

DS 1



Robot delta 2 axes de transfert dans une chaîne

Centrale Supélec – TSI 2020

1 Présentation du système

L'étude concerne un robot de type « delta 2 axes » utilisé dans une usine de conditionnement de produits agroalimentaires. Ce robot est destiné à remplacer un robot de type cartésien (mouvement vertical et horizontal) utilisé pour un transfert rapide de produits emballés entre 2 tapis roulants. Plusieurs modèles de ce type de robot sont commercialisés. L'étude porte sur celui présenté sur la figure 1.

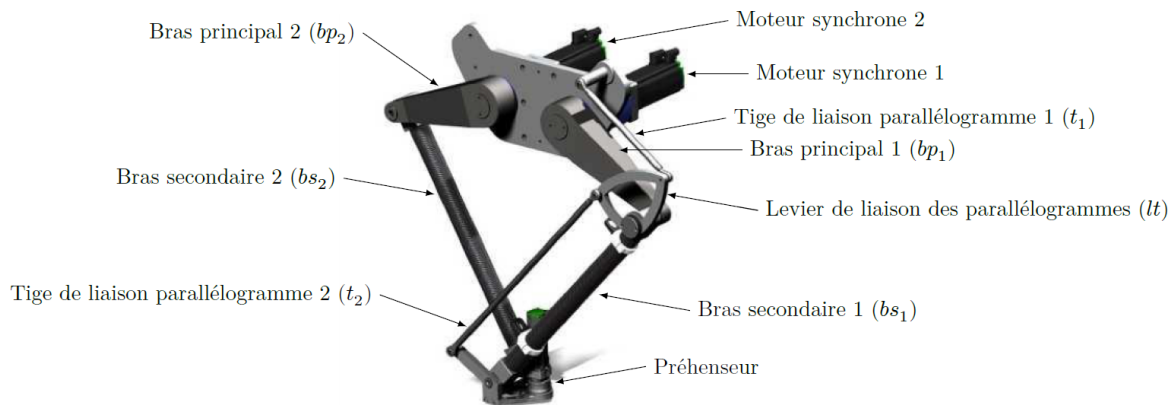


FIGURE 1 – Robot delta 2 axes

Le robot est mis en mouvement par deux moteurs synchrones à aimants permanents (figures 1 et 2). Chaque moteur entraîne un bras principal par l'intermédiaire d'un réducteur à train épicycloïdal. Les deux bras principaux bp_1 et bp_2 sont en liaison pivot avec deux bras secondaires bs_1 et bs_2 . Les deux bras secondaires (figure 3) sont en liaison pivot avec le préhenseur. Un système à double parallélogramme permet de maintenir l'objet déplacé dans un plan parallèle au sol. Les moteurs sont alimentés par des variateurs de vitesse dont les consignes de vitesse sont issues d'une unité centrale de traitement.

Un codeur de position solidaire de l'axe moteur est utilisé pour le fonctionnement en mode synchrone autopiloté. La position angulaire de chaque axe moteur est transmise à l'unité centrale par les variateurs. L'exigence sur la précision de dépose entre les deux tapis roulants n'est pas très élevée (± 5 mm). En aval du tapis roulant sur lequel sont transférés les produits emballés se trouve un système d'impression. Afin de respecter une bonne qualité d'impression pour chaque série identique de produits emballés, une exigence plus élevée est requise pour la répétabilité du positionnement ($\pm 0,1$ mm). Ce robot doit remplir plusieurs exigences :

- « garantir le mouvement de translation », ce qui nécessite de dimensionner les moteurs synchrones du robot en vitesse et en couple pour un mouvement donné ;
- « fournir l'énergie électrique aux moteurs » afin que la source d'énergie alimentant l'ensemble des motovariateurs permette le déplacement de la charge à soulever par le robot ;
- « assurer une pose précise » en élaborant un programme de calcul d'incertitude de positionnement du préhenseur à partir de la connaissance de la précision de positionnement angulaire des moteurs ;
- « gérer le mouvement » en déterminant les paramètres de réglage de la commande asservie des moteurs permettant d'assurer le déplacement requis.

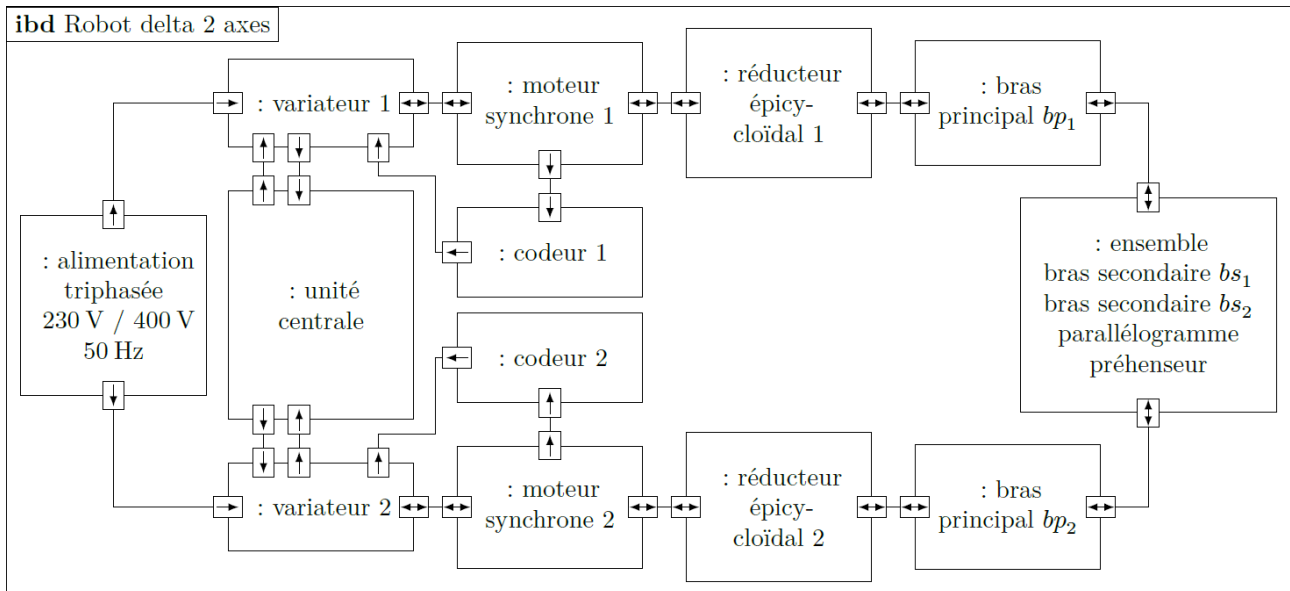


FIGURE 2 – Diagramme de blocs internes partiel

2 Exigence fonctionnelle « garantir le mouvement de translation »

Objectif Proposer un modèle de connaissance des éléments réalisant l'exigence fonctionnelle « assurer le mouvement de translation » puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges (tableau 1).

Exigence	Critères d'appréciation	Niveau
Garantir le mouvement de translation	Masse de la charge déplacée	30 kg
	Vitesse maximale du déplacement de la charge par rapport au sol	2 m·s ⁻¹
	Durée de la phase d'accélération ou de la phase de décélération	0,1 s

Tableau 1 – Extrait du cahier des charges associé à l'exigence « garantir le mouvement de translation »

2.1 Élaboration du modèle articulaire inverse

Objectif Élaborer la commande des moteurs à partir d'un mouvement défini dans l'espace opérationnel puis converti dans l'espace articulaire.

Le schéma cinématique du robot est présenté figure 3. Un système à double parallélogramme permet de maintenir l'objet déplacé dans un plan parallèle au sol. Pour la suite de l'étude, le schéma cinématique simplifié sera utilisé.

Hypothèse

Le référentiel lié au repère $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est galiléen et est fixe par rapport à la terre.

Données

- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta_{10}, (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \theta_{20}, (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = \theta_{30}, (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = \theta_{40};$
- $\vec{OA} = a \vec{x}_0, \vec{OC} = -a \vec{x}_0, \vec{AB} = b \vec{x}_1, \vec{CD} = b \vec{x}_2, \vec{BE} = c \vec{x}_3, \vec{DE} = c \vec{x}_4;$
- $a = 150 \text{ mm}, b = 400 \text{ mm}, c = 850 \text{ mm}.$

Question 1 Déterminer littéralement (x_E, y_E) , les composantes du vecteur \vec{OE} correspondant à la position du point E appartenant à l'effecteur par rapport à \mathcal{R}_0 , en fonction des coordonnées articulaires et θ_{10} et θ_{30} et des paramètres dimensionnels a, b et c . Exprimer ces coordonnées opérationnelles dans le repère \mathcal{R}_0 .

Nous allons maintenant déterminer les coordonnées articulaires θ_{10} et θ_{30} en fonction des longueurs x_E, y_E, a, b et c .

Question 2 À partir des deux relations scalaires trouvées à la question 1, provenant du modèle géométrique direct, établir une équation de la forme $A \cos \theta_{10} + B \sin \theta_{10} = C$. On explicitera les A, B et C .

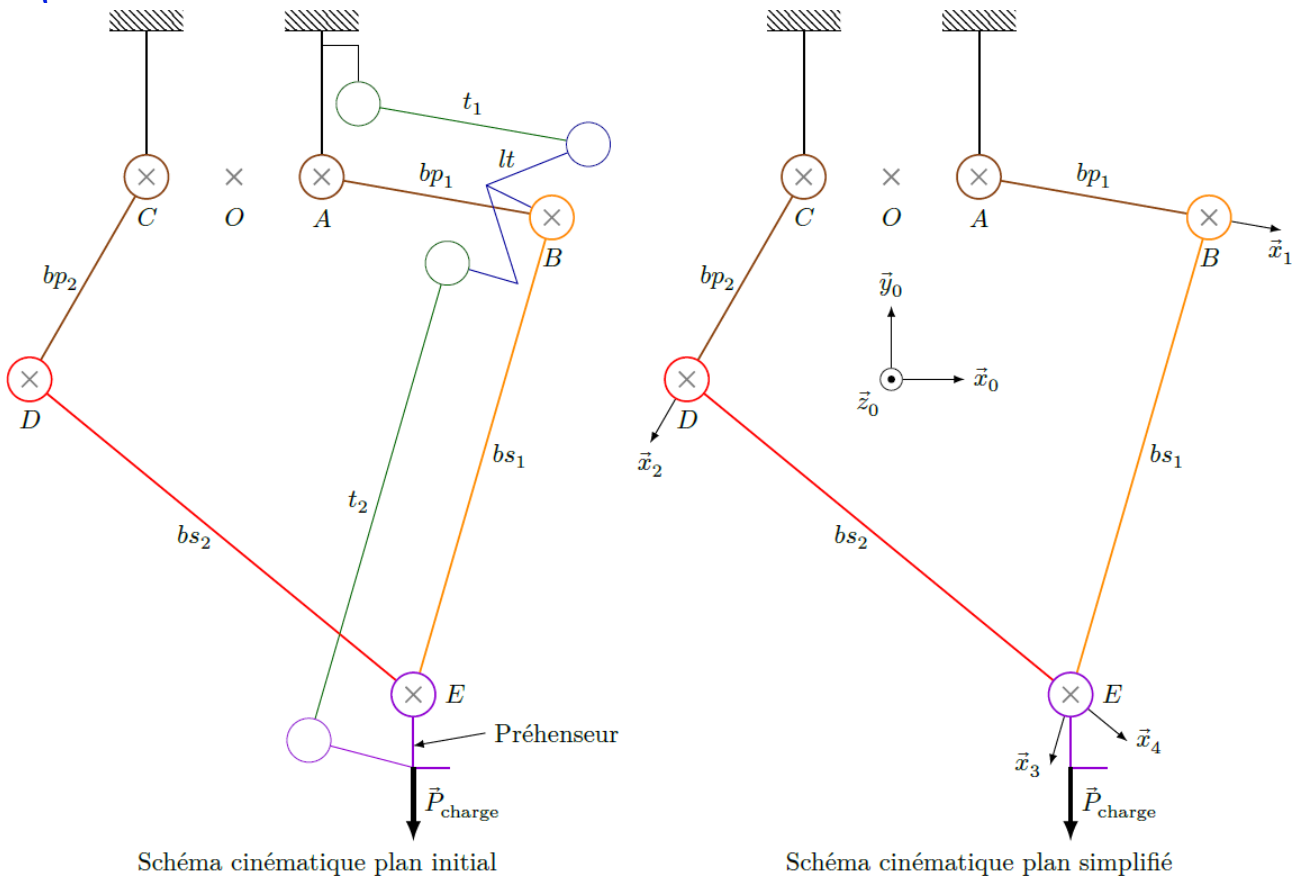


FIGURE 3 – Schémas cinématiques

Question 3 Montrer alors qu'il est possible, en posant un angle φ tel que $\tan \varphi = \frac{A}{B}$, d'écrire cette équation sous la forme $\sin(\theta_{10} + \varphi) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Question 4 Exprimer θ_{10} en fonction des coefficients A , B et C puis en fonction des grandeurs du texte.

Question 5 Déterminer l'expression de θ_{30} à partir d'une des deux relations trouvées à la question 1.
Une étude similaire permet d'établir également les expressions des coordonnées articulaires θ_{20} et θ_{40} .

2.2 Élaboration du modèle dynamique

Objectif Dimensionner les moteurs du robot. Ces calculs visent à déterminer l'équation dynamique qui permet d'obtenir le couple moteur minimal en fonction de la masse de la charge à soulever.

Hypothèses

- L'étude est modélisable dans le plan.
- Toutes les liaisons sont parfaites (au sens énergétique) donc sans jeu ni frottement.
- Les inerties et les masses des pièces sont négligées, sauf la masse m de la charge à soulever et l'inertie du rotor du moteur autour de son axe de rotation notée J_m .

Les différentes actions mécaniques sont : $\{\mathcal{T}(\text{réducteur 1} \rightarrow bp_1)\} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{0} \\ C_1 \vec{z}_0 \end{pmatrix} \right\}_A$, $\{\mathcal{T}(\text{pesanteur} \rightarrow \text{charge})\} = \left\{ \begin{pmatrix} -mg \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \right\}_E$, $\{\mathcal{T}(bs_1 \rightarrow \text{préhenseur})\} = \left\{ \begin{pmatrix} T_{bs_1} \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \right\}_E$, $\{\mathcal{T}(bs_2 \rightarrow \text{préhenseur})\} = \left\{ \begin{pmatrix} T_{bs_2} \vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \right\}_E$ et en notant $\vec{a} = a_x \vec{x}_0 + a_y \vec{y}_0$ le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(\text{charge}/\mathcal{R}_0)\} = \left\{ \begin{pmatrix} m \vec{a} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \right\}_E$.

Données

- Accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \vec{y}_0$ avec $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.
- Vitesse maximale de la charge par rapport au sol $v = 2 \text{ m s}^{-1}$ atteinte en $0,1 \text{ s}$.

- Charge maximale déplacée $m = 30 \text{ kg}$.

Question 6 Justifier rigoureusement la forme du torseur $\{\mathcal{T}(bs_1 \rightarrow \text{préhenseur})\}$.

Question 7 Proposer une stratégie (isolement, bilan des actions mécaniques, équation(s) à écrire) permettant d'exprimer l'effort T_{bs_1} en fonction de la masse m , de l'accélération de la pesanteur g , des composantes a_x et a_y de l'accélération \vec{a} et des coordonnées articulaires θ_{30} et θ_{40} .

Question 8 En isolant le préhenseur, exprimer l'effort T_{bs_1} en fonction de la masse m , de l'accélération de la pesanteur g , des composantes a_x et a_y de l'accélération \vec{a} et des coordonnées articulaires θ_{30} et θ_{40} .

Question 9 En déduire l'expression du couple C_1 en fonction de T_{bs_1} , de b , et des coordonnées articulaires θ_{10} et θ_{30} .

Question 10 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble motoréducteur, déterminer le couple moteur C_{m_1} en fonction de l'inertie J_m , de l'accélération angulaire $\frac{d\omega_{m_1}}{dt}$, de C_1 et du rapport de réduction noté r_{ed} .

Le mouvement du point E a été simulé à l'aide d'un logiciel de simulation multiphysique. Les différentes étapes d'un cycle de dépose et de pose sont les suivantes :

- déplacement vertical vers le haut d'une distance de 300 mm avec une valeur initiale de l'angle θ_{10} égale à 0° ;
- translation vers la gauche d'une distance de 1100 mm ;
- déplacement vertical vers le bas d'une distance de 300 mm.

Chacune de ces étapes est effectuée avec une vitesse de forme trapézoïdale avec les valeurs suivantes :

- vitesse maximale de la charge par rapport au sol de 2 m s^{-1} ;
- durée de la phase d'accélération ou de la phase de décélération de 0,1 s.

La figure 4 représente la vitesse angulaire ω_{m_1} et le couple C_{m_1} du moteur synchrone 1 en fonction du temps, pour une charge $m = 30 \text{ kg}$.

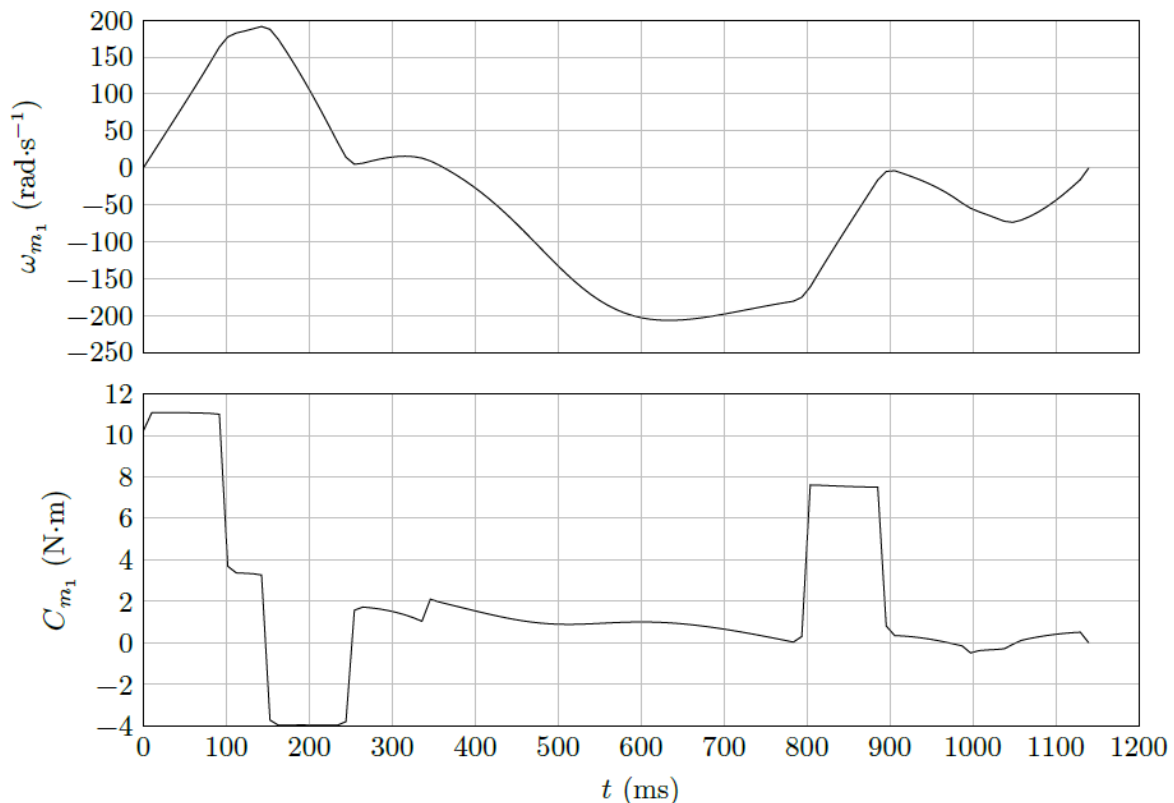


FIGURE 4 – Vitesse angulaire et couple du moteur synchrone 1

Les caractéristiques mécaniques de chaque ensemble motoréducteur sont les suivantes :

- couple nominal du moteur $C_{\text{nom}} = 6,37 \text{ N m}^{-1}$;
- couple maximal du moteur $C_{\text{max}} = 19,1 \text{ N m}^{-1}$;
- vitesse nominale du moteur $N_{\text{nom}} = 3000 \text{ tr min}^{-1}$;
- vitesse maximale du moteur $N_{\text{max}} = 6000 \text{ tr min}^{-1}$;
- inertie de l'ensemble motoréducteur autour de l'axe de rotation du moteur $J_m = 5 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$;
- rapport de réduction $r_{ed} = 35$.

Question 11 En utilisant la courbe de la vitesse angulaire ω_{m_1} en fonction du temps de la figure 4, déterminer la valeur numérique de l'accélération angulaire $\dot{\omega}_{m_1}$ dans la phase d'accélération du mouvement vertical vers le haut.

Question 12 En exploitant les relations précédemment établies, calculer numériquement la valeur du couple C_{m_1} dans la phase d'accélération du mouvement vertical vers le haut, lorsque $\theta_{10} = 0^\circ$, $\theta_{20} = -90^\circ$, $\theta_{30} = -90^\circ$ et $\theta_{40} = -32^\circ$.

La valeur du couple efficace $\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T C_{m_1}^2 dt}$ est égale à 4,23 N m sur le cycle de pose et de dépose.

Question 13 Justifier le choix du moteur.

3 Exigence fonctionnelle « assurer une pose précise »

Objectif Élaborer un programme de calcul d'incertitude de positionnement du préhenseur connaissant la précision de positionnement angulaire des moteurs, puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges (Table 1).

Exigence	Critères d'appréciation	Niveau
Assurer une pose précise	Précision de dépose d'un produit	± 5 mm
	Répétabilité de positionnement d'un produit	$\pm 0,1$ mm

TABLE 1 – Extrait du cahier des charges associé à l'exigence « Assurer une pose précise »

Le modèle géométrique direct donnant la position du point E dans le repère \mathcal{R}_0 en fonction des angles θ_{10} et θ_{20} a été établi. La précision de positionnement horizontal est définie par : $dx_E = \frac{\partial x_E}{\partial \theta_{10}} d\theta_{10} + \frac{\partial x_E}{\partial \theta_{20}} d\theta_{20}$.

Le programme Python en annexe (fin du sujet) a pour objectif de tracer dx_E en fonction de x_E , pour les erreurs angulaires $d\theta_{10}$ et $d\theta_{20}$, pour différentes valeurs de $d\theta_{10}$ et de $d\theta_{20}$. Pour déterminer une valeur approchée de $\frac{\partial x_E}{\partial \theta_{10}}$ et de $\frac{\partial x_E}{\partial \theta_{20}}$, on utilisera l'approximation $f'(x) \simeq \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$.

Question 14 Compléter le programme (sur votre copie) de façon à calculer le vecteur dx_E représentant les valeurs de dx_E en fonction de x_E . On pourra introduire les vecteurs $dx_{E\text{sur}d\theta_{10}}$ et $dx_{E\text{sur}d\theta_{20}}$ représentant les dérivées partielles de x_E par rapport à θ_{10} et θ_{20} .

La Figure 5 présente le résultat de ce programme pour $d\theta_{10} = d\theta_{20} = 1^\circ$.

Question 15 Exploiter les courbes de la Figure 5 pour déterminer la résolution angulaire minimale des codeurs, placés au niveau des axes des moteurs, permettant de satisfaire l'exigence de répétabilité de positionnement ($\pm 0,1$ mm).

Question 16 En déduire le nombre minimal de points du codeur incrémental sachant que l'unité de comptage qui lui est associé exploite les fronts montants et descendants de ses deux voies.

Le réducteur présente une rigidité en torsion de 41 Nm par minute d'arc. Lors de la dépose de la charge, le couple en sortie du réducteur épicycloïdal 2 atteint 358 Nm et celui en sortie du réducteur épicycloïdal 1 est négligeable.

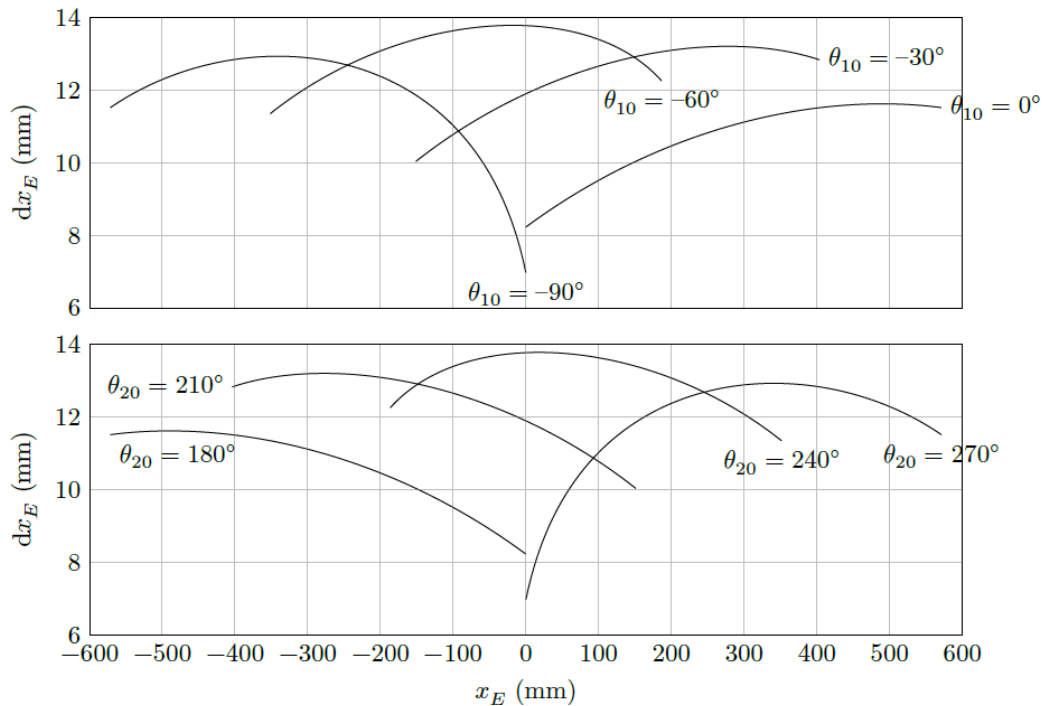


FIGURE 5 – dx_E en fonction de x_E pour différentes valeurs de θ_{10} et θ_{20}

En modifiant le programme pour n'afficher que l'influence de la variation de θ_{20} , on relève $dx_E = 6$ mm pour $d\theta_{20} = 1^\circ$ lors de la dépose de la charge.

Question 17 Déterminer l'erreur de positionnement lors de la dépose et conclure quant à l'exigence de précision requise dans ce cas.

4 Exigence fonctionnelle « gérer le mouvement »

Objectif Déterminer les réglages de la commande asservie des moteurs permettant d'assurer le déplacement requis du préhenseur puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges (Table 2).

Exigence	Critères d'appréciation	Niveau
Gérer le mouvement de chaque moteur	Précision en régime permanent de la boucle d'asservissement de position	
	Erreur de position	< 0,1 %
	Erreur de trainage	< 0,1 %
	Marge de phase φ_M	$40^\circ < \varphi_M < 50^\circ$

TABLE 2 – Extrait du cahier des charges associé à l'exigence « Gérer le mouvement »

Notations

$\theta_{m_1 c}(p)$	consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle $\theta_{m_1 c}(t)$ en rad)
$\theta_{m_1}(p)$	position de l'axe moteur (variable temporelle $\theta_{m_1}(t)$ en rad)
$\varepsilon(p)$	valeur numérique de l'écart de position (variable temporelle $\varepsilon(t)$)
$U_{c\Omega_{m_1}}(p)$	tension de commande du motovariateur 1 (variable temporelle $U_{c\Omega_{m_1}}(t)$ en V)
$\Omega_{m_1}(p)$	vitesse angulaire du moteur 1 (variable temporelle $\omega_{m_1}(p)$ en rad s^{-1})
$N_1(p)$	valeur numérique délivrée par le codeur 1 (variable temporelle $N_1(t)$)
K_1	gain de l'ensemble motovariateur (en $\text{rad s}^{-1} \text{V}^{-1}$)
τ	constante de temps de l'ensemble motovariateur (en s)
K_2	gain du codeur de position (en rad^{-1})
K_3	gain proportionnel de la boucle de position (en V)
K_4	gain de l'anticipation de vitesse (en $\text{V rad}^{-1} \text{s}$)

Données

- $\tau = 79,5 \mu\text{s}$;
- $K_1 : \omega_{m_1} = 629 \text{ rad s}^{-1}$ pour une tension de commande de 10 V;
- K_2 : codeur incrémental associé à une unité de comptage, délivrant 2^{17} points par tour (choix effectué par le constructeur du motovariateur).

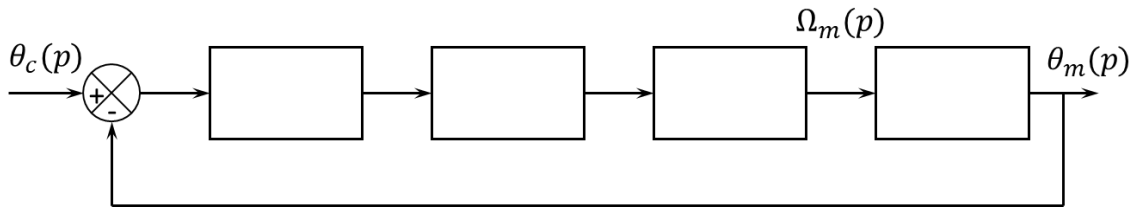
4.1 Modélisation préliminaire

Dans un premier temps, on cherche à asservir la position de l'axe moteur. On note $\theta_c(t)$ la consigne et $\theta_m(t)$ la position du moteur. Le motovariateur est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\omega_m(t) + \tau \frac{d\omega_m(t)}{dt} = K_1 u_c(t).$$

On a de plus $\varepsilon(t) = K_2(\theta_c(t) - \theta_m(t))$. L'écart est corrigé par un correcteur proportionnel : $u_c(t) = K_3 \varepsilon(t)$.

Question 18 Recopier et remplir le schéma-blocs associé à ce système d'équations.



Question 19 Calculer la fonction de transfert en boucle fermée $H(p) = \frac{\theta_m(p)}{\theta_c(p)}$. Mettre $H(p)$ sous forme canonique en explicitant les caractéristiques.

Question 20 Calculer la fonction de transfert en boucle ouverte $G(p) = \frac{\theta_m(p)}{\varepsilon(p)}$.

Question 21 Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $G(p)$ et de $\theta_c(p)$ et des constantes qui vous paraîtraient utiles.

Question 22 Calculer l'erreur statique.

Question 23 Calculer l'erreur de traînage.

Question 24 Déterminer les valeurs numériques de K_1 et de K_2 .

Question 25 Conclure. (On prendra $K_3 = 1$).

4.2 Modélisation incluant l'anticipation

Le variateur pilote le moteur en adoptant un algorithme de type commande vectorielle. De manière globale, le constructeur présente le motovariateur (ensemble composé du variateur et du moteur) comme un système du premier ordre avec une bande passante de 2000 Hz. Le modèle défini Figure 6 est adopté pour chaque moteur.

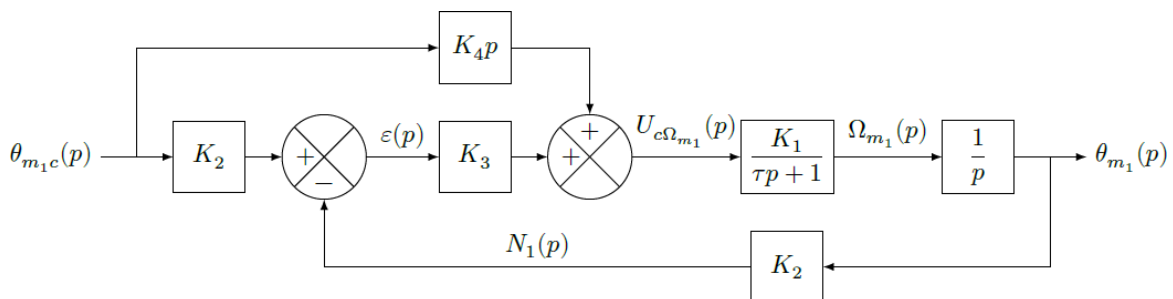


FIGURE 6 – Structure de commande du moteur 1

La stabilité de l'asservissement de position, en ne tenant pas compte du bloc d'anticipation $K_4 p$, conduit à l'analyse fréquentielle de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(j\omega) = K_3 \frac{K_1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \frac{1}{j\omega} K_2$ avec $\omega_0 = 2\pi \times 2000 \text{ rad s}^{-1}$.

On prendra $K_1 K_2 = 1 \times 10^6$ USI. (Unité SI définie précédemment).

Question 26 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de la boucle ouverte non corrigée ($K_3 = 1$) du système en justifiant le tracer (page en annexe à rendre à part).

Question 27 Déterminer successivement :

- la pulsation ω_φ pour laquelle le phase est de -135° ;
- le gain en dB pour $\omega = \omega_\varphi$;
- le gain K_3 à ajouter pour que le gain dB soit nul pour $\omega = \omega_\varphi$.

La valeur du gain K_3 déterminée précédemment conduit à des dépassements plus importants quand le bloc d'anticipation est présent.

Question 28 Déterminer le sens dans lequel doit évoluer la valeur du gain K_3 .

L'erreur représente la différence entre l'entrée $\theta_{m_1 c}(t)$ et la sortie $\theta_{m_1}(t)$ et est définie par la variable $\mu(t) = \theta_{m_1 c}(t) - \theta_{m_1}(t)$. La précision en régime permanent du système est définie par les deux paramètres :

- $\mu_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t)$ suite à une entrée de type échelon unité appelé erreur de position ;
- $\mu_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t)$ suite à une entrée de type rampe appelé erreur de trainage.

Question 29 Montrer que $\mu(p) = \theta_{m_1 c}(p) - \theta_{m_1}(p) = \frac{p(\tau p + 1 - K_1 K_4)}{p(\tau p + 1) + K_1 K_2 K_3} \theta_{m_1 c}(p)$.

Question 30 Déterminer de façon littérale l'erreur de position μ_p puis l'erreur de trainage μ_v . Conclure sur l'erreur de position au regard du cahier des charges.

Question 31 D'après l'erreur de trainage μ_v déterminée à la question précédente, calculer la valeur de K_4 qui permet de minimiser cette erreur de trainage. Conclure sur cette erreur au regard du cahier des charges.

5 Synthèse

Le robot d'origine de type cartésien (Figure 7) comprenait un chariot se déplaçant horizontalement entraîné par un motoréducteur à travers un ensemble poulie-courroie dentée. Ce chariot embarquait l'ensemble de la motorisation nécessaire pour le mouvement vertical.

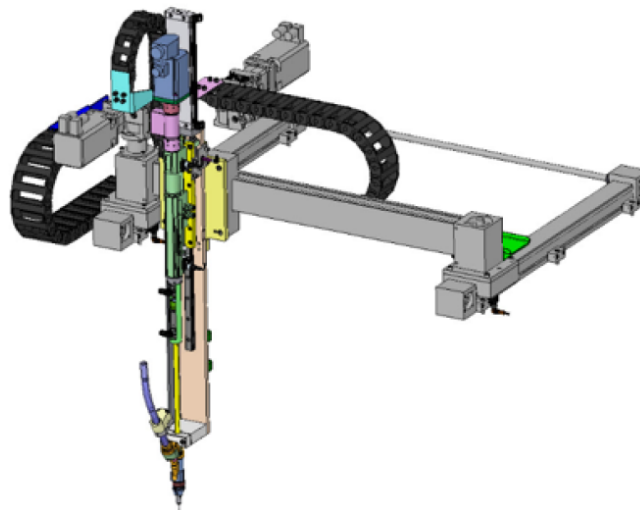


FIGURE 7 – Robot de type cartésien

Question 32 À l'aide d'un tableau, comparer les deux types de structures de robots (cartésien et delta) en citant les avantages et les inconvénients apportés par chacun d'eux du point de vue dynamique et du point de vue commande.

Annexe

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Paramètres géométriques (mm)
a, b, c = 150, 400, 850
# Paramètres de la simulation (deg)
theta10min = -90 ; theta10max = 0 ; dtheta10 = 1
theta20min = 180 ; theta20max = 270 ; dtheta20 = 1
# Valeurs de tracé (deg)
theta10trace = -90, -60, -30, 0
theta20trace = 180, 210, 240, 270
def MGD(theta10, theta20):
    """
    Calcul des coordonnées de E connaissant theta10 et theta20 (en radians).
    Un des deux paramètres peut être un vecteur, les résultats sont alors des
    vecteurs de même taille que le vecteur passé en paramètre.
    """
    xB = a + b * np.cos(theta10)
    yB = b * np.sin(theta10)
    xD = -a + b * np.cos(theta20)
    yD = b * np.sin(theta20)
    alpha = np.arctan2(yB - yD, xB - xD)
    DM = np.sqrt((xB - xD)**2 + (yB - yD)**2) / 2
    ME = np.sqrt(c**2 - DM**2)
    xE = xD + DM * np.cos(alpha) + ME * np.sin(alpha)
    yE = yD + DM * np.sin(alpha) - ME * np.cos(alpha)
    return xE, yE

# Présentation du graphique
fig, (axTheta10, axTheta20) = plt.subplots(2, 1, sharex=True)
axTheta10.set_title("paramètre_\\theta_{10}")
axTheta10.set_ylabel("$d_x E$ (mm)")
axTheta10.grid(True)
axTheta20.set_title("paramètre_\\theta_{20}")
axTheta20.set_xlabel("$x_E$ (mm)")
axTheta20.set_ylabel("$d_x E$ (mm)")
axTheta20.grid(True)
# Ajout des tracés à theta10 constant
theta20simu = np.radians(np.arange(theta20min - dtheta20, theta20max + 2*dtheta20, dtheta20))
for theta10 in theta10trace:
    xEinf, yEinf = MGD(np.radians(theta10 - dtheta10), theta20simu)
    xEmid, yEmid = MGD(np.radians(theta10), theta20simu)
    xEsup, yEsup = MGD(np.radians(theta10 + dtheta10), theta20simu)
    ##### Zone à compléter #####

    ##### Fin de zone #####
    axTheta10.plot(xEmid[1:-1], dxE)

# Ajout des tracés à theta20 constant
theta10simu = np.radians(np.arange(theta10min - dtheta10, theta10max + 2*dtheta10, dtheta10))
for theta20 in theta20trace:
    # . . .
    # non reproduit
    # . . .

plt.show()
```

