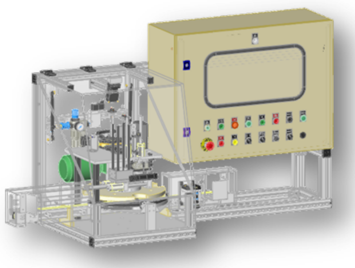
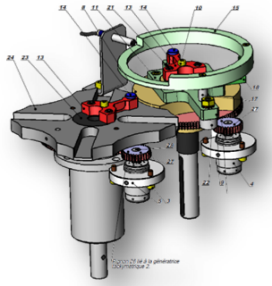
ÉTUDE DES SYSTÈMES DE LABORATOIRE

CAPSULEUSE DE BOCAUX

Système pédagogique



Représentation 3D du système



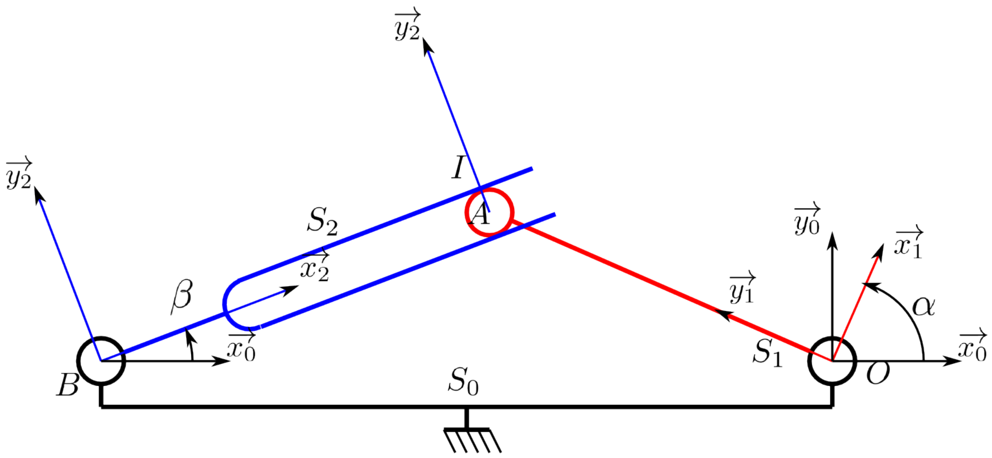
Représentation 3D de la Croix de Malte

1 Modélisation cinématique de la Croix de Malte

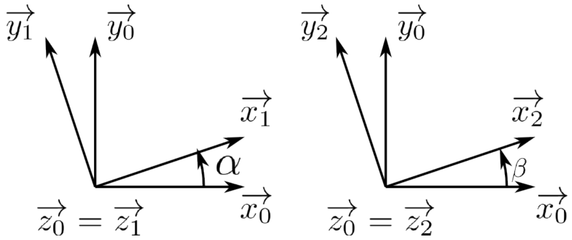
1.1 Modélisation de la transmission

Afin de modéliser le système à croix de malte, on propose le schéma cinématique ci-dessous.

On note :
- $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ le repère lié au bâti S_0. On note $\overrightarrow{OB} = -L\overrightarrow{x_0}$ avec $L = 145\ mm$ [1] ;
- $\mathscr{R}_1 = \left(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ le repère lié à l'arbre S_1. On pose $\overrightarrow{OA} = R\overrightarrow{y_1}$ avec $R = 141\ mm$ et $\alpha = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right)$. L'arbre S_1 est lié au motoréducteur de la capsuleuse. On a : $\dot{\alpha} = 10\ tr/min$;
- $\mathscr{R}_2 = \left(B, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$ le repère lié à l'arbre S_2. On pose $\overrightarrow{BA} = \lambda(t)\overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{AI} = r\overrightarrow{y_2}$ et $\beta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}\right)$;



1. Vérifier les valeurs numériques.



1.2 Détermination de la loi Entrée / Sortie

1.2.1 Loi Entrée / Sortie – Position angulaire

On a :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{0} \Longleftrightarrow R\overrightarrow{y_1}-\lambda(t)\overrightarrow{x_2}+L\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{0}$$

En projetant sur $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$ on a :

$$\begin{cases} -R\sin\alpha(t)-\lambda(t)\cos\beta(t)+L=0 \\ R\cos\alpha(t)-\lambda(t)\sin\beta(t)=0 \end{cases}$$

Suivant le cas, on peut donc avoir α en fonction de β ou λ en fonction de α ou β :

$$\tan\beta=\frac{R\cos\alpha}{L-R\sin\alpha}$$

$$\lambda(t)^2=R^2+L^2-2RL\sin\alpha$$

1.2.2 Loi Entrée / Sortie – Vitesse angulaire

On peut calculer :

$$\dot{\beta}=\frac{R^2\dot{\alpha}-LR\dot{\alpha}\sin\alpha}{L^2-2RL\sin\alpha+R^2}$$

1.3 Étude cinématique de la Croix de Malte

1.3.1 Détermination de $\{\mathscr{V}(S_1/S_0)\}$

$$\{\mathscr{V}(S_1/S_0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=\dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{V(O,S_1/S_0)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_O=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=\dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{V(I,S_1/S_0)}=\overrightarrow{IO}\wedge\dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}\end{array}\right\}_I$$

$$\overrightarrow{V(I,S_1/S_0)}=\left(-R\overrightarrow{y_1}-r\overrightarrow{y_2}\right)\wedge\dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}=-R\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1}-r\dot{\alpha}\overrightarrow{x_2}$$

$$\{\mathscr{V}(S_1/S_0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=\dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{V(I,S_1/S_0)}=-R\dot{\alpha}\overrightarrow{x_1}-r\dot{\alpha}\overrightarrow{x_2}\end{array}\right\}_I$$

1.3.2 Détermination de $\{\mathscr{V}(S_2/S_0)\}$

$$\{\mathscr{V}(S_2/S_0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}=\dot{\beta}\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{V(B,S_2/S_0)}=\overrightarrow{0}\end{array}\right\}_B=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}=\dot{\beta}\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{V(I,S_2/S_0)}=\overrightarrow{IB}\wedge\dot{\beta}\overrightarrow{z_0}\end{array}\right\}_I$$

$$\overrightarrow{V(I,S_2/S_0)}=\left(-\lambda(t)\overrightarrow{x_2}-r\,\overrightarrow{y_2}\right)\wedge\dot{\beta}\,\overrightarrow{z_0}=\lambda(t)\dot{\beta}\,\overrightarrow{y_2}-r\,\dot{\beta}\,\overrightarrow{x_2}$$

$$\{\mathscr{V}(S_2/S_0)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}=\dot{\beta}\,\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{V(I,S_2/S_0)}=\lambda(t)\dot{\beta}\,\overrightarrow{y_2}-r\,\dot{\beta}\,\overrightarrow{x_2}\end{array}\right\}_I$$

1.3.3 Détermination de $\{\mathscr{V}(S_2/S_1)\}$

D'après la composition du torseur cinématique on a :

$$\{\mathscr{V}(S_2/S_1)\}=\{\mathscr{V}(S_2/S_0)\}+\{\mathscr{V}(S_0/S_1)\}\Longleftrightarrow\{\mathscr{V}(S_2/S_1)\}=\{\mathscr{V}(S_2/S_0)\}-\{\mathscr{V}(S_1/S_0)\}$$

On a donc :

$$\{\mathscr{V}(S_2/S_1)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}=\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)}-\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}=\left(\dot{\beta}-\dot{\alpha}\right)\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{V(I,S_2/S_1)}=\overrightarrow{V(I,S_2/S_0)}-\overrightarrow{V(I,S_1/S_0)}=\lambda(t)\dot{\beta}\,\overrightarrow{y_2}-r\,\dot{\beta}\,\overrightarrow{x_2}+R\dot{\alpha}\,\overrightarrow{x_1}+r\,\dot{\alpha}\,\overrightarrow{x_2}\end{array}\right\}_I$$

$$\overrightarrow{x_1}=\cos(\alpha-\beta)\overrightarrow{x_2}+\sin(\alpha-\beta)\overrightarrow{y_2}$$

D'où :

$$\overrightarrow{V(I,S_2/S_1)}=\lambda(t)\dot{\beta}\,\overrightarrow{y_2}-r\,\dot{\beta}\,\overrightarrow{x_2}+R\dot{\alpha}\cos(\alpha-\beta)\overrightarrow{x_2}+R\dot{\alpha}\sin(\alpha-\beta)\overrightarrow{y_2}+r\,\dot{\alpha}\,\overrightarrow{x_2}=\begin{bmatrix}-r\dot{\beta}+R\dot{\alpha}\cos(\alpha-\beta)+r\dot{\alpha}\\ \lambda(t)\dot{\beta}+R\dot{\alpha}\sin(\alpha-\beta)\\ 0\end{bmatrix}_{\mathscr{R}_2}$$

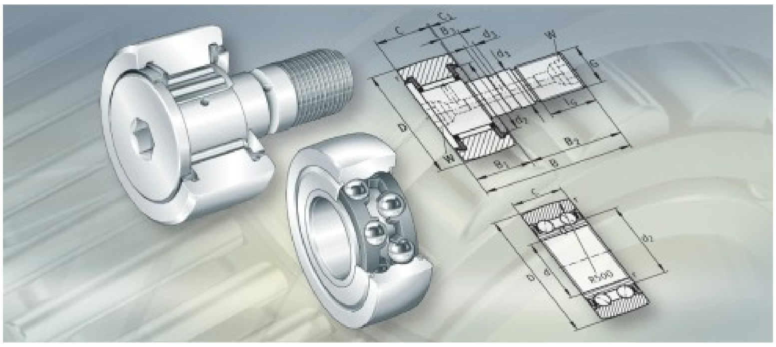
Nécessairement, la vitesse de glissement appartient au plan tangent au contact. On a donc :

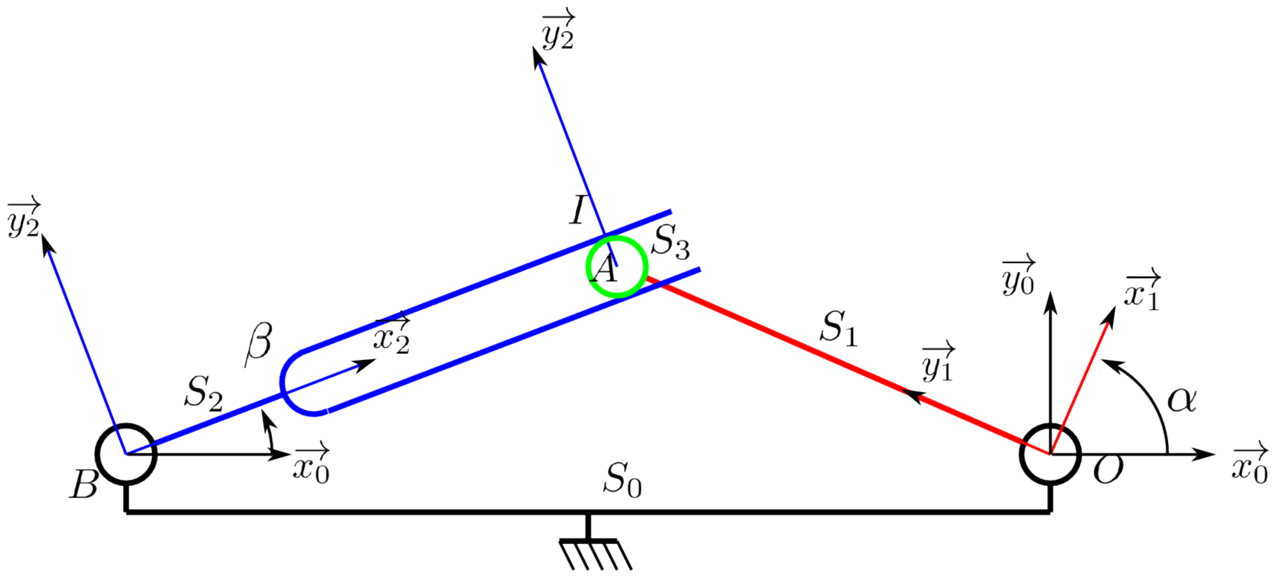
$$\left\{\begin{array}{l}-r\dot{\beta}+R\dot{\alpha}\cos(\alpha-\beta)+r\dot{\alpha}=\dot{\lambda}\\ \lambda(t)\dot{\beta}+R\dot{\alpha}\sin(\alpha-\beta)=0\end{array}\right.$$

1.4 Détermination de la vitesse du galet

On considère maintenant l'existence d'un galet S_3 en bout de de l'arbre S_1. On fait l'hypothèse que le galet roule sans glisser dans le S_2. S_3 et S_1 sont en liaison pivot d'axe $\overrightarrow{z_0}$ et de centre A.

Le galet a un diamètre extérieur de 16 mm. D'après la documentation constructeur, la vitesse de rotation du galet ne doit pas dépasser les 5000 tr/min.





On fait l'hypothèse de roulement sans glissement selon laquelle la vitesse est nulle entre le galet et la croix de Malte est nulle au point I :

$$\overrightarrow{V(I,S_3/S_2)} = \overrightarrow{0}$$

Malgré l'introduction du galet, la position du point I reste inchangée.

Il faut identifier le torseur $\{\mathscr{V}(S_3/S_2)\}$. Pour cela, la composition des vitesses donne :

$$\{\mathscr{V}(S_3/S_2)\} = \{\mathscr{V}(S_3/S_1)\} + \{\mathscr{V}(S_1/S_2)\}$$

Au point I on connaît déjà $\{\mathscr{V}(S_1/S_2)\}$.

Calculons $\{\mathscr{V}(S_3/S_1)\}$:

$$\{\mathscr{V}(S_3/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_1)} = \dot{\gamma}\,\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(A,S_3/S_1)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(S_3/S_1)} = \dot{\gamma}\,\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(I,S_3/S_1)} = \overrightarrow{IA} \wedge \dot{\gamma}\,\overrightarrow{z_0} = -r\,\overrightarrow{y_2} \wedge \dot{\gamma}\,\overrightarrow{z_0} = -r\dot{\gamma}\,\overrightarrow{x_2} \end{array} \right\}_I$$

On a donc :

$$\overrightarrow{V(I,S_3/S_2)} = \overrightarrow{V(I,S_3/S_1)} + \overrightarrow{V(I,S_1/S_2)}$$

$$\overrightarrow{V(I,S_3/S_2)} = -r\dot{\gamma}\,\overrightarrow{x_2} + \left(-r\dot{\beta} + R\dot{\alpha}\cos(\alpha-\beta) + r\dot{\alpha}\right)\overrightarrow{x_2} - \left(\lambda(t)\dot{\beta} + R\dot{\alpha}\sin(\alpha-\beta)\right)\overrightarrow{y_2}$$

$$\overrightarrow{V(I,S_3/S_2)} = \left[\begin{array}{l} -r\dot{\gamma} + \left(-r\dot{\beta} + R\dot{\alpha}\cos(\alpha-\beta) + r\dot{\alpha}\right) \\ -\left(\lambda(t)\dot{\beta} + R\dot{\alpha}\sin(\alpha-\beta)\right) \\ 0 \end{array} \right]_{\mathscr{R}_2}$$

D'après l'hypothèse de roulement sans glissement, on a :

$$\overrightarrow{V(I,S_3/S_2)} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \dot{\gamma} = -\frac{-r\dot{\beta} + R\dot{\alpha}\cos(\alpha-\beta) + r\dot{\alpha}}{r}$$

Références

[1] xx