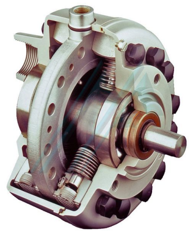
Application 1 – Corrigé



Application – Pompe à plateau

C. Gamelon & P. Dubois

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique;*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Fermeture géométrique.
On a : $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{0}$.
En projection sur $\overrightarrow{z_0}$: $e\cos\theta+R=z$. Par dérivation successive, on a : $-e\dot{\theta}\sin\theta=\dot{z}$ et $-e\ddot{\theta}\sin\theta-e\dot{\theta}^2\cos\theta=\ddot{z}$.
On isole le solide (1).
On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot : $\left\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\right\}=\left\{\begin{array}{c} X_{01}\overrightarrow{x_0}+Y_{01}\overrightarrow{y_0}+Z_{01}\overrightarrow{z_0} \\ M_{01}\overrightarrow{y_0}+N_{01}\overrightarrow{z_0}\end{array}\right\}_O=\left\{\begin{array}{c} Y_{01}\overrightarrow{y_0}+Z_{01}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\left\{\mathscr{T}(2\rightarrow 1)\right\}=\left\{\begin{array}{c} Y_{21}\overrightarrow{y_0}+Z_{21}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_I$. On a $Z_{21}<0$, $Y_{21}>0$ et à la limite du glissement, $Y_{21}=-fZ_{21}$.
  $\overrightarrow{\mathscr{M}(O,2\rightarrow 1)}=\overrightarrow{\mathscr{M}(I,2\rightarrow 1)}+\overrightarrow{OI}\wedge \overrightarrow{R(2\rightarrow 1)}=\left(e\overrightarrow{z_1}+R\overrightarrow{z_0}\right)\wedge\left(Y_{21}\overrightarrow{y_0}+Z_{21}\overrightarrow{z_0}\right)=-eY_{21}\cos\theta\overrightarrow{x_0}-eZ_{21}\sin\theta\overrightarrow{x_0}-RY_{21}\overrightarrow{x_0}=-\left((e\cos\theta+R)Y_{21}+eZ_{21}\sin\theta\right)\overrightarrow{x_0}$.
- Couple moteur : $\left\{\mathscr{T}(\text{Moteur}\rightarrow 1)\right\}=\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{x_0}\end{array}\right\}_O$.

Calcul de $\overrightarrow{\delta(O,1/0)}\cdot\overrightarrow{x_0}$.

O est un point fixe et I_1 moment d'inertie par rapport à $\left(O,\overrightarrow{x_0}\right)$ on a donc : $\overrightarrow{\delta(O,1/0)}\cdot\overrightarrow{x_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O,1/0)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}\overrightarrow{x_0}=$

$$\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(O,1/0)}\cdot\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}I_O(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)}\cdot\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}I_1\dot{\theta}\overrightarrow{x_0}\cdot\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=I_1\ddot{\theta}.$$

Application du théorème du moment dynamique en projection sur $\overrightarrow{x_0}$.

$$C_m-\left((e\cos\theta+R)Y_{21}+eZ_{21}\sin\theta\right)=I_1\ddot{\theta}.$$

On isole le solide (2).
On réalise le bilan des actions mécaniques.

- Liaison pivot glissant : $\left\{\mathscr{T}(0\rightarrow 2)\right\}=\left\{\begin{array}{c} Y_{02}\overrightarrow{y_0} \\ L_{02}\overrightarrow{x_0}\end{array}\right\}_O$.
- Liaison ponctuelle : $\left\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\right\}=-\left\{\mathscr{T}(2\rightarrow 1)\right\}=\left\{\begin{array}{c} -Y_{21}\overrightarrow{y_0}-Z_{21}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_I$.
- Ressort : $\left\{\mathscr{T}(\text{Ressort}\rightarrow 2)\right\}=\left\{\begin{array}{c} -F_0-kz\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A$.
- Pesanteur : $\left\{\mathscr{T}(\text{Pesanteur}\rightarrow 2)\right\}=\left\{\begin{array}{c} -m_2g\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A$.
- Fluide : $\left\{\mathscr{T}(\text{Fluide}\rightarrow 2)\right\}=\left\{\begin{array}{c} -F_h\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A$.

Calcul de $\overrightarrow{R_d(2/0)}\cdot\overrightarrow{z_0}$.
$\overrightarrow{R_d(2/0)}\cdot\overrightarrow{z_0}=m_2\ddot{z}$
Application du théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{z_0}$.

$$-F_h-Z_{21}-F_0-kz-m_2g=m_2\ddot{z}.$$

Bilan :

$$C_m - \left(\left(e\cos\theta + R \right) Y_{21} + e\left(-F_h - F_0 - kz - m_2 g - m_2 \ddot{z} \right) \sin\theta \right) = I_1 \ddot{\theta}.$$

On a alors :

$$C_m - \left(\left(e\cos\theta + R \right) Y_{21} - e\left(F_h + F_0 + k\left(e\cos\theta + R \right) + m_2 g - e\, m_2 \left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta \right) \right) \sin\theta \right) = I_1 \ddot{\theta}.$$

Bilan sans frottement :

$$C_m + e\left(F_h + F_0 + k\left(e\cos\theta + R \right) + m_2 g - e\, m_2 \sin\theta \left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta \right) \right) = I_1 \ddot{\theta}.$$

Application 2 – Corrigé

Application – Détermination de l'inertie équivalente de réducteurs

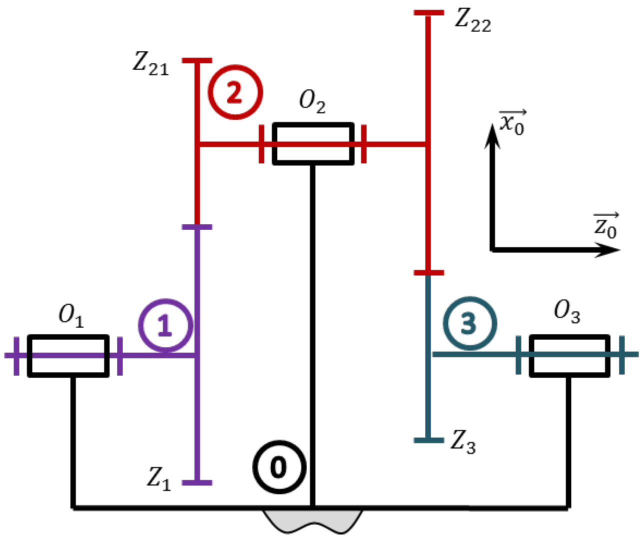
Savoirs et compétences :

- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Exercice 1 – Calcul de l'inertie équivalente d'un train simple

On donne un train d'engrenages simple avec Z_1, Z_{21}, Z_{23} et Z_3 le nombre de dents des roues dentées. On nomme k_1 le rapport du train de S_1 et S_2 avec $k_1 = \dfrac{\omega(2/0)}{\omega(1/0)}$ et k_2 le rapport de S_2 et S_3 avec $k_2 = \dfrac{\omega(3/0)}{\omega(2/0)}$.

On applique en entrée, sur l'arbre 1, un couple moteur $C_m \overrightarrow{z_0}$ destiné à entraîner une charge, sur l'arbre 3, modélisée par un couple résistant $C_r \overrightarrow{z_0}$



On rappelle que pour les engrenages à denture droite $d = mz$ avec d le diamètre primitif, m le module, z le nombre de dents du pignon. $\omega(1/0)$, $\omega(2/0)$ et $\omega(3/0)$ sont les vitesses de rotation de S_1, S_2 et S_3 autour des axes $\left(O_1, \overrightarrow{x_g}\right)$, $\left(O_2, \overrightarrow{x_g}\right)$ et $\left(O_3, \overrightarrow{x_g}\right)$. Le repère galiléen $\mathcal{R}_g$ est lié au solide S_0. Les liaisons pivots sont supposées parfaites. Les moments d'inertie sont définies aux centres de masse $G_1 = O_1$, $G_2 = O_2$ et $G_3 = O_3$ associées aux solides S_1, S_2 et S_3 suivant l'axe $\overrightarrow{z_0}$ sont de notés J_1, J_2 et J_3.

Le train d'engrenage est entrainé par un couple moteur C_m agissant sur la liaison pivot entre 1 et 0. Une poulie de rayon R est placée sur l'extrémité droite de l'arbre 3. Une charge de masse M y est suspendue.

Question 1 *Déterminer le rapport de réduction du train d'engrenages.*

Question 2 *Déterminer l'inertie équivalente du réducteur seul ramené à l'axe moteur.*

Question 3 *Déterminer l'inertie équivalente de l'ensemble réducteur et charge ramené à l'arbre moteur.*

Question 4 *Déterminer la relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie du réducteur.*

Question 5 *Déterminer la relation entre le couple d'entrée, les grandeurs inertielles et l'accélération de l'arbre 1.*

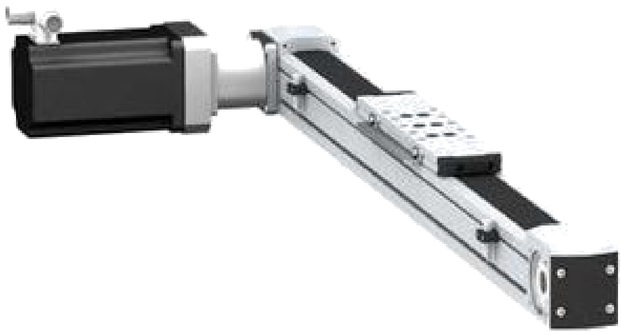
Application 3 – Corrigé

Application 3 –Axe numérique

Savoirs et compétences :

- *Mod2.C18.SF1 : Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.*
- *Res1.C1.SF1 : Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Pour aller rechercher des produits dans leurs rayons, Amazon utilise des axes linéaires afin de déplacer un préhenseur.



Les performances dynamique de l'axe demandées sont les suivantes :

- vitesse linéaire maximale : $50\,\text{m}\,\text{min}^{-1}$;
- accélération linéaire maximale : $9,8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

Objectif L'objectif de ce travail est de déterminer les caractéristiques du moteur (vitesse et couple) permettant d'atteindre ces performances.

Question 1 *Quelle est la vitesse maximale que l'axe peut atteindre en $\text{m}\,\text{s}^{-1}$.*

Correction $V = 0,83\,\text{ms}^{-1}$

Question 2 *Combien de temps l'axe met-il pour atteindre la vitesse maximale ?*

Correction $T_a = 0,83/9,8 = 0,08s$

Question 3 *Quelle distance l'axe parcourt-il pour atteindre la vitesse maximale ?*

Correction

Question 4 *Quelle est la longueur minimale à commander pour que l'axe puisse atteindre la vitesse maximale ?*

Correction

Question 5 *Proposer une longueur minimale de l'axe pour pouvoir profiter de ses performances dynamiques.*

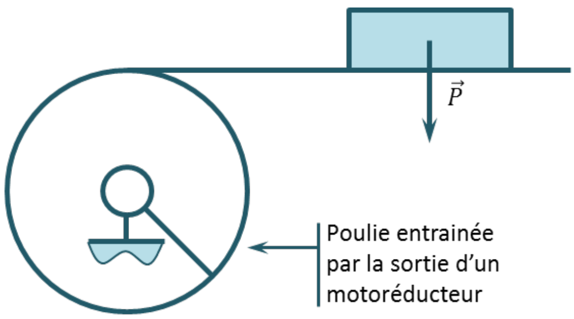
Correction

Question 6 *Tracer le profil de la position, de la vitesse et de l'accélération pour parcourir une distance de 50 cm. On cherchera à atteindre les performances maximales de l'axe.*

Correction

Un motoréducteur permet d'entraîner un système poulie – courroie permettant de déplacer la charge. On considère :

- une charge de masse 1 kg ;
- un poulie de rayon 5 cm ;
- un réducteur de rapport de transmission 1 : 20.



Question 7 *Déterminer le couple à fournir par la poulie pour déplacer la charge lorsque l'accélération est au maximum.*

Correction

Question 8 *Déterminer la vitesse et le couple à fournir par le moteur en considérant que l'inertie du motoréducteur est négligeable.*

Correction

Question 9 *Donner la méthode permettant de prendre en compte l'inertie J du motoréducteur ? Quel serait l'impact de la prise en compte de cette hypothèse ?*

Correction

TD 1 – Corrigé

Véhicule TIM

Florestan Mathurin

Savoirs et compétences :

- *Res1.C2 : principe fondamental de la dynamique ;*
- *Res1.C1.SF1 : proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement.*

Détermination expérimentale du coefficient de résistance au roulement

Question 1 *Écrire le principe fondamental de la statique appliqué au solide **1** réduit au point G en projection sur la base $\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$.*

Correction
- On isole le solide 1.
- Le solide est soumis à l'action de pesanteur et à l'action du sol.
- On applique le PFS :
  - TRS : $-T_{01}\overrightarrow{x}+N_{01}\overrightarrow{z}=-mg\overrightarrow{z_0}=-mg\left(\cos\alpha\overrightarrow{z}-\sin\alpha\overrightarrow{x}\right)$;
  - TMS en G en projection sur $\overrightarrow{y}$: $-C_r+RT_{01}=0$.
- On résout :
  - $-T_{01}+mg\sin\alpha=0$;
  - $N_{01}-mg\cos\alpha=0$;
  - $C_r=RT_{01}$.

Question 2 *Déterminer l'expression analytique de l'angle α_{lim} à la limite de l'équilibre quand il y a début du roulement du solide 1 sur le plan 0.*

Correction À la limite du roulement, on a $C_r=rN_{01}\Leftrightarrow RT_{01}=rN_{01}\Leftrightarrow Rmg\sin\alpha_{\text{lim}}=rmg\cos\alpha_{\text{lim}}$ et $\tan\alpha_{\text{lim}}=\dfrac{r}{R}$.

Pour une masse du solide 1 $m=50\,\text{kg}$ et pour un rayon $R=0{,}25\,\text{m}$ le roulement se produit à partir d'un angle α_{lim} tel que $\tan\alpha_{\text{lim}}=0,008$.

Question 3 *Déterminer le coefficient de résistance au roulement r.*

Correction $r=0{,}002\,\text{m}$.

Question 4 *Au début du roulement, montrer qu'il ne peut pas y avoir glissement en A_1 si le coefficient de frottement au contact vaut $f=0,5$.*

Correction À la limite du glissement, on a $T_{01}=fN_{01}$ et $\dfrac{T_{01}}{N_{01}}=\tan\alpha$. Pour $\tan\alpha_{\text{lim}}<f$ il y a donc roulement sans glissement.

Modélisation du véhicule

Question 5 *Écrire les équations scalaires découlant des conditions de Roulement Sans Glissement (RSG) aux point A_{23} et A_4.*

Correction En A_{23}, on a : $\overrightarrow{V(A_{23},23/0)} = \overrightarrow{0}$. On a alors $\overrightarrow{V(A_{23},23/0)} = \overrightarrow{V(A_{23},23/1)} + \overrightarrow{V(A_{23},1/0)}$ et $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{V(O_{23},23/1)} + \overrightarrow{A_{23}O_{23}} \wedge \overrightarrow{\Omega(23/1)} + \overrightarrow{V(A_{23},1/0)} \Leftrightarrow \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + R\overrightarrow{z} \wedge \dot{\theta}_{23}\overrightarrow{y} + \dot{x}\overrightarrow{x} \Rightarrow 0 = -R\dot{\theta}_{23} + \dot{x}$.
De même en A_4, $0 = -R\dot{\theta}_4 + \dot{x}$.

Question 6 *En isolant l'ensemble $E = 1+2+3+4$, écrire le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{z}$.*

Correction
- On isole E.
- BAME :
  - Pesanteur : $\{\mathscr{T}(\text{Pes} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} -(M+3m)g\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_E} = \left\{ \begin{array}{c} -(M+3m)g\left(\cos\alpha\overrightarrow{z} - \sin\alpha\overrightarrow{x}\right) \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{G_E}$.
  - Résistance au roulement : $\{\mathscr{T}(T \rightarrow 0)\}_i = \left\{ \begin{array}{c} -T_{0i}\overrightarrow{x} + N_{0i}\overrightarrow{z} \\ -C_r\overrightarrow{y} \end{array} \right\}_{A_i}$.
  - Traînée : $\{\mathscr{T}(\text{Trainee} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\dfrac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_{23}}$.
- La résultante dynamique est donnée par $(M+3m)\overrightarrow{\Gamma(G,E/0)} = (M+3m)\ddot{x}\overrightarrow{x}$.
- On applique le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{z}$:
  - $(M+3m)g\sin\alpha - \dfrac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2 - T_{04} - T_{023} = (M+3m)\ddot{x}$
  - $-(M+3m)g\cos\alpha + N_{04} + N_{023} = 0$

Question 7 *Pour chacune des roues 23 et 4, écrire les 2 équations scalaires correspondant au théorème du moment dynamique respectivement en O_{23} et O_4 en projection sur $\overrightarrow{y}$.*

Correction
- On isole 23.
- BAME :
  - 23 est soumis à la pesanteur ;
  - action de la pivot sans frottement avec le solide 1 ;
  - résistance au roulement : $\{\mathscr{T}(T \rightarrow 0)\}_{23} = \left\{ \begin{array}{c} -T_{023}\overrightarrow{x} + N_{023}\overrightarrow{z} \\ -N_{023}r\overrightarrow{y} \end{array} \right\}_{A_{23}} = \left\{ \begin{array}{c} -T_{023}\overrightarrow{x} + N_{023}\overrightarrow{z} \\ (-rN_{023} + RT_{023})\overrightarrow{y} \end{array} \right\}_{O_{23}}$.
- Le moment dynamique de O_{23} centre d'inertie des roues en projection sur $\overrightarrow{y_0}$ s'écrit $\overrightarrow{\delta(O_{23},23/0)}\overrightarrow{y_0} = 2I\ddot{\theta}_{23}$.
- TMD en O_{23} en projection sur $\overrightarrow{y_0}$ s'écrit donc $-rN_{023} + RT_{023} = 2I\ddot{\theta}_{23}$.

De même pour la roue 4 en ajoutant la sollicitation du couple moteur : $-rN_{04} + RT_{04} + C_m = I\ddot{\theta}_4$.

Question 8 *Montrer à partir des équations scalaires obtenues précédemment que le couple moteur C_m vaut :*
$C_m = (M+3m)g\cos\alpha r + \left[\dfrac{3I}{R} + R(M+3m)\right]\ddot{x} - R(M+3m)g\sin\alpha + \dfrac{1}{2}R\rho S C_x \dot{x}^2$.

Correction On a : $C_m = I\ddot{\theta}_4 + rN_{04} - RT_{04} = \dfrac{I}{R}\ddot{x} + rN_{04} - RT_{04} = \dfrac{I}{R}\ddot{x} - rN_{023} + r(M+3m)g\cos\alpha - RT_{04} = \dfrac{I}{R}\ddot{x} - RT_{023} + 2I\ddot{\theta}_{23} + r(M+3m)g\cos\alpha - RT_{04} = \dfrac{I}{R}\ddot{x} + \dfrac{2I}{R}\ddot{x} + r(M+3m)g\cos\alpha - R\left((M+3m)g\sin\alpha - \dfrac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2 - (M+3m)\ddot{x}\right)$.

$$C_m = r(M+3m)g\cos\alpha + \left(\frac{3I}{R} + R(M+3m)\right)\ddot{x} + \left(-R(M+3m)g\sin\alpha + R\frac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2\right).$$

CQFD.

Question 9 *Identifier dans l'expression de C_m les différentes actions qui ont tendance à affecter l'avancement du véhicule.*

Cycle 01

Correction

$$C_m = \underbrace{(M+3m)gr\cos\alpha}_{\text{Résistance au roulement}} - \underbrace{(M+3m)gR\sin\alpha}_{\text{Couple pour monter la pente}} + \underbrace{\left(\frac{3I}{R}+R(M+3m)\right)\ddot{x}}_{\text{Couple pour vaincre les effets d'inertie}} + \underbrace{R\frac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la trainée}}$$

.

Question 10 *Déterminer l'expression du couple moteur C_m quand le véhicule a une vitesse constante V sur une piste horizontale.*

Correction À vitesse constante sur du plat, on a :

$$C_m = \underbrace{(M+3m)gr}_{\text{Résistance au roulement}} + \underbrace{R\frac{1}{2}\rho S C_x \dot{x}^2}_{\text{Couple pour vaincre la trainée}}$$

.

Question 11 *Déterminer dans les conditions d'essais le produit $\frac{1}{2}\rho S C_x$ caractérisant les effets aérodynamiques sur le véhicule. On précisera les unités.*

Correction La vitesse constante atteinte sur les graphes est de $17\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Par ailleurs $\frac{1}{2}\rho S C_x = \frac{C_m - (M+3m)gr}{R\dot{x}^2} = \frac{3,245-(70+3\cdot 1)\cdot 10\cdot 0,002}{0,25\cdot 17^2} = 0{,}025\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$.

Question 12 *Évaluer la pente maximum que peut monter ce véhicule à vitesse stabilisée de $5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ (on négligera le couple de résistance au roulement).*

Correction