

PTSI – PT

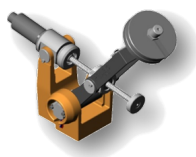
Doc. TP

Étude des systèmes de laboratoire

Sciences
Industrielles de
l'Ingénieur

Doc.
TP

Étude du robot MaxPID



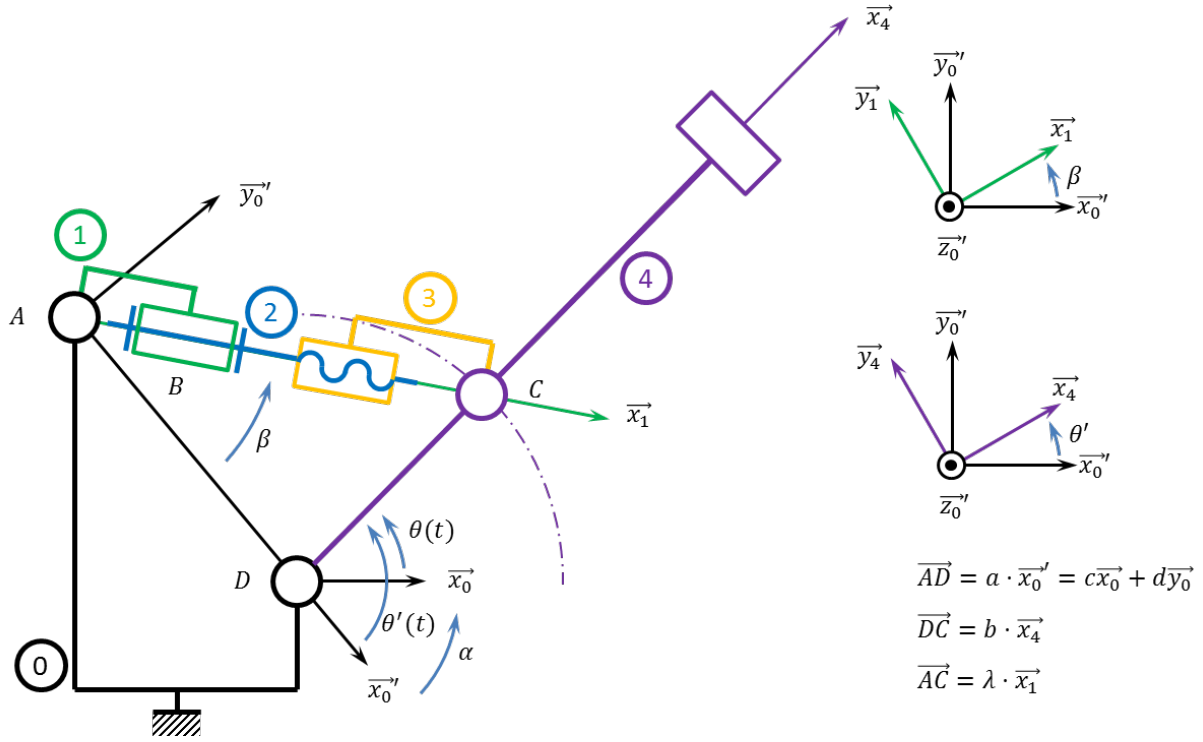
1	Modélisation cinématique du bras Maxpid	2
1.1	Schéma cinématique	2
1.2	Détermination de la loi Entrée / Sortie	2
1.3	Détermination de la loi en vitesse	3
1.4	Tracé des courbes	3
2	Étude statique	3
2.1	Modélisation	3
2.2	Bilan des actions mécaniques	4
2.3	Recherche du couple moteur en fonction de la masse	5
2.4	Calcul divers	6



Xavier Pessoles
PTSI – PT

1 Modélisation cinématique du bras Maxpid

1.1 Schéma cinématique



1.2 Détermination de la loi Entrée / Sortie

La fermeture de chaîne cinématique s'écrit ainsi :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \iff \lambda \vec{x}_1 - b \vec{x}_4 - a \vec{x}_0' = \vec{0}$$

Projetons cette relation dans le repère $\mathcal{R}_{0'}$:

$$\lambda \left(\cos \beta \vec{x}_0' + \sin \beta \vec{y}_0' \right) - b \left(\cos \theta' \vec{x}_0' + \sin \theta' \vec{y}_0' \right) - a \vec{x}_0' = \vec{0} \implies \begin{cases} \lambda \cos \beta - b \cos \theta' - a = 0 \\ \lambda \sin \beta - b \sin \theta' = 0 \end{cases}$$

Expression de θ en fonction de λ

Pour exprimer la loi entrée sortie, commençons par déterminer θ' en fonction de λ :

$$\lambda^2 = a^2 + b^2 \cos^2 \theta' + 2ab \cos \theta' + b^2 \sin^2 \theta' = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta' \iff \theta' = \arccos \left(\frac{\lambda^2 - a^2 - b^2}{2ab} \right)$$

Une fermeture angulaire nous permet d'exprimer θ : $\theta' = \alpha + \theta$, on a donc :

$$\theta = \arccos \left(\frac{\lambda^2 - a^2 - b^2}{2ab} \right) - \alpha$$

Lorsque $\theta = 0$, on a $\lambda_0 = \sqrt{d^2 + (c + b)^2}$.

Notons γ la position angulaire du moteur et p le pas de la liaison hélicoïdale. On a donc $\lambda = \lambda_0 + p \frac{\gamma}{2\pi} = \sqrt{d^2 + (c + b)^2} + p \frac{\gamma}{2\pi}$.

Au final,

$$\theta = \arccos \left(\frac{\left(\sqrt{d^2 + (c + b)^2} + p \frac{\gamma}{2\pi} \right)^2 - a^2 - b^2}{2ab} \right) - \arctan \left(\frac{d}{c} \right)$$

Expression de λ puis γ en fonction de θ

On a vu que $\lambda^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta'$. Par suite, $\lambda^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta'$. Or $\theta' = \alpha + \theta$; donc $\lambda^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha + \theta)$.

De plus, $\lambda = \lambda_0 + p \frac{\gamma}{2\pi}$; donc $\left(\lambda_0 + p \frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha + \theta) \Rightarrow p \frac{\gamma}{2\pi} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha + \theta)} - \lambda_0$.

Au final,

$$\gamma = \frac{2\pi}{p} \left(\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha + \theta)} - \lambda_0 \right).$$

Expression de β en fonction de θ'

$$\begin{cases} \lambda \cos \beta = b \cos \theta' + a \\ \lambda \sin \beta = b \sin \theta' \end{cases} \Rightarrow \tan \beta = \frac{b \sin \theta'}{b \cos \theta' + a}$$

1.3 Détermination de la loi en vitesse

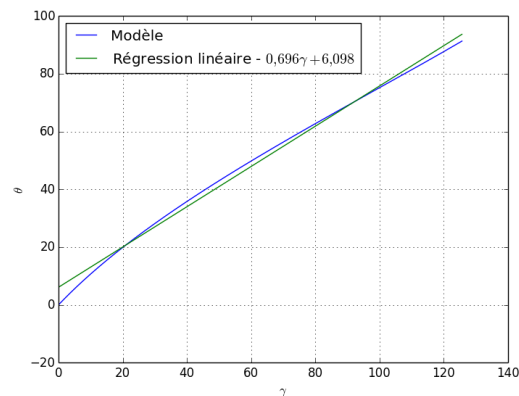
On a :

$$\dot{\theta} = - \frac{2 \left(\sqrt{d^2 + (c+b)^2} + p \frac{\gamma}{2\pi} \right) \left(+ p \frac{\dot{\gamma}}{2\pi} \right)}{2ab} \sqrt{1 - \left(\frac{\left(\sqrt{d^2 + (c+b)^2} + p \frac{\gamma}{2\pi} \right)^2 - a^2 - b^2}{2ab} \right)^2}$$

1.4 Tracé des courbes

Application numérique :

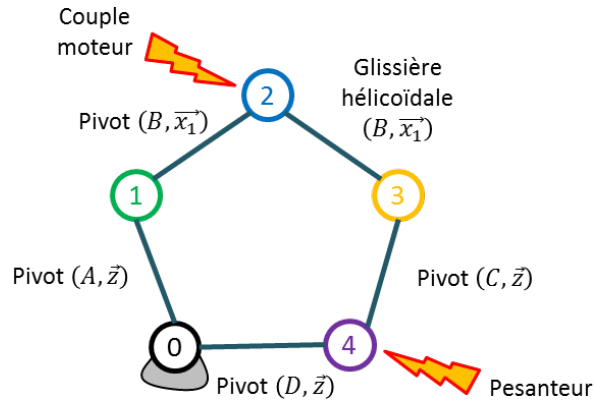
- $a = 106,3 \text{ mm}$;
- $b = 80 \text{ mm}$;
- $c = 70 \text{ mm}$;
- $d = 80 \text{ mm}$.



Loi Entrée Sortie – Position angulaire du bras en fonction de la position du moteur

2 Étude statique

2.1 Modélisation



Calcul d'hyperstatisme :

- nombre d'ensembles : $n_p = 4$;
- nombres d'inconnues statiques : $n_s = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$;
- nombre de mobilités : $m = 1$.

$$h = 1 - 24 + 25 = 2$$

. Pour lever l'hyperstatisme il faudrait ajouter deux mobilités pour résoudre toutes les inconnues de liaison.

2.2 Bilan des actions mécaniques

Liaison pivot entre 0 et 1 :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} = 0 & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \mathcal{R}_1} = \begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} + \lambda Z_{01} \\ Z_{01} & -\lambda Y_{01} \end{Bmatrix}_{C, \mathcal{R}_1} = \begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ 0 & M_{01} + \lambda Z_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_{C, \mathcal{R}_1}$$

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}(C, 0 \rightarrow 1)} &= \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{R(0 \rightarrow 1)} \\ &= \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} - \lambda \vec{x}_1 \wedge (X_{01} \vec{x}_1 + Y_{01} \vec{y}_1 + Z_{01} \vec{z}_1) \\ &= \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 0 \rightarrow 1)} - (Y_{01} \lambda \vec{z}_1 - Z_{01} \lambda \vec{y}_1) \end{aligned}$$

Liaison pivot entre 1 et 2 :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}_1}$$

Liaison glissière hélicoïdale entre 2 et 3 :

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & N_{23} \end{Bmatrix}_{E, \mathcal{R}_1} = \begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} + e Z_{23} \\ Z_{23} & N_{23} - e Y_{23} \end{Bmatrix}_{C, \mathcal{R}_1}$$

Par ailleurs, $|L_{23}| = p|X_{23}|$.

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 3)} &= \overrightarrow{\mathcal{M}(E, 2 \rightarrow 3)} + \overrightarrow{CE} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 3)} \\ &= \overrightarrow{\mathcal{M}(E, 2 \rightarrow 3)} - e \vec{x}_1 \wedge (X_{23} \vec{x}_1 + Y_{23} \vec{y}_1 + Z_{23} \vec{z}_1) \\ &= \overrightarrow{\mathcal{M}(E, 2 \rightarrow 3)} - e (Y_{23} \vec{z}_1 - Z_{23} \vec{y}_1) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}(D, 2 \rightarrow 3)} &= \overrightarrow{\mathcal{M}(E, 2 \rightarrow 3)} + \overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{R(2 \rightarrow 3)} \\ &= \overrightarrow{\mathcal{M}(E, 2 \rightarrow 3)} + (b \vec{x}_4 - e \vec{x}_1) \wedge (X_{23} \vec{x}_1 + Y_{23} \vec{y}_1 + Z_{23} \vec{z}_1) \\ &= \overrightarrow{\mathcal{M}(E, 2 \rightarrow 3)} + (b X_{23} \vec{x}_4 \wedge \vec{x}_1 + Y_{23} (b \vec{x}_4 \wedge \vec{y}_1 - e \vec{z}_1) + Z_{23} (b \vec{x}_4 \wedge \vec{z}_1 + e \vec{y}_1)) \\ &= \overrightarrow{\mathcal{M}(E, 2 \rightarrow 3)} + (b X_{23} \sin(\theta + \alpha - \beta) \vec{z}_1 + Y_{23} (b \cos(\theta + \alpha - \beta) \vec{z}_1 - e \vec{z}_1) + Z_{23} (b \vec{x}_4 \wedge \vec{z}_1 + e \vec{y}_1)) \end{aligned}$$

Liaison pivot entre 3 et 4 :

$$\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 4)\} = \begin{Bmatrix} X_{34} & L_{34} \\ Y_{34}=0 & M_{34} \\ Z_{34} & 0 \end{Bmatrix}_{C, \mathcal{R}_1} = \begin{Bmatrix} X_{34} & L_{34} + \dots \\ 0 & M_{34} + \dots \\ Z_{34} & b(X_{34} \sin(\theta + \alpha - \beta)) \end{Bmatrix}_{D, \mathcal{R}_1}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(D, 3 \rightarrow 4)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(C, 3 \rightarrow 4)} + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{R(3 \rightarrow 4)}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(D, 3 \rightarrow 4)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(C, 3 \rightarrow 4)} + b \overrightarrow{x_4} \wedge (X_{34} \overrightarrow{x_1} + Z_{34} \overrightarrow{z_1})$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}(D, 3 \rightarrow 4)} = \overrightarrow{\mathcal{M}(C, 3 \rightarrow 4)} + b(X_{34} \sin(\theta + \alpha - \beta) \overrightarrow{z_1} + Z_{34} \overrightarrow{x_4} \wedge \overrightarrow{z_1})$$

Liaison pivot entre 0 et 4 :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 4)\} = \begin{Bmatrix} X_{04} & L_{04} \\ Y_{04} & M_{04} \\ Z_{04} & 0 \end{Bmatrix}_{D, \mathcal{R}_1}$$

Actions de pesanteur sur 4 :

$$\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 4)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G, \mathcal{R}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & -Lmg \cos \theta \end{Bmatrix}_{G, \mathcal{R}_0}$$

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}(D, \text{pes} \rightarrow 4)} &= \overrightarrow{0} + \overrightarrow{DG} \wedge (-mg \overrightarrow{y_0}) \\ &= L \overrightarrow{x_4} \wedge (-mg \overrightarrow{y_0}) \\ &= -Lmg \cos \theta \overrightarrow{z_0} \end{aligned}$$

Couple moteur sur 2 :

$$\{\mathcal{T}(\text{m} \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & C_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{R}_1}$$

2.3 Recherche du couple moteur en fonction de la masse

Isolement de 2

Le solide 2 est soumis à trois actions mécaniques. On réalise le torseur du moment statique en B en projection sur $\overrightarrow{x_1}$.

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{T}(\text{mot} \rightarrow 2)\} = \{0\}$$

On a donc :

$$C_m + L_{32} = 0$$

Isolement de 3

On isole le solide 3 soumis à 2 torseurs et on applique le PFS :

$$\{\mathcal{T}(4 \rightarrow 3)\} + \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = \{0\} \iff -\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 4)\} + \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_{23} - X_{34} = 0 \\ Y_{23} - Y_{34} = 0 \Rightarrow Y_{23} = 0 \text{ car } Y_{43} = 0 \text{ cf isolement suivant} \\ Z_{23} - Z_{34} = 0 \\ L_{23} - L_{34} = 0 \\ M_{23} + e Z_{23} - M_{34} = 0 \\ N_{23} - e Y_{23} = 0 \Rightarrow N_{23} = 0 \end{cases}$$

$$|L_{23}| = \frac{p}{2\pi} |X_{23}|$$

Isolement de 1 – 2 – 3

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} + \{\mathcal{T}(4 \rightarrow 3)\} + \{\mathcal{T}(\text{mot} \rightarrow 2)\} = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_{01} + X_{43} = 0 \\ Y_{01} + Y_{43} = 0 \Rightarrow Y_{43} = 0 \\ Z_{01} + Z_{43} = 0 \\ L_{01} + C_{\text{mot}} + L_{43} = 0 \\ M_{01} + \lambda Z_{01} + M_{43} = 0 \\ -\lambda Y_{01} + 0 = 0 \Rightarrow Y_{01} = 0 \end{cases}$$

Isolement de 4

Application du théorème du moment statique en D en projection sur \vec{z} :

$$b X_{34} \sin(\theta + \alpha - \beta) - L m g \cos \theta = 0$$

$$b X_{34} = L m g \frac{\cos \theta}{\sin(\theta + \alpha - \beta)}$$

On a alors :

$$L_{23} = \pm \frac{p}{2\pi} L m g \frac{\cos \theta}{b \sin(\theta + \alpha - \beta)}$$

$$\tan \beta = \frac{b \sin \theta'}{b \cos \theta' + a}, \theta' = \alpha + \theta$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \theta' = \alpha$$

$$\tan \beta = \frac{b \sin \alpha}{b \cos \alpha + a},$$

2.4 Calcul divers

$$\begin{aligned} \vec{x}_4 &= \cos \theta \vec{x}_0 + \sin \theta \vec{y}_0 = \cos \theta (\cos \alpha \vec{x}_0' + \sin \alpha \vec{y}_0') + \sin \theta (-\sin \alpha \vec{x}_0' + \cos \alpha \vec{y}_0') = (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) \vec{x}_0' + \\ &(\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha) \vec{y}_0' = \cos(\theta + \alpha) \vec{x}_0' + \sin(\theta + \alpha) \vec{y}_0' \\ \vec{x}_4 \wedge \vec{x}_1 &= (\cos(\theta + \alpha) \vec{x}_0' + \sin(\theta + \alpha) \vec{y}_0') \wedge \vec{x}_1 = \cos(\theta + \alpha) \sin \beta \vec{z}_1 - \sin(\theta + \alpha) \cos \beta \vec{z}_1 = \sin(\theta + \alpha - \beta) \vec{z}_1 \\ \vec{x}_4 \wedge \vec{y}_1 &= (\cos(\theta + \alpha) \vec{x}_0' + \sin(\theta + \alpha) \vec{y}_0') \wedge \vec{y}_1 = \cos(\theta + \alpha) \cos \beta \vec{z}_1 + \sin(\theta + \alpha) \sin \beta \vec{z}_1 = \cos(\theta + \alpha - \beta) \vec{z}_1 \\ \vec{x}_4 \wedge \vec{z}_1 &= (\cos(\theta + \alpha) \vec{x}_0' + \sin(\theta + \alpha) \vec{y}_0') \wedge \vec{z}_1 = -\cos(\theta + \alpha) \vec{y}_0' + \sin(\theta + \alpha) \vec{x}_0' \\ \text{Au bilan :} \\ \vec{x}_4 \wedge \vec{x}_1 &= \sin(\theta + \alpha - \beta) \vec{z}_1 \\ \vec{x}_4 \wedge \vec{y}_1 &= \cos(\theta + \alpha - \beta) \vec{z}_1 \\ \vec{x}_4 \wedge \vec{z}_1 &= -\cos(\theta + \alpha) \vec{y}_0' + \sin(\theta + \alpha) \vec{x}_0' \end{aligned}$$