

## TD 01

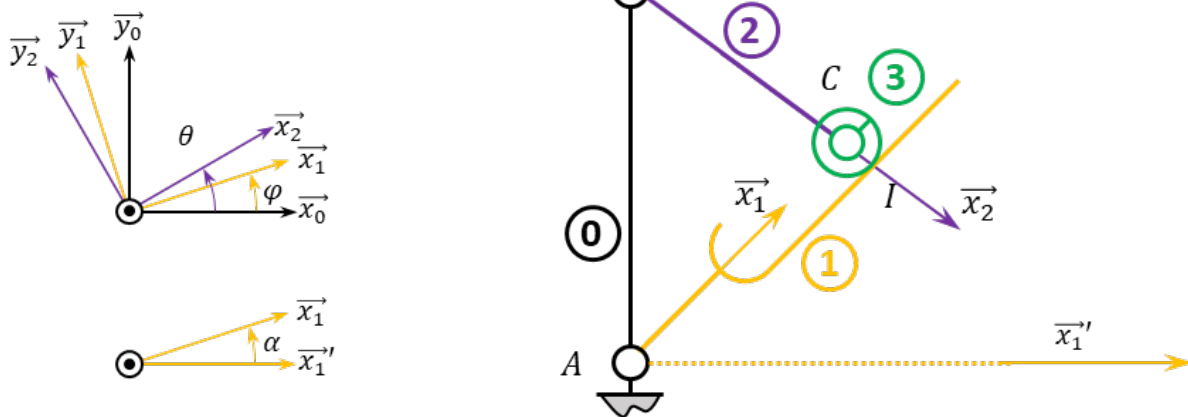
### Documents de TP

*Étude théorique de la barrière Sympact*

**Savoirs et compétences :**

## 1 Modélisation cinématique de la barrière Sympact

### 1.1 Schéma cinématique



On pose  $\overrightarrow{AB} = H \overrightarrow{y_0}$ ,  $\overrightarrow{BC} = R \overrightarrow{x_2}$  et  $\overrightarrow{AC} = \lambda(t) \overrightarrow{x_1}$ .

### 1.2 Détermination de la loi Entrée / Sortie

La fermeture de chaîne cinématique s'écrit ainsi :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$  soit  $H \overrightarrow{y_0} + R \overrightarrow{x_2} - \lambda(t) \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0}$

Projetons cette relation dans le repère  $\mathcal{R}_0$  :  $H \overrightarrow{y_0} + R (\cos \theta(t) \overrightarrow{x_0} + \sin \theta(t) \overrightarrow{y_0}) - \lambda(t) (\cos \varphi(t) \overrightarrow{x_0} + \sin \varphi(t) \overrightarrow{y_0}) = \overrightarrow{0}$ .

On a alors : 
$$\begin{cases} R \cos \theta(t) - \lambda(t) \cos \varphi(t) = 0 \\ H + R \sin \theta(t) - \lambda(t) \sin \varphi(t) = 0 \end{cases}$$

Pour exprimer la loi entrée sortie, il faut déterminer  $\varphi$  en fonction de  $\theta$ . 
$$\begin{cases} R \cos \theta(t) = \lambda(t) \cos \varphi(t) \\ H + R \sin \theta(t) = \lambda(t) \sin \varphi(t) \end{cases}$$

En faisant le rapport, on a donc  $\tan \varphi(t) = \frac{H + R \sin \theta(t)}{R \cos \theta(t)}$ .

**Expression analytique de  $\lambda$ .** On peut aussi vouloir exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\varphi(t)$  (nécessaire en statique).

On a donc : 
$$\begin{cases} R \cos \theta(t) = \lambda(t) \cos \varphi(t) \\ R \sin \theta(t) = \lambda(t) \sin \varphi(t) - H \end{cases} \text{ et } R^2 = (\lambda(t) \cos \varphi(t))^2 + (\lambda(t) \sin \varphi(t) - H)^2 \text{ soit } R^2 = \lambda(t)^2 + H^2 - 2\lambda(t) \sin \varphi(t) H.$$

On résout donc  $\lambda(t)^2 - 2\lambda(t) \sin \varphi(t) H + H^2 - R^2 = 0$ .  $\Delta = 4H^2 \sin^2 \varphi(t) - 4(H^2 - R^2)$  et donc

$$\lambda = \frac{2 \sin \varphi(t) H \pm \sqrt{4H^2 \sin^2 \varphi(t) - 4(H^2 - R^2)}}{2}.$$

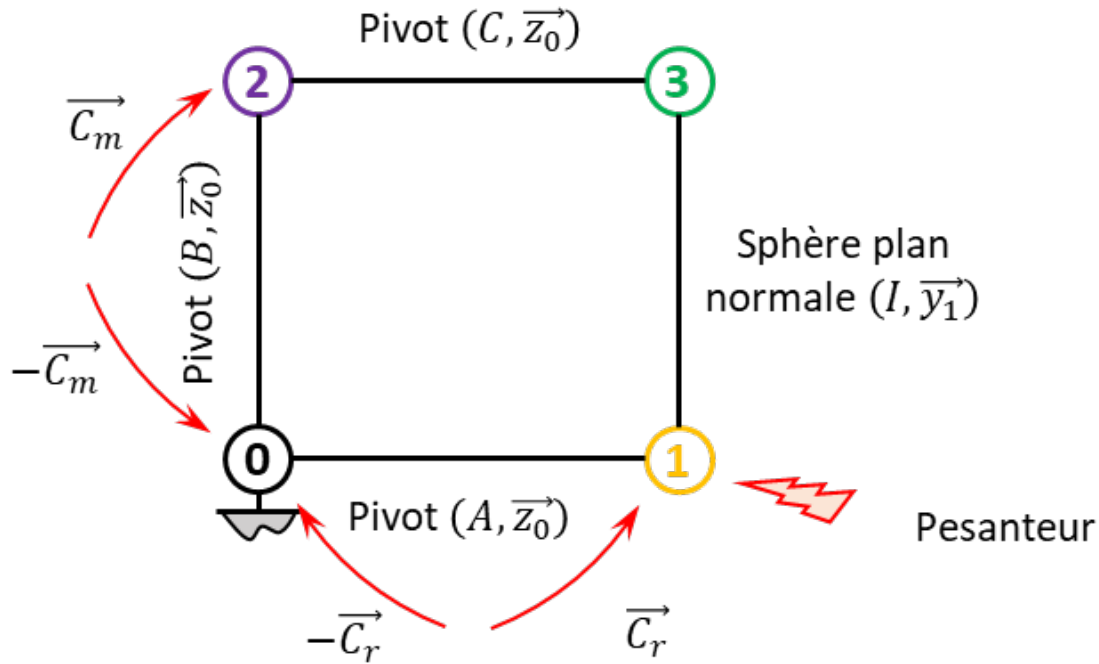
$$\lambda = \sin \varphi(t) H \pm \sqrt{H^2 \sin^2 \varphi(t) - (H^2 - R^2)}.$$

### 1.3 Détermination de la loi en vitesse

### 1.4 Tracé des courbes

Application numérique :

## 2 Détermination du couple moteur en statique



## 2.1 Isolement du galet 3

**On isole le galet (3) soumis à deux glisseurs.**

**BAME**

- Pivot entre 2 et 3 :  $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\}$ .
- Sphère plan entre 1 et 3 :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 3)\}$ .

**Application du PFS** D'après le PFS, on a donc :  $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} + \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 3)\} = \{0\}$

$$\text{soit } \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 3)\} = -\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} F \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I.$$

## 2.2 Isolement de la manivelle 2 + Galet 3

**BAME**

- Pivot entre 0 et 2 :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\}$ .
- Sphère plan entre 1 et 3 :  $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$ .
- Moteur entre 0 et 2 :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$ .

## Application du PFS

On utilise le théorème du moment statique en  $B$  en projection sur l'axe  $\vec{z}$ .

Déplacement de  $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\}$  en  $B$ .

$$\begin{aligned} \text{On a } \overrightarrow{\mathcal{M}(B, 3 \rightarrow 2)} \cdot \overrightarrow{z_0} &= \left( \overrightarrow{\mathcal{M}(I, 3 \rightarrow 2)} + \overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{R(3 \rightarrow 2)} \right) \cdot \overrightarrow{z_0} \\ &= \left( (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}) \wedge \overrightarrow{R(3 \rightarrow 2)} \right) \cdot \overrightarrow{z_0} \\ &= ((R\overrightarrow{x_2} - r\overrightarrow{y_1}) \wedge (-F\overrightarrow{y_1})) \cdot \overrightarrow{z_0} = -rF(\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{y_1}) \cdot \overrightarrow{z_0} = -rF(\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{x_2} = -rF\overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{x_2} = -rF \cos(\theta - \varphi) \end{aligned}$$

Le TMS en  $B$  s'écrit donc sous la forme  $C_m = rF \sin(\theta - \varphi)$

Le TMS en  $B$  s'écrit donc sous la forme  $C_m = r F \sin(\theta - \varphi)$

### 2.3 Isolement de la barrière 1

**BAME**

- Pivot entre 0 et 1 :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\}$ .
- Sphère plan entre 1 et 2 :  $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_I$ .
- Ressort entre 0 et 1 :  $\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_r \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ .
- Pesanteur sur 1 :  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -M g \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_C$  avec  $G$  tel que  $\overrightarrow{AG} = \mu \overrightarrow{x_1'}$

### Application du PFS

On utilise le théorème du moment statique en A en projection sur l'axe  $\vec{z}$ .

- Déplacement de  $\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\}$  en A.

$$\begin{aligned} \text{On a } \overrightarrow{\mathcal{M}(A, 3 \rightarrow 2)} \cdot \vec{z}_0 &= \left( \overrightarrow{\mathcal{M}(I, 3 \rightarrow 2)} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{R(3 \rightarrow 2)} \right) \cdot \vec{z}_0 \\ &= \left( (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}) \wedge \overrightarrow{R(3 \rightarrow 2)} \right) \cdot \vec{z}_0 = \left( (\lambda \vec{x}_1 - r \vec{y}_1) \wedge (-F \vec{y}_1) \right) \cdot \vec{z}_0 = (\lambda \vec{x}_1 \wedge (-F \vec{y}_1)) \cdot \vec{z}_0 = -\lambda F \end{aligned}$$

- Déplacement de  $\{\mathcal{T}(\text{pes} \rightarrow 1)\}$  en A. On a  $\overrightarrow{\mathcal{M}(A, \text{pes} \rightarrow 1)} \cdot \vec{z}_0 = (\overrightarrow{AG} \wedge (-Mg \vec{y}_0)) \cdot \vec{z}_0 = (\mu \vec{x}_1' \wedge (-Mg \vec{y}_0)) \cdot \vec{z}_0$   
 $= -Mg\mu (\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_1' = -Mg\mu \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1' = -Mg\mu \cos(\varphi - \alpha)$

Le TMS en B s'écrit donc sous la forme  $-\lambda F + C_r - Mg\mu \cos(\varphi - \alpha) = 0$ .

### 2.4 Résolution

$$\text{On a : } \begin{cases} C_m = r F \sin(\theta - \varphi) \\ -\lambda F + C_r - Mg\mu \cos(\varphi - \alpha) = 0 \Leftrightarrow F = \frac{C_r - Mg\mu \cos(\varphi - \alpha)}{\lambda} \end{cases}$$

$$\text{On a donc } C_m = r \sin(\theta - \varphi) \frac{C_r - Mg\mu \cos(\varphi - \alpha)}{\lambda}.$$

### 2.5 Expression de $C_r$

La raideur du ressort est de 100° pour 40 Nm soit  $\frac{180 \times 40}{100\pi}$  Nm par radian soit 23 Nm rad<sup>-1</sup>.

De plus,  $C_r(\varphi) = k\varphi + C_0$  avec

$$\begin{cases} C_r\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0 = k\frac{3\pi}{4} + C_0 \\ C_r\left(\frac{\pi}{4}\right) = 23\frac{\pi}{2} = k\frac{\pi}{4} + C_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = -k\frac{3\pi}{4} \\ 23\frac{\pi}{2} = k\frac{\pi}{4} - k\frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = 23\frac{3\pi}{4} \\ k = -23 \end{cases}$$

$$\text{Au final, } C_r(\varphi) = -23\varphi + 23\frac{3\pi}{4}.$$

### Références

[1] xx