

TD 01

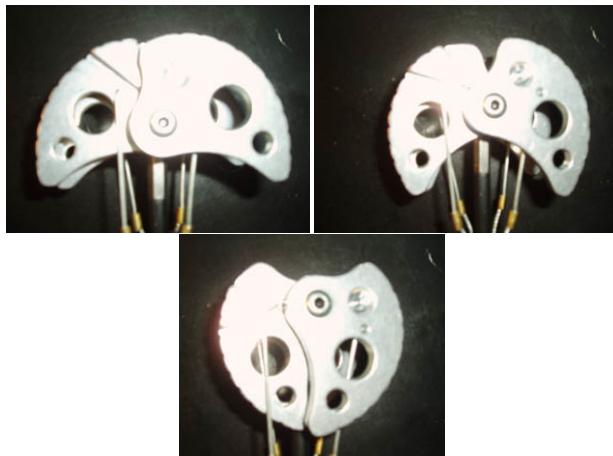


Coinceur d'escalade
Alain Passeron, Mathieu Nierenberger.

Savoirs et compétences :

Mise en situation

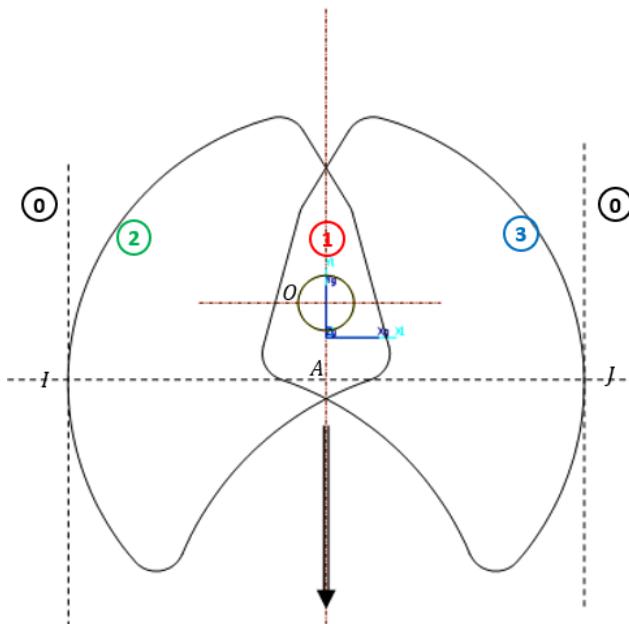
En escalade, en l'absence de points de liaison permanents (pitons, broches scellés...), l'assurage peut être complété par des coincideurs, qui se placent dans les fissures, et se bloquent sous le choc en cas de chute. C'est l'adhérence qui permet la retenue de la chute.



Il existe des coincideurs monoblocs, qui permettent un coinçement dans une fissure à bords convergents, mais les « friends » à came, articulés sont très supérieurs en cela qu'ils permettent une protection dans des fissures à bords parallèles. De plus, leur géométrie leur permet de s'adapter à des fissures de tailles différentes (par exemple de 55 à 90 mm pour un « flex no 4 »).

On se propose d'étudier les conditions de retenue d'un coincideur « Rock Empire Flex » schématisé ci dessous, en modélisation plane. Dans le cadre de ce modèle, on considère donc les 2 cames 2 et 3 en appui sur les parois supposées parallèles et en liaison pivot avec l'axe cylindrique 1. C'est sur cet axe qu'est accroché le grimpeur. On note α l'angle OIA supposé connu (en le mesurant).

Suite à une chute, la corde qui retient le grimpeur, exerce un effort de 10 kN sur le câble, donc sur l'axe du « friend ». Le contact avec le rocher (fissure à bords parallèles) s'effectue avec frottement.



Question 1 Réaliser un graphe de liaisons.

Question 2 Sur la figure précédente, indiquer la direction et le sens des efforts normaux et tangentiels.

Question 3 Déterminer le coefficient de frottement permettant d'encaisser l'effort de la chute.

Question 4 Quel est l'effort d'écartement imposé aux lèvres de la fissure sous 10 kN de traction (composante normale à la surface du rocher) ?

Question 5 Sur le corps du coincideur, il est porté : **Maxi** : 12 kN. Y a-t-il risque de glissement au delà de cette charge ? pourquoi ? et que se passe-t-il alors ?

Pour aller plus loin : profil idéal de la came

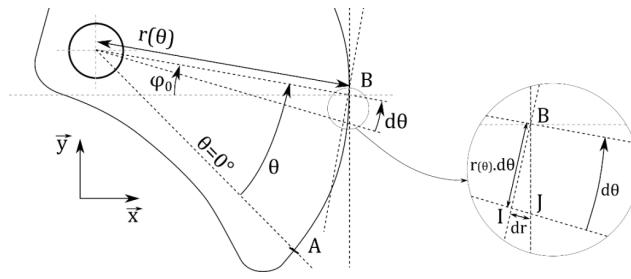
Nous allons, dans cette partie, rechercher le profil idéal de la came du coincideur, en supposant que le co-

efficient de frottement minimal obtenu précédemment est valide pour toutes les largeurs de fissure.

On se place dans le cas de la fissure la plus large (contact en A avec le rocher). Soient r_0 la distance OA , L_{f0} la largeur totale de la fissure, $f_0 = \tan \varphi_0$ le coefficient de frottement coincer / roche minimal déterminé précédemment (qui pourrait être déterminé expérimentalement dans le cadre de la conception du coincer).

Question 6 En appliquant judicieusement le principe fondamental de la statique, établir la relation entre r_0 , L_{f0} et φ_0 . On remarque que pour l'instant, on n'étudie qu'une seule largeur de fissure, le raisonnement pouvant être étendu à d'autres.

Afin que le contact rocher / came du coincer se fasse au bon endroit, dans le cas d'une fissure à bords parallèle, il faut s'assurer que la tangente à la courbe de la came au niveau du point de contact B soit dirigée suivant \vec{y} (voir figure ci-dessous). Le profil de la came peut être exprimé sous la forme d'une équation polaire $r(\theta) = f(\theta)$ avec f une fonction à déterminer. On considère que $\theta = 0$ pour la plus grande largeur de fissure L_{f0} (associée au contact au point A).



Question 7 L'angle $d\theta$ étant faible, on peut considérer que le triangle IJB est rectangle en I . Déterminer à partir de relations géométriques dans ce triangle la relation entre $\frac{dr}{d\theta}$, $r(\theta)$ et φ_0 . Mettre l'équation obtenue sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre.

Question 8 Résoudre l'équation différentielle précédente en considérant que pour $\theta = 0$ (contact en A), $r(\theta = 0) = r_0$, avec r_0 le rayon déterminé précédemment en fonction de L_{f0} . Tracer l'allure du profil de came obtenu, en considérant que le coincer doit s'adapter à des largeurs de fissures allant de 65 à 90 mm (caractéristiques du coincer flex n°4), et que $\varphi_0 = 9^\circ = 0,157$ rad. La forme de came calculée vous semble-t-elle correspondre à la forme réellement utilisée par le constructeur?

TD 02



WHING : WHeelchair Initiative New Generation

Concours CCP TSI 2017

Savoirs et compétences :

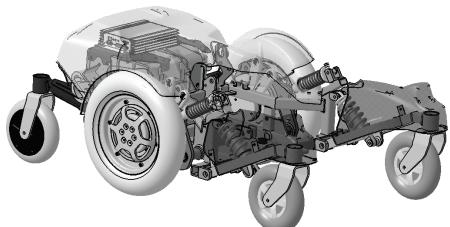
- Res2.C18 : principe fondamental de la statique ;
- Res2.C19 : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

Le projet WHING a pour objet d'imaginer et de réaliser et proposer aux utilisateurs un fauteuil verticaliseur à déplacement motorisé de nouvelle génération avec, comme objectifs associés :

- d'intégrer de nouvelles technologies ;
- de mieux prendre en compte les besoins spécifiques des utilisateurs,
- d'utiliser une conception modulaire.

Le fauteuil est équipé d'une base roulante à six roues indépendantes. Les roues centrales motrices autorisent un faible moyen de giration. La base roulante, forte de ses 6 roues indépendantes et amorties assure la stabilité et motricité du fauteuil, quel que soit le profil du terrain rencontré.



Objectif L'exigence Id = « 1.4.5 » indique que le fauteuil doit être capable de gravir une pente pour monter dans un véhicule de transport. La pente maximale est de 15°. Les caractéristiques du moteur-roue sont données ci-dessous.

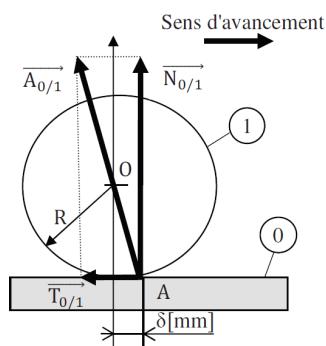
«block»	
Moteur roue	
valeurs	
Couple maximal = 100 N.m	
Couple nominal = 24 N.m	
Courant maximal = 80 A	
Courant nominal = 25 A	
Diamètre = 340 mm	
Niveau sonore = 50 dB	
Puissance nominale = 400 W	
Rapport du réducteur = 8.78	
Tension nominale = 24 V DC	
Type = MCC	

↑2

Pour valider cette exigence, le cadre de l'étude est le suivant. Les hypothèses d'étude sont :

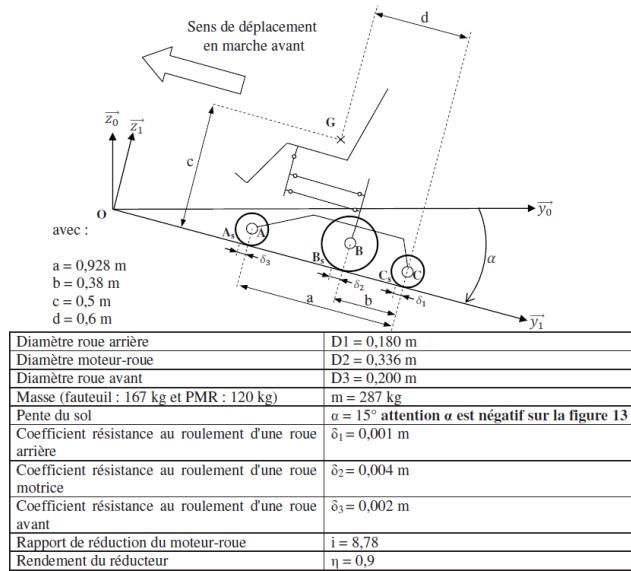
- le référentiel $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au sol est supposé galiléen ;
- le WHING se déplace en ligne droite dans une phase de montée, le problème est considéré comme un problème plan. Les effets dynamiques sont négligés car la vitesse de déplacement du fauteuil est faible ;
- le référentiel $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié au WHING avec $\vec{x}_0 = \vec{x}_1$;
- $\vec{P} = -mg\vec{z}_0$ est l'action de la pesanteur et G le centre de gravité de l'ensemble {fauteuil + PMR} ;
- le modèle adopté est équivalent à un seul moteur fournissant un couple C_m avec l'action de la pesanteur ramenée au centre de gravité égale à $\frac{P}{2}$;
- le contact des roues avec le sol se fait avec frottement, on note f le facteur de frottement de valeur 0,45 ;
- la résistance au roulement modélise la déformation du pneumatique.

La résistance au roulement illustrée à la figure suivante, se traduit par un décalage du point d'application de l'action mécanique de contact vers l'avant du fauteuil (dans le sens de l'avancement). La résultante des forces passe en un point A à une distance δ de l'axe de rotation. Cette distance est par définition le coefficient de résistance au roulement.



La figure suivante donne le paramétrage de l'étude en phase de montée d'une pente et les dimensions du WHING. Les points A_S , B_S et C_S correspondent aux points

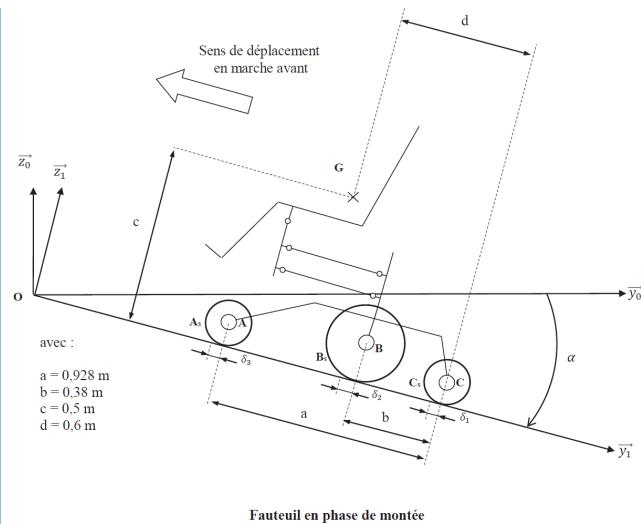
d'application des actions mécaniques du sol sur les roues avant, motrices et arrière du fauteuil.



Travail demandé

Question 1 Porter sur la figure suivante :

- l'action de la pesanteur;
- les actions de contact du sol sur les roues. Pour un point A, la composante normale sera notée \vec{N}_A et la composante tangentielle \vec{T}_A . Le sens d'une composante tangentielle est différent si la roue est motrice ou folle;
- le couple \vec{C}_{red} , couple à la sortie du réducteur du moteur-roue.



Question 2 Appliquer le principe fondamental de la statique à l'ensemble WHING + PMR isolé et écrire les 3 équations dans la base \mathcal{R}_1 en fonction des données littérales. L'équation de moment sera exprimée au point B_S .

Question 3 Isoler la roue arrière puis la roue avant et déterminer une équation issue du principe fondamental de statique donnant la composante normale de l'action du sol sur la roue, en fonction des paramètres géométriques et de la composante tangentielle.

Question 4 Isoler la roue motrice et déterminer une équation issue du PFS donnant \vec{C}_{red} en fonction des données géométriques, de \vec{N}_{BS} et \vec{T}_{BS} .

En supposant que le contact du sol sur la roue motrice se fait à la limite du glissement, on obtient un système de 7 équations à 7 inconnues.

La résolution de ce système donne les résultats suivants : $\vec{N}_{BS} \cdot \vec{z}_1 = 1140 \text{ N}$ et $\vec{T}_{BS} \cdot \vec{y}_1 = -350 \text{ N}$.

Question 5 Justifier que la composante $\vec{T}_{BS} \cdot \vec{y}_1$ est négative. À partir des valeurs de $\|\vec{T}_{BS}\|$ et $\|\vec{T}_{BS}\|$, déterminer la valeur de $\|\vec{C}_m\|$ et conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

TD 03



Système EOS

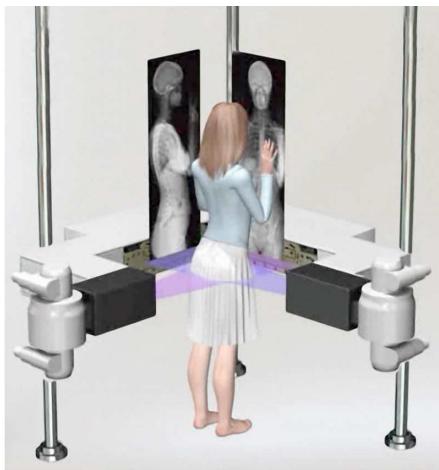
Banque PT SIA – 2016

Savoirs et compétences :

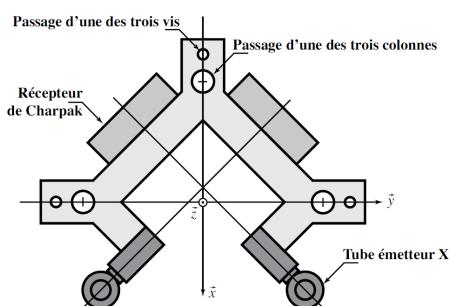
- Res2.C18 : principe fondamental de la statique ;
- Res2.C19 : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

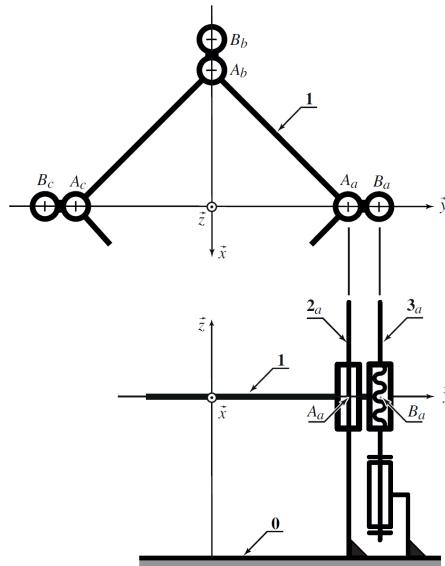
Le système EOS permet l'acquisition simultanée de radiographies de face et de profil du corps entier (ou d'une zone anatomique localisée) avec une réduction de la dose de rayons X de l'ordre de 90 % par rapport à un système radiographique conventionnel ou un scanner.



Le mécanisme interne, constitué d'un bras mobile, guidé par rapport au bâti par trois colonnes verticales. Le bras supporte deux chaînes d'acquisition, chacune d'entre elles étant composée d'un tube à rayons X et d'un détecteur.

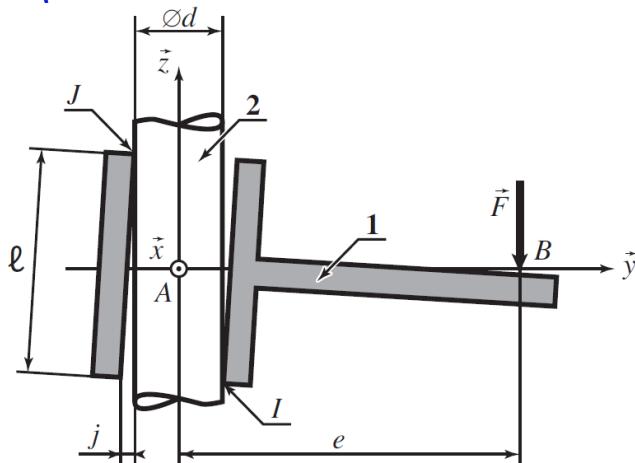


La figure suivante représente le bras mobile en vue de dessus, ce qui permet de voir les passages des colonnes et des vis. Le modèle cinématique permettant d'appréhender le fonctionnement interne.



On s'intéresse plus précisément à une des trois chaînes réalisant la liaison entre le bras mobile 1 et le bâti 0. Cette liaison est principalement réalisée par le biais d'une colonne 2, qui est en liaison complète avec 0. Un schéma de principe est représenté sur la figure suivante. La colonne est de diamètre d , l'alésage du bras de diamètre $d + j$ et de longueur ℓ . On suppose que le jeu j , bien que négligeable devant d ($j \ll d$), permet un léger basculement du bras par rapport à la colonne, ce qui conduit à considérer cet assemblage comme l'association en parallèle de deux liaisons sphère-plan, en I et J . Le contact est modélisé en utilisant la modèle de Coulomb et on note f le coefficient de frottement. Le bras 1 est soumis à une action mécanique motrice (issue de la liaison hélicoïdale) modélisée par un glisseur en B noté $F = -F_z$ ($F > 0$) dont l'axe central est distant de e de l'axe de la liaison. On se propose d'étudier le risque d'arcoulement de cette liaison, supposée plane, en négligeant les actions de la pesanteur.

Objectif Déterminer les conditions de non arcoulement du guidage du système EOS.



Travail à réaliser

Question 1 En introduisant $F_I = Y_I \vec{y} + Z_I \vec{z}$ et $F_J = Y_J \vec{y} + Z_J \vec{z}$, les glisseurs en I et J qui résultent des actions mécaniques exercées par la colonne 2 sur le bras 1, écrire les trois équations scalaires traduisant l'équilibre du bras.

Question 2 En supposant que $F > 0$, comme précisé ci-dessus, donner les signes des composantes Y_I , Z_I , Y_J et Z_J puis écrire, en utilisant le modèle de Coulomb, les

inéquations qui lient ces composantes.

Question 3 En supposant qu'on est à la limite du glissement au niveau d'un des contacts, donner la condition nécessaire entre ℓ , f et e pour qu'il n'y ait pas d'arc-boutement dans la liaison.

Conclusion vis-à-vis de l'objectif

Question 4 Vérifier que la condition de non arc-boutement est satisfaite sur le système EOS pour lequel les grandeurs caractéristiques fournies ci-dessous ?

Grandeur	Notation	Unités	Valeur numérique
Diamètre des colonnes de guidage	d	cm	10
Diamètre des vis de guidage	d'	cm	5
Hauteur totale des colonnes	H	cm	200
Limite de course du bras	h0	cm	10
Longueur de guidage des colonnes	ℓ	cm	20
Coefficient de frottement colonne/bras	f	-	0,2
Excentration guidage en translation	e	cm	20

TD 03

Modèle du frottement exponentiel – Poulie-courroie

Lycée Mistral Avignon

Savoirs et compétences :

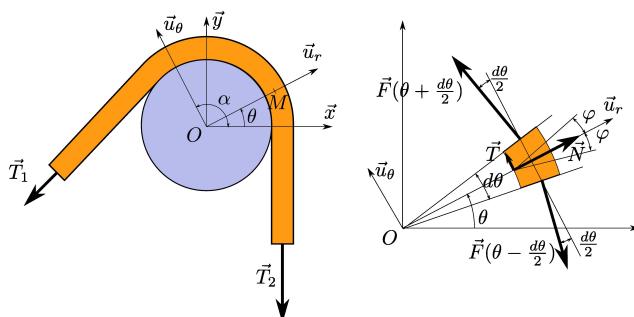
- Res2.C18 : principe fondamental de la statique ;
- Res2.C19 : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

Le problème du frottement d'une corde, d'une sangle ou d'une courroie sur une poulie ou un tambour est un problème classique.

Objectif Modéliser l'évolution de la tension dans un câble en fonction de l'angle d'enroulement sur une poulie.

On note f le coefficient de frottement entre le câble et la poulie.



On considère que le câble est enroulé d'un angle α autour de la poulie. Le câble est à la limite du glissement sous l'action des deux brins \vec{T}_1 et \vec{T}_2 . Soit $M(\theta)$ un point de l'enroulement.

Question 1 Après avoir isolé une tranche élémentaire de câble en $M(\theta)$ de largeur $d\theta$, réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures.

Question 2 Appliquer le théorème en résultante statique en projection dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

Question 3 En considérant que l'angle θ est petit, établir l'équation différentielle liant f et $F(\theta)$ et θ .

Question 4 Résoudre l'équation différentielle pour établir la relation entre T_1 , T_2 , f et α .

TD 01



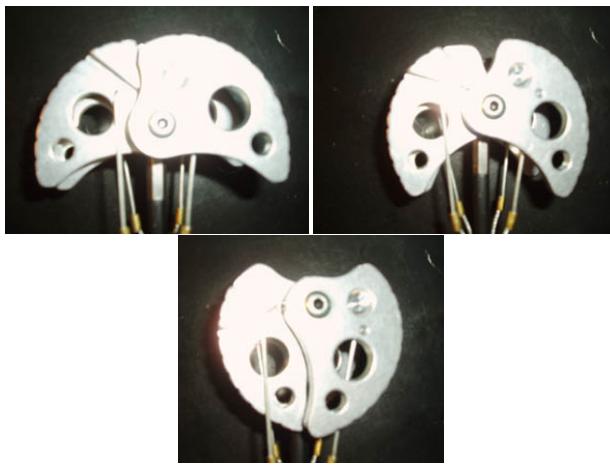
Cionneur d'escalade

Alain Passeron, Mathieu Nierenberger.

Savoirs et compétences :

Mise en situation

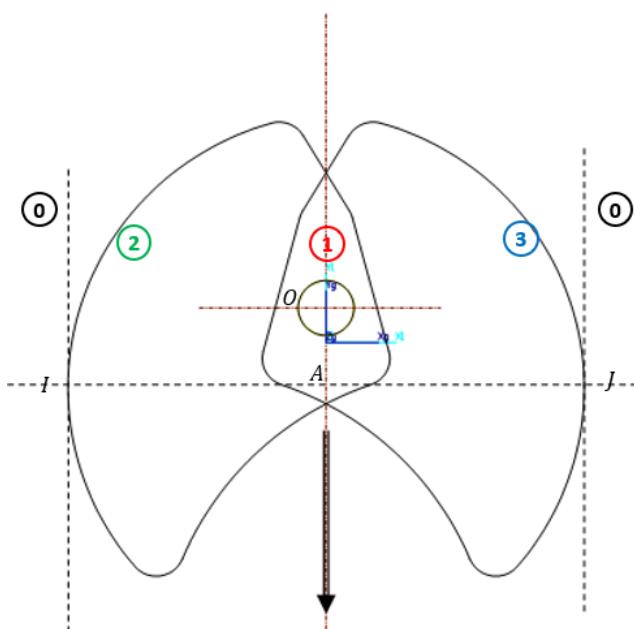
En escalade, en l'absence de points de liaison permanents (pitons, broches scellés...), l'assurage peut être complété par des coincideurs, qui se placent dans les fissures, et se bloquent sous le choc en cas de chute. C'est l'adhérence qui permet la retenue de la chute.



Il existe des coincideurs monoblocs, qui permettent un coincement dans une fissure à bords convergents, mais les « friends » à came, articulés sont très supérieurs en cela qu'ils permettent une protection dans des fissures à bords parallèles. De plus, leur géométrie leur permet de s'adapter à des fissures de tailles différentes (par exemple de 55 à 90 mm pour un « flex no 4 »).

On se propose d'étudier les conditions de retenue d'un coincideur « Rock Empire Flex » schématisé ci dessous, en modélisation plane. Dans le cadre de ce modèle, on considère donc les 2 cames 2 et 3 en appui sur les parois supposées parallèles et en liaison pivot avec l'axe cylindrique 1. C'est sur cet axe qu'est accroché le grimpeur. On note α l'angle OIA supposé connu (en le mesurant).

Suite à une chute, la corde qui retient le grimpeur, exerce un effort de 10 kN sur le câble, donc sur l'axe du « friend ». Le contact avec le rocher (fissure à bords parallèles) s'effectue avec frottement.


Question 1 Réaliser un graphe de liaisons.

Correction

Question 2 Sur la figure précédente, indiquer la direction et le sens des efforts normaux et tangentiels.

Correction

Question 3 Déterminer le coefficient de frottement permettant d'encaisser l'effort de la chute.

Correction

Isolemement : on isole la came 2.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- action de la ponctuelle en I ;
- action de la liaison pivot en O .

Résolution : le problème est plan, les torseurs sont des glisseurs. D'après le PFS, on a directement : $\overrightarrow{R(0 \rightarrow 2)} = F \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} = -F \overrightarrow{u}$.

Isolemment : on isole les deux cames et l'axe.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{02}} \overrightarrow{u} \\ 0 \end{array} \right\}_I$;
- $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{03}} \overrightarrow{v} \\ 0 \end{array} \right\}_J$;
- $\{\mathcal{T}(\text{Corde} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \overrightarrow{y} \\ 0 \end{array} \right\}_O$.

Résolution : on écrit le PFS en O :

- TRS sur \overrightarrow{x} : $F_{02} \cos \alpha - F_{03} \cos \alpha = 0$;
- TRS sur \overrightarrow{y} : $F_{02} \sin \alpha + F_{03} \sin \alpha - F = 0$.

On a donc $F_{02} = F_{03}$ et $2F_{02} \sin \alpha = F$ soit $F_{02} = \frac{F}{2 \sin \alpha}$.

$$\text{Pour } \alpha = 10^\circ, F_{02} = \frac{F}{2 \sin \alpha} = \frac{10000}{2 \sin 10^\circ} = 28793 \text{ N.}$$

Question 4 Quel est l'effort d'écartement imposé aux lèvres de la fissure sous 10 kN de traction (composante normale à la surface du rocher) ?

Correction

Question 5 Sur le corps du coincideur, il est porté : **Maxi** : 12 kN. Y a-t-il risque de glissement au delà de cette charge ? pourquoi ? et que se passe-t-il alors ?

Correction
Pour aller plus loin : profil idéal de la came

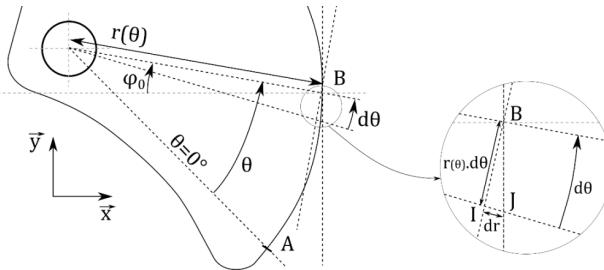
Nous allons, dans cette partie, rechercher le profil idéal de la came du coincer, en supposant que le coefficient de frottement minimal obtenu précédemment est valide pour toutes les largeurs de fissure.

On se place dans le cas de la fissure la plus large (contact en A avec le rocher). Soient r_0 la distance OA , L_{f0} la largeur totale de la fissure, $f_0 = \tan \varphi_0$ le coefficient de frottement coincer / roche minimal déterminé précédemment (qui pourrait être déterminé expérimentalement dans le cadre de la conception du coincer).

Question 6 En appliquant judicieusement le principe fondamental de la statique, établir la relation entre r_0 , L_{f0} et φ_0 . On remarque que pour l'instant, on n'étudie qu'une seule largeur de fissure, le raisonnement pouvant être étendu à d'autres.

Afin que le contact rocher / came du coincer se fasse au bon endroit, dans le cas d'une fissure à bords parallèle, il faut s'assurer que la tangente à la courbe de la came au niveau du point de contact B soit dirigée suivant \vec{y} (voir figure ci-dessous). Le profil de la came peut être exprimé sous la forme d'une équation polaire $r(\theta) = f(\theta)$ avec f une fonction à déterminer. On considère que $\theta = 0$ pour la plus grande largeur de fissure L_{f0} (associée au contact

au point A).



Question 7 L'angle $d\theta$ étant faible, on peut considérer que le triangle IJB est rectangle en I . Déterminer à partir de relations géométriques dans ce triangle la relation entre $\frac{dr}{d\theta}$, $r(\theta)$ et φ_0 . Mettre l'équation obtenue sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre.

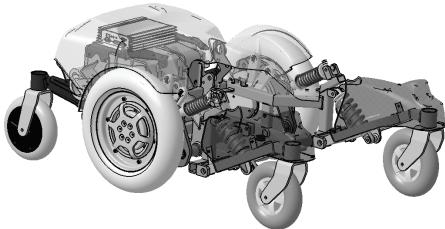
Question 8 Résoudre l'équation différentielle précédente en considérant que pour $\theta = 0$ (contact en A), $r(\theta = 0) = r_0$, avec r_0 le rayon déterminé précédemment en fonction de L_{f0} . Tracer l'allure du profil de came obtenu, en considérant que le coincer doit s'adapter à des largeurs de fissures allant de 65 à 90 mm (caractéristiques du coincer flex n°4), et que $\varphi_0 = 9^\circ = 0,157$ rad. La forme de came calculée vous semble-t-elle correspondre à la forme réellement utilisée par le constructeur?

Mise en situation

Le projet WHING a pour objet d'imaginer et de réaliser et proposer aux utilisateurs un fauteuil verticaliseur à déplacement motorisé de nouvelle génération avec, comme objectifs associés :

- d'intégrer de nouvelles technologies;
- de mieux prendre en compte les besoins spécifiques des utilisateurs,
- d'utiliser une conception modulaire.

Le fauteuil est équipé d'une base roulante à six roues indépendantes. Les roues centrales motrices autorisent un faible moyen de giration. La base roulante, forte de ses 6 roues indépendantes et amorties assure la stabilité et motricité du fauteuil, quel que soit le profil du terrain rencontré.



Objectif L'exigence Id = « 1.4.5 » indique que le fauteuil doit être capable de gravir une pente pour monter dans un véhicule de transport. La pente maximale est de 15°. Les caractéristiques du moteur-roue sont données ci-dessous.

«block»
Moteur roue
valeurs
Couple maximal = 100 N.m
Couple nominal = 24 N.m
Courant maximal = 80 A
Courant nominal = 25 A
Diamètre = 340 mm
Niveau sonore = 50 dB
Puissance nominale = 400 W
Rapport du réducteur = 8.78
Tension nominale = 24 V DC
Type = MCC

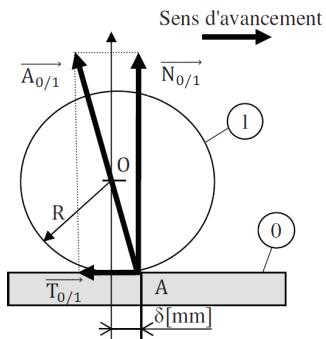
↑2

Pour valider cette exigence, le cadre de l'étude est le suivant. Les hypothèses d'étude sont :

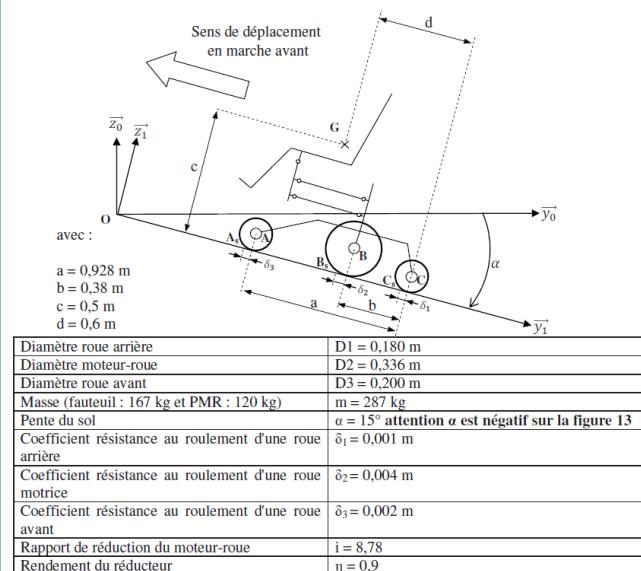
- le référentiel $\mathcal{R}_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au sol est supposé galiléen;
- le WHING se déplace en ligne droite dans une phase de montée, le problème est considéré comme un problème plan. Les effets dynamiques sont négligés car la vitesse de déplacement du fauteuil est faible;
- le référentiel $\mathcal{R}_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié au WHING avec $\vec{x}_0 = \vec{x}_1$;
- $\vec{P} = -mg\vec{z}_0$ est l'action de la pesanteur et G le centre de gravité de l'ensemble {fauteuil + PMR};
- le modèle adopté est équivalent à un seul moteur fournissant un couple C_m avec l'action de la pesanteur ramenée au centre de gravité égale à $\frac{P}{2}$;

- le contact des roues avec le sol se fait avec frottement, on note f le facteur de frottement de valeur 0,45;
- la résistance au roulement modélise la déformation du pneumatique.

La résistance au roulement illustrée à la figure suivante, se traduit par un décalage du point d'application de l'action mécanique de contact vers l'avant du fauteuil (dans le sens de l'avancement). La résultante des forces passe en un point A à une distance δ de l'axe de rotation. Cette distance est par définition le coefficient de résistance au roulement.



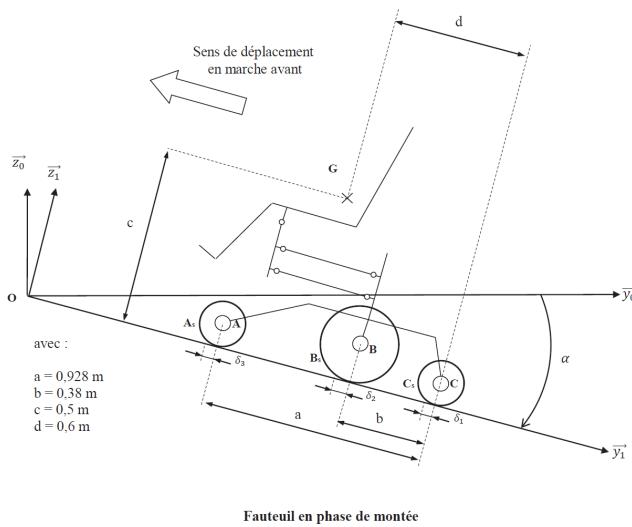
La figure suivante donne le paramétrage de l'étude en phase de montée d'une pente et les dimensions du WHING. Les points A_S , B_S et C_S correspondent aux points d'application des actions mécaniques du sol sur les roues avant, motrices et arrière du fauteuil.



Travail demandé

Question 1 Porter sur la figure suivante :

- l'action de la pesanteur;
- les actions de contact du sol sur les roues. Pour un point A , la composante normale sera notée \vec{N}_A et la composante tangentielle \vec{T}_A . Le sens d'une composante tangentielle est différent si la roue est motrice ou folle;
- le couple \vec{C}_{red} , couple à la sortie du réducteur du moteur-roue.

Correction


Question 2 Appliquer le principe fondamental de la statique à l'ensemble WHING + PMR isolé et écrire les 3 équations dans la base \mathcal{R}_1 en fonction des données littérales. L'équation de moment sera exprimée au point B_S .

Correction

Question 3 Isoler la roue arrière puis la roue avant et déterminer une équation issue du principe fondamental de statique donnant la composante normale de l'action du sol sur la roue, en fonction des paramètres géométriques et de la composante tangentielle.

Correction

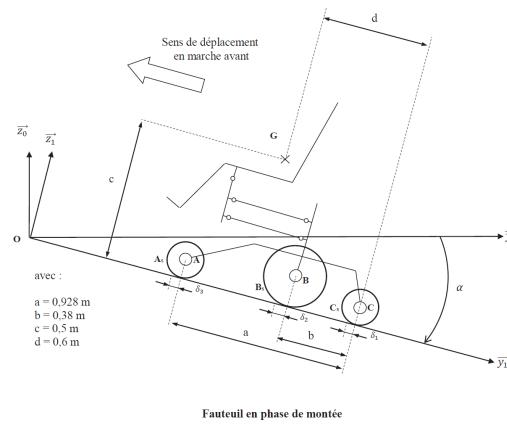
Question 4 Isoler la roue motrice et déterminer une équation issue du PFS donnant $\overrightarrow{C_{red}}$ en fonction des données géométriques, de $\overrightarrow{N_{BS}}$ et $\overrightarrow{T_{BS}}$.

Correction

En supposant que le contact du sol sur la roue motrice se fait à la limite du glissement, on obtient un système de 7 équations à 7 inconnues.

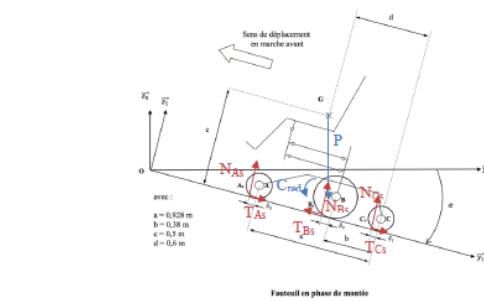
La résolution de ce système donne les résultats suivants : $\overrightarrow{N_{BS}} \cdot \overrightarrow{z_1} = 1140 \text{ N}$ et $\overrightarrow{T_{BS}} \cdot \overrightarrow{y_1} = -350 \text{ N}$.

Question 5 Justifier que la composante $\overrightarrow{T_{BS}} \cdot \overrightarrow{y_1}$ est négative. À partir des valeurs de $\| \overrightarrow{T_{BS}} \|$ et $\| \overrightarrow{C_m} \|$, déterminer la valeur de $\| \overrightarrow{C_{red}} \|$ et conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

Correction

Détermination du couple des moteurs-roues

Q29. Lorsque la roue est motrice, un couple gène la rotation de la roue. L'action de la roue motrice sur le sol a donc une composante tangentielle issue du frottement qui est colinéaire à $\overrightarrow{y_1}$. Par action réaction, la composante tangentielle de l'action du sol sur la roue motrice est donc colinéaire à $-\overrightarrow{y_1}$.

Lorsque la roue est folle, l'action du sol s'oppose au déplacement de la roue folle. La composante tangentielle de l'action du sol sur la roue folle est donc colinéaire à $+\overrightarrow{y_1}$.



Q30. On isole l'ensemble {Whing + PMR} = Σ

Bilan des actions mécaniques :

$$\text{— Action de la pesanteur : } \{\overrightarrow{T_{g \rightarrow \Sigma}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{2} \overrightarrow{g \cdot z_0} \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{— Couple moteur : } \{\overrightarrow{T_{red \rightarrow \Sigma}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \\ B_C_{red} \cdot \overrightarrow{x_1} \end{array} \right\} \text{ avec } C_{red} = \eta \cdot i \cdot C_m$$

$$\text{— Ponctuelle en As : } \{\overrightarrow{T_{As \rightarrow \Sigma}}\} = \left\{ \begin{array}{l} N_{As} \cdot \overrightarrow{z_1} + T_{As} \cdot \overrightarrow{y_1} \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{— Ponctuelle en Bs : } \{\overrightarrow{T_{Bs \rightarrow \Sigma}}\} = \left\{ \begin{array}{l} N_{Bs} \cdot \overrightarrow{z_1} - T_{Bs} \cdot \overrightarrow{y_1} \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{— Ponctuelle en Cs : } \{\overrightarrow{T_{Cs \rightarrow \Sigma}}\} = \left\{ \begin{array}{l} N_{Cs} \cdot \overrightarrow{z_1} + T_{Cs} \cdot \overrightarrow{y_1} \\ 0 \end{array} \right\}$$

On déplace tous les moments au point Bs :

$$\overrightarrow{M_{Bs,g \rightarrow \Sigma}} = \overrightarrow{M_{G,g \rightarrow \Sigma}} + \overrightarrow{Bs} \hat{G} \wedge \overrightarrow{R_{g \rightarrow \Sigma}} = -\frac{m}{2} g [(\delta_2 + b - d) \cos \alpha - c \sin \alpha] \cdot \overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{M_{Bs,red \rightarrow \Sigma}} = C_{red} \cdot \overrightarrow{x_0} \text{ car c'est un torseur couple}$$

$$\overrightarrow{M_{Bs,As \rightarrow \Sigma}^{As}} = (\delta_2 + b - a - \delta_3) N_{As} \cdot \overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{M_{Bs,Cs \rightarrow \Sigma}^{Cs}} = (\delta_2 + b - \delta_1) N_{Cs} \cdot \overrightarrow{x_1}$$

Le principe fondamental de la statique appliqué au solide 1 donne :

$$N_{As} + N_{Bs} + N_{Cs} - \frac{m}{2} g \cos \alpha = 0$$

$$T_{As} + T_{Cs} - T_{Bs} - \frac{m}{2} g \sin \alpha = 0$$

$$-\frac{m}{2} g [(\delta_2 + b - d) \cos \alpha - c \sin \alpha] + C_{red} + (\delta_2 + b - a - \delta_3) N_{As} + (\delta_2 + b - \delta_1) N_{Cs} = 0$$

Q31. On isole la roue arrière : On choisit d'énoncer le PFS en moment au point A projeté sur $\overrightarrow{x_0}$ pour ne pas faire intervenir les inconnues de la liaison pivot d'axe ($C \cdot \overrightarrow{x_0}$) :

On déplace le torseur des actions du sol au point A :

$$\overrightarrow{M_{A,s \rightarrow \Sigma}^{As}} = \left(-\delta_3 N_{As} + \frac{D_3}{2} T_{As} \right) \cdot \overrightarrow{x_1}$$

Le TMS donne :

$$\delta_3 N_{As} = \frac{D_3}{2} T_{As}$$

Idem sur la roue avant. On obtient :

$$\delta_1 N_{Cs} = \frac{D_1}{2} T_{Cs}$$

Q32. On isole la roue motrice : TMS exprimé au point C projeté sur $\overrightarrow{x_0}$:

$$\overrightarrow{M_{B,s \rightarrow \Sigma}^{Bs}} = \left(-\delta_2 N_{Bs} - \frac{D_2}{2} T_{Bs} \right) \cdot \overrightarrow{x_1}$$

D'où :

$$C_{red} = \delta_2 N_{Bs} + \frac{D_2}{2} T_{Bs}$$

Q33. Si $\overrightarrow{T_{Bs}} \cdot \overrightarrow{y_1}$ n'était pas négative, il s'opposerait au couple moteur et le frottement n'aiderait pas le moteur à faire gravir la côte au Whing.

AN : $C_{red} = 0,004 \cdot 1140 + 0,336 / 2,350 = 63,36 \text{ Nm}$

D'où $C_m = \frac{C_{red}}{\eta i} = \frac{63,36}{8,78 \cdot 0,9} = 8 \text{ Nm}$

Le moteur pouvant développer un couple moteur de 24 Nm, le Whing peut démarrer sur une pente de 15°.

TD 03



Système EOS

Banque PTSIA – 2016

Savoirs et compétences :

- Res2.C18 : principe fondamental de la statique ;
- Res2.C19 : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

Objectif Déterminer les conditions de non arcuboutement du guidage du système EOS.

Travail à réaliser

Question 1 En introduisant $F_I = Y_I \vec{y} + Z_I \vec{z}$ et $F_J = Y_J \vec{y} + Z_J \vec{z}$, les glisseurs en I et J qui résultent des actions mécaniques exercées par la colonne 2 sur le bras 1, écrire les trois équations scalaires traduisant l'équilibre du bras.

Correction

En appliquant le PFS en B, on a :

$$\begin{cases} Y_I + Y_J = 0 \\ Z_I + Z_J - F = 0 \\ -Y_J \frac{\ell}{2} - Z_J \left(e + \frac{d}{2} \right) + Y_I \frac{\ell}{2} - Z_I \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

Question 2 En supposant que $F > 0$, comme précisé ci-dessus, donner les signes des composantes Y_I , Z_I , Y_J et Z_J puis écrire, en utilisant le modèle de Coulomb, les inéquations qui lient ces composantes.

Correction

On a de plus : $\begin{cases} Y_I \geq 0 \text{ et } Z_I \geq 0 \\ Y_J \leq 0 \text{ et } Z_J \geq 0 \\ |Z_I| \leq f|Y_I| \text{ et } |Z_J| \leq f|Y_J| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_I \geq 0 \text{ et } Z_I \geq 0 \\ Y_J \leq 0 \text{ et } Z_J \geq 0 \\ Z_I \leq fY_I \text{ et } Z_J \leq -fY_J \end{cases}$

Question 3 En supposant qu'on est à la limite du glissement au niveau d'un des contacts, donner la condition nécessaire entre ℓ , f et e pour qu'il n'y ait pas d'arc-boutement dans la liaison.

Correction

On considère qu'on est à la limite du glissement au point I. En conséquences,

$$\begin{cases} Z_I = fY_I \\ Y_I + Y_J = 0 \\ Z_I + Z_J - F = 0 \\ -Y_J \frac{\ell}{2} - Z_J \left(e + \frac{d}{2} \right) + Y_I \frac{\ell}{2} - Z_I \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_I = fY_I \\ Y_J = -Y_I \\ Z_J = F - Z_I = F - fY_I \\ Y_I \frac{\ell}{2} - (F - fY_I) \left(e + \frac{d}{2} \right) + Y_I \frac{\ell}{2} - fY_I \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \\ Y_I \frac{\ell}{2} - (F - fY_I) \left(e + \frac{d}{2} \right) + Y_I \frac{\ell}{2} - fY_I \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \\ Y_I \left(\frac{\ell}{2} + f \left(e + \frac{d}{2} \right) + \frac{\ell}{2} - f \left(e - \frac{d}{2} \right) \right) - F \left(e + \frac{d}{2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow Y_I \left(\ell + fd \right) - F \left(e + \frac{d}{2} \right) = 0 \\ \text{et } \Leftrightarrow F = Y_I \frac{\ell + fd}{e + \frac{d}{2}} = Y_I \frac{2\ell + 2fd}{2e + d} \end{cases}$$

De plus, au point J, on a nécessairement : $Z_J \leq -fY_J$. En conséquences,

$$\begin{aligned} F - fY_I &\leq fY_I \\ \Leftrightarrow F - fY_I &\leq fY_I \Leftrightarrow F \leq 2fY_I \Leftrightarrow F \leq 2fY_I \Leftrightarrow \\ Y_I \frac{2\ell + 2fd}{2e + d} &\leq 2fY_I \Leftrightarrow \frac{2\ell + 2fd}{2e + d} \leq 2f \Leftrightarrow 2\ell + 2fd \leq \\ 4fe + 2fd &\Leftrightarrow \ell \leq 2fe \Leftrightarrow \frac{\ell}{2e} \leq f \end{aligned}$$

Correction

On considère qu'on est à la limite du glissement au point J. En conséquences,

$$\begin{cases} Z_J = -f Y_J \\ Y_I + Y_J = 0 \\ Z_I + Z_J - F = 0 \\ -Y_J \frac{\ell}{2} - Z_J \left(e + \frac{d}{2} \right) + Y_I \frac{\ell}{2} - Z_I \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z_J = -f Y_J \\ Y_I = -Y_J \\ Z_I = -Z_J + F = f Y_J + F \\ -Y_J \frac{\ell}{2} + f Y_J \left(e + \frac{d}{2} \right) - Y_J \frac{\ell}{2} - (f Y_J + F) \left(e - \frac{d}{2} \right) \end{cases}$$

Et donc $Y_J \left(-\ell + f \left(e + \frac{d}{2} \right) - f \left(e - \frac{d}{2} \right) \right) - F \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow Y_J \left(-\ell + f d \right) - F \left(e - \frac{d}{2} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow Y_J \left(-\ell + f d \right) = F \left(e - \frac{d}{2} \right) \Leftrightarrow F = Y_J \frac{-\ell + f d}{e - \frac{d}{2}}$$

Par ailleurs, on a : $Z_I \leq f Y_I \Leftrightarrow f Y_J + F \leq -f Y_J$

$$\Leftrightarrow 2f Y_J + F \leq 0 \Leftrightarrow 2f Y_J + Y_J \frac{-\ell + f d}{e - \frac{d}{2}} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$2f + \frac{-\ell + f d}{e - \frac{d}{2}} \geq 0 \quad (Y_J < 0) \Leftrightarrow \frac{2fe - fd - \ell + f d}{e - \frac{d}{2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2fe - \ell}{e - \frac{d}{2}} \geq 0.$$

???

- Si $e - \frac{d}{2} > 0 : 2fe - \ell \geq 0$ et $f \geq \frac{\ell}{2e}$.
- Si $e - \frac{d}{2} < 0 : 2fe - \ell \leq 0$ et $f \leq \frac{\ell}{2e}$.

Conclusion vis-à-vis de l'objectif

Question 4 Vérifier que la condition de non arc-boutement est satisfaite sur le système EOS pour lequel les grandeurs caractéristiques fournies ci-dessous ?

Correction Pour ne pas arc-bouter, il faut donc vérifier la relation $\frac{\ell}{2e} > f : \frac{20}{2 \times 20} > f$ et donc $0,5 > 0,2$. La condition de glissement est donc vérifiée.

TD 03

Modèle du frottement exponentiel – Poule-courroie

Lycée Mistral Avignon

Savoirs et compétences :

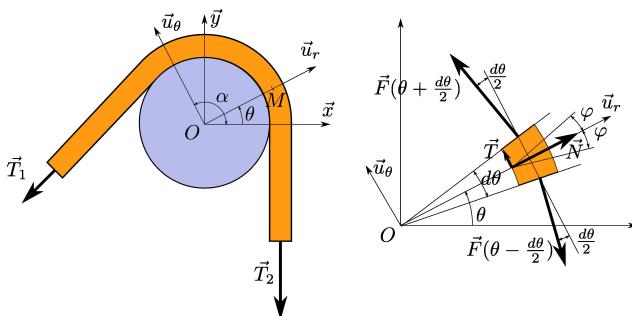
- Res2.C18 : principe fondamental de la statique ;
- Res2.C19 : équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides ;
- Res2.C20 : théorème des actions réciproques.

Mise en situation

Le problème du frottement d'une corde, d'une sangle ou d'une courroie sur une poulie ou un tambour est un problème classique.

Objectif Modéliser l'évolution de la tension dans un câble en fonction de l'angle d'enroulement sur une poulie.

On note f le coefficient de frottement entre le câble et la poulie.



On considère que le câble est enroulé d'un angle α autour de la poulie. Le câble est à la limite du glissement sous l'action des deux brins \vec{T}_1 et \vec{T}_2 . Soit $M(\theta)$ un point de l'enroulement.

Question 1 Après avoir isolé une tranche élémentaire de câble en $M(\theta)$ de largeur $d\theta$, réaliser un bilan des actions mécaniques extérieures.

Correction BAME :

- action de tension du câble 1 $\vec{F}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)$;
- action de tension du câble 2 $\vec{F}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)$;
- action de la poulie sur le câble : $N \vec{u}_r + T \vec{u}_\theta$ avec $T = \pm f N$.

Question 2 Appliquer le théorème en résultante statique en projection dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

Correction L'application du TRS à la tranche de câble, on a $\vec{F}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) + \vec{F}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) + N \vec{u}_r + T \vec{u}_\theta = \vec{0}$.

En projetant dans $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ on a :

$$\begin{cases} -F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + N = 0 \\ F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + T = 0 \end{cases}$$

Question 3 En considérant que l'angle θ est petit, établir l'équation différentielle liant f et $F(\theta)$ et θ .

Correction

En utilisant $\cos d\theta/2 \approx 1$ et $\sin d\theta/2 \approx d\theta/2$:

$$\begin{cases} -F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)\frac{d\theta}{2} - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)\frac{d\theta}{2} + N = 0 \\ F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) + T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\left(F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) + F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)\right)\frac{d\theta}{2} + N = 0 \\ F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) + T = 0 \end{cases}$$

De plus, en faisant un DL à l'ordre 2, $F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \approx F(\theta) + \frac{d\theta}{2} \frac{dF(\theta)}{d\theta}$. On a donc : $\begin{cases} -2F(\theta) \frac{d\theta}{2} + N = 0 \\ \frac{dF(\theta)}{d\theta} + T = 0 \end{cases}$

En utilisant le modèle de Coulomb, $T = \pm f N$

$$dF(\theta) \pm f \left(2F(\theta) \frac{d\theta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow dF(\theta) \pm f F(\theta) d\theta = 0$$

Question 4 Résoudre l'équation différentielle pour établir la relation entre T_1 , T_2 , f et α .

Correction On a : $dF(\theta) = \pm F(\theta) d\theta \Leftrightarrow \frac{dF(\theta)}{F(\theta)} = \pm d\theta$

En intégrant l'équation précédente, on a : $[\ln F]_{T_1}^{T_2} = \pm f [\theta]^\alpha$ Soit $\ln T_2 - \ln T_1 = -f \alpha \Leftrightarrow \ln \frac{T_2}{T_1} = \pm f \alpha$ et $T_2 = T_1 e^{\pm f \alpha}$.
(Le signe dépend du sens de glissement.)