PSI★ – MP

Cycle 3

Concevoir la commande des systèmes asservis afin de valider leurs performances

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Cours

Chapitre 2

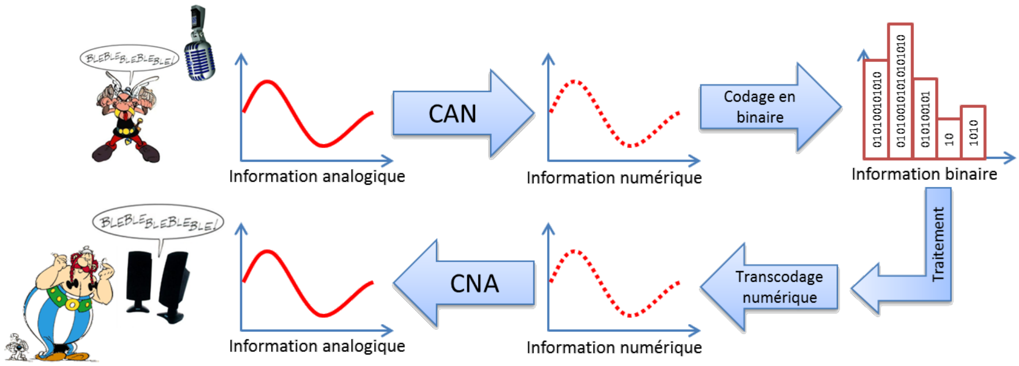
Correction numérique des systèmes asservis

Savoirs et compétences :

Xavier Pessoles
PSI★ – MP

1 Rappels sur les caractéristiques des signaux numériques

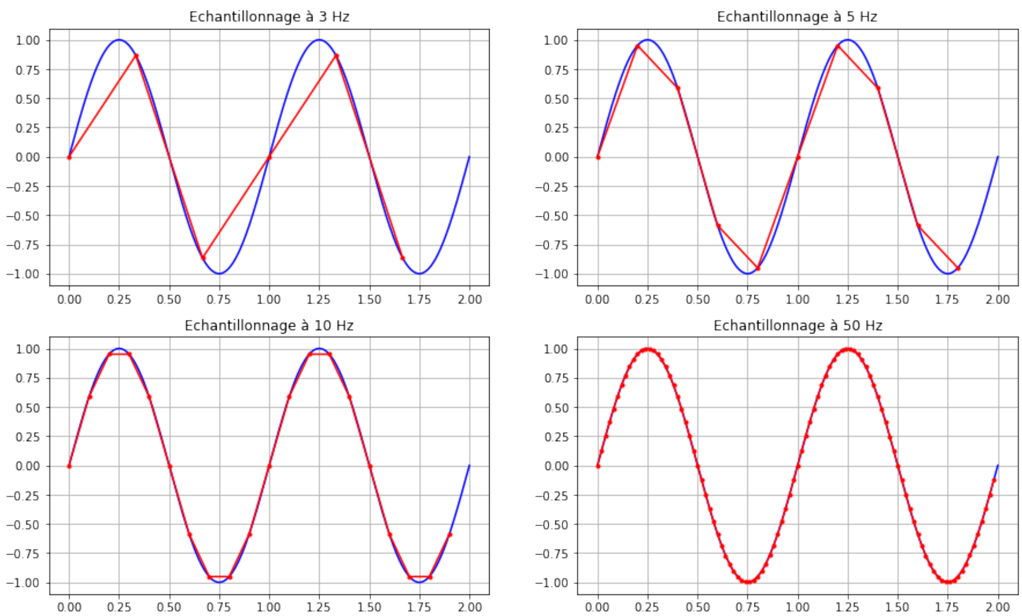
Lors du traitement des signaux par un ordinateur, un microcôntroleur, un automate ou autre dispositif, les signaux analogiques (continues) sont convertis en signaux numériques (discrets) pour être traités. On parle de conversion analogique – numérique (CAN). L'opération inverse est alors réalisée lorsqu'il est nécessaire de restituer de l'information à l'utilisateur.



1.1 Echantillonnage et quantification

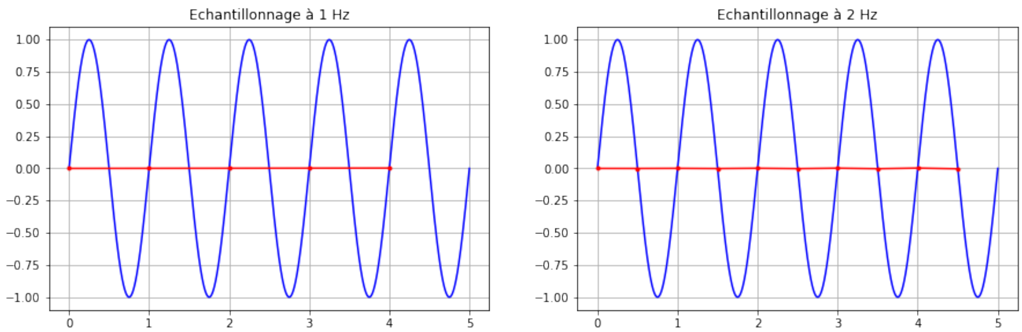
Définition Echantillonnage Échantillonner un signal consiste à prélever les valeurs de ce signal à intervalles définis. Si ces intervalles sont réguliers, on note T_e la période d'échantillonnage (en seconde), c'est-à-dire la durée entre deux prélèvements. On note $f_e = \dfrac{1}{T_e}$ la fréquence d'écantillonnage (en Hertz), c'est-à-dire le nombre d'échantillons par seconde.

Si on note e(t) le signal continu, on notera $e_k = e(kT_e)$ la valeur de l'échantillon $e(t)$ à l'instant kT_e.



Théorème Théorème de Shannon
Soit un signal périodique décomposable en signaux périodiques dont la fréquence maximale présente est largement supérieure à celle minimale présente. La représentation discrète d'un signal par des échantillons régulièrement espacés exige une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale présente dans ce signal.

Dans le cas suivant, le signal est sinusoïdal de fréquence 1 Hz. Avec un échantillonnage de 1 Hz ou 2 Hz, on prélève le signal lorsqu'il est nul. Il est donc opportun de prendre une fréquence d'échantillonnage plus grande afin de ne pas perdre d'information.



Définition Quantification Quantifier in signal consiste à approcher un signal continu par les valeurs d'un ensemble discret.
En général, le système étant échantilloné sur un système binaire sur N bits, on peut donc approcher le signal par 2^N valeurs discrètes.

Définition Erreur de quantification Soit un signal continu borné entre les valeurs e_{min} et e_{max} échantilloné sur N bits. Le pas de quantification donne aussi l'erreur maximala de quantification. On a $q = \dfrac{e_{\text{max}} - e_{\text{min}}}{2^N}$.

1.2 Conversion analogique – numérique

1.3 Conversion numérique – analogique

2 Filtrage numérique

Définition Filtrage numérique
Soit e_k un signal discret. Soit s_k un signal discret filtré. $k \in \mathbb{N}$ est le numéro de l'échantillon.
On appelle filtrage numérique l'opération mathématique permettant de filtrer un signal, c'est-à-dire d'éliminer certaines composantes harmoniques.

2.1 Filtrage numérique passe-bas

Définition Filtre passe-bas du premier ordre
On donne l'équation différentielle d'un filtre du premier ordre : $s(t)+\tau\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[s(t)] = e(t)$. T_e est la période d'échantillonnage du système. La pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$ du filtre est donné par $\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$.

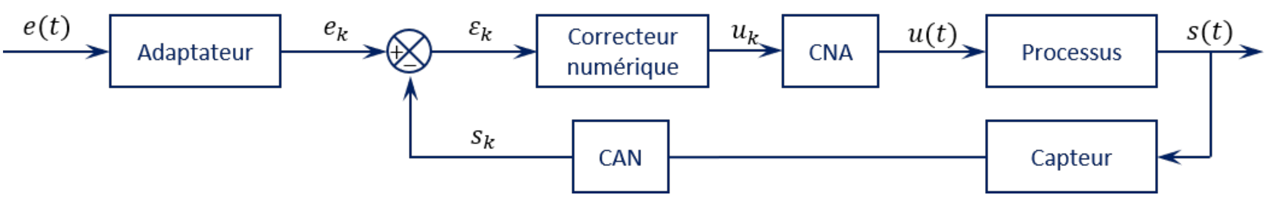
On montre que $s_k = \dfrac{T_e}{T_e+\tau}e_k + \dfrac{\tau}{T_e+\tau}s_{k-1}$.

Démonstration On a $s(t)+\tau\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[s(t)] = e(t)$. En approximant $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[s(t)]$ par $\dfrac{s(t)-s(t-T_e)}{T_e}$, puis en discrétisant l'équation différentielle, on a donc : $s_k + \tau\dfrac{s_k - s_{k-1}}{T_e} = e_k \Leftrightarrow s_k\left(1+\dfrac{\tau}{T_e}\right) - s_{k-1}\dfrac{\tau}{T_e} = e_k \Leftrightarrow s_k\dfrac{T_e+\tau}{T_e} = e_k + s_{k-1}\dfrac{\tau}{T_e}$
$\Leftrightarrow s_k = e_k\dfrac{T_e}{T_e+\tau} + s_{k-1}\dfrac{\tau}{T_e}\dfrac{T_e}{T_e+\tau} \Leftrightarrow s_k = e_k\dfrac{T_e}{T_e+\tau} + s_{k-1}\dfrac{\tau}{T_e+\tau}$.

2.2 Filtrage numérique à moyenne glissante

3 Correcteurs numériques

Les systèmes asservis utilisés sont en réalité le plus souvent numérique. Ainsi, le calcul de l'écart et la correction sont réalisés sous formes numériques par le microcontrôleur, la carte d'axe ou l'automate.



Ainsi le correcteur numérique va devoir synthétiser la commande numérique u_k en fonction de l'écart ε_k.

3.1 Correcteur P

Définition Correcteur proportionnel Dans le domaine temporel, on a $u(t) = K_P\varepsilon(t)$. Cela est traduit par le relation de récurrence suivante : $u_k = K_p\varepsilon_k$.

3.2 Correcteur PI

Définition Correcteur proportionnel intégral Dans le domaine temporel, on a $u(t)=K_P\left(\varepsilon(t)+\dfrac{1}{T_i}\int\limits_0^t \varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$. Cela est traduit par le relation de récurrence suivante : $u_k = u_{k-1}+K_p\left(\varepsilon_k\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}\right)-\varepsilon_{k-1}\right)$.

Démonstration Pour déterminer la relation de récurrence, il faut calculer $\int\limits_0^t \varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau$. Pour cela, si on utilise la méthode des rectangles à droite, on a $\int\limits_0^t \varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau \simeq \sum\limits_{j=1}^{k} \varepsilon_k T_e$; donc $u_k = K_p\left(\varepsilon_k+\dfrac{T_e}{T_i}\sum\limits_{j=1}^{k}\varepsilon_j T_e\right)$.

Par ailleurs, à l'instant $k-1$, $u_{k-1}=K_p\left(\varepsilon_{k-1}+\dfrac{T_e}{T_i}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\varepsilon_j\right)$

Cherchons une relation entre u_{k-1} et u_k : $u_k = K_p\left(\varepsilon_k+\dfrac{T_e}{T_i}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\left(\varepsilon_j\right)+\dfrac{T_e}{T_i}\varepsilon_k\right)$

$=K_p\left(\varepsilon_k\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}\right)+\dfrac{T_e}{T_i}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\left(\varepsilon_j\right)+\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_{k-1}\right)$

$=K_p\left(\varepsilon_k\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}\right)-\varepsilon_{k-1}\right)+K_p\left(\dfrac{T_e}{T_i}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\left(\varepsilon_j\right)+\varepsilon_{k-1}\right)=K_p\left(\varepsilon_k\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}\right)-\varepsilon_{k-1}\right)+u_{k-1}$. *CQFD.*

3.3 Correcteur PID

Définition Correcteur proportionnel intégral et dérivé

Dans le domaine temporel, on a $u(t)=K_P\left(\varepsilon(t)+\dfrac{1}{T_i}\int\limits_0^t \varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau+T_d\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\right)$. Cela est traduit par le relation de récurrence suivante : $u_k = u_{k-1}+K_p\left(\varepsilon_k\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}+\dfrac{T_d}{T_e}\right)-\varepsilon_{k-1}\left(1+\dfrac{T_d}{T_e}\right)\right)$.

Démonstration On a déjà vu que pour un correcteur PI, $u_k = K_p\left(\varepsilon_k\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}\right)-\varepsilon_{k-1}\right)+u_{k-1}$.

Par ailleurs, $T_d\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\simeq T_d\dfrac{\varepsilon_k-\varepsilon_{k-1}}{T_e}$. On a donc $u_k = K_p\left(\varepsilon_k\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}\right)-\varepsilon_{k-1}\right)+u_{k-1}+K_pT_d\dfrac{\varepsilon_k-\varepsilon_{k-1}}{T_e}$

$=K_p\left(\varepsilon_k\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}\right)-\varepsilon_{k-1}+T_d\dfrac{\varepsilon_k-\varepsilon_{k-1}}{T_e}\right)+u_{k-1}$

$=K_p\left(\varepsilon_k\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}+\dfrac{T_d}{T_e}\right)-\varepsilon_{k-1}\left(1+\dfrac{T_d}{T_e}\right)\right)+u_{k-1}$

4 Limite des correcteurs lors de la commande de systèmes

Références