

## Modéliser le comportement linéaire et non linéaire des systèmes multiphysiques

Sciences  
Industrielles de  
l'Ingénieur

### Cours

## Chapitre 3 Stabilité des systèmes

**Savoirs et compétences :**

- Mod3.C2 : pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle : principe, justification
- Res2.C4 : stabilité des SLCI : définition entrée bornée – sortie bornée (EB – SB)
- Res2.C5 : stabilité des SLCI : équation caractéristique
- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)



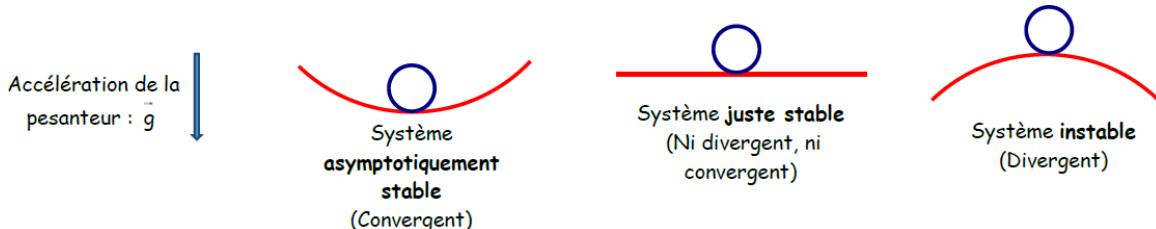
SoloWheel Orbit.

1	Notion de stabilité	2
1.1	Représentation graphique (1) . . . . .	2
1.2	Premières définitions . . . . .	2
1.3	Étude des pôles de la fonction de transfert . . . . .	2
1.4	Position des pôles dans le plan complexe . . . . .	3
1.5	Pôles dominants (1) . . . . .	3
1.6	Caractéristiques dans le lieu de pôles . . . . .	4
2	Marges de stabilité	4
2.1	Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez... 4	
2.2	Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh . . . . . 4	
2.3	Critère « graphique » de stabilité : le critère du Revers . . . . . 4	
2.4	Vers le système réel... . . . . . 5	

## 1 Notion de stabilité

### 1.1 Représentation graphique (1)

Un état d'équilibre d'un système est asymptotiquement stable lorsque le système, écarté de sa position d'équilibre par une cause extérieure, finit par retrouver ce même état d'équilibre après disparition de la cause. Illustrons cette définition de façon très intuitive à travers l'exemple suivant : une boule soumise à l'accélération de la pesanteur se déplaçant (avec un peu de dissipation énergétique) sur une surface donnée.



### 1.2 Premières définitions

#### Définition – Définition intuitive

Un système est asymptotiquement stable si et seulement si :

- abandonné à lui-même à partir de conditions initiales quelconques il revient à son état d'équilibre;
- son régime transitoire finit par disparaître;
- sa sortie finit par ressembler à l'entrée;
- sa réponse tend vers zéro au cours du temps.

(R)

La stabilité d'un système **est indépendante** de la nature de l'entrée. Ainsi, l'étude de la stabilité peut se faire à partir d'une réponse impulsionale (entrée Dirac), indicielle (entrée échelon d'amplitude 1), d'une réponse harmonique (entrée sinusoïdale)...

Pour simplifier les calculs, une première approche pourra être d'utiliser la réponse impulsionale.

**Définition E** En conséquence, on peut considérer qu'un système est asymptotiquement stable si et seulement si sa réponse impulsionale tend vers zéro au cours du temps.

### 1.3 Étude des pôles de la fonction de transfert

Dans le cas général la fonction de transfert d'un système peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } n \geq m.$$

Lors du calcul de la réponse temporelle en utilisant la transformée de Laplace inverse (quelle que soit l'entrée), la nature du régime transitoire ne dépend que des pôles  $p_i$  de la fonction de transfert (zéros du dénominateur).

En factorisant le numérateur et le dénominateur de  $H(p)$  on peut alors retrouver une fonction de la forme :

$$H(p) = \frac{(p + z_m) \cdot (p + z_{m-1}) \dots}{(p + p_n) \cdot (p + p_{n-1}) \dots} \quad \text{avec } p_i, z_i \in \mathbb{C}.$$

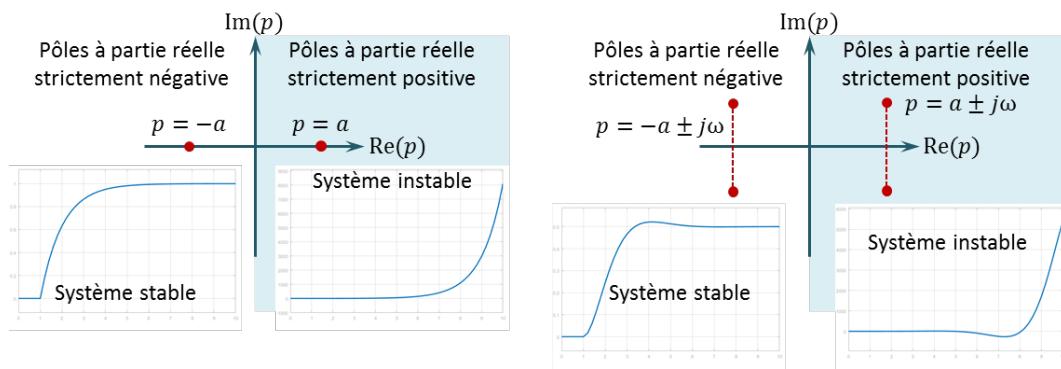
En passant dans le domaine temporel :

- les pôles réels (de type  $p = -a$ ) induisent des modes<sup>1</sup> du type  $e^{-at}$ ;
- les pôles complexes conjugués (de type  $p = -a \pm j\omega$ ) induisent des modes du type  $e^{-at} \sin \omega t$ .

**On peut ainsi constater que si les pôles sont à partie réelle strictement négative, l'exponentielle décroissante permet de stabiliser la réponse temporelle.**

Ainsi, on peut observer la réponse temporelle des systèmes en fonction du positionnement des pôles dans le plan complexe.

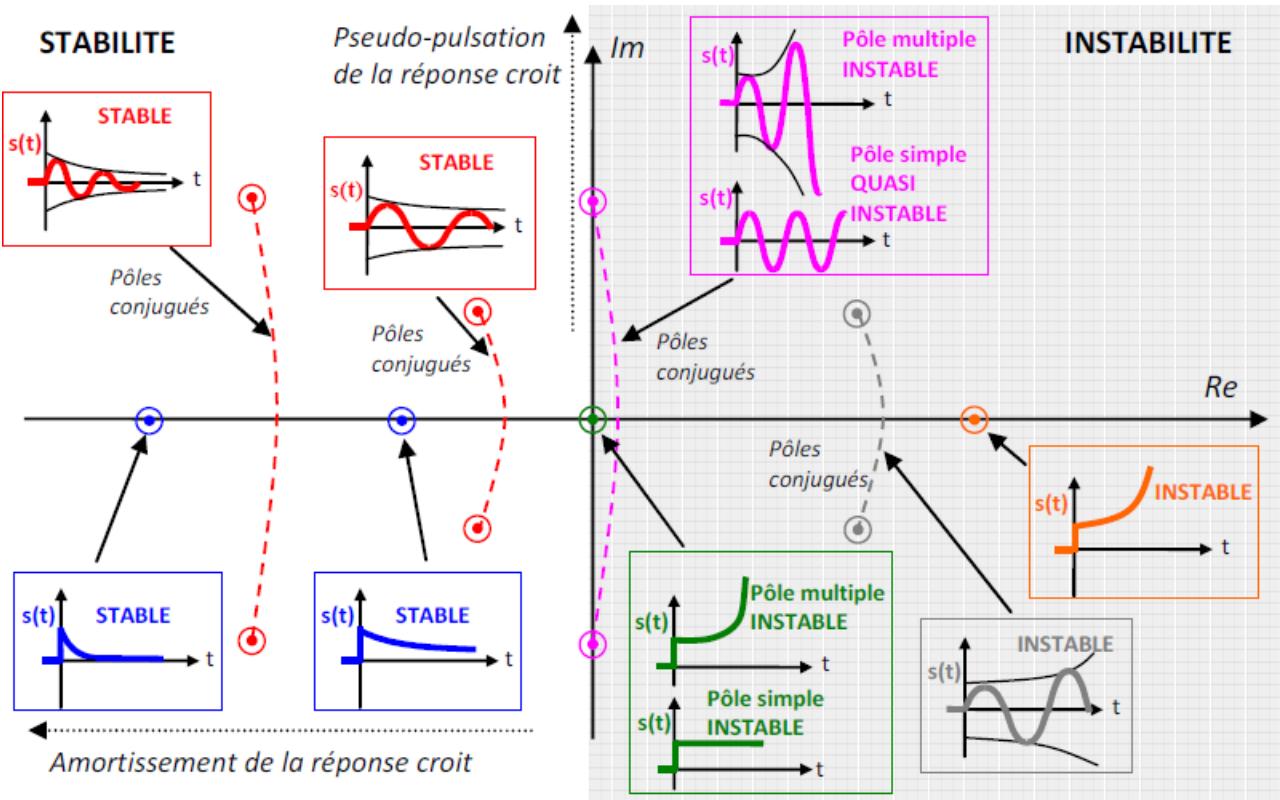
1. mode : fonction temporelle associée à un pôle



Représentation d'un système à pôle simple et à pôles conjugués dans le plan complexe – Réponse indicielle

#### 1.4 Position des pôles dans le plan complexe

Par extension on peut observer dans le plan complexe les pôles de fonctions de transfert et leur indicielle associée.



Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système [2].

**Définition** – À retenir Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert (en boucle fermée) sont à partie réelle strictement négative.



On peut montrer que :

- pour les systèmes d'ordre 1 et 2 : le système est stable si tous les coefficients du dénominateur sont non nuls et de même signe;
- pour les systèmes d'ordre 3 : de la forme  $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3$  les coefficients doivent être strictement de même signe et  $a_2 a_1 > a_3 a_0$ .

#### 1.5 Pôles dominants (1)

Lors de l'étude d'un système, on se contente en général de ne prendre en compte que les pôles les plus influents. Ces pôles sont appelés les pôles dominants. Pour un système asymptotiquement stable, ce sont ceux qui sont le plus proche de l'axe des imaginaires, puisque ce sont eux qui induisent des modes qui disparaissent dans le temps le plus lentement.

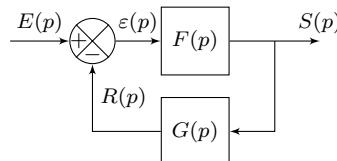
## 1.6 Caractéristiques dans le lieu de pôles

Il est possible de représenter les performances des systèmes asservis en utilisant le lieu des pôles dans le plan complexe [1].

## 2 Marges de stabilité

### 2.1 Lorsque la BO commence à pointer le bout de son nez...

Soit le schéma-blocs suivant :



La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par  $H_{BO} = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = F(p)G(p)$ .

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :  $H_{BF} = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)G(p)} = \frac{F(p)}{1 + H_{BO}(p)}$ .

**Définition** – Équation caractéristique Soit  $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$  une fonction de transfert. On appelle  $D(p) = 0$  l'équation caractéristique de la fonction de transfert. Ainsi les racines de  $D(p)$  correspondent aux pôles de  $H(p)$ .

Pour un système bouclé, l'équation caractéristique sera  $1 + H_{BO}(p) = 0$ .

### 2.2 Critère algébrique de stabilité : le critère de Routh

Pour un système d'ordre supérieur à 3 il devient délicat d'obtenir analytiquement (ou numériquement) les racines du polynôme et ainsi conclure sur la stabilité à partir du signe des parties réelles.

Il existe un critère algébrique permettant de vérifier la stabilité d'un système : il s'agit de critère de Routh. Pour un système bouclé, ce critère utilise le dénominateur de la BF. Ce critère n'étant pas au programme, on pourra rechercher dans la littérature des articles s'y référant si nécessaire.

### 2.3 Critère « graphique » de stabilité : le critère du Revers

On a vu que l'équation caractéristique était de la forme  $1 + H_{BO}(p) = 0$ . Ainsi, Pour cela revient à résoudre l'équation  $H_{BO}(p) = -1$ . Ainsi dans le plan complexe, le point  $(-1; 0)$  permet d'avoir une information sur la stabilité. En terme de module et de phase, ce nombre complexe a un module de 1 (gain dB nul) et une phase de  $-180^\circ$ .

**Résultat** Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si, **en boucle ouverte, on a :**

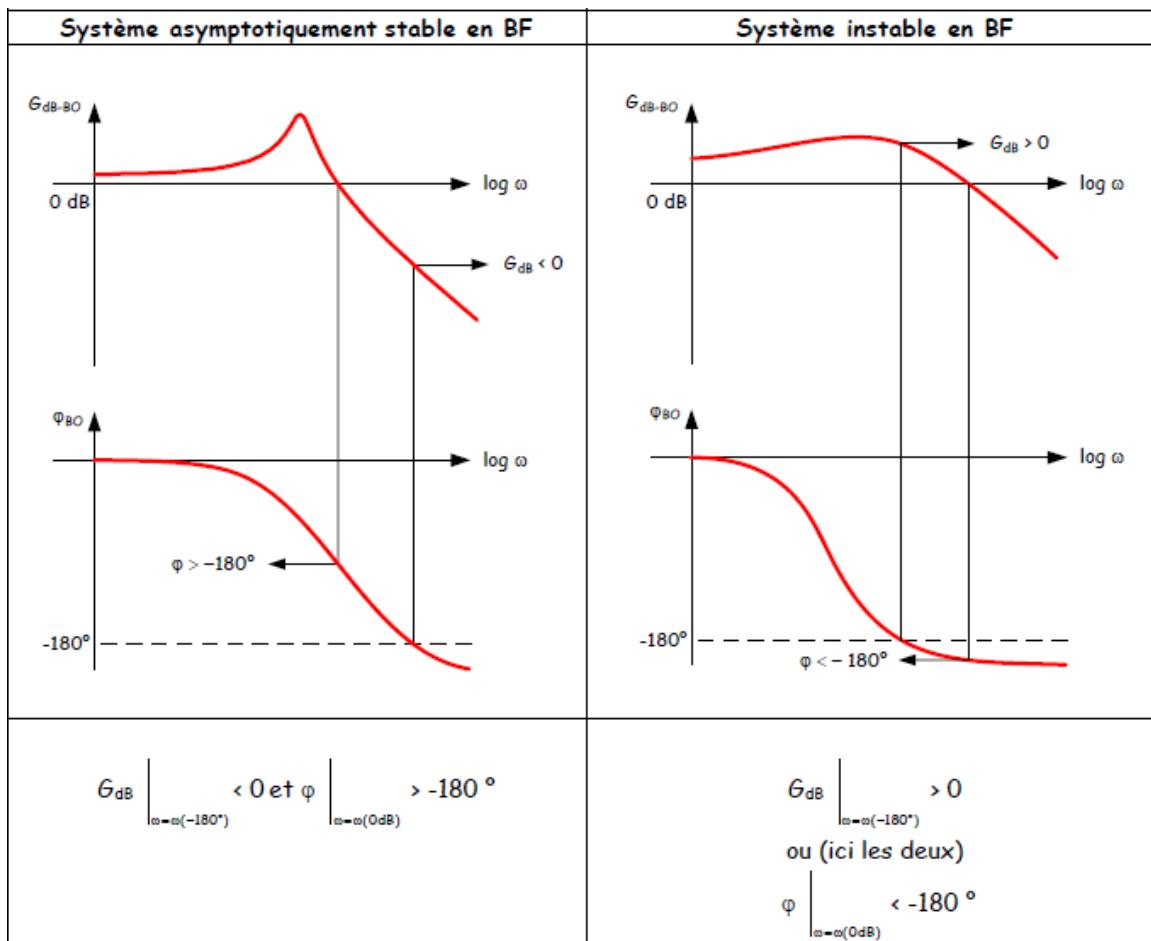
$$G_{\text{dB}}|_{\omega=\omega_{-180^\circ}} < 0_{\text{dB}} \quad \text{et} \quad \varphi|_{\omega=\omega_{0\text{dB}}} > -180^\circ.$$

En notant  $\omega_{-180^\circ}$  la pulsation pour laquelle la phase vaut  $-180^\circ$  et  $\omega_{0\text{dB}}$  la pulsation pour laquelle le gain est nul.



Je parle ici de critère graphique car l'interprétation graphique dans le diagramme de Bode est directe.

**Résultat** Condition (non suffisante ...) de stabilité : les pôles de la FTBO doivent être à partie réelle positive.



## 2.4 Vers le système réel...

Le résultat donné ci-dessus est un résultat théorique dans le sens où le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système réel aura un écart avec le diagramme de Bode du système modélisé.

**Résultat – Marges** Pour tenir compte des écarts entre le modèle et le système réel, on est amené à définir une marge de gain et une marge de phase. Cela signifie que dans l'étude des systèmes asservis, on considérera, dans le cas général que le système est stable si :

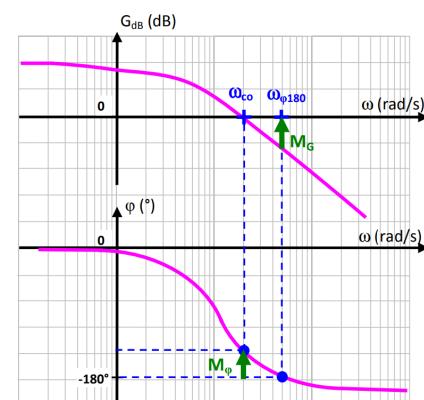
- la marge de gain est supérieure à 10 dB;
- la marge de phase est supérieure à 45°.

### Définition – Marge de phase

La marge de phase est définie telle que  $M_\varphi = 180^\circ + \arg(\text{FTBO}(j\omega_{c0}))$  où  $\omega_{c0}$  est la pulsation de coupure pour laquelle  $20\log|\text{FTBO}(j\omega_{c0})| = 0 \text{ dB}$ .

### Définition – Marge de gain

La marge de gain est définie telle que  $M_G = -20\log|\text{FTBO}(j\omega_{\varphi 180})|$  où  $\omega_{\varphi 180}$  est la pulsation pour laquelle  $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi 180})) = -180^\circ$ .



La marge de gain permet de tenir compte de variations de gain de la boucle ouverte.

De même, la marge de phase permet de tenir compte de variation de phase (retard ou déphasage non modélisés).

La nécessité d'avoir recours à des marges de stabilité apparaît notamment lorsque :

- la simplification du modèle amène à considérer uniquement les pôles dominants,
- le modèle ne prend pas en compte la dynamique de certains composants du système ;
- le système n'est pas invariant au cours du temps ;
- on s'éloigne de la zone de fonctionnement linéaire ;
- certaines non linéarités sont ignorées.

## Références

- [1] Frédéric Mazet, *Cours d'automatique de deuxième année, Lycée Dumont Durville, Toulon.*
- [2] Florestan Mathurin, *Stabilité des SLCI, Lycée Bellevue, Toulouse, <http://florestan.mathurin.free.fr/>.*

## Activation

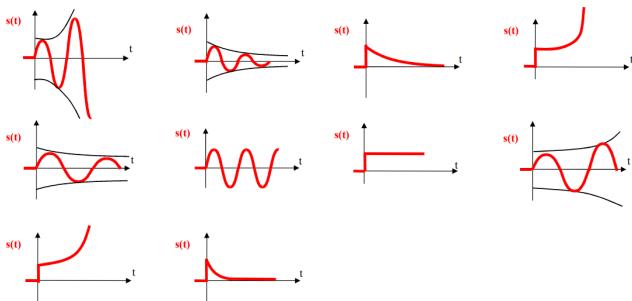
### Activation

Patrick Dupas, <http://patrick.dupas.chez-alice.fr/>.

#### Savoirs et compétences :

- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

#### Exercice 1 – Réponse impulsionnelle (entrée Dirac)



**Question 1** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

#### Exercice 2 – Pôles de la FTBF

On donne les pôles des FTBF de plusieurs systèmes :

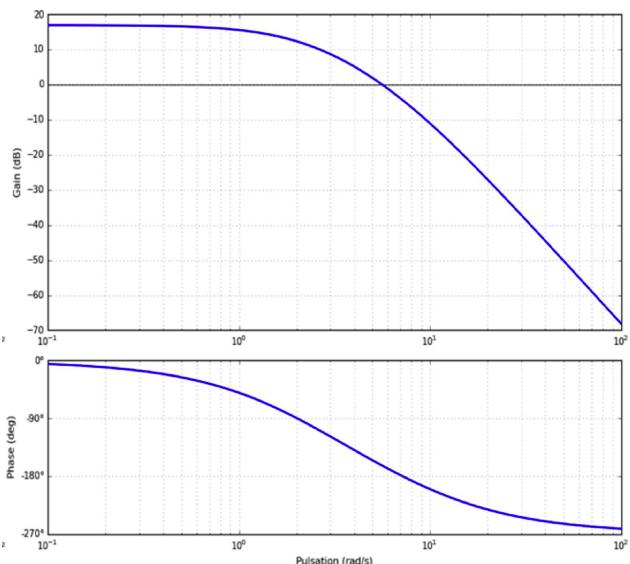
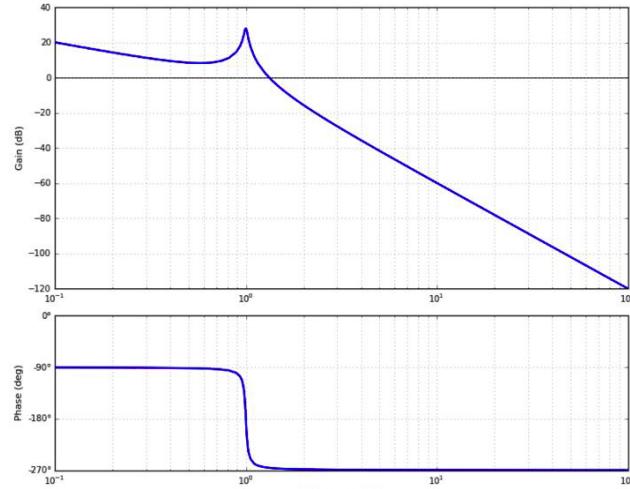
- |                           |                  |
|---------------------------|------------------|
| 1. $-1, -2;$              | 6. $-1, +1;$     |
| 2. $-3, -2, 0;$           | 7. $-1+j, -1-j;$ |
| 3. $-2+j, -2-j, 2j, -2j;$ | 8. $2, -1, -3;$  |
| 4. $-2+3j, -2-3j, -2;$    | 9. $-6, -4, 7.$  |
| 5. $-j, j, -1, 1;$        |                  |

**Question 1** Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou juste (quasi) stable.

#### Exercice 3 – Applications du critère du Revers

**Question 1** On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF

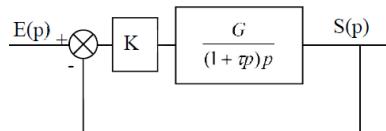
**Question 2** Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.



#### Exercice 4 – Étude de la stabilité

- Objectif**
- Caractériser la stabilité d'un système à partir de la FTBO.
  - La marge de gain est supérieure à 10 dB et que la marge de phase est supérieure à 45°.

On donne le schéma bloc suivant :



On a  $K = 1$ ,  $\tau = 0,1$  et  $G = 20$ .

**Question 1** Déterminer l'erreur statique et l'erreur de traînage.

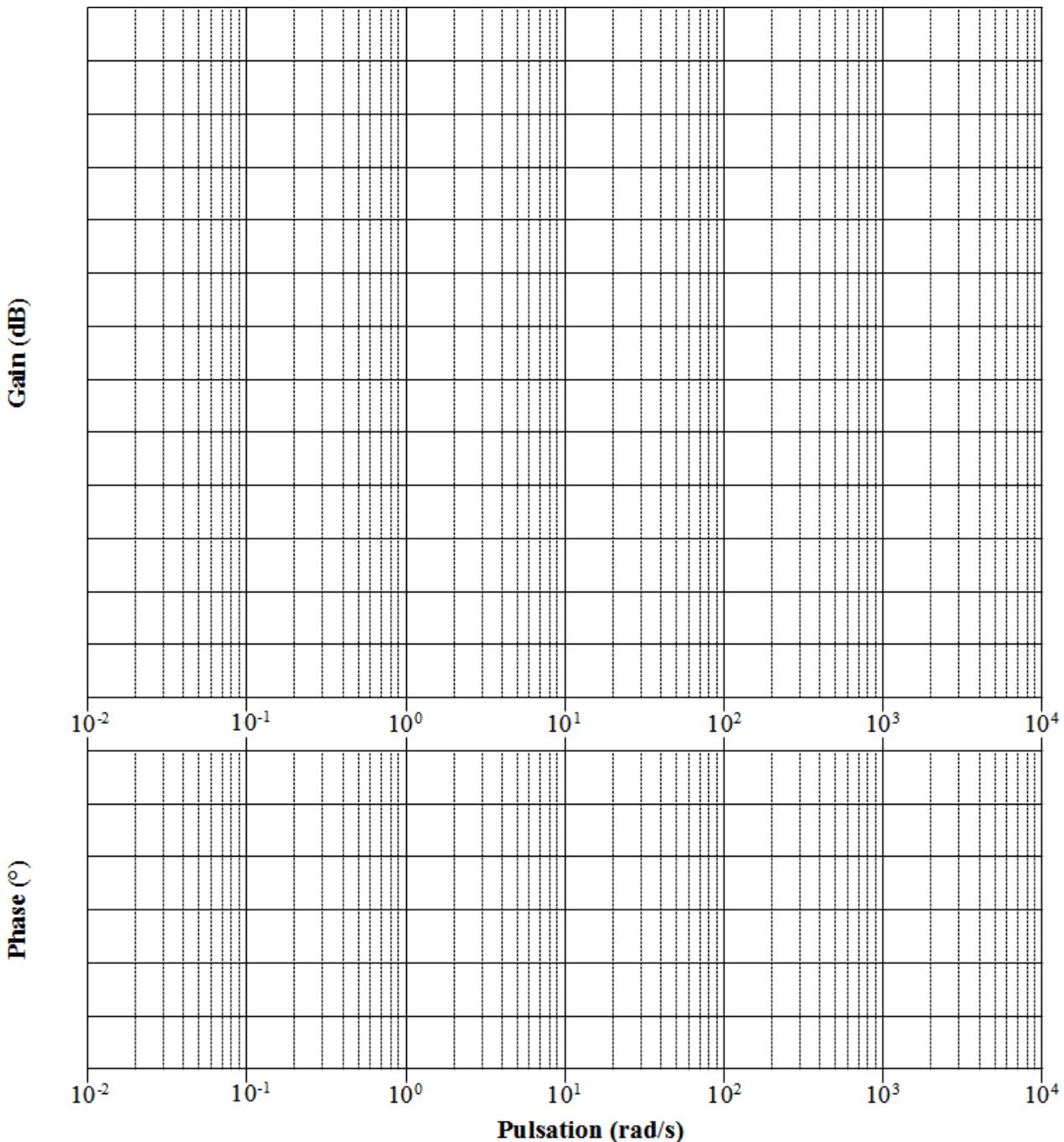
**Question 2** Effectuer les tracés des diagrammes de

Bode de la FTBO.

**Question 3** Déterminer graphiquement les marges de gains et de phase.

**Question 4** Confirmer ces résultats par le calcul.

**Question 5** Conclure par rapport au cahier des charges.



## Application

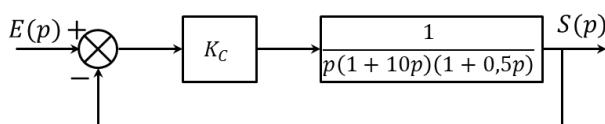
### Application

Xavier Pessoles

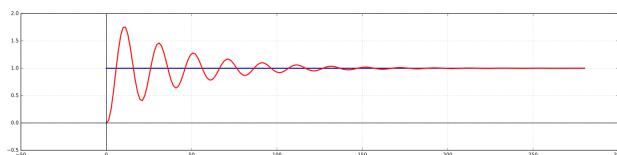
#### Savoirs et compétences :

- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

On considère le schéma-blocs suivant.



On donne ci-dessous la réponse indicielle pour  $K_C = 1$ .

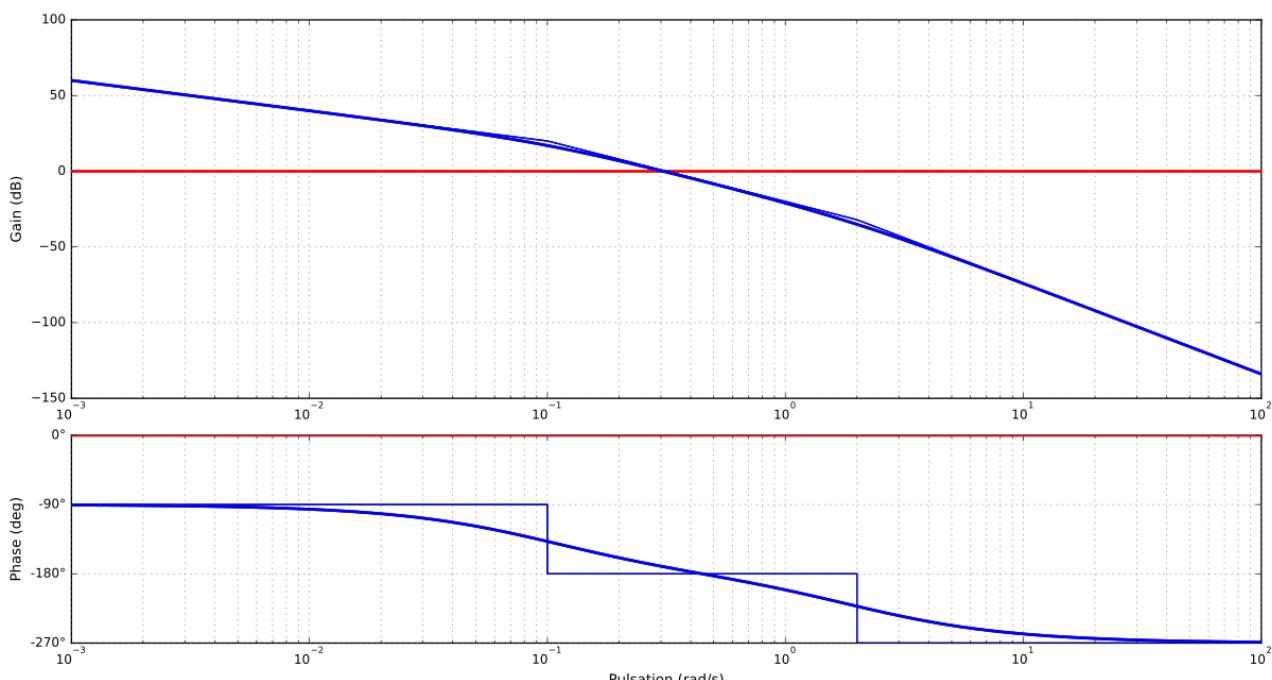


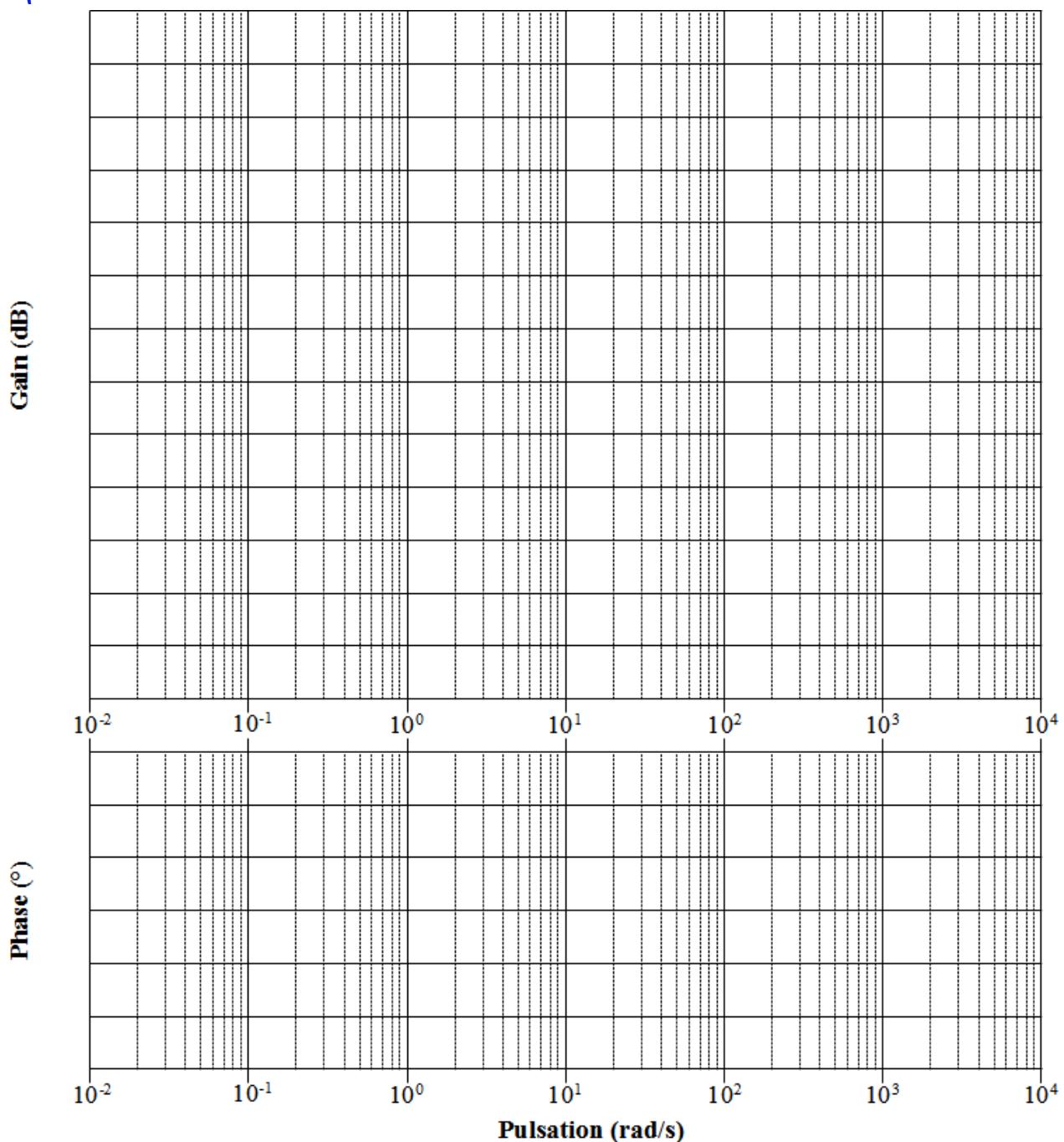
**Question 1** Justifier l'allure du diagramme du diagramme de Bode donné ci-dessous pour  $K_C = 1$ .

**Question 2** Donner graphiquement les marges de phase et de gain pour  $K_C = 1$ .

**Question 3** Donner analytiquement les marges de phase et de gain pour  $K_C = 1$  (méthode).

**Question 4** Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de 12 dB et 40°. Déterminer la plus grande valeur de  $K_C$  permettant de vérifier ce cahier des charges





# Application

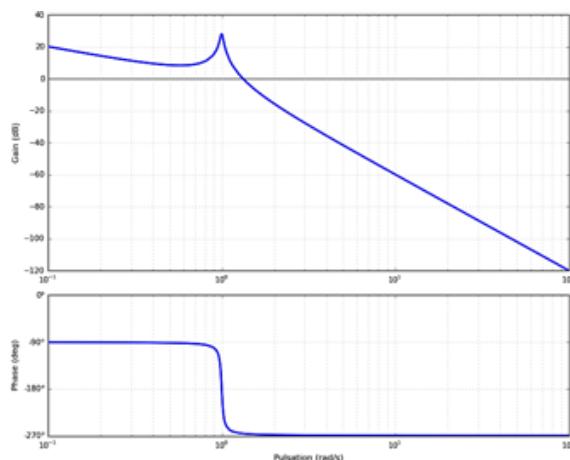
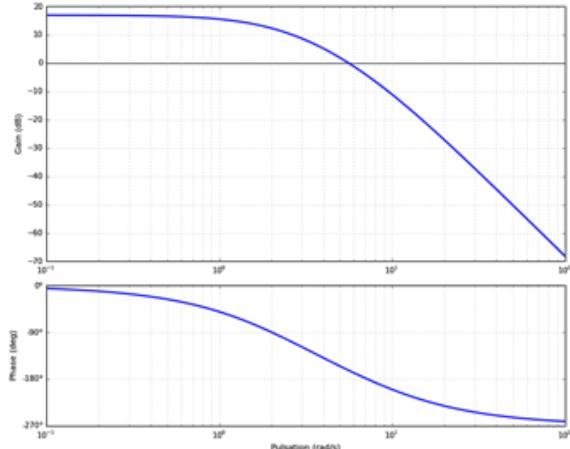
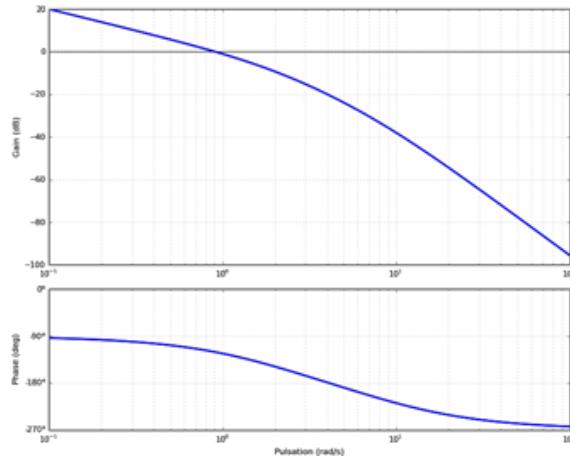
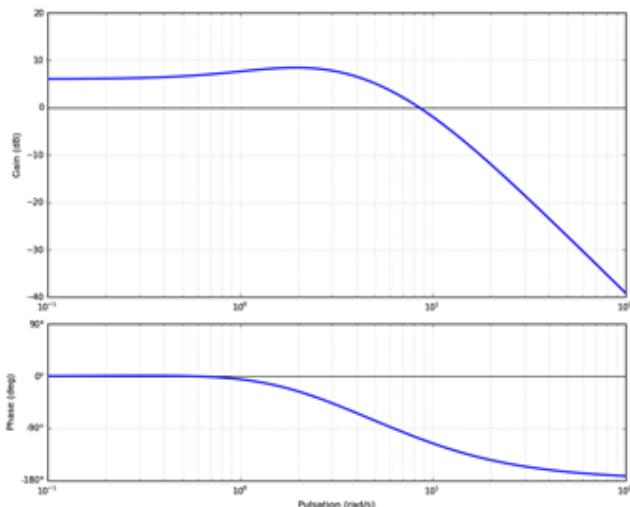
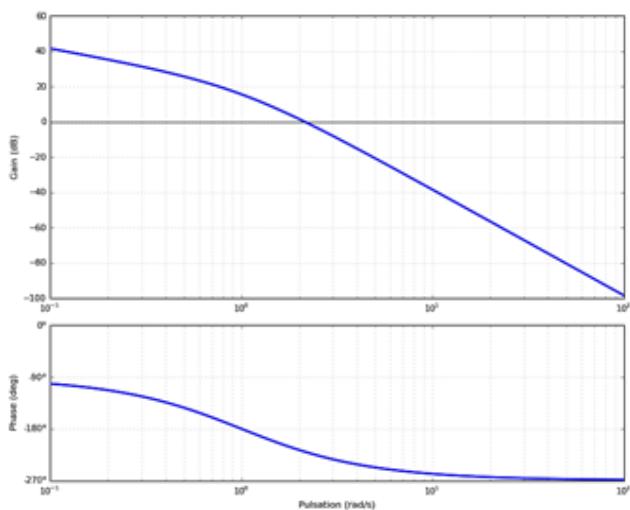
## Application

Xavier Pessoles

### Savoirs et compétences :

- Res2.C6 : stabilité des SLCI : position des pôles dans le plan complexe
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase)

**Question 1** On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF. Pour les systèmes stables déterminer les marges de gain et de phase.



## TD 01



## Direction automobile découplée

Banque PT – SIA 2017

## Savoirs et compétences :

- Mod2.C7.SF2 : déterminer les fonctions de transfert;
- Res2.C5 : stabilité des SLCI : équation caractéristique;
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase).

**Mise en garde :** il se peut qu'il manque des informations ou que certaines soient superflues. N'hésitez pas à m'en faire part!!

## Mise en situation

Le principe de la direction découpée est de substituer la liaison mécanique entre le volant et les roues, une architecture de type télémanipulateur à un degré de liberté qui consiste à coupler un robot maître, manipulé par un opérateur, avec un robot esclave, distant, qui effectue la tâche. Cette structure peut être schématisé par l'organisation qui suit (Figure 1).

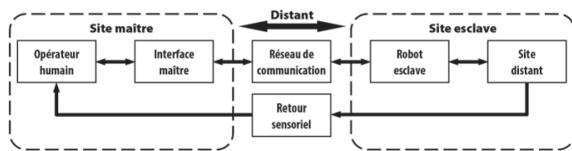


FIGURE 1 – Architecture maître-esclave

Une direction automobile découpée doit conserver les qualités d'une direction conventionnelle et apporter les améliorations de comportement attendues par le conducteur, en termes de performances, de confort de conduite et de sécurité. Le diagramme (Figure 8) précise les principales exigences.

## Modélisation du comportement du système mécanique

Le modèle utilisé pour la structure est celui de la figure 2.

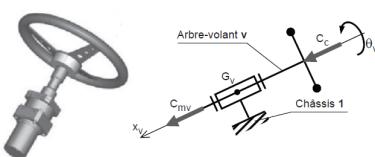


FIGURE 2 – Unité de pilotage (chaîne d'énergie) et schéma cinématique

## Notations :

- arbre-volant  $v$  : le solide constitué du rotor du moteur, de l'arbre volant et du volant;
- $G_v$  : centre d'inertie de l'arbre-volant  $v$ ;
- $I_v(G_v)$  : opérateur d'inertie de  $v$  au point  $G_v$ ;

- $J_v$  : le moment d'inertie de  $v$  autour de l'axe  $(G_v, \vec{x}_v)$ ;
- $f_v$  : le coefficient de frottement visqueux de la liaison pivot;
- $\theta_v(t)$  : l'angle de rotation de l'arbre-volant  $v$  par rapport au châssis 1 (noté  $\theta_v(p)$  dans le domaine de Laplace);
- $\omega_v(t)$  : la vitesse de rotation de l'arbre-volant  $v$  par rapport au châssis 1 (noté  $\Omega_v(p)$  dans le domaine de Laplace).

## Hypothèses :

- le repère lié au châssis 1 est supposé galiléen;
- $G_v$  est situé sur l'axe de la liaison pivot;
- la liaison pivot est supposée parfaite hormis un couple de frottement visqueux  $C_f \vec{x}_v$ ;
- les actions mécaniques du conducteur et du moteur sur l'arbre-volant  $v$  se réduisent respectivement aux couples  $C_c \vec{x}_v$  et  $C_{mv} \vec{x}_v$ .

## Analyse et optimisation du comportement l'unité de pilotage

Le schéma-blocs retenu est celui de la Figure 3 où le retour est unitaire. On note  $\varepsilon_{\theta_v}(t)$  l'écart entre la consigne et l'angle obtenu, et  $\varepsilon_{C_v}(t)$  le couple résultant des couples  $C_c$  et  $C_{mv}$ .

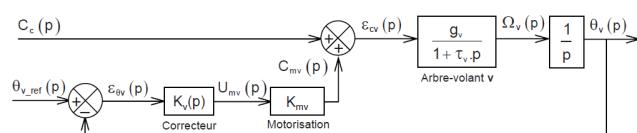


FIGURE 3 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage

En considérant que la dynamique électromécanique du moteur seul est négligeable devant celle de l'arbre-volant, on adopte pour la motorisation constituée du moteur à courant continu et de son électronique de commande, comportant notamment une boucle de courant, un modèle sous la forme d'un gain pur. On lui associe le gain  $K_{mv}$ .

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes :  $g_v = 5 \text{ rad s}^{-1} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ;  $\tau_v = 0,1 \text{ s}$  et  $K_{mv} = 0,4 \text{ N m V}^{-1}$ .

## Correction proportionnelle intégrale

On choisit un correcteur proportionnel intégral (PI) tel que  $K_v(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$  avec  $\tau_i = \alpha \tau_v$ .

**Question 1** Quelles sont les conséquences de la mise en œuvre d'un tel correcteur pour le système, en termes de stabilité?

**Question 2** Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte  $FTBO_{v1}(p)$  du système corrigé, avec le correcteur PI, telle que  $\theta_v(p) = FTBO_{v1}(p)\epsilon_{\theta_v}(p)$  sous la forme  $FTBO_{v1}(p) = K_{BOv1} \frac{1}{p^2} H(p)$  pour laquelle on précisera les expressions de  $K_{BOv1}$  et de  $H(p)$  avec  $H(p)$  de gain statique unitaire. Déduire de cette expression, en le justifiant, si  $\alpha$  doit être supérieur ou inférieur à 1 pour que le système puisse être stabilisé (on pourra donner l'allure du diagramme de phase en fonction de la valeur de  $\alpha$ ).

On commence par choisir  $\tau_i$  en prenant  $\alpha = 10$  et on cherche à optimiser  $K_i$ .

$$\text{On donne } \epsilon_{\theta_v}(p) = \frac{\theta_{v\_ref}(p)}{1 + FTBO_{v1}(p)} - \frac{g_v}{p(1 + \tau_v p)} \cdot \frac{C_C(p)}{1 + FTBO_{v1}(p)}.$$

**Question 3** Quelle doit être la valeur minimale de  $K_i$  pour que les critères de précision soient satisfaits ?

On donne Figure 9 le tracé du lieu de transfert de la  $FTBO_{v1}(p)$  dans le plan de Bode, pour  $K_i = 0,5 \text{ V rad}^{-1}$ .

**Question 4** Tracer sur le lieu de transfert de la  $FTBO_{v1}(p)$ , les diagrammes asymptotiques dans le plan de Bode. On justifiera rapidement les valeurs particulières de pentes, de pulsations, de gains et de phases.

**Question 5** Donner, par lecture du lieu de transfert de la  $FTBO_{v1}(p)$ , la valeur de  $K_i$  qui permet d'obtenir la valeur minimale de la marge de phase exigée par le cahier des charges. On donnera cette valeur pour la pulsation la plus haute dont on précisera la valeur.

On note :

- $\varphi(\omega)$  la phase de  $H(p)$ , soit  $\text{Arg}[H(j\omega)]$ ;
- $\omega_\ell$  la plus grande pulsation qui vérifie  $\varphi(\omega = \omega_\ell) = 45^\circ$ .

On donne (Figure 4) l'évolution de cette pulsation  $\omega_\ell$  en fonction de  $\alpha$  et un abaque qui représente la valeur maximale  $\varphi_m$  de  $\varphi(\omega)$  en fonction de  $\alpha$ .

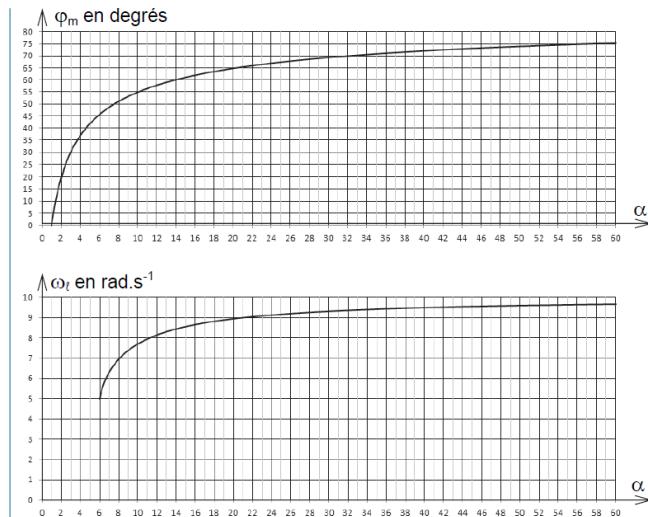


FIGURE 4 – Aboques de réglage de  $H(p)$  en fréquentiel

**Question 6** Peut-on obtenir la valeur minimale de la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte,  $\omega_0$ , fixée au cahier des charges en modifiant la valeur de  $\alpha$  et/ou  $K_i$ ? On pourra s'aider des abaques fournis (Figure 4) pour justifier la réponse.

On donne (Figure 5), en réponse à un échelon en boucle fermée, les abaques du temps de réponse à 5% et du 1<sup>er</sup> dépassement en % de la valeur finale, en fonction de  $K_i$  et pour  $\alpha = 10$ .

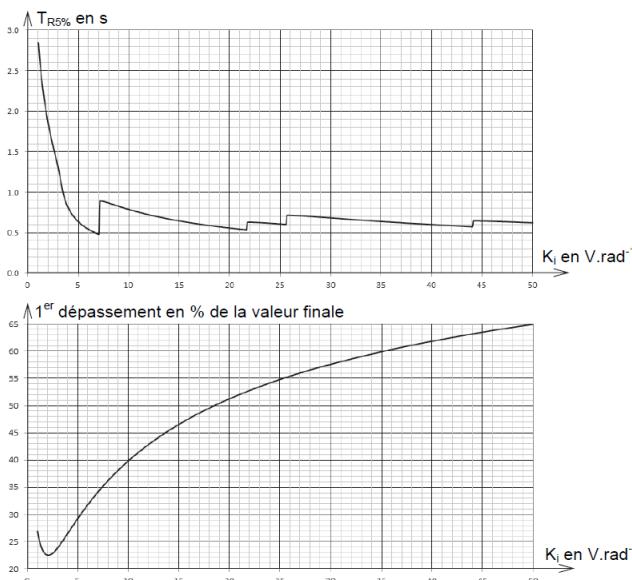


FIGURE 5 – Aboques de réglage en temporel de l'unité de pilotage corrigée

**Question 7** Conclure sur les capacités de cette correction à satisfaire les critères de l'exigence Id 1-3.3 en représentant chaque critère. On rappelle que l'on a choisi  $\alpha = 10$ .

## Correction proportionnelle intégrale et retour tachymétrique

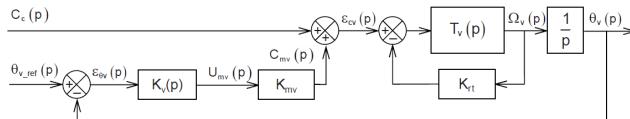


FIGURE 6 – Schéma-blocs de l'unité de pilotage avec retour tachymétrique

**Question 8** Au vu des conclusions de la question précédente, donner deux arguments qui précisent l'objectif poursuivi par la mise en œuvre d'une telle correction.

**Question 9** Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée  $T_{vrt}(p)$  définie par  $\Omega_v(p) = T_{vrt}(p)\epsilon_{cv}(p)$  en fonction de  $T_v(p)$  et  $K_{rt}$ . Mettre alors  $T_{vrt}(p)$  sous la forme  $T_{vrt}(p) = T_v(p)\beta \frac{1 + \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$  pour laquelle, on précisera l'expression de  $\beta$  en fonction de  $K_{rt}$  et du gain statique  $g_v$ .

**Question 10** Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte  $FTBO_{v2}(p)$ , telle que,  $\theta_v(p) = FTBO_{v2}(p)\epsilon_{\theta_v}(p)$ , peut ainsi se mettre sous la forme  $FTBO_{v2}(p) = K_{BOv2} \frac{1}{p^2} \frac{1 + \alpha \tau_v p}{1 + \beta \tau_v p}$  pour laquelle on donnera l'expression de  $K_{BOv2}$  en fonction de  $K_{mv}$ ,  $g_v$ ,  $\tau_v$ ,  $K_i$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

On donne sur la Figure 10 le tracé du lieu de transfert de la  $FTBO_{v2}(p)$  dans le plan de Bode, pour  $K_i = 1,2 \text{ Vrad}^{-1}$  (valeur évitant des calculs trop longs), réglé avec  $\beta = 1/6$  (non justifié) et pour  $\alpha = 10$  (valeur choisie précédemment).

**Question 11** Justifier que  $\beta$  doit être inférieur à 1 pour que la correction par retour tachymétrique soit efficace vis-à-vis du critère de pulsation de coupure à 0 dB.

On donne (Figure 7), pour le système en boucle fermée et non perturbé (couple conducteur nul), les abaques du temps de réponse à 5% et du premier dépassement en réponse à un échelon d'angle  $\theta_{v\_ref}$ , en fonction de la marge de phase du système, réglé avec  $\beta = 1/6$ .

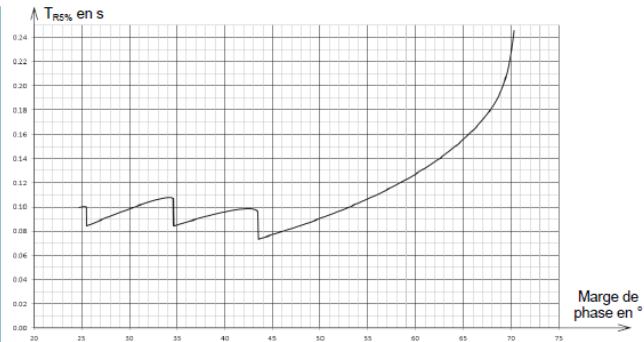


FIGURE 7 – Abaques de réglage en temporel de l'unité de pilotage corrigée avec retour tachymétrique

**Question 12** Donner par lecture des abaques (Figure 7), la valeur de la marge de phase la plus grande, permettant de satisfaire les deux critères de temps de réponse et de dépassement.

**Question 13** Déterminer par lecture du lieu de transfert dans le plan de Bode de  $FTBO_{v2}(p)$ , tracé dans les conditions de la question 11, la valeur de  $K_i$  permettant d'obtenir la marge de phase trouvée à la question précédente.

**Question 14** Faire une synthèse argumentée de la démarche proposée dans cette partie, pour optimiser le comportement de l'unité de pilotage. Conclure, en reprenant chaque critère de l'exigence Id 1-3.3, sur la satisfaction du cahier des charges

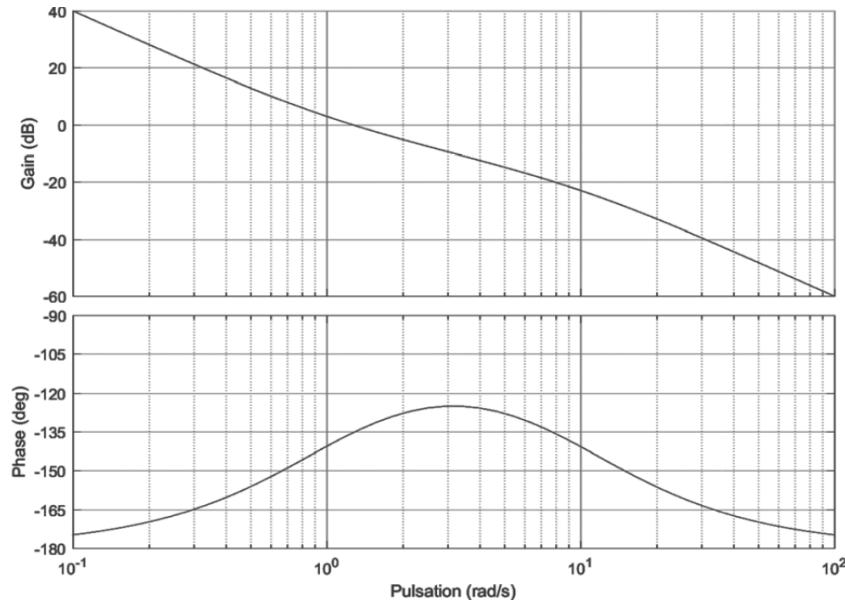
**Question 15** Avec le réglage établi par le modèle, quel phénomène pourrait endommager certains composants du système réel? Quelle disposition technologique permettrait d'éviter ce phénomène? Quelles en seraient les conséquences sur les performances du système?

Éléments de corrigé :

- 1.
2.  $K_{BOv1} = \frac{K_i K_{mv} g_v}{\alpha \tau_v}$  et  $H(p) = \frac{1 + \alpha \tau_v p}{1 + \tau_v p}$ ,  $\alpha > 1$ .
3.  $K_i \geq 10\alpha \frac{\tau_v}{K_{mv}}$  et  $K_i \geq 25 \text{ Vrad}^{-1}$ .
- 4.
5.  $K_i = 5 \text{ Vrad}^{-1}$ .
- 6.
- 7.
- 8.
9.  $\beta = \frac{1}{1 + K_{rt} g_v}$
10.  $K_{BOv2} = \frac{K_i K_{mv} \beta g_v}{\alpha \tau_v}$ .
- 11.
12.  $M_\varphi = 58^\circ$ .
13.  $K_i = 120 \text{ Vrad}^{-1}$ .
- 14.
- 15.

Exigence	Critères	Niveaux	Flexibilité
<b>Id 1-3.3 – Le système doit fournir au conducteur un retour d'effort qui optimise le confort et la sécurité.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>1- Pulsion de coupure à 0dB en boucle ouverte <math>\omega_0</math></li> <li>2- Temps de réponse à 5% (boucle fermée)</li> <li>3- Erreur statique en réponse à une consigne d'angle                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- pour une consigne en échelon</li> <li>- pour une consigne en rampe de pente <math>\Omega_{v0}</math></li> </ul> </li> <li>4- Erreur statique en réponse à une perturbation de couple                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- pour une perturbation en échelon</li> <li>- pour une perturbation en rampe de pente <math>C_{c0}</math></li> </ul> </li> <li>5- Stabilité                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- Marge de phase</li> <li>- Marge de gain</li> </ul> </li> <li>6- Amortissement                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- 1<sup>er</sup> dépassement en réponse indicielle (boucle fermée)</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>30 rad/s (<math>\approx 5</math> Hz)</li> <li>0,1 s</li> <li>nulle</li> <li><math>\leq 0,5\%</math> de <math>\Omega_{v0}</math></li> <li>nulle</li> <li><math>\leq 10\%</math> de <math>C_{c0}</math></li> <li>45°</li> <li>20 dB</li> <li>0%</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>mini</li> <li><math>\pm 20</math> ms</li> <li>aucune</li> <li><math>\pm 0,2\%</math></li> <li>aucune</li> <li><math>\pm 5\%</math></li> <li>mini</li> <li>mini</li> <li>15% maxi</li> </ul>

FIGURE 8 – Exigences


 FIGURE 9 – Lieu de transfert de  $FTBO_{v1}(p)$

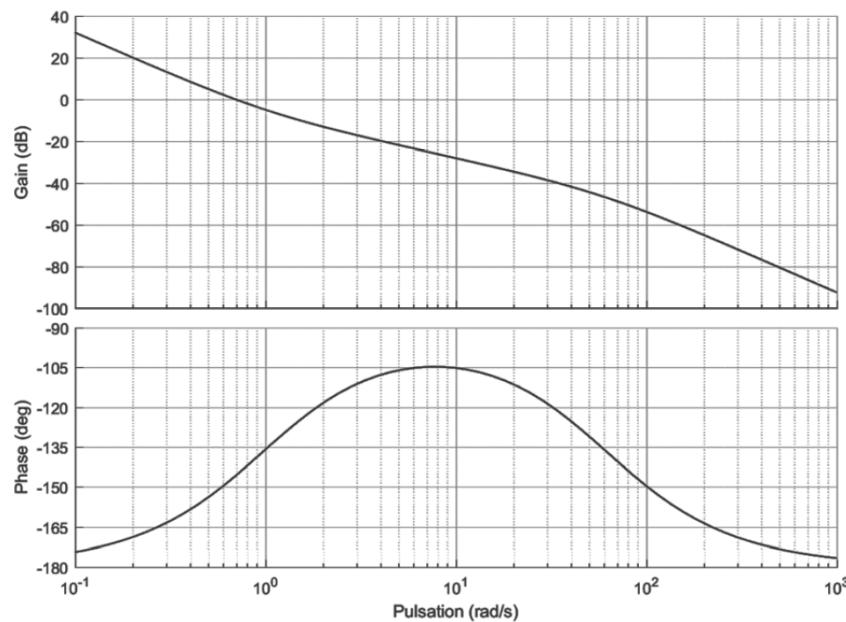
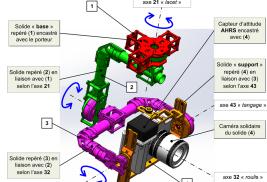


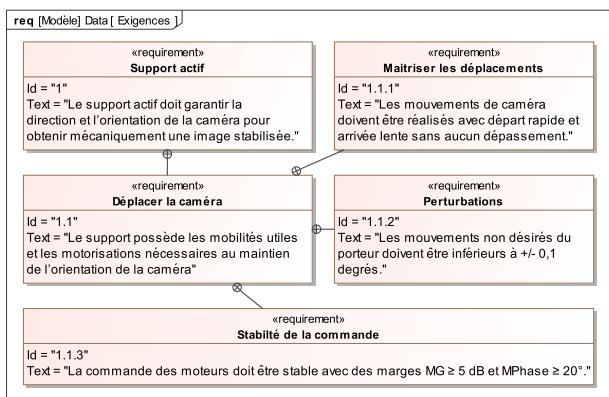
FIGURE 10 – Lieu de transfert de FTBO<sub>v2</sub>( $p$ )

## TD 02



## Mise en situation

On s'intéresse à une nacelle active de caméra. Ce système de stabilisation, nommé CAM-GYR, permet de s'assurer que quelque soit l'orientation du porteur (caméraman), l'axe vertical de la caméra et toujours parallèle à la direction de la pesanteur. Le système est équipé de 3 moteurs permettant d'ajuster le roulis, le tangage et le lacet. On s'intéresse ici uniquement à la stabilisation de l'axe de tangage.



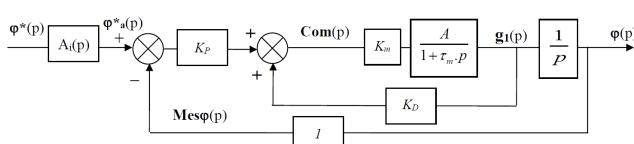
**Objectif** Vérifier l'exigence 1.1 « déplacer la caméra ».

## Travail demandé

On considère un modèle de l'axe de tangage sans perturbation et qui reçoit des consignes assez rapides modélisées par des échelons. L'ensemble {moteur, charge} ne présente pas de réducteur. Il est modélisé par un ensemble en série de deux fonctions de transfert :

- un gain pur de valeur  $K_m$  ;
- une fonction de transfert du premier ordre de gain statique  $A$  et de constante de temps  $\tau_m$ .

Cet ensemble présente comme entrée la commande du moteur  $com(t)$  et comme sortie la vitesse angulaire de rotation du moteur  $\omega_m(t)$ . Le réglage retenu est tel que  $K_m A = 1$ . **Le retour  $K_D$  agit par un sommateur.** Dans cette étude,  $A_i(p) = 1$ .



## Stabilisateur actif d'image

Mines Ponts 2018 – PSI

## Savoirs et compétences :

- Mod2.C7.SF2 : déterminer les fonctions de transfert;
- Res2.C5 : stabilité des SLCI : équation caractéristique;
- Res2.C7 : stabilité des SLCI : marges de stabilité (de gain et de phase).

## Modèle 1 de l'axe de tangage

**Question 1** Avec  $K_m A = 1$ , calculer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) et la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du schéma (modèle 1).

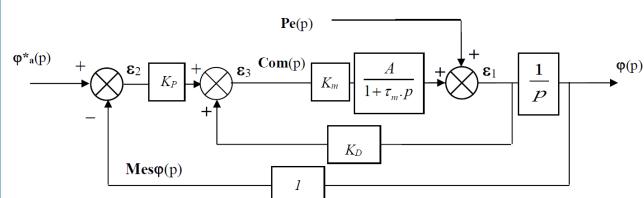
Dans un premier temps en mode pilotage, on s'intéresse au comportement de l'axe de tangage sans le filtre passe bas :  $A_1(p) = 1$ .

**Question 2** Quelle est la valeur maximale de  $K_D$  pour que la commande de l'axe de tangage soit strictement stable? Préciser le(s) critère(s) de stabilité appliqué(s).

En accord avec les résultats précédents, on fixe  $K_D = 0,5$  et  $\tau_m = 0,2$ s. Dans un premier temps on impose  $K_P = 10 \text{ s}^{-1}$ .

**Question 3** Lorsque  $A_i(p) = 1$ , le comportement est-il compatible avec l'exigence 1.1.1 « Maîtriser les déplacements » ?

Dans un second temps on se place en mode stabilisation. On s'intéresse toujours au comportement de l'axe de tangage mais sans le filtre passe bas ( $A_1(p) = 1$ ). On considère ici que la consigne est constante donc  $\varphi_a^*(t) = 0$ . Une perturbation  $Pe(p)$  agit au niveau de l'ensemble (moteur, charge) modélisée sur le schéma bloc (Modèle 2). On appelle  $Com(p)$  la transformée de Laplace de la commande du moteur  $com(t)$ .



## Modèle 2 de l'axe de tangage

**Question 4** Avec le « modèle 2 » calculer la fonction de transfert  $Stab(p) = \frac{Com(p)}{Pe(p)}$  qui lie la commande à la perturbation.

**Question 5** Avec le modèle 2 et une entrée  $Pe(p)$  échelon unitaire, déterminer la limite quand  $t$  tend vers

*l'infini de la commande :  $com(t)$ . Quel sens physique donner à ce résultat ?*

**Question 6** Avec le modèle 2 déterminer la FTBO  $Mes\varphi(p) / \varepsilon_2(p)$  de ce schéma puis calculer la fonction de transfert

$$liant la perturbation et la sortie Pert(p) = \frac{\varphi(p)}{P\theta(p)}.$$

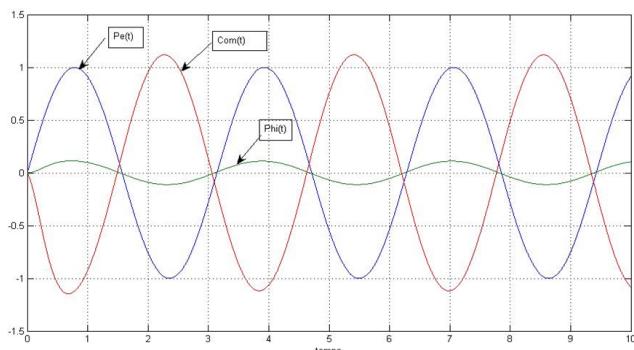
**Question 7** Déterminer la valeur lorsque  $t$  tend vers l'infini de la réponse temporelle de ce système à une perturbation de type échelon unitaire. Quel sens physique donner à ce résultat ?

**Question 8** On désire une marge de gain de  $M_G \geq 5$  dB et une marge de phase  $M\varphi \geq 20^\circ$  (exigence 1.1.3 « Stabilité de la commande »). Déterminer la valeur maximale de  $K_P$  en utilisant les données ci-dessous.

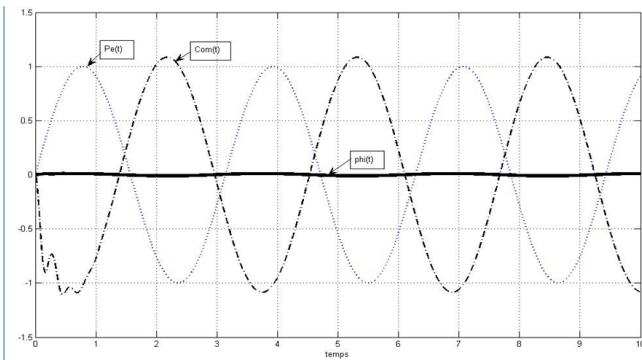
$$\text{On note } F(\omega) = \frac{2}{j\omega(1 + 0,4j\omega)}.$$

$\omega$ (rad/s)	1	2,5	5	7	10
$\text{Arg}(F(\omega))$	-112°	-135°	-153°	-160°	-166°
$20\log F(\omega) $	5,4 dB	3 dB	-1 dB	-3 dB	-6,2 dB

Le figure suivante présente la réponse temporelle de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale (due par exemple au vent qui crée un balancement de la GYRCAM) (ordonnée en degrés).



**Question 9** Analyser ce tracé par rapport à l'exigence 1.1.2 « Perturbations » et justifier le tracé de  $Com(t)$  relativement à  $Pert(t)$  en utilisant le résultat de la question 5. Afin d'améliorer le comportement, un autre réglage a été effectué (voir figure suivante).



**Question 10** Analyser comparativement ce nouveau tracé.

## Synthèse

**Question 11** En utilisant la figure suivante, faire le bilan des travaux réalisés. Quel bilan faire au vu des écarts observés entre les performances obtenues et les performances modélisées.

