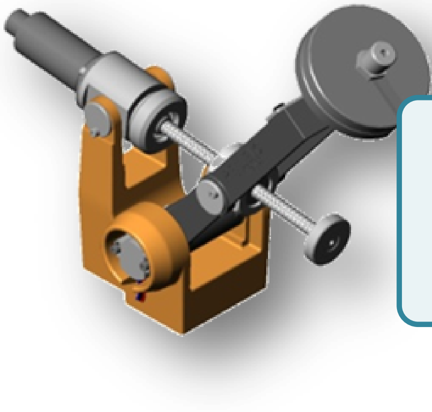


PTSI – PT

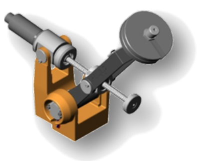
Doc. TP

Étude des systèmes de laboratoire

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

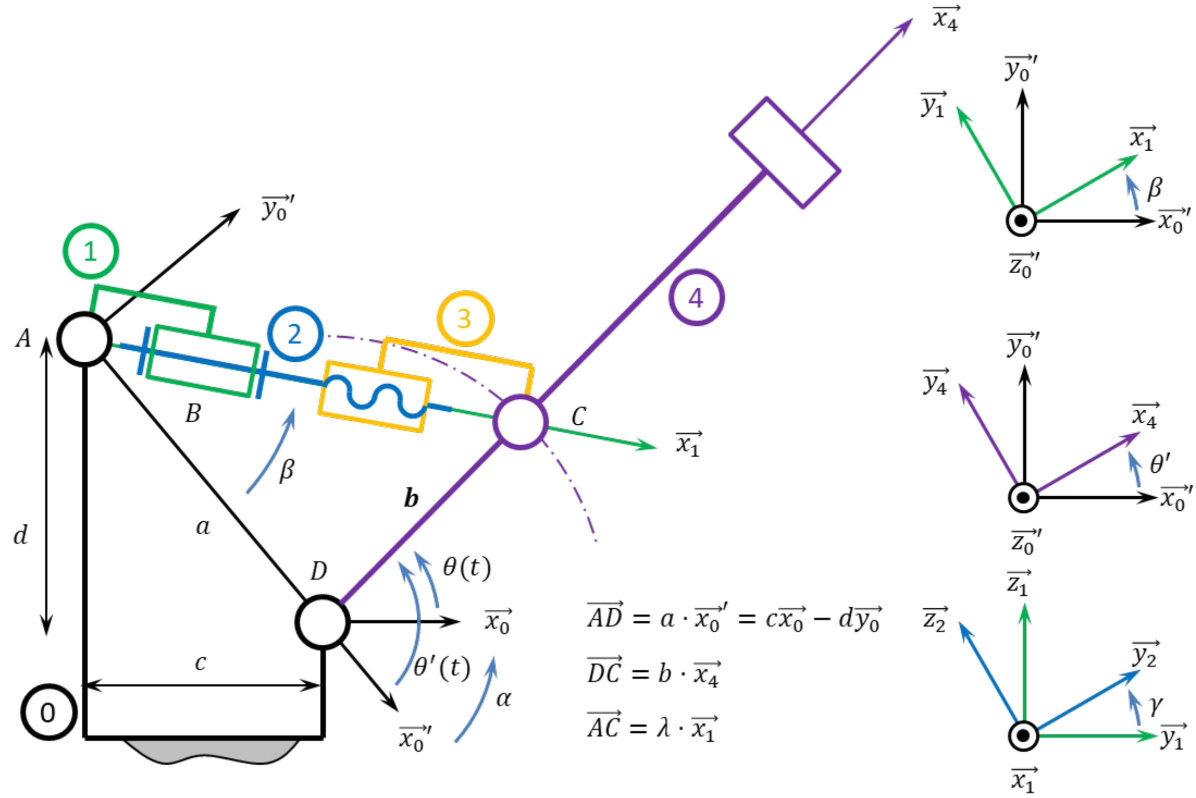
Doc. TP

Étude du robot MaxPID



1 Modélisation cinématique du bras Maxpid

1.1 Schéma cinématique



1.2 Détermination de la loi Entrée / Sortie

La fermeture de chaîne cinématique s'écrit ainsi :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \lambda \overrightarrow{x_1} - b\,\overrightarrow{x_4} - a\,\overrightarrow{x_0'} = \overrightarrow{0}$$

Projetons cette relation dans le repère $\mathscr{R}_{0'}$:

$$\lambda\left(\cos\beta\,\overrightarrow{x_0'} + \sin\beta\,\overrightarrow{y_0'}\right) - b\left(\cos\theta'\,\overrightarrow{x_0'} + \sin\theta'\,\overrightarrow{y_0'}\right) - a\,\overrightarrow{x_0'} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda\cos\beta - b\cos\theta' - a = 0\\ \lambda\sin\beta - b\sin\theta' = 0\end{array}\right.$$

Expression de θ en fonction de λ

Pour exprimer la loi entrée sortie, commençons par déterminer θ' en fonction de λ :

$$\lambda^2 = a^2 + b^2\cos^2\theta' + 2ab\cos\theta' + b^2\sin^2\theta' = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta' \Longleftrightarrow \theta' = \arccos\left(\frac{\lambda^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)$$

Une fermeture angulaire nous permet d'exprimer θ : $\theta' = \alpha + \theta$, on a donc :

$$\theta = \arccos\left(\frac{\lambda^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right) - \alpha$$

Lorsque $\theta = 0$, on a $\lambda_0 = \sqrt{d^2 + (c+b)^2}$.

Notons γ la position angulaire du moteur et p le pas de la liaison hélicoïdale. On a donc $\lambda = \lambda_0 + p\dfrac{\gamma}{2\pi} = \sqrt{d^2 + (c+b)^2} + p\dfrac{\gamma}{2\pi}$.

Au final,

$$\theta = \arccos\left(\frac{\left(\sqrt{d^2 + (c+b)^2} + p\dfrac{\gamma}{2\pi}\right)^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right) - \arctan\left(\frac{d}{c}\right)$$

Expression de λ puis γ en fonction de θ

On a vu que $\lambda^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta'$. Par suite, $\lambda^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta'$. Or $\theta' = \alpha + \theta$; donc $\lambda^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha+\theta)$.

De plus, $\lambda = \lambda_0 + p\dfrac{\gamma}{2\pi}$; donc $\left(\lambda_0 + p\dfrac{\gamma}{2\pi}\right)^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha+\theta) \Rightarrow p\dfrac{\gamma}{2\pi} = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\alpha+\theta)} - \lambda_0$.

Au final,

$$\gamma = \frac{2\pi}{p}\left(\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\alpha+\theta)} - \lambda_0\right).$$

Expression de β en fonction de θ'

$$\begin{cases} \lambda\cos\beta = b\cos\theta' + a \\ \lambda\sin\beta = b\sin\theta' \end{cases} \Rightarrow \tan\beta = \frac{b\sin\theta'}{b\cos\theta' + a}$$

1.3 Détermination de la loi en vitesse

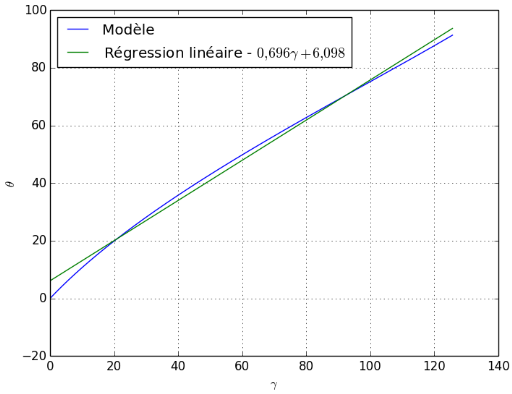
On a :

$$\dot\theta = -\frac{\dfrac{2\left(\sqrt{d^2+(c+b)^2}+p\dfrac{\gamma}{2\pi}\right)\left(+p\dfrac{\dot\gamma}{2\pi}\right)}{2ab}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\left(\sqrt{d^2+(c+b)^2}+p\dfrac{\gamma}{2\pi}\right)^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)^2}}$$

1.4 Tracé des courbes

Application numérique :

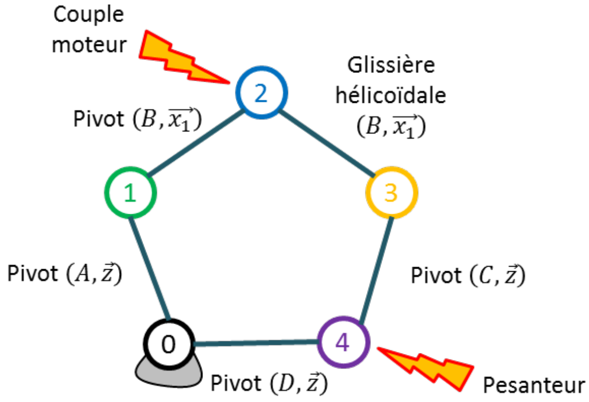
- $a = 106,3$ mm ;
- $b = 80$ mm ;
- $c = 70$ mm ;
- $d = 80$ mm.



Loi Entrée Sortie – Position angulaire du bras en fonction de la position du moteur

2 Étude statique

2.1 Modélisation



Calcul d'hyperstatisme :
- nombre d'ensembles : $n_p = 4$;
- nombres d'inconnues statiques : $n_s = 5+5+5+5+5 = 25$;
- nombre de mobilités : $m = 1$.

$$h = 1 - 24 + 25 = 2$$

. Pour lever l'hyperstatisme il faudrait ajouter deux mobilités pour résoudre toutes les inconnues de liaison.

2.2 Bilan des actions mécaniques

Liaison pivot entre 0 et 1 :

$$\{\mathcal{T}(0\rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01}=0 & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}_1} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01}+\lambda Z_{01} \\ Z_{01} & -\lambda Y_{01} \end{array} \right\}_{C,\mathcal{R}_1} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{01} & L_{01} \\ 0 & M_{01}+\lambda Z_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{array} \right\}_{C,\mathcal{R}_1}$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\mathcal{M}(C,0\rightarrow 1)} & = & \overrightarrow{\mathcal{M}(A,0\rightarrow 1)} + \overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{R(0\rightarrow 1)} \\ & = & \overrightarrow{\mathcal{M}(A,0\rightarrow 1)} - \lambda\overrightarrow{x_1}\wedge\left(X_{01}\overrightarrow{x_1}+Y_{01}\overrightarrow{y_1}+Z_{01}\overrightarrow{z_1}\right) \\ & = & \overrightarrow{\mathcal{M}(A,0\rightarrow 1)} - \left(Y_{01}\lambda\overrightarrow{z_1} - Z_{01}\lambda\overrightarrow{y_1}\right) \end{array}$$

Liaison pivot entre 1 et 2 :

$$\{\mathcal{T}(1\rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_1}$$

Liaison glissière hélicoïdale entre 2 et 3 :

$$\{\mathcal{T}(2\rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & N_{23} \end{array} \right\}_{E,\mathcal{R}_1} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23}+e\,Z_{23} \\ Z_{23} & N_{23}-e\,Y_{23} \end{array} \right\}_{C,\mathcal{R}_1}$$

Par ailleurs, $|L_{23}| = p|X_{23}|$.
On a :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\mathcal{M}(C,2\rightarrow 3)} & = & \overrightarrow{\mathcal{M}(E,2\rightarrow 3)} + \overrightarrow{CE}\wedge\overrightarrow{R(2\rightarrow 3)} \\ & = & \overrightarrow{\mathcal{M}(E,2\rightarrow 3)} - e\,\overrightarrow{x_1}\wedge\left(X_{23}\overrightarrow{x_1}+Y_{23}\overrightarrow{y_1}+Z_{23}\overrightarrow{z_1}\right) \\ & = & \overrightarrow{\mathcal{M}(E,2\rightarrow 3)} - e\left(Y_{23}\overrightarrow{z_1} - Z_{23}\overrightarrow{y_1}\right) \end{array}$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\mathcal{M}(D,2\rightarrow 3)} & = & \overrightarrow{\mathcal{M}(E,2\rightarrow 3)} + \overrightarrow{DE}\wedge\overrightarrow{R(2\rightarrow 3)} \\ & = & \overrightarrow{\mathcal{M}(E,2\rightarrow 3)} + \left(b\overrightarrow{x_4} - e\overrightarrow{x_1}\right)\wedge\left(X_{23}\overrightarrow{x_1}+Y_{23}\overrightarrow{y_1}+Z_{23}\overrightarrow{z_1}\right) \\ & = & \overrightarrow{\mathcal{M}(E,2\rightarrow 3)} + \left(bX_{23}\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{x_1} + Y_{23}\left(b\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{y_1} - e\overrightarrow{z_1}\right) + Z_{23}\left(b\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{z_1} + e\overrightarrow{y_1}\right)\right) \\ & = & \overrightarrow{\mathcal{M}(E,2\rightarrow 3)} + \left(bX_{23}\sin(\theta+\alpha-\beta)\overrightarrow{z_1} + Y_{23}\left(b\cos(\theta+\alpha-\beta)\overrightarrow{z_1} - e\overrightarrow{z_1}\right) + Z_{23}\left(b\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{z_1} + e\overrightarrow{y_1}\right)\right) \end{array}$$

Liaison pivot entre 3 et 4 :

$$\{\mathcal{T}(3\to 4)\}=\left\{\begin{array}{cc} X_{34} & L_{34}\\ Y_{34}=0 & M_{34}\\ Z_{34} & 0\end{array}\right\}_{C,\mathcal{R}_1}=\left\{\begin{array}{cc} X_{34} & L_{34}+\dots\\ 0 & M_{34}+\dots\\ Z_{34} & b\left(X_{34}\sin\left(\theta+\alpha-\beta\right)\right)\end{array}\right\}_{D,\mathcal{R}_1}$$

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{\mathcal{M}(D,3\to 4)} & = & \overrightarrow{\mathcal{M}(C,3\to 4)}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{R(3\to 4)}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}(D,3\to 4)} & = & \overrightarrow{\mathcal{M}(C,3\to 4)}+b\,\overrightarrow{x_4}\wedge\left(X_{34}\overrightarrow{x_1}+Z_{34}\overrightarrow{z_1}\right)\\ \overrightarrow{\mathcal{M}(D,3\to 4)} & = & \overrightarrow{\mathcal{M}(C,3\to 4)}+b\left(X_{34}\sin\left(\theta+\alpha-\beta\right)\overrightarrow{z_1}+Z_{34}\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{z_1}\right)\end{array}$$

Liaison pivot entre 0 et 4 :

$$\{\mathcal{T}(0\to 4)\}=\left\{\begin{array}{cc} X_{04} & L_{04}\\ Y_{04} & M_{04}\\ Z_{04} & 0\end{array}\right\}_{D,\mathcal{R}_1}$$

Actions de pesanteur sur 4 :

$$\{\mathcal{T}(\text{pes}\to 4)\}=\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0\\ -mg & 0\\ 0 & 0\end{array}\right\}_{G,\mathcal{R}_0}=\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0\\ -mg & 0\\ 0 & -Lmg\cos\theta\end{array}\right\}_{G,\mathcal{R}_0}$$

On a :

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{\mathcal{M}(D,\text{pes}\to 4)} & = & \overrightarrow{0}+\overrightarrow{DG}\wedge\left(-mg\,\overrightarrow{y_0}\right)\\ & = & L\overrightarrow{x_4}\wedge\left(-mg\,\overrightarrow{y_0}\right)\\ & = & -Lmg\cos\theta\,\overrightarrow{z_0}\end{array}$$

Couple moteur sur 2 :

$$\{\mathcal{T}(\text{m}\to 2)\}=\left\{\begin{array}{cc} 0 & C_m\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{array}\right\}_{B,\mathcal{R}_1}$$

2.3 Recherche du couple moteur en fonction de la masse

Isolement de 2

Le solide **2** est soumis à trois actions mécaniques. On réalise le torseur du moment statique en B en projection sur $\overrightarrow{x_1}$.

$$\{\mathcal{T}(1\to 2)\}+\{\mathcal{T}(3\to 2)\}+\{\mathcal{T}(\text{mot}\to 2)\}=\{0\}$$

On a donc :

$$C_m+L_{32}=0$$

Isolement de 3

On isole le solide **3** soumis à 2 torseurs et on applique le PFS :

$$\{\mathcal{T}(4\to 3)\}+\{\mathcal{T}(2\to 3)\}=\{0\}\Longleftrightarrow -\{\mathcal{T}(3\to 4)\}+\{\mathcal{T}(2\to 3)\}=\{0\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} X_{23}-X_{34}=0\\ Y_{23}-Y_{34}=0\Rightarrow Y_{23}=0\text{ car }Y_{43}=0\quad\text{cf isolement suivant}\\ Z_{23}-Z_{34}=0\\ L_{23}-L_{34}=0\\ M_{23}+e\,Z_{23}-M_{34}=0\\ N_{23}-e\,Y_{23}=0\Rightarrow N_{23}=0\end{array}\right.$$

$$|L_{23}|=\frac{p}{2\pi}|X_{23}|$$

Isolement de 1 – 2 – 3

$$\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\}+\{\mathscr{T}(4\rightarrow 3)\}+\{\mathscr{T}(\text{mot}\rightarrow 2)\}=\{0\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} X_{01}+X_{43}=0 \\ Y_{01}+Y_{43}=0 \Rightarrow Y_{43}=0 \\ Z_{01}+Z_{43}=0 \\ L_{01}+C_{\text{mot}}+L_{43}=0 \\ M_{01}+\lambda Z_{01}+M_{43}=0 \\ -\lambda Y_{01}+0=0 \Rightarrow Y_{01}=0 \end{array}\right.$$

Isolement de 4

Application du théorème du moment statique en D en projection sur $\overrightarrow{z}$:

$$bX_{34}\sin\left(\theta+\alpha-\beta\right)-Lmg\cos\theta=0$$

$$bX_{34}=Lmg\frac{\cos\theta}{\sin\left(\theta+\alpha-\beta\right)}$$

On a alors :

$$L_{23}=\pm\frac{p}{2\pi}Lmg\frac{\cos\theta}{b\sin\left(\theta+\alpha-\beta\right)}$$

$\tan\beta=\dfrac{b\sin\theta'}{b\cos\theta'+a}$, $\theta'=\alpha+\theta$

$$\theta=0\Rightarrow\theta'=\alpha$$

$\tan\beta=\dfrac{b\sin\alpha}{b\cos\alpha+a}$,

2.4 Calcul divers

$\overrightarrow{x_4}=\cos\theta\,\overrightarrow{x_0}+\sin\theta\,\overrightarrow{y_0}=\cos\theta\left(\cos\alpha\,\overrightarrow{x_0'}+\sin\alpha\,\overrightarrow{y_0'}\right)+\sin\theta\left(-\sin\alpha\,\overrightarrow{x_0'}+\cos\alpha\,\overrightarrow{y_0'}\right)=(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)\,\overrightarrow{x_0'}+(\cos\theta\sin\alpha+\sin\theta\cos\alpha)\,\overrightarrow{y_0'}=\cos(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{x_0'}+\sin(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{y_0'}$

$\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{x_1}=\left(\cos(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{x_0'}+\sin(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{y_0'}\right)\wedge\overrightarrow{x_1}=\cos(\theta+\alpha)\sin\beta\,\overrightarrow{z_1}-\sin(\theta+\alpha)\cos\beta\,\overrightarrow{z_1}=\sin\left(\theta+\alpha-\beta\right)\overrightarrow{z_1}$

$\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{y_1}=\left(\cos(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{x_0'}+\sin(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{y_0'}\right)\wedge\overrightarrow{y_1}=\cos(\theta+\alpha)\cos\beta\,\overrightarrow{z_1}+\sin(\theta+\alpha)\sin\beta\,\overrightarrow{z_1}=\cos\left(\theta+\alpha-\beta\right)\overrightarrow{z_1}$

$\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{z_1}=\left(\cos(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{x_0'}+\sin(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{y_0'}\right)\wedge\overrightarrow{z_1}=-\cos(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{y_0'}+\sin(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{x_0'}$

Au bilan :

$\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{x_1}=\sin\left(\theta+\alpha-\beta\right)\overrightarrow{z_1}$

$\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{y_1}=\cos\left(\theta+\alpha-\beta\right)\overrightarrow{z_1}$

$\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{z_1}=-\cos(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{y_0'}+\sin(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{x_0'}$