

TD 01

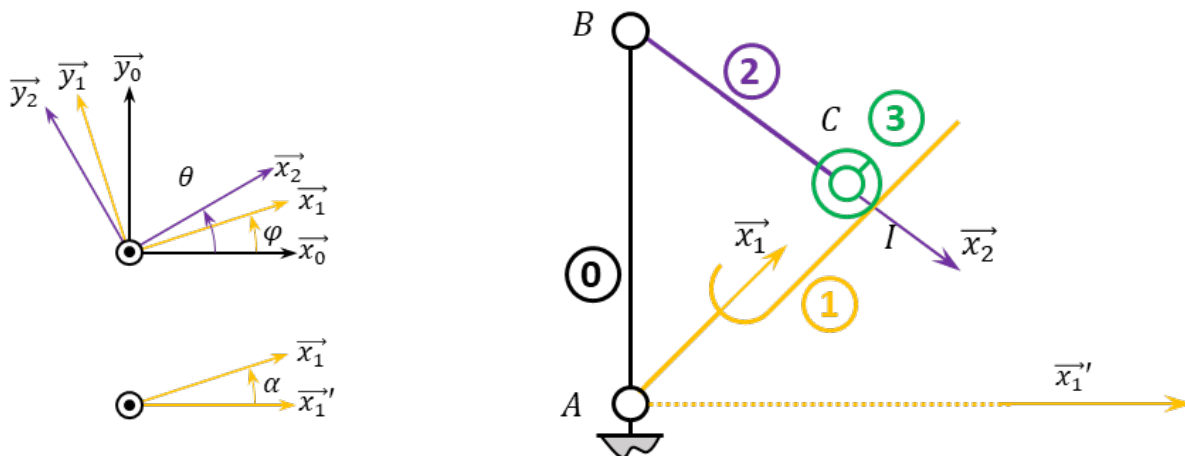
Documents de TP

Étude théorique de la barrière Sympact

Savoirs et compétences :

1 Modélisation cinématique de la barrière Sympact

1.1 Schéma cinématique



On pose $\overrightarrow{AB} = H\overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{BC} = R\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{AC} = \lambda(t)\overrightarrow{x_1}$. **Paramètres constants :**

- $R = 81 \text{ mm}$
- $H = 112 \text{ mm}$
- $\alpha = 45^\circ$

Conditions aux limites

- Barrière fermée : $\theta_{\text{ini}} = -30,61^\circ$
- Barrière ouverte : $\theta_{\text{fin}} = 180 + 35,35 = 215,35^\circ$

1.2 Détermination de la loi Entrée / Sortie

La fermeture de chaîne cinématique s'écrit ainsi : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ soit $H\overrightarrow{y_0} + R\overrightarrow{x_2} - \lambda(t)\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0}$

Projetons cette relation dans le repère \mathcal{R}_0 : $H\overrightarrow{y_0} + R(\cos\theta(t)\overrightarrow{x_0} + \sin\theta(t)\overrightarrow{y_0}) - \lambda(t)(\cos\varphi(t)\overrightarrow{x_0} + \sin\varphi(t)\overrightarrow{y_0}) = \overrightarrow{0}$.

On a alors :
$$\begin{cases} R\cos\theta(t) - \lambda(t)\cos\varphi(t) = 0 \\ H + R\sin\theta(t) - \lambda(t)\sin\varphi(t) = 0 \end{cases}$$

Pour exprimer la loi entrée sortie, il faut déterminer φ en fonction de θ .
$$\begin{cases} R\cos\theta(t) = \lambda(t)\cos\varphi(t) \\ H + R\sin\theta(t) = \lambda(t)\sin\varphi(t) \end{cases}$$

En faisant le rapport, on a donc $\tan\varphi(t) = \frac{H + R\sin\theta(t)}{R\cos\theta(t)}$.

Expression analytique de λ . On peut aussi vouloir exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\varphi(t)$ (nécessaire en statique).

On a donc :
$$\begin{cases} R\cos\theta(t) = \lambda(t)\cos\varphi(t) \\ R\sin\theta(t) = \lambda(t)\sin\varphi(t) - H \end{cases} \quad \text{et} \quad R^2 = (\lambda(t)\cos\varphi(t))^2 + (\lambda(t)\sin\varphi(t) - H)^2 \quad \text{soit} \quad R^2 = \lambda(t)^2 + H^2 - 2\lambda(t)\sin\varphi(t)H.$$

On résout donc $\lambda(t)^2 - 2\lambda(t)\sin\varphi(t)H + H^2 - R^2 = 0$. $\Delta = 4H^2\sin^2\varphi(t) - 4(H^2 - R^2)$ et donc

$$\lambda = \frac{2\sin\varphi(t)H \pm \sqrt{4H^2\sin^2\varphi(t) - 4(H^2 - R^2)}}{2}.$$

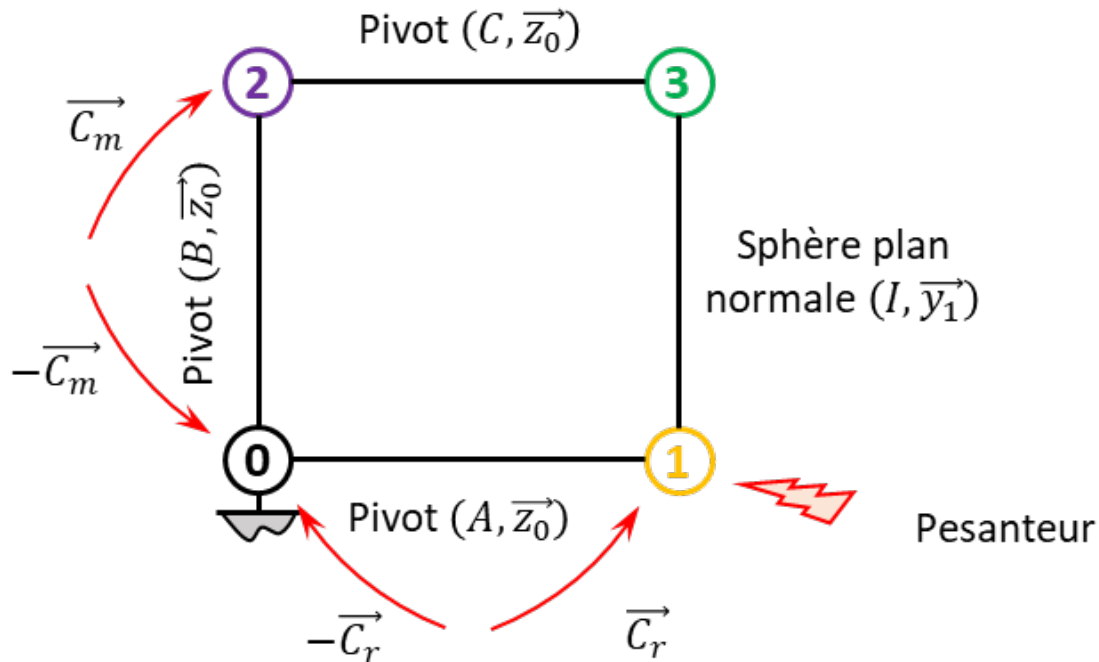
$$\lambda = \sin\varphi(t)H \pm \sqrt{H^2\sin^2\varphi(t) - (H^2 - R^2)}.$$

1.3 Détermination de la loi en vitesse

1.4 Tracé des courbes

Application numérique :

2 Détermination du couple moteur en statique



2.1 Isolement du galet 3

On isole le galet (3) soumis à deux glisseurs.

BAME

- Pivot entre 2 et 3 : $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\}$.
- Sphère plan entre 1 et 3 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 3)\}$.

Application du PFS D'après le PFS, on a donc : $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} + \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 3)\} = \{0\}$

$$\text{soit } \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = -\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} F \vec{y}_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_I$$

2.2 Isolement de la manivelle 2 + Galet 3

BAME

- Pivot entre 0 et 2 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\}$.
- Sphère plan entre 1 et 3 : $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} -F \vec{y}_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_I$.
- Moteur entre 0 et 2 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ C_m \vec{z}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\text{vp}}$.

Application du PFS

On utilise le théorème du moment statique en B en projection sur l'axe \vec{z}_0 .

Déplacement de $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\}$ en B.

$$\text{On a } \overline{\mathcal{M}}(B, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_0 = (\overline{\mathcal{M}}(I, 3 \rightarrow 2) + \vec{BI} \wedge \overline{R}(3 \rightarrow 2)) \cdot \vec{z}_0$$

$$= ((\vec{BC} + \vec{CI}) \wedge \overline{R}(3 \rightarrow 2)) \cdot \vec{z}_0$$

$$= ((R \vec{x}_2 - r \vec{y}_1) \wedge (-F \vec{y}_1)) \cdot \vec{z}_0 = -rF (\vec{x}_2 \wedge \vec{y}_1) \cdot \vec{z}_0 = -rF (\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_2 = -rF \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = -rF \cos(\theta - \varphi)$$

Le TMS en B s'écrit donc sous la forme $C_m = rF \sin(\theta - \varphi)$

2.3 Isolement de la barrière 1

BAME

- Pivot entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}$.
- Sphère plan entre 1 et 2 : $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} -F \vec{y}_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_I$.

- Ressort entre 0 et 1 : $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_r \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$.
- Pesanteur sur 1 : $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg \vec{y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_G$ avec G tel que $\vec{AG} = \mu \vec{x}'_1$

Application du PFS

On utilise le théorème du moment statique en A en projection sur l'axe \vec{z} .

- Déplacement de $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\}$ en A .
On a $\overline{\mathcal{M}}(A, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_0 = \left(\overline{\mathcal{M}}(I, 3 \rightarrow 2) + \vec{AI} \wedge \overline{R(3 \rightarrow 2)} \right) \vec{z}_0$

$$= \left((\vec{AC} + \vec{CI}) \wedge \overline{R(3 \rightarrow 2)} \right) \vec{z}_0 = \left((\lambda \vec{x}_1 - r \vec{y}_1) \wedge (-F \vec{y}_1) \right) \vec{z}_0 = (\lambda \vec{x}_1 \wedge (-F \vec{y}_1)) \vec{z}_0 = -\lambda F$$
 - Déplacement de $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\}$ en A . On a $\overline{\mathcal{M}}(A, \text{pes} \rightarrow 1) \cdot \vec{z}_0 = (\vec{AG} \wedge (-Mg \vec{y}_0)) \vec{z}_0 = (\mu \vec{x}'_1 \wedge (-Mg \vec{y}_0)) \vec{z}_0$

$$= -Mg\mu (\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_0) \vec{x}'_1 = -Mg\mu \vec{x}_0 \cdot \vec{x}'_1 = -Mg\mu \cos(\varphi - \alpha)$$
- Le TMS en B s'écrit donc sous la forme $-\lambda F + C_r - Mg\mu \cos(\varphi - \alpha) = 0$.

2.4 Résolution

$$\text{On a : } \begin{cases} C_m = rF \sin(\theta - \varphi) \\ -\lambda F + C_r - Mg\mu \cos(\varphi - \alpha) = 0 \Leftrightarrow F = \frac{C_r - Mg\mu \cos(\varphi - \alpha)}{\lambda} \end{cases}$$

On a donc $C_m = r \sin(\theta - \varphi) \frac{C_r - Mg\mu \cos(\varphi - \alpha)}{\lambda}$.

2.5 Expression de C_r

La raideur du ressort est de 100° pour 40 Nm soit $\frac{180 \times 40}{100\pi}$ Nm par radian soit 23 Nm rad⁻¹.

De plus, $C_r(\varphi) = k\varphi + C_0$ avec

$$\begin{cases} C_r\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0 = k\frac{3\pi}{4} + C_0 \\ C_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = 23\frac{\pi}{2} = k\frac{\pi}{4} + C_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = -k\frac{3\pi}{4} \\ 23\frac{\pi}{2} = k\frac{\pi}{4} - k\frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = 23\frac{3\pi}{4} \\ k = -23 \end{cases}$$

Au final, $C_r(\varphi) = -23\varphi + 23\frac{3\pi}{4}$.

3 Détermination du couple moteur en utilisant le Théorème de l'Energie cinétique

3.1 On isole {1+2+3}

3.2 Bilan des puissances extérieures

Hypothèse : liaisons parfaites

- Puissance exercée par le moteur : $\mathcal{P}(\text{moteur} \rightarrow 2/0) = C_m \dot{\theta}$.
- Puissance exercée par le ressort : $\mathcal{P}(\text{ressort} \rightarrow 1/0) = C_r(\varphi) \dot{\varphi}$.
- Puissance exercée par la pesanteur : $\mathcal{P}(\text{pesanteur} \rightarrow 1/0) = \left\{ \begin{array}{c} -Mg \vec{y}_0 \\ -\mu \vec{x}'_1 \wedge Mg \vec{y}_0 \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\varphi} \vec{z}_0 \\ ** \end{array} \right\}_{G_1} = -Mg\mu \cos(\varphi - \alpha) \dot{\varphi}$.

3.3 Bilan des puissances intérieures

Hypothèse : liaisons parfaites la puissance interne est donc nulle.

3.4 Calcul de l'énergie cinétique

Les pièces 1 et 2 sont respectivement en rotation autour des axes (\vec{A}, \vec{z}_0) et (\vec{B}, \vec{z}_0) . On néglige l'énergie cinétique du galet.

$$\mathcal{E}_c(1+2+3/0) = \frac{1}{2} (J_{2,B,\vec{z}_0} \dot{\theta}^2 + J_{1,A,\vec{z}_0} \dot{\varphi}^2)$$

3.5 Théorème de l'énergie cinétique

$$J_{2,B,\vec{z}_0} \dot{\theta} \ddot{\theta} + J_{1,A,\vec{z}_0} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} = C_m \dot{\theta} + C_r(\varphi) \dot{\varphi} - Mg\mu \cos(\varphi - \alpha) \dot{\varphi}$$

Références

[1] xx