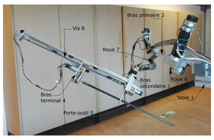
Corrigé



Chirurgie mini-invasive robotisée avec stabilisation des mouvements physiologiques

Concours Centrale Supelec PSI 2019

1 Analyse des propriétés des signaux physiologiques

Objectif Analyser les propriétés des signaux physiologiques et en déduire des éléments du cahier des charges de la loi de commande pour assurer le déplacement du robot avec le niveau de précision requis.

1.1 Analyse des propriétés des signaux des mouvements physiologiques

Objectif Proposer un algorithme permettant de mettre en évidence les propriétés des mouvements respiratoires.

Question 1
Proposition 1 En première approximation, on peut dire que ce signal est périodique, de période 4.8 s. La valeur maximale est de 5 mm et la valeur minimale est de −2.5 s. Si on avait à la modéliser par un signal sinusoïdal on aurait $e(t)=3,75\sin\left(\dfrac{2\pi}{4,8}t\right)+1,25$.

Proposition 2
Le signal semble presque periodique même si les amplitudes des déplacement ne pas exactement les mêmes. L'amplitude maximale obtenue est d'environ $\dfrac{5+2,3}{2}=3.65\,\text{mm}$ et l'amplitude minimale obtenue est d'environ : $\dfrac{4+6}{2}=3\,\text{mm}$; La période des oscillation est d'environ $T\approx\dfrac{41-4}{9}\approx 4.1\,\text{s}$. Soit une pulsation de $\omega\approx 1.53\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 2 D'après la définition, $\hat{S}(f_n)=\dfrac{1}{N_f}\displaystyle\sum_{k=0}^{N_f-1}s[kT_e]\mathrm{e}^{-i2\pi f_n T_e k}$

$$=\frac{1}{N_f}\left(s[0T_e]\mathrm{e}^{-i2\pi f_n T_e 0}+s[T_e]\mathrm{e}^{-i2\pi f_n T_e}+\dots s\left[\left(N_f-1\right)T_e\right]\mathrm{e}^{-i2\pi f_n T_e\left(N_f-1\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{N_f}\left(s[0]+s[T_e]\mathrm{e}^{-i2\pi f_n T_e}+\dots s\left[\left(N_f-1\right)T_e\right]\mathrm{e}^{-i2\pi f_n T_e\left(N_f-1\right)}\right).$$

On a donc $l_k(f_n)=\dfrac{1}{N_f}\mathrm{e}^{-i2\pi f_n T_e k}$.

Question 3 On a $L_n=\begin{pmatrix}l_0 f_n & l_1 f_n & l_2 f_n & \dots & l_{N-1} f_n\end{pmatrix}$. Par ailleurs, $S_p=\begin{pmatrix}\hat{S}(0)\\ \hat{S}(f_1)\\ \hat{S}(f_2)\\ \vdots\\ \hat{S}(f_{N-1})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_0V_s\\ L_1V_s\\ L_2V_s\\ \vdots\\ L_{N-1}V_s\end{pmatrix}$.

On a donc $L_kV_s=\begin{pmatrix}l_0 f_k & l_1 f_k & l_2 f_k & \dots & l_{N-1} f_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s[0]\\ s[T_e]\\ s[2T_e]\\ \vdots\\ s[(N-1)T_e]\end{pmatrix}=\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1}l_i f_k s[iT_e]$.

Ainsi la matrice M est composé de toutes les lignes L_n pour $n\in[\![0,N_f-1]\!]$.
La matrice M aura donc pour forme :

$$M=\frac{1}{N_f}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i2\pi f_1 T_e} & \dots & e^{-i2\pi f_1 T_e(N-1)} \\ \vdots & e^{-i2\pi f_n T_e} & \dots & e^{-i2\pi f_n T_e(N-1)} \\ 1 & e^{-i2\pi f_{N_f-1} T_e} & \dots & e^{-i2\pi f_{N_f-1} T_e(N-1)} \end{pmatrix}$$

Question 4 De la question précédente, on peut exprimer le terme $a_{n,m}$ $a_{n,m}=\dfrac{1}{N_f}e^{-i2\pi f_n T_e m}$.

Question 5 En posant

$$X=-i2\pi\begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N_f-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & T_e & 2T_e & \dots & (N-1)T_e \end{pmatrix}=-i2\pi E_f\cdot t_k\text{, on obtient bien, } M=\frac{1}{N_f}\exp(X).$$

```
import numpy as np
def calculSpectre(Signal,Nf,fmax,Te):
    Vs=np.transpose([np.array(Signal)])
    Ef=np.transpose([np.linspace(0,fmax,Nf)])
    tk=np.array([range(len(Signal))])*Te
    X=np.dot(Ef,tk)*(-1j*2*np.pi)
    M=1/Nf*np.exp(X)
    Sp=np.dot(M,Vs)
    An=abs(Sp)
    return An
```

1.2 Cahiers des charges partiel de la chaîne d'asservissement en position du robot esclave

Objectif Déterminer une valeur numérique pour la bande passante de l'asservissement en position du robot esclave et vérifier le cahier des charges associé.

Question 7 D'une part, $H(p)=\dfrac{\varepsilon(p)}{Z*(p)}$ et d'autre part, $F(p)=\dfrac{Z(p)}{Z*(p)}$. Enfin, $\varepsilon(p)=Z^*(p)-Z(p)$. On a donc $\varepsilon(p)=\dfrac{\varepsilon(p)}{H(p)}-F(p)Z^*(p)=\dfrac{\varepsilon(p)}{H(p)}-F(p)\dfrac{\varepsilon(p)}{H(p)}$. On a donc $\varepsilon(p)=\dfrac{\varepsilon(p)}{H(p)}-F(p)\dfrac{\varepsilon(p)}{H(p)}\Longleftrightarrow H(p)=1-F(p)=p\dfrac{p+2\xi\omega_0}{p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2}$.

En mettant cette fonction de transfert sous forme canonique, on obtient :

$$H(p)=\frac{2\xi\cdot p}{\omega_0}\frac{1+\dfrac{p}{2\xi\omega_0}}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le module de cette fonction de transfert en remplaçant p par $i\omega$ représente le rapport des amplitudes en régime permanent vis-à-vis d'une entrée $z*(t)$ sinusoïdale : $\dfrac{\varepsilon_2}{A_2}=||H(i\omega_2)||$.
- L'argument de cette fonction de transfert en remplaçant p par $i\omega$ représente le déphasage en régime permanent vis-à-vis d'une entrée $z^*(t)$ sinusoïdale : $\Theta_2-\Phi_2=\arg(H(i\omega_2))$.

Ainsi on a : $\begin{cases}\varepsilon_2=A_2\cdot||H(i\omega_2)|| \\ \Theta_2=\arg(H(i\omega_2))+\Phi_2\end{cases}$.

Supposons que $z_2(t)=A_2\sin(\omega_2 t+\Phi_2)$. De plus, $\varepsilon_2(t)=\varepsilon_2\sin(\omega_2 t+\Theta_2)$. On a donc, $\varepsilon_2=||H(i\omega_2)||A_2$, $\Phi_2-\Theta_2=\arg(H(i\omega_2))$.

En considérant de faibles pulsations telles que $\omega\ll\omega_0$, on peut effectuer l'approximation : $H(p)\approx\dfrac{2\xi\cdot p}{\omega_0}$.

On obtient donc bien : $||H(i\omega)||\approx K\cdot\omega$ avec $K=\dfrac{2\xi}{\omega_0}$.

Remarque : il aurait sûrement été préférable de préciser ici au candidat qu'on a $z_n(t)=A_n\sin\left(2\pi f_n t+\Phi_n\right)=A_n\sin(\omega_n t+\Phi_n)$.

Question 8 Lorsque $\omega << \omega_0$, $\left\|\dfrac{1}{p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2}\right\|$ tend vers 0. Calculons $\left\|(j\omega)^2+2\xi\omega_0\omega j\right\| = \sqrt{4\xi^2\omega_0^2\omega^2+\omega^2} = \omega\sqrt{4\xi^2\omega_0^2+1}$.

On a donc $\|H(i\omega)\| \simeq K\omega$ avec $K=\sqrt{4\xi^2\omega_0^2+1}$ lorsque $\omega << \omega_0$.

A VERIFIER Au final, $\varepsilon_2 \simeq \omega_2\sqrt{4\xi^2\omega_0^2+1}A_2\sin(\omega_2 t+\Phi_2)$.

Question 9

D'après l'exigence 1.3.3, $\dfrac{\varepsilon_2}{A_2} < 10^{-2}$, on obtient alors la relation suivante : $\dfrac{\varepsilon_2}{A_2} \approx \dfrac{2\xi\omega_2}{\omega_0} < 10^{-2}$. XP : Pourquoi ?

Ce qui donne $\omega_0 > 200\xi\omega_2 \approx 603\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$

D'après le cahier des charges l'exigence 1.2 concernant l'asservissement en position, et donc la fonction de transfert $F(p)$, impose une bande passante (que l'on suppose à 0 dB), inférieure à $30\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$. $F(p)$ est une fonction de transfert du second ordre de gain 1 et la bande passante à 0 dB est de l'ordre de $\omega_0 \approx 600\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$. **Le cahier des charges est donc bien respecté.**

Remarque : je ne comprends pas bien la formulation de la question : « En considérant ε_2, déterminer (...) ».

2 Analyse géométrique et élaboration du modèle dynamique du robot esclave

Objectif Vérifier la capabilité du robot esclave à respecter le cahier des charges et déterminer le modèle dynamique d'un des axes du robot esclave utilisé pour dimensionner sa commande.

2.1 Vérification de la capabilité du robot esclave

Objectif Vérifier la capacité du robot esclave à respecter l'exigence de précision 1.3.3 et dimensionner les capteurs installés sur le robot en conséquence.

Question 10 D'après le cahier des charges $\varepsilon_r < 1\%$. D'après la figure 4, la variation maximale des déplacement est de 7.5 mm. Il faudrait donc une résolution de $s_{max} = 75\,\mu\text{m}$

XP : Je ne vois pas comment déterminer la résolution à partir de la courbe. Pb de l'exigence 1.2.1 avec la précision de $10\,\mu$m.

Question 11 On a $\lambda(t) = \lambda_0 + \dfrac{p}{2\pi}\theta_{83}$. En conséquences, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD} = l_3\overrightarrow{y_3}+\lambda(t)\overrightarrow{z_3}+l_4\overrightarrow{z_4} = l_3\overrightarrow{y_3}+\left(\lambda_0+\dfrac{p}{2\pi}\theta_{83}\right)\overrightarrow{z_3}+l_4\overrightarrow{z_3}$.

Question 12 En projetant $\overrightarrow{BD}$ dans la base $\left(\overrightarrow{x_2'},\overrightarrow{y_2'},\overrightarrow{z_2'}\right)$, on a $\overrightarrow{BD} = l_3\overrightarrow{y_3}+\left(\lambda_0+\dfrac{p}{2\pi}\theta_{83}\right)\overrightarrow{z_3}+l_4\overrightarrow{z_3} = l_3\left(\cos\theta_{32}\overrightarrow{y_2'}-\sin\theta_{32}\overrightarrow{x_2'}\right)+\left(\lambda_0+\dfrac{p}{2\pi}\theta_{83}+l_4\right)\overrightarrow{z_2'}$.

Avec l'hypothèse que θ_{32} reste petit, on a $\overrightarrow{BD} = l_3\left(\overrightarrow{y_2'}-\theta_{32}\overrightarrow{x_2'}\right)+\left(\lambda_0+\dfrac{p}{2\pi}\theta_{83}+l_4\right)\overrightarrow{z_2'}$. Ainsi,

$(x_D,y_D,z_D) = \left(-l_3\theta_{32}, l_3, \lambda_0+\dfrac{p}{2\pi}\theta_{83}+l_4\right)$. XP : et λ_0 ?

Question 13 Soit, $s_D = 3\sqrt{s_X^2+s_Y^2+s_Z^2}$. Par calcul différentiel : XP ?

$$\begin{cases} d x_D = -l_3\, d\theta_{32} \\ d y_D = 0 \\ d z_D = \dfrac{p}{2\pi} d\theta_{83} \end{cases} \qquad \begin{cases} s_X = \Delta x_D = -l_3\Delta\theta_{32} = -l_3 s_{\text{capteur}} \\ s_Y = \Delta y_D = 0 \\ s_Z = \Delta z_D = \dfrac{p}{2\pi}\Delta\theta_{83} = \dfrac{p}{2\pi}s_{\text{capteur}} \end{cases}$$

Ainsi, $s_D = 3\cdot s_{\text{capteur}}\sqrt{l_3^2+\dfrac{p^2}{4\pi^2}}$. Le cahier des charges impose la relation suivante, $s_{\text{capteur}} < \dfrac{75\mu m}{3\sqrt{l_3^2+\dfrac{p^2}{4\pi^2}}}$.

L'application numérique donne $s_{\text{capteur}} = 2,72\times10^{-5}$ mm. Le cahier des charges est bien respecté.

2.2 Détermination et vérification du modèle dynamique du robot esclave

Objectif Déterminer le modèle dynamique du robot esclave en vue de l'élaboration de sa commande.

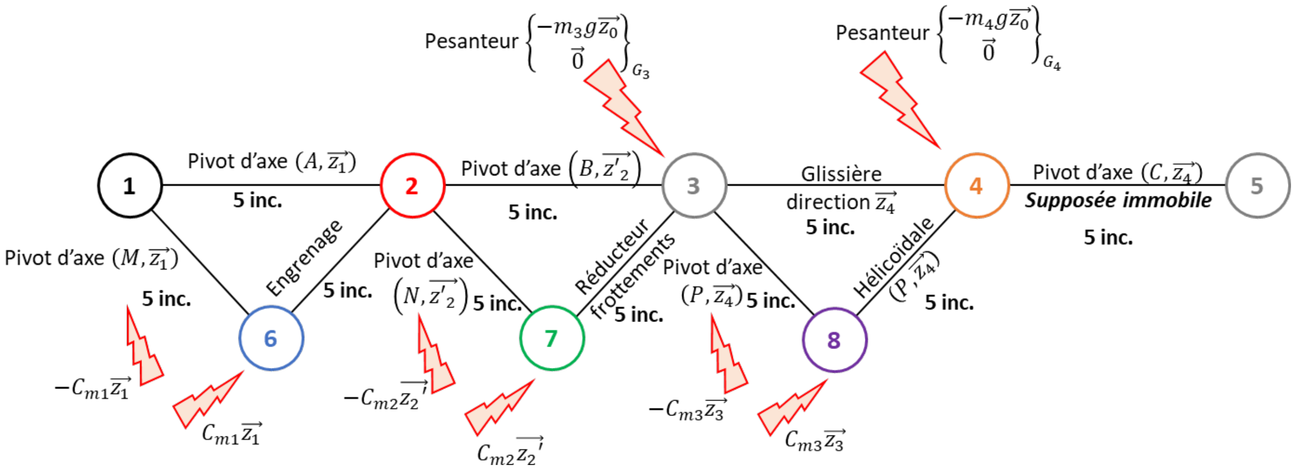
Question 14 On se place en régime permanent. Le rendement peut s'exprimer par $\eta_9 = \dfrac{C_{73}\dot{\theta}_{32}}{C_{m2}\dot{\theta}_{72}} = \dfrac{C_{73}}{C_{m2}} r_9$. On a donc, en régime permanent, $\overrightarrow{C_{73}} = C_{73}\overrightarrow{z_2'} = C_{m2}\dfrac{\eta_9}{r_9}\overrightarrow{z_2'}$.

Question 15 Au vu du tracé expérimental de C_{73} en fonction de C_{m2}, on peut réaliser une linéarisation sur l'intervalle $[0,10]$ et $C_{73} \simeq 3C_{m2}$. D'après les données constructeur, on a $C_{73} = C_{m2}\dfrac{\eta_9}{r_9} = C_{m2}\dfrac{0,78}{0,25} = 3.12\,\text{Nm}$.

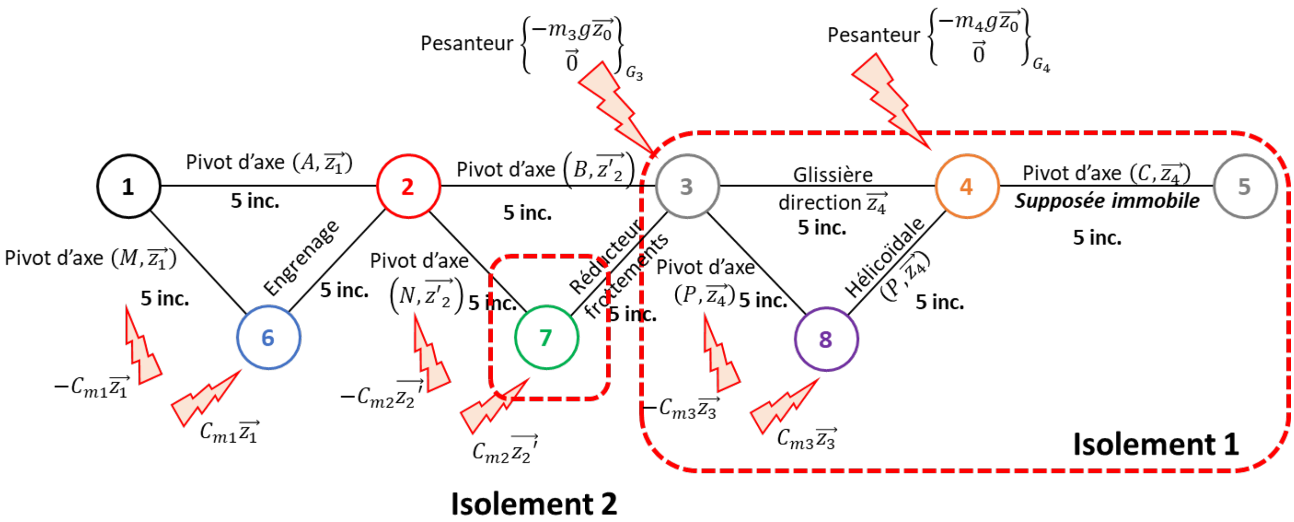
On peut donc valider les valeurs données par le constructeur.

2.3 Élaboration du modèle dynamique d'un axe du robot esclave

Question 16



Question 17 On cherche à déterminer le couple C_{m2} à fournir sur l'arbre 7. L'arbre 7 est en rotation autour de l'axe $\left(N,\overrightarrow{z_2'}\right)$. Il entraîne l'ensemble $\{3+8+4+5\}$ en rotation autour de l'axe $\left(B,\overrightarrow{z_2'}\right)$.



On propose donc les isolements et des théorèmes associés suivants :

- isolement de $\{3+8+4+5\}$: théorème du moment dynamique en projection sur $\left(B,\overrightarrow{z'_2}\right)$ qui permet de relier l'action de 7 sur 3 aux paramètres de mouvement de l'ensemble $\{3+8+4+5\}$ qui représente dans le cas particulier du mouvement souhaité la même classe d'équivalence ;
- isolement de 7 : théorème du moment dynamique selon $\left(N,\overrightarrow{z'_2}\right)$ qui revient à un théorème du moment statique car l'inertie de 7 est négligeable. Cela permet de relier C_{m2} à l'action de 3 sur 7.

Cet isolement permet de ne pas faire apparaître les inconnues dans les liaisons pivot entre 2 et 7 ainsi qu'entre 7 et 3.

Question 18 On cherche $\overrightarrow{V(G_4 \in 4/1)}$. On a $\overrightarrow{OG_4} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG_4} = l_0\overrightarrow{y_0} + l_1\overrightarrow{y_1} + l_2\overrightarrow{y_2} + l_2'\overrightarrow{y_2'} + l_3\overrightarrow{y_3} + \lambda(t)\overrightarrow{z_3} + b_4\overrightarrow{z_4}$. On a $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{4}$ et $\alpha_2 = -\dfrac{\pi}{4}$.

On a donc $\overrightarrow{V(G_4\in 4/1)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG_4}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}$

$= \left[\dfrac{\mathrm{d}l_0\overrightarrow{y_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left[\dfrac{\mathrm{d}l_1\overrightarrow{y_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left[\dfrac{\mathrm{d}l_2\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left[\dfrac{\mathrm{d}l'_2\overrightarrow{y'_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left[\dfrac{\mathrm{d}l_3\overrightarrow{y_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left[\dfrac{\mathrm{d}\lambda(t)\overrightarrow{z_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left[\dfrac{\mathrm{d}b_4\overrightarrow{z_4}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}$

$= \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} + l_2\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + l'_2\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{y'_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + l_3\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \lambda(t)\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \dot\lambda(t)\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + b_4\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_4}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}$

$= l_2\left[\overrightarrow{\Omega(2/0)}\wedge\overrightarrow{y_2}\right] + l'_2\left[\overrightarrow{\Omega(2'/0)}\wedge\overrightarrow{y'_2}\right] + l_3\left[\overrightarrow{\Omega(3/0)}\wedge\overrightarrow{y_3}\right] + \lambda(t)\left[\overrightarrow{\Omega(3/0)}\wedge\overrightarrow{z_3}\right] + \dot\lambda(t)\overrightarrow{z_3} + b_4\left[\overrightarrow{\Omega(4/0)}\wedge\overrightarrow{z_4}\right].$

$= l_2\left[\dot\theta_{21}\overrightarrow{z_2}\wedge\overrightarrow{y_2}\right] + l'_2\left[\dot\theta_{21}\overrightarrow{z_2}\wedge\overrightarrow{y'_2}\right] + l_3\left[\left(\dot\theta_{21}\overrightarrow{z_2}+\dot\theta_{32}\overrightarrow{z_3}\right)\wedge\overrightarrow{y_3}\right] + \lambda(t)\left[\left(\dot\theta_{21}\overrightarrow{z_2}+\dot\theta_{32}\overrightarrow{z_3}\right)\wedge\overrightarrow{z_3}\right] + \dot\lambda(t)\overrightarrow{z_3} + b_4\left[\left(\dot\theta_{21}\overrightarrow{z_2}+\dot\theta_{32}\overrightarrow{z_3}\right)\wedge\overrightarrow{z_3}\right].$

Or $\dot\theta_{21}=0$. On a donc : $\overrightarrow{V(G_4\in 4/1)} = l_3\left(\dot\theta_{32}\overrightarrow{z_3}\wedge\overrightarrow{y_3}\right) + \dot\lambda(t)\overrightarrow{z_3} = -\dot\theta_{32}l_3\overrightarrow{x_3} + \dot\lambda(t)\overrightarrow{z_3}$.

Question 19 En utilisant l'évolution de $\dot\theta_{32}$, on peut déterminer le déplacement angulaire effectué en traçant l'aire sous la courbe : $\theta_{32} = \dfrac{1}{2}(1+0,5)\times 0,075 = 0.056\,\text{rad} \simeq 3^\text{o}$.

Cet angle étant faible, on peut donc considérer que $\forall t\ \cos(\theta_{32}(t))\simeq 1$ et $\sin(\theta_{32}(t))\simeq 0$.

Question 20 On donne J_4 le moment d'inertie du bras 4 autour de l'axe $\left(G_4,\overrightarrow{z_4}\right)$.

Méthode

1. Expression de $\overrightarrow{\delta(B,4/1)}\cdot\overrightarrow{z_4} = \left(\overrightarrow{\delta(G_4,4/1)} + \overrightarrow{BG_4}\wedge m_4\overrightarrow{\Gamma(G_4\in 4/1)}\right)\cdot\overrightarrow{z_4}$.
2. Calcul de $\overrightarrow{\delta(G_4,4/1)}$.

$\overrightarrow{\delta(G_4,4/1)}\cdot\overrightarrow{z_4} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_4,4/1)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}\cdot\overrightarrow{z_4} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_4,4/1)}\cdot\overrightarrow{z_4}}{\mathrm{d}t}\right] - \overrightarrow{\sigma(G_4,4/1)}\cdot\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_4}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}$

On a $\overrightarrow{\sigma(G_4,4/1)} = I_{G_4}(4)\overrightarrow{\Omega(4/1)}$ avec $\overrightarrow{\Omega(4/1)} = \underbrace{\overrightarrow{\Omega(4/3)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega(3/2)} + \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot\theta_{32}\overrightarrow{z_3} + \underbrace{\dot\theta_{21}}_{0}\overrightarrow{z_2} = \dot\theta_{32}\overrightarrow{z_4}$.

Donc, $\overrightarrow{\sigma(G_4,4/1)}\cdot\overrightarrow{z_4} = J_4\dot\theta_{32}$.

De plus, $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_4}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{0}$. En conséquences, $\overrightarrow{\delta(G_4,4/1)}\cdot\overrightarrow{z_4} = J_4\ddot\theta_{32}$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{\Gamma(G_4\in 4/1)} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V(G_4\in 4/1)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\left(-\dot\theta_{32}l_3\overrightarrow{x_3}+\dot\lambda(t)\overrightarrow{z_3}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} = -\ddot\theta_{32}l_3\overrightarrow{x_3} - \dot\theta_{32}l_3\left(\dot\theta_{32}\overrightarrow{z_3}\wedge\overrightarrow{x_3}\right) + \ddot\lambda(t)\overrightarrow{z_3}$

$= -\ddot\theta_{32}l_3\overrightarrow{x_3} - l_3\dot\theta_{32}^2\overrightarrow{y_3} + \ddot\lambda(t)\overrightarrow{z_3}$.

$\left(\overrightarrow{BG_4}\wedge m_4\overrightarrow{\Gamma(G_4\in 4/1)}\right)\cdot\overrightarrow{z_4} = m_4\left(\left(l_3\overrightarrow{y_3}+\lambda(t)\overrightarrow{z_3}+b_4\overrightarrow{z_4}\right)\wedge\left(-\ddot\theta_{32}l_3\overrightarrow{x_3} - l_3\dot\theta_{32}^2\overrightarrow{y_3} + \ddot\lambda(t)\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{z_{4,3}}$

Par simplification avec les propriétés du produit mixte et du produit vectoriel,

$\left(\overrightarrow{BG_4}\wedge m_4\overrightarrow{\Gamma(G_4\in 4/1)}\right)\cdot\overrightarrow{z_4} = m_4\left(\left(l_3\overrightarrow{y_3}\right)\wedge\left(-\ddot\theta_{32}l_3\overrightarrow{x_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{z_{4,3}} = m_4\cdot l_3^2\ddot\theta_{32}$

Au final, $\overrightarrow{\delta(B,4/1)}\cdot\overrightarrow{z_4} = J_4\ddot\theta_{32} + \ddot\theta_{32}l_3^2m_4$.

Question 21 Par analogie avec la question précédente, on a $\overrightarrow{\delta(B,3/1)}\cdot\overrightarrow{z_4} = J_3\ddot\theta_{32} + \ddot\theta_{32}a_3^2m_3$.

En conséquence, $\overrightarrow{\delta(B,3+4+5+8/1)}\cdot\overrightarrow{z_4} = (J_3+J_4)\ddot\theta_{32} + \ddot\theta_{32}\left(a_3^2m_3 + l_3^2m_4\right)$.

XP :il me semble que pour traiter la question serieusement il faudrait définir « proprement » l'action de 3 sur 7

On isole l'ensemble $\{3,4,5,8\}$**.**

- On réalise le bilan des actions mécaniques extérieures.
  - XP : La pesanteur crée un moment en B suivant $\overrightarrow{z_0}$ (le schéma est trompeur).
  - Action de la pesanteur sur 3 : $\overrightarrow{\mathscr{M}(B,\text{pes}\to 3)}\cdot\overrightarrow{z_4} = \left(\overrightarrow{BG_3}\wedge\left(-m_3g\overrightarrow{z_0}\right)\right)\overrightarrow{z_4} = \left(\left(a_3\overrightarrow{y_3}+b_3\overrightarrow{z_3}\right)\wedge\left(-m_3g\overrightarrow{z_0}\right)\right)\overrightarrow{z_4}$

    $= \left(a_3\overrightarrow{y_4}\wedge\left(-m_3g\overrightarrow{z_0}\right)\right)\overrightarrow{z_4} = \left(\overrightarrow{z_4}\wedge a_3\overrightarrow{y_4}\right)\cdot\left(-m_3g\overrightarrow{z_0}\right) = a_3m_3g\left(\overrightarrow{x_3}\cdot\overrightarrow{z_0}\right) = a_3m_3g\left(\cos\theta_{32}\overrightarrow{x'_2}+\sin\theta_{32}\overrightarrow{y'_2}\right)\cdot\overrightarrow{z_0}$

    On utilise les hypothèses de linéarisation vues précédemment et on a $\overrightarrow{\mathscr{M}(B,\text{pes}\to 3)}\cdot\overrightarrow{z_4} = a_3m_3g\,\overrightarrow{x'_2}\cdot\overrightarrow{z_0}$

    $= a_3m_3g\,\overrightarrow{x_2}\cdot\overrightarrow{z_0} = a_3m_3g\left(\cos\theta_{21}\overrightarrow{x_1}+\sin\theta_{21}\overrightarrow{y_1}\right)\cdot\overrightarrow{z_0} = a_3m_3g\left(\cos\theta_{21}\overrightarrow{x_0}+\sin\theta_{21}\left(\cos\alpha_1\overrightarrow{y_0}+\sin\alpha_1\overrightarrow{z_0}\right)\right)\cdot\overrightarrow{z_0}$

    $= a_3m_3g\sin\theta_{21}\sin\alpha_1$. En faisant l'application numérique, on a donc $\overrightarrow{\mathscr{M}(B,\text{pes}\to 3)}\cdot\overrightarrow{z_4} = a_3m_3g\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
  - Action de la pesanteur sur 4 : $\overrightarrow{\mathscr{M}(B,\text{pes}\to 4)}\cdot\overrightarrow{z_4} = \left(\overrightarrow{BG_4}\wedge\left(-m_4g\overrightarrow{z_0}\right)\right)\overrightarrow{z_4}$

$= \left(\left(l_3\overrightarrow{y_3}+\lambda(t)\overrightarrow{z_3}+b_4\overrightarrow{z_4}\right)\wedge\left(-m_4 g\overrightarrow{z_0}\right)\right)\overrightarrow{z_4}.$

Pour Emilien $\left(\overrightarrow{BG_4}\wedge\left(-m_4 g\overrightarrow{z_0}\right)\right)\overrightarrow{z_{4,3}} = \overrightarrow{z}_3\wedge l_3\overrightarrow{y}_3\cdot\left(-m_4\cdot g\cdot\overrightarrow{z}_0\right) = m_4 l_3 g\overrightarrow{x}_3\cdot\overrightarrow{z}_0$

Or,

$\overrightarrow{x}_3 = \cos\theta_{32}\overrightarrow{x}_{2,2'}+\sin\theta_{32}\overrightarrow{y}_{2'}$

avec $\cos\theta_{32}\approx 1$ et $\sin\theta_{32}\approx 0$

Donc,

$\overrightarrow{x}_3\cdot\overrightarrow{z}_0 = \left(\cos\theta_{21}\overrightarrow{x}_{1,0}+\sin\theta_{21}\overrightarrow{y}_1\right)\cdot\overrightarrow{z}_0 = \cos\theta_{21}\sin\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ On obtient alors,

$\overrightarrow{\mathcal{M}(B,\text{pes}\to 4)}\cdot\overrightarrow{z_4} = l_3 m_4 g\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

Pour Xavier :

Par analogie avec le calcul précédent, $\overrightarrow{\mathcal{M}(B,\text{pes}\to 4)}\cdot\overrightarrow{z_4} = l_3 m_4 g\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

- $\overrightarrow{\mathcal{M}(B,2\to 3)}\cdot\overrightarrow{z_0} = 0.$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}(B,7\to 3)}\cdot\overrightarrow{z_4} = C_{73}$ (Indication du sujet).

- En appliquant le théorème du moment dynamique en B en projection sur $\overrightarrow{z}$ on a donc $C_{73} = (J_3+J_4)\ddot{\theta}_{32} + \ddot{\theta}_{32}\left(a_3^2 m_3 + l_3^2 m_4\right) + g\dfrac{\sqrt{6}}{4}(a_3 m_3 + l_3 m_4).$

Il semblerait que ce qui est attendu soit d'utiliser $C_{73} = C_{m2}\dfrac{\eta_9}{r_9}$**, mais cette relation avait été établie en régime permanent ce qui n'est plus le cas.**

Selon Xavier $C_{m2}\dfrac{\eta_9}{r_9} = \left(J_3+J_4+a_3^2 m_3+l_3^2 m_4\right)\ddot{\theta}_{32} + g\sin\theta_{21}\sin\alpha_1(a_3 m_3 + l_3 m_4).$

Par identification, on a donc :

- $J_{eq} = J_3+J_4+a_3^2 m_3+l_3^2 m_4$;
- $A = \dfrac{\eta_9}{r_9}$;
- $C_r(t) = -g\sin\theta_{21}\sin\alpha_1(a_3 m_3 + l_3 m_4).$

Selon Emilien $C_{m2}\dfrac{\eta_9}{r_9} = \left(J_3+J_4+a_3^2 m_3+l_3^2 m_4\right)\ddot{\theta}_{32} + g\dfrac{\sqrt{2}}{4}(a_3 m_3 + l_3 m_4).$

Par identification, on a donc :

- $J_{eq} = J_3+J_4+a_3^2 m_3+l_3^2 m_4$;
- $A = \dfrac{\eta_9}{r_9}$;
- $C_r(t) = -g\dfrac{\sqrt{2}}{4}(a_3 m_3 + l_3 m_4).$

Remarque : J_{eq} **dépendrait aussi de** a_3 **et** m_3**.**

Question 22 D'après l'expression donnée, on a $C_r(t) = J_{eq}\ddot{\theta}_{32}(t) - AC_{m2}(t)$. Lorsque la vitesse est constante, on a donc $C_r(t) = -AC_{m2}(t)$ avec $C_{m2}(t) = -53.25\,\text{Nm}$ et $C_r(t) = \dfrac{0,78}{0,25}\cdot 53,25 = 166.14\,\text{Nm}$. **Trop grand.**

À accélération constante, $\ddot{\theta}_{32} = \dfrac{0,075}{0,25} = 0.3\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}$. On a donc $J_{eq} = \dfrac{C_r(t)+AC_{m2}(t)}{\ddot{\theta}_{32}(t)} = \dfrac{C_r(t)-A51,25}{0,3}\ \dfrac{166,14-51,25\dfrac{0,78}{0,25}}{0,3} = 20.8\,\text{kg}\,\text{m}^2.$

Encore trop gros

Selon Emilien :

Soit,

- $C_{m2}^a = C_{m2}(t) \approx -51,2N.m$ pour $t\in[0;0,25]$;
- $C_{m2}^b = C_{m2}(t) \approx -53N.m$ pour $t\in[0,25;0,75]$;
- $C_{m2}^b = C_{m2}(t) \approx -55N.m$ pour $t\in[0,75;1]$;
- $\ddot{\theta}_{32}(t) = \ddot{\theta}_{32a} = \dfrac{0,075}{0,25} = 0,3\,rad\cdot s^{-2}$ pour $t\in[0;0,25]$

On obtient alors 3 équations :

$$\begin{array}{l} (a) \\ \\ (b) \\ \\ (c) \end{array}\left\{\begin{array}{r} J_{eq}\ddot{\theta}_{32a} = A\cdot C_{m2}^a + C_r(t) \\ \\ 0 = A\cdot C_{m2}^b + C_r(t) \\ \\ -J_{eq}\ddot{\theta}_{32a} = A\cdot C_{m2}^c + C_r(t) \end{array}\right.$$

En combinant les équations :

- $(b) \rightarrow C_r(t) = -A\cdot C^b_{m2} = -\dfrac{\eta_9}{r_9} C^b_{m2} \approx -165.67 N.m$
- $(a)-(c) \rightarrow 2J_{eq}\ddot{\theta}_{32a} = A\cdot\left(C^a_{m2} - C^c_{m2}\right)$

On obtient alors,

$$J_{eq} = \frac{A\cdot\left(C^a_{m2} - C^c_{m2}\right)}{2\ddot{\theta}_{32a}} \approx 19,76 kg\cdot m^2$$

Question 23 En faisant l'application numérique à partir des données de l'énoncé, on trouve :

$$\begin{cases} J_{eqth} = 18,1 kg\cdot m^2 \\ C_{rth} = -85,57 N\cdot m \end{cases}$$

3 Définition et analyse de la chaîne d'asservissement du robot esclave

Objectif Définir le régulateur de la chaîne d'asservissement du robot esclave, analyser ses performances vis-à-vis des perturbations en se limitant à celles dues aux couples de frottement sec et compléter la chaîne d'asservissement par la compensation de ces efforts.

3.1 Calcul d'un correcteur et analyse partielle des performances de la chaîne d'asservissement

Objectif Déterminer un correcteur pour la chaîne d'asservissement de la position angulaire des articulations. Afin d'aboutir à une démarche générale (indépendante d'une articulation particulière), la loi de commande sera paramétrée par le moment d'inertie équivalent de l'articulation considérée.

Question 24 En exprimant l'équation différentielle proposée dans le domaine de Laplace, on a $J_{\text{eq}}p^2Q_j(p) = C_j(p) + C_{\text{ext}}(p)$. En utilisant le schéma-blocs, on a $Q_j(p) = \left(C_{\text{ext}}(p) + C_j(p)\right)T(p)$. Par analogie, on a donc $T(p) = \dfrac{1}{J_{\text{eq}}p^2}$.

On considère que $C_{\text{ext}}(p) = 0$. On peut alors exprimer $F_j(p) = \dfrac{\dfrac{K_1T(p)}{1+T(p)K_2p}}{1+\dfrac{K_1T(p)}{1+T(p)K_2p}} = \dfrac{\dfrac{K_1T(p)}{1+T(p)K_2p}}{1+\dfrac{K_1T(p)}{1+T(p)K_2p}} = \dfrac{K_1T(p)}{1+T(p)K_2p+K_1T(p)}$

$$= \frac{K_1\dfrac{1}{J_{\text{eq}}p^2}}{1+\dfrac{1}{J_{\text{eq}}p^2}K_2p + K_1\dfrac{1}{J_{\text{eq}}p^2}} = \frac{K_1}{J_{\text{eq}}p^2+K_2p+K_1} = \frac{1}{\dfrac{J_{\text{eq}}}{K_1}p^2 + \dfrac{K_2}{K_1}p + 1}.$$

On a donc $\dfrac{1}{\omega_0^2} = \dfrac{J_{\text{eq}}}{K_1}$ et $\dfrac{2\xi}{\omega_0} = \dfrac{K_2}{K_1}$. On a donc $K_1 = J_{\text{eq}}\omega_0^2$ et $K_2 = \dfrac{2\xi K_1}{\omega_0} = 2\xi J_{\text{eq}}\omega_0$.

Question 25 On imagine ici qu'il faut considérer que $Q*_j(p) = 0$.

On a $C_j(p) = -\left(K_1+K_2p\right)Q_j(p)$ et $Q_j(p) = \left(C_j(p) + C_{\text{ext}}(p)\right)T(p)$. On a donc

$Q_j(p) = \left(-\left(K_1+K_2p\right)Q_j(p) + C_{\text{ext}}(p)\right)T(p) \Leftrightarrow \left(1+\left(K_1+K_2p\right)T(p)\right)Q_j(p) = C_{\text{ext}}(p)\cdot T(p) \Leftrightarrow \dfrac{Q_j(p)}{C_{\text{ext}}(p)} = \dfrac{T(p)}{1+\left(K_1+K_2p\right)T(p)}$.

En utilisant les valeurs déterminées précédemment, on a donc $D(p) = \dfrac{\dfrac{1}{J_{eq}p^2}}{1+\left(J_{\text{eq}}\omega_0^2 + 2\xi J_{\text{eq}}\omega_0 p\right)\dfrac{1}{J_{\text{eq}}p^2}}$

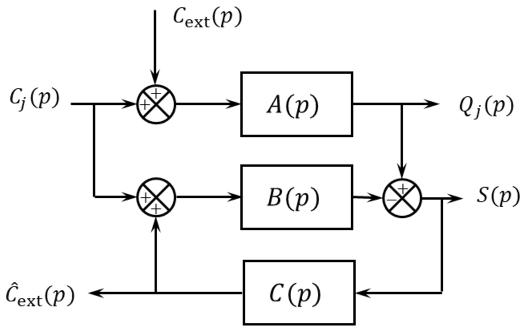
$$= \frac{1}{J_{eq}p^2 + 2\xi J_{\text{eq}}\omega_0 p + J_{eq}\omega_0^2} = \frac{\dfrac{1}{J_{eq}\omega_0^2}}{\dfrac{p^2}{\omega_0^2} + \dfrac{2\xi}{\omega_0}p + 1}.$$

On a $C_{\text{ext}}(p) = \dfrac{C_{\text{ext0}}}{p}$. En conséquence, $\lim\limits_{t\to+\infty}\varepsilon(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\varepsilon(p)$. Par ailleurs, $\varepsilon(p) = -Q_j(p) = -D(p)C_{\text{ext}}(p)$.

On a alors $\lim\limits_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=\lim\limits_{p\to 0}-pD(p)C_{\text{ext}}(p)=\lim\limits_{p\to 0}-p\dfrac{\dfrac{1}{J_{eq}\omega_0^2}}{\dfrac{p^2}{\omega_0^2}+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+1}\cdot\dfrac{C_{ext0}}{p}=-\dfrac{C_{\text{ext0}}}{J_{eq}\omega_0}$. **Conclure.** L'erreur ici n'est pas nul est elle dépend de l'inertie.

3.2 Amélioration des performances par compensation du couple de perturbation

Objectif Améliorer les performances de la loi de commande vis-à-vis des couples perturbateurs extérieurs.



Question 26 On note $A(p)$, $B(p)$ et $C(p)$ les trois fonctions de transfert des trois blocs recherchés.

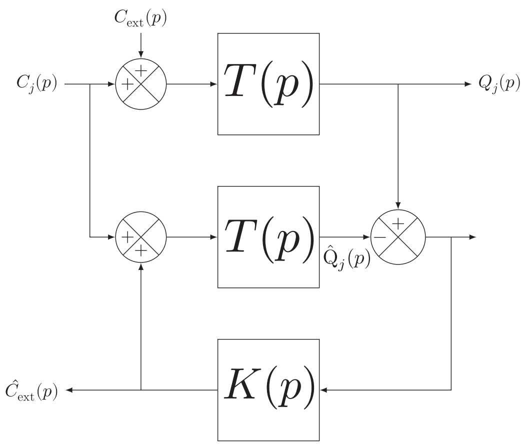
On a : $Q_j(p)=A(p)\big(C_j(p)+C_{\text{ext}}(p)\big)$, $S(p)=Q_j(p)-B(p)\big(C_j(p)+\hat{C}_{\text{ext}}(p)\big)$ et $\hat{C}_{\text{ext}}(p)=C(p)S(p)$.

soit

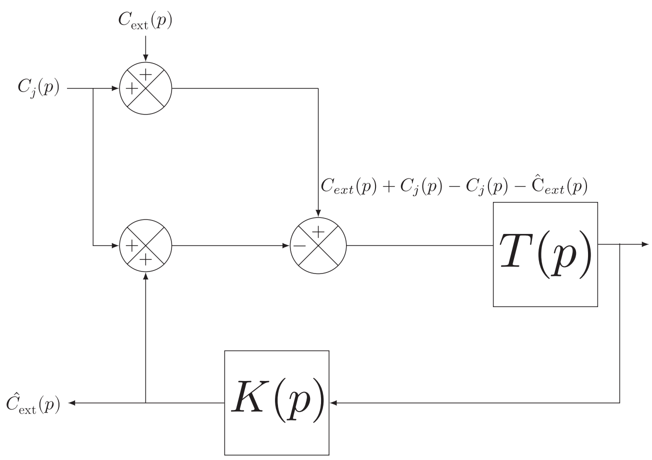
$\hat{C}_{\text{ext}}(p)=C(p)\big(Q_j(p)-B(p)\big(C_j(p)+\hat{C}_{\text{ext}}(p)\big)\big)$

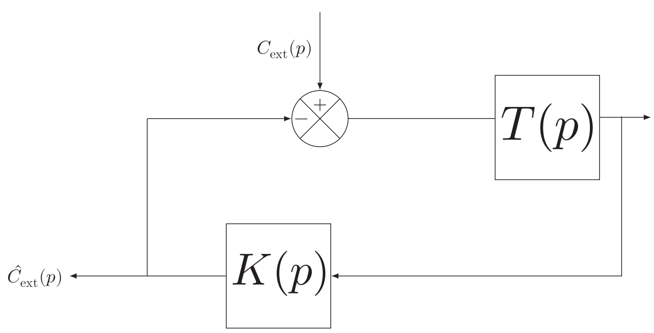
$\Leftrightarrow \hat{C}_{\text{ext}}(p)\big(1+C(p)B(p)\big)=C(p)\big(Q_j(p)-C(p)B(p)\big)$

Il semblerait qu'il manque une information concernant le schéma bloc. Il faudrait sans doute ajouter $\hat{Q}_j(p)$. Cela donnerait directement :



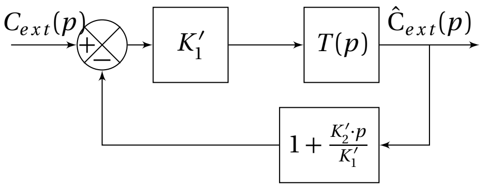
Question 27 En manipulant le schéma bloc on peut obtenir :





Question 28 **Remarque :** On peut hésiter entre prendre la structure de la partie III.A (Méthode A) ou donner un $K(p)$ équivalent sous la forme d'un correcteur P.D. (Méthode B).

Méthode A : Ainsi en manipulant le schéma bloc on obtient :

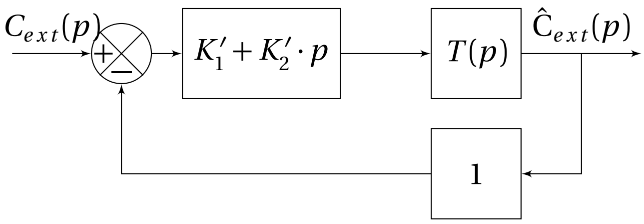


La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$H_{BF}(p) = \frac{\dfrac{K_1'}{J_{eq}p^2}}{1+\dfrac{K_1'}{J_{eq}p^2}\left(1+\dfrac{K_2'}{K_1'}p\right)} = \frac{K_1'}{J_{eq}\cdot p^2 + K_2'\cdot p + K_1'} = \frac{1}{1+\dfrac{K_2'}{K_1'}p+\dfrac{J_{eq}}{K_1'}p^2}$$

Méthode B :

Ainsi en manipulant le schéma bloc on obtient :



La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$H_{BF}(p) = \frac{\dfrac{K_1'+K_2'\cdot p}{J_{eq}p^2}}{1+\dfrac{K_1'+K_2'\cdot p}{J_{eq}p^2}} = \frac{K_1'+K_2'\cdot p}{J_{eq}\cdot p^2 + K_2'\cdot p + K_1'} = \frac{1+\dfrac{K_2'}{K_1'}p}{1+\dfrac{K_2'}{K_1'}p+\dfrac{J_{eq}}{K_1'}p^2}$$

Par identification, pour les deux méthodes et avec ce qu'impose la cahier des charges.

$$\begin{cases} \omega_0' = \sqrt{\dfrac{K_1'}{J_{eq}}} = 5\omega_0 \\ \xi = \dfrac{\omega_0'}{2}\dfrac{K_2'}{K_1'} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{K_1'}{J_{eq}}}\dfrac{K_2'}{K_1'} = 1 \end{cases}$$

On obtient alors,

$$\begin{cases} K_1' = 25\cdot J_{eq}\cdot \omega_0^2 \\ K_2' = 2\sqrt{K_1'\cdot J_{eq}} = 10\cdot J_{eq}\cdot\omega_0 \end{cases}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 2 ainsi l'erreur statique est nulle.

Question 29 Notons $H_{28}(p)$ la fonction de transfert déterminée à la question 28 :

$$H_{28}(p) = \frac{\hat{C}_{ext}(p)}{C_{ext}(p)} = \frac{K(p)\cdot T(p)}{1+K(p)\cdot T(p)}$$

Avec $Q_j^*(p) = 0$.

$$C_j(p) = \tilde{C}_j(p) - \hat{C}_{ext}(p) = -\left(K_1 + K_2\cdot p\right)Q_j(p) - H_{28}(p)C_{ext}(p)$$

D'après la lecture du schéma bloc :

$$Q_j(p) = T(p)\left(C_j(p)+C_{ext}(p)\right) = T(p)\left(-\left(K_1+K_2\cdot p\right)Q_j(p) + \left(1-H_{28}(p)\right)C_{ext}(p)\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Q_j(p)\left(1+T(p)\left(K_1+K_2\cdot p\right)\right) = C_{ext}(p)T(p)\left(1-H_{28}(p)\right)$$

On trouve donc :

$$\frac{Q_j(p)}{C_{ext}(p)} = \frac{T(p)}{\left(1+K(p)\cdot T(p)\right)\left(1+T(p)\left(K_1+K_2\cdot p\right)\right)}$$

Avec $K(p) = K_1' + K_2' \cdot p$ et $T(p) = \dfrac{1}{J_{eq}p^2}$,

$$\frac{Q_j(p)}{C_{ext}(p)} = \frac{J_{eq}p^2}{\left(J_{eq}p^2 + K_1' + K_2'\cdot p\right)\left(J_{eq}p^2 + K_1 + K_2\cdot p\right)}$$

D'après les questions 24 et 27,

$$\frac{Q_j(p)}{C_{ext}(p)} = \frac{\dfrac{p^2}{J_{eq}}}{\left(p+\omega_0'\right)^2\left(p+\omega_0\right)^2}$$

- **Stabilité :** On remarque que les pôles de la FTBF sont à partie réelles strictement négatives ($-\omega_0$ et $-\omega_0'$) ce qui **est une condition nécessaire et suffisante de stabilité.**
- **Précision :**

  Soit $\varepsilon(p) = -Q_j(p) = -\dfrac{\dfrac{p^2}{J_{eq}}}{\left(p+\omega_0'\right)^2\left(p+\omega_0\right)^2} C_{ext}(p)$. En considérant c_{ext} comme une constante, $C_{ext}(p) = \dfrac{C_0}{p}$.

  L'erreur statique vis-à-vis d'une perturbation constante est donnée par :

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0}\left[-\frac{\dfrac{C_0\cdot p^2}{J_{eq}}}{\left(p+\omega_0'\right)^2\left(p+\omega_0\right)^2}\right] = 0$$

  L'erreur statique vis-à-vis d'une perturbation constante est bien nulle.

4 Analyse des performances vis-à-vis des mouvements respiratoires

Objectif Quantifier le niveau de performance de la loi de commande déterminée en considérant la consigne correspondant aux mouvements physiologiques. Une amélioration de la loi de commande est ensuite envisagée sous la forme d'une anticipation sur la consigne pour améliorer les performances.

Question 30 Pour un signal périodique en entrée d'amplitude B, l'écart sera un signal périodique d'amplitude $0,066B$. Soit 2.64×10^{-3} rad et 5.94×10^{-3} rad.

Conclure ?

Question 31 On a $C_j(p) = C_u(p) + C_a(p) = \left(\varepsilon(p)K_1 - K_2pQ_j(p)\right) + C_a(p)$

$= \left(\left(Q_j^\star(p) - Q_j(p)\right)K_1 - K_2pQ_j(p)\right) + C_a(p)$

$= \left(\left(Q_j^\star(p) - Q_j(p)\right)K_1 - K_2pC_j(p)T(p)\right) + C_a(p)$.

En considérant que la consigne est suivie sans erreur, on a $C_j(p) = -K_2pC_j(p)T(p) + C_a(p)$ et donc $C_j(p) = \dfrac{1}{1+K_2pT(p)}C_a(p)$. Est-ce la bonne piste ?

Question 32

On a $Q_j(p) = C_j(p)T(p) = \left(Q_j^\star(p)K_a(p) + C_u(p)\right)T(p) = \left(Q_j^\star(p)K_a(p) + C_u(p)\right)T(p) = \left(Q_j^\star(p)K_a(p) + \left(\varepsilon(p)K_1 - K_2pQ_j(p)\right)\right)T(p)$

$= \left(Q_j^\star(p)K_a(p) + \left(\left(Q_j^\star(p) - Q_j(p)\right)K_1 - K_2pQ_j(p)\right)\right)T(p)$

$\Leftrightarrow Q_j(p) = \left(Q_j^\star(p)K_a(p) + \left(\left(Q_j^\star(p) - Q_j(p)\right)K_1 - K_2pQ_j(p)\right)\right)T(p)$

$\Leftrightarrow Q_j(p) = T(p)Q_j^\star(p)K_a(p) + T(p)\left(\left(Q_j^\star(p) - Q_j(p)\right)K_1 - K_2pQ_j(p)\right)$

$\Leftrightarrow Q_j(p) = T(p)Q_j^\star(p)K_a(p) + T(p)K_1Q_j^\star(p) - T(p)K_1Q_j(p) - T(p)K_2pQ_j(p)$

$\Leftrightarrow Q_j(p)\left(1+T(p)K_1+T(p)K_2p\right)=Q_j^{\star}(p)T(p)\left(K_a(p)+K_1\right)$

On a donc $F(p)=\dfrac{Q_j(p)}{Q_j^{\star}(p)}=\dfrac{K_a(p)+K_1}{1+T(p)K_1+T(p)K_2p}$.

Question 33

Question 34