k_0} = R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} - L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2}$.

On a donc nécessairement $\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0} = R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{j_1} - L\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{j_2}$
$\Rightarrow \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{j_0} = R\dot{\theta}(t)\left(\cos\theta(t)\overrightarrow{j_0} - \sin\theta(t)\overrightarrow{i_0}\right) - L\dot{\varphi}(t)\left(\cos\varphi(t)\overrightarrow{j_0} - \sin\varphi(t)\overrightarrow{i_0}\right)$.

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l}0=-R\dot\theta(t)\sin\theta(t)+L\dot\varphi(t)\sin\varphi(t)\\ \dot\lambda(t)=R\dot\theta(t)\cos\theta(t)-L\dot\varphi(t)\cos\varphi(t)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}R\dot\theta(t)\sin\theta(t)=L\dot\varphi(t)\sin\varphi(t)\\ \dot\lambda(t)-R\dot\theta(t)\cos\theta(t)=L\dot\varphi(t)\cos\varphi(t)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \tan\varphi(t)=\frac{R\dot\theta(t)\sin\theta(t)}{\dot\lambda(t)-R\dot\theta(t)\cos\theta(t)}$$

Il resterait à supprimer $\varphi(t)$ pour (espérons-le) retomber sur la loi entrée-sortie cinématique.

Question 3 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(B,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\dot\theta(t)\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathscr{R}_0}=R\ddot\theta(t)\overrightarrow{j_1}-R\dot\theta^2(t)\overrightarrow{i_1}.$$

Question 4 *Déterminer* $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{V(C,2/0)}\right]_{\mathscr{R}_0}=\ddot\lambda(t)\overrightarrow{j_0}.$$