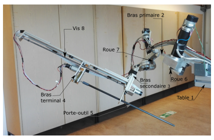
TD 01



Chirurgie mini-invasive robotisée avec stabilisation des mouvements physiologiques

Concours Centrale Supelec PSI 2019

1 Analyse des propriétés des signaux physiologiques

Objectif Analyser les propriétés des signaux physiologiques et en déduire des éléments du cahier des charges de la loi de commande pour assurer le déplacement du robot avec le niveau de précision requis.

1.1 Analyse des propriétés des signaux des mouvements physiologiques

Objectif Proposer un algorithme permettant de mettre en évidence les propriétés des mouvements respiratoires.

Question 1
Proposition 1 En première approximation, on peut dire que ce signal est périodique, de période 4.8 s. La valeur maximale est de 5 mm et la valeur minimale est de −2.5 s. Si on avait à la modéliser par un signal sinusoïdal on aurait $e(t)=3,75\sin\left(\dfrac{2\pi}{4,8}t\right)+1,25$.

Proposition 2

Le signal semble presque periodique même si les amplitudes des déplacement ne pas exactement les mêmes. L'amplitude maximale obtenue est d'environ $\dfrac{5+2,3}{2}=3.65\,\text{mm}$ et l'amplitude minimale obtenue est d'environ : $\dfrac{4+6}{2}=3\,\text{mm}$; La période des oscillation est d'environ $T\approx\dfrac{41-4}{9}\approx 4.1\,\text{s}$. Soit une pulsation de $\omega\approx 1.53\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Question 2 D'après la définition, $\hat{S}\left(f_n\right)=\dfrac{1}{N_f}\displaystyle\sum_{k=0}^{N_f-1}s\left[kT_e\right]\mathrm{e}^{-i2\pi f_n T_e k}$

$$=\frac{1}{N_f}\left(s\left[0T_e\right]\mathrm{e}^{-i2\pi f_n T_e 0}+s\left[T_e\right]\mathrm{e}^{-i2\pi f_n T_e}+\dots s\left[\left(N_f-1\right)T_e\right]\mathrm{e}^{-i2\pi f_n T_e\left(N_f-1\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{N_f}\left(s\left[0\right]+s\left[T_e\right]\mathrm{e}^{-i2\pi f_n T_e}+\dots s\left[\left(N_f-1\right)T_e\right]\mathrm{e}^{-i2\pi f_n T_e\left(N_f-1\right)}\right).$$

On a donc $l_k\left(f_n\right)=\dfrac{1}{N_f}\mathrm{e}^{-i2\pi f_n T_e k}$.

Question 3 On a $L_n=\begin{pmatrix}l_0 f_n & l_1 f_n & l_2 f_n & \dots & l_{N-1} f_n\end{pmatrix}$. Par ailleurs, $S_p=\begin{pmatrix}\hat{S}(0)\\ \hat{S}\left(f_1\right)\\ \hat{S}\left(f_2\right)\\ \vdots\\ \hat{S}\left(f_{N-1}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_0 V_s\\ L_1 V_s\\ L_2 V_s\\ \vdots\\ L_{N-1} V_s\end{pmatrix}$.

On a donc $L_k V_s=\begin{pmatrix}l_0 f_k & l_1 f_k & l_2 f_k & \dots & l_{N-1} f_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s[0]\\ s[T_e]\\ s[2T_e]\\ \vdots\\ s[(N-1)T_e]\end{pmatrix}=\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} l_i f_k s\left[iT_e\right]$.

Ainsi la matrice M est composé de toutes les lignes L_n pour $n\in[\![0,N_f-1]\!]$.
La matrice M aura donc pour forme :

$$M=\frac{1}{N_f}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & e^{-i2\pi f_1 T_e} & \dots & e^{-i2\pi f_1 T_e(N-1)}\\ \vdots & e^{-i2\pi f_n T_e} & \dots & e^{-i2\pi f_n T_e(N-1)}\\ 1 & e^{-i2\pi f_{N_f-1} T_e} & \dots & e^{-i2\pi f_{N_f-1} T_e(N-1)} \end{pmatrix}$$

Question 4 De la question précédente, on peut exprimer le terme $a_{n,m}$ $a_{n,m}=\frac{1}{N_f}e^{-i2\pi f_n T_e m}$.

Question 5 En posant

$$X=-i2\pi\begin{pmatrix} 0\\ f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_{N_f-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & T_e & 2T_e & \dots & (N-1)T_e\end{pmatrix}=-i2\pi E_f\cdot t_k\text{, on obtient bien, } M=\frac{1}{N_f}\exp(X).$$

```
import numpy as np
def calculSpectre(Signal,Nf,fmax,Te):
    Vs=np.transpose([np.array(Signal)])
    Ef=np.transpose([np.linspace(0,fmax,Nf)])
    tk=np.array([range(len(Signal))])*Te
    X=np.dot(Ef,tk)*(-1j*2*np.pi)
    M=1/Nf*np.exp(X)
    Sp=np.dot(M,Vs)
    An=abs(Sp)
    return An
```

1.2 Cahiers des charges partiel de la chaîne d'asservissement en position du robot esclave

Objectif Déterminer une valeur numérique pour la bande passante de l'asservissement en position du robot esclave et vérifier le cahier des charges associé.

Question 7 D'une part, $H(p)=\frac{\varepsilon(p)}{Z^*(p)}$ et d'autre part, $F(p)=\frac{Z(p)}{Z^*(p)}$. Enfin, $\varepsilon(p)=Z^*(p)-Z(p)$. On a donc $\varepsilon(p)=\frac{\varepsilon(p)}{H(p)}-F(p)Z^*(p)=\frac{\varepsilon(p)}{H(p)}-F(p)\frac{\varepsilon(p)}{H(p)}$. On a donc $\varepsilon(p)=\frac{\varepsilon(p)}{H(p)}-F(p)\frac{\varepsilon(p)}{H(p)}\Leftrightarrow H(p)=1-F(p)=p\frac{p+2\xi\omega_0}{p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2}$.

««««< HEAD

En mettant cette fonction de transfert sous forme canonique, on obtient :

$$H(p)=\frac{2\xi\cdot p}{\omega_0}\frac{1+\frac{p}{2\xi\omega_0}}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

- Le module de cette fonction de transfert en remplaçant p par $i\omega$ représente le rapport des amplitudes en régime permanent vis-à-vis d'une entrée $z*(t)$ sinusoïdale :

$$\frac{\varepsilon_2}{A_2}=||H(i\omega_2)||$$

- L'argument de cette fonction de transfert en remplaçant p par $i\omega$ représente le déphasage en régime permanent vis-à-vis d'une entrée $z^*(t)$ sinusoïdale :

$$\Theta_2-\Phi_2=arg(H(i\omega_2))$$

Ainsi on trouve :

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = A_2 \cdot \|H(i\omega_2)\| \\ \Theta_2 = arg(H(i\omega_2)) + \Phi_2 \end{cases}$$

======= Supposons que $z_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \Phi_2)$. De plus, $\varepsilon_2(t) = \varepsilon_2 \sin(\omega_2 t + \Theta_2)$. On a donc, $\varepsilon_2 = \|H(i\omega_2)\| A_2$,

$\Phi_2 - \Theta_2 = \arg(H(i\omega_2))$. »»»>

Remarque : il aurait sûrement été préférable de préciser ici au candidat qu'on a $z_n(t) = A_n \sin\left(2\pi f_n t + \Phi_n\right) = A_n \sin(\omega_n t + \Phi_n)$.

En considérant de faibles pulsations telles que $\omega \ll \omega_0$, on peut effectuer l'approximation :

$$H(p) \approx \frac{2\xi \cdot p}{\omega_0}$$

On obtient donc bien :

$$\|H(i\omega)\| \approx K \cdot \omega$$

avec $K = \dfrac{2\xi}{\omega_0}$.

Question 8 Lorsque $\omega << \omega_0$, $\left\|\dfrac{1}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}\right\|$ tend vers 0. Calculons $\left\|(j\omega)^2 + 2\xi\omega_0\omega j\right\| = \sqrt{4\xi^2\omega_0^2\omega^2 + \omega^2} = \omega\sqrt{4\xi^2\omega_0^2 + 1}$.

On a donc $\|H(i\omega)\| \simeq K\omega$ avec $K = \sqrt{4\xi^2\omega_0^2 + 1}$ lorsque $\omega << \omega_0$.

A VERIFIER Au final, $\varepsilon_2 \simeq \omega_2 \sqrt{4\xi^2\omega_0^2 + 1} A_2 \sin(\omega_2 t + \Phi_2)$.

Question 9 **????**

D'après l'exigence 1.3.3, $\dfrac{\varepsilon_2}{A_2} < 10^{-2}$, on obtient alors la relation suivante : $\dfrac{\varepsilon_2}{A_2} \approx \dfrac{2\xi\omega_2}{\omega_0} < 10^{-2}$.

Ce qui donne $\omega_0 > 200\xi\omega_2 \approx 603\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$

D'après le cahier des charges l'exigence 1.2 concernant l'asservissement en position et donc la fonction de transfert $F(p)$ impose une bande passante (que l'on suppose à 0 dB) inférieure à $30\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$. Il s'agit d'une fonction de transfert du second ordre et la bande passante à 0 dB est de l'ordre de $\omega_0 \approx 600\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$. **Le cahier des charges est donc bien respecté.**

Remarque : je ne comprends pas bien le début de la question : « En considérant ε_2, déterminer (...) ».

2 Analyse géométrique et élaboration du modèle dynamique du robot esclave

Objectif Vérifier la capabilité du robot esclave à respecter le cahier des charges et déterminer le modèle dynamique d'un des axes du robot esclave utilisé pour dimensionner sa commande.

2.1 Vérification de la capabilité du robot esclave

Objectif Vérifier la capacité du robot esclave à respecter l'exigence de précision 1.3.3 et dimensionner les capteurs installés sur le robot en conséquence.

Question 10 D'après le cahier des charges $\varepsilon_r < 1\%$. D'après la figure 4, la variation maximale des déplacement est de 7.5 mm. Il faudrait donc une résolution de $s_{\max} = 75\,\mu\text{m}$

Question 11 On a $\lambda(t) = \lambda_0 + \dfrac{p}{2\pi}\theta_{83}$. En conséquences, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = l_3\,\overrightarrow{y_3} + \lambda(t)\overrightarrow{z_3} + l_4\,\overrightarrow{z_4} = l_3\,\overrightarrow{y_3} + \left(\lambda_0 + \dfrac{p}{2\pi}\theta_{83}\right)\overrightarrow{z_3} + l_4\,\overrightarrow{z_3}$.

CCS 2019

Question 12 En projetant $\overrightarrow{BD}$ dans la base $\left(\overrightarrow{x_2'}, \overrightarrow{y_2'}, \overrightarrow{z_2'}\right)$, on a $\overrightarrow{BD} = l_3 \overrightarrow{y_3} + \left(\lambda_0 + \frac{p}{2\pi}\theta_{83}\right)\overrightarrow{z_3} + l_4 \overrightarrow{z_3} = l_3\left(\cos\theta_{32}\overrightarrow{y_2'} - \sin\theta_{32}\overrightarrow{x_2'}\right) + \left(\lambda_0 + \frac{p}{2\pi}\theta_{83} + l_4\right)\overrightarrow{z_2'}$.

Avec l'hypothèse que θ_{32} reste petit, on a $\overrightarrow{BD} = l_3\left(\overrightarrow{y_2'} - \theta_{32}\overrightarrow{x_2'}\right) + \left(\lambda_0 + \frac{p}{2\pi}\theta_{83} + l_4\right)\overrightarrow{z_2'}$.

Ainsi, $\left(x_D, y_D, z_D\right) = \left(-l_3\theta_{32}, l_3, \lambda_0 + \frac{p}{2\pi}\theta_{83} + l_4\right)$.

Question 13 Soit, $S_D = 3\sqrt{S_X^2 + S_Y^2 + S_Z^2}$. Par calcul différentiel :

$$\begin{cases} d\,x_D = -l_3\, d\,\theta_{32} \\ d\,y_D = 0 \\ d\,z_D = \frac{p}{2\pi} d\,\theta_{83} \end{cases} \qquad \begin{cases} s_X = \Delta x_D = -l_3 \Delta\theta_{32} = -l_3\, s_{\text{capteur}} \\ s_Y = \Delta y_D = 0 \\ s_Z = \Delta z_D = \frac{p}{2\pi}\Delta\theta_{83} = \frac{p}{2\pi} s_{\text{capteur}} \end{cases}$$

Ainsi, $s_D = 3 \cdot s_{\text{capteur}} \sqrt{l_3^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}$. Le cahier des charges impose la relation suivante, $s_{\text{capteur}} < \dfrac{75\mu m}{3\sqrt{l_3^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}}$.

L'application numérique donne $s_{\text{capteur}} = 2,72 \times 10 \times 10^{-5}$ mm. Le cahier des charges est bien respecté.

2.2 Détermination et vérification du modèle dynamique du robot esclave

Objectif Déterminer le modèle dynamique du robot esclave en vue de l'élaboration de sa commande.

Question 14 On se place en régime permanent. Le rendement peut s'exprimer par $\eta_9 = \frac{C_{73}\dot{\theta}_{32}}{C_{m2}\dot{\theta}_{72}} = \frac{C_{73}}{C_{m2}} r_9$. On a donc, en régime permanent, $\overrightarrow{C_{73}} = C_{73}\overrightarrow{z_2'} = C_{m2}\frac{\eta_9}{r_9}\overrightarrow{z_2'}$.

Question 15 Au vu du tracé expérimental de C_{73} en fonction de C_{m2}, on peut réaliser une linéarisation sur l'intervalle $[0, 10]$ et $C_{73} \simeq 3C_{m2}$. D'après les données constructeur, on a $C_{73} = C_{m2}\frac{\eta_9}{r_9} = C_{m2}\frac{0,78}{0,25} = 3,12$.

On peut donc valider les valeurs données par le constructeur.

2.3 Élaboration du modèle dynamique d'un axe du robot esclave

Question 16

Question 17

Question 18 On cherche $\overrightarrow{V(G_4 \in 4/1)}$. On a $\overrightarrow{OG_4} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG_4} = l_0\overrightarrow{y_0} + l_1\overrightarrow{y_1} + l_2\overrightarrow{y_2} + l_2'\overrightarrow{y_2'} + l_3\overrightarrow{y_3} + \lambda(t)\overrightarrow{z_3} + b_4\overrightarrow{z_4}$. On a $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ et $\alpha_2 = -\frac{\pi}{4}$.

On a donc $\overrightarrow{V(G_4 \in 4/1)} = \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG_4}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}$

$$= \left[\frac{\mathrm{d}l_0\overrightarrow{y_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left[\frac{\mathrm{d}l_1\overrightarrow{y_1}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left[\frac{\mathrm{d}l_2\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left[\frac{\mathrm{d}l_2'\overrightarrow{y_2'}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left[\frac{\mathrm{d}l_3\overrightarrow{y_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left[\frac{\mathrm{d}\lambda(t)\overrightarrow{z_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left[\frac{\mathrm{d}b_4\overrightarrow{z_4}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

$$= \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} + l_2\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + l_2'\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_2'}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + l_3\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{y_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \lambda(t)\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + \dot{\lambda}(t)\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_3}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0} + b_4\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_4}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

$$= l_2\left[\overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \overrightarrow{y_2}\right] + l_2'\left[\overrightarrow{\Omega(2'/0)} \wedge \overrightarrow{y_2'}\right] + l_3\left[\overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \overrightarrow{y_3}\right] + \lambda(t)\left[\overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \overrightarrow{z_3}\right] + \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{z_3} + b_4\left[\overrightarrow{\Omega(4/0)} \wedge \overrightarrow{z_4}\right].$$

$$= l_2\left[\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{y_2}\right] + l_2'\left[\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{y_2'}\right] + l_3\left[\left(\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_2} + \dot{\theta}_{32}\overrightarrow{z_3}\right) \wedge \overrightarrow{y_3}\right] + \lambda(t)\left[\left(\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_2} + \dot{\theta}_{32}\overrightarrow{z_3}\right) \wedge \overrightarrow{z_3}\right] + \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{z_3} + b_4\left[\left(\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_2} + \dot{\theta}_{32}\overrightarrow{z_3}\right) \wedge \overrightarrow{z_3}\right].$$

$$= -l_2\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{x_2} - l_2'\dot{\theta}_{21}\cos\alpha_2\overrightarrow{x_2} + l_3\left[\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{y_3} - \dot{\theta}_{32}\overrightarrow{x_3}\right] + \lambda(t)\dot{\theta}_{21}\sin\alpha_2\overrightarrow{x_2} + \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{z_3} + b_4\dot{\theta}_{21}\sin\alpha_2\overrightarrow{x_2}.$$

Par ailleurs, $\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{y_3} = \overrightarrow{z_2} \wedge \left(\cos\theta_{32}\overrightarrow{y_2'} - \sin\theta_{32}\overrightarrow{x_2'}\right) = \cos\theta_{32}\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{y_2'} - \sin\theta_{32}\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{x_2'} = -\cos\theta_{32}\cos\alpha_2\overrightarrow{x_2'} - \sin\theta_{32}\overrightarrow{y_2}$.

Au final, on a

$\overrightarrow{V(G_4 \in 4/1)} = -l_2\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{x_2} - l_2'\dot{\theta}_{21}\cos\alpha_2\overrightarrow{x_2} + l_3\left[\dot{\theta}_{21}\left(-\cos\theta_{32}\cos\alpha_2\overrightarrow{x_2'} - \sin\theta_{32}\overrightarrow{y_2}\right) - \dot{\theta}_{32}\overrightarrow{x_3}\right] + \lambda(t)\dot{\theta}_{21}\sin\alpha_2\overrightarrow{x_2} + \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{z_3} + b_4\dot{\theta}_{21}\sin\alpha_2\overrightarrow{x_2}$.

En tenant compte de l'hypothèse $\dot{\theta}_{21}=0$, on a : $\overrightarrow{V(G_4\in 4/1)}=-\dot{\theta}_{32}\,l_3\,\overrightarrow{x_3}+\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{z_3}$.

Question 19 En utilisant l'évolution de $\dot{\theta}_{32}$, on peut déterminer le déplacement angulaire effectué en traçant l'aire sous la courbe : $\theta_{32}=\dfrac{1}{2}(1+0,5)\times 0,075=0.056\,\text{rad}\simeq 3^{\circ}$.

Cet angle étant faible, on peut donc considérer que $\forall t\ \cos(\theta_{32}(t))\simeq 1$ et $\sin(\theta_{32}(t))\simeq 0$.

Question 20 On donne J_4 le moment d'inertie du bras 4 autour de l'axe $\left(G_4,\overrightarrow{z_4}\right)$.

Méthode

1. Expression de $\overrightarrow{\delta(B,4/1)}\cdot\overrightarrow{z_4}=\left(\overrightarrow{\delta(G_4,4/1)}+\overrightarrow{BG_4}\wedge m_4\overrightarrow{\Gamma(G_4\in 4/1)}\right)\cdot\overrightarrow{z_4}$.
2. Calcul de $\overrightarrow{\delta(G_4,4/1)}$.

$$\overrightarrow{\delta(G_4,4/1)}\cdot\overrightarrow{z_4}=\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_4,4/1)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}\cdot\overrightarrow{z_4}$$

On a $\overrightarrow{\sigma(G_4,4/1)}=I_{G_4}(4)\overrightarrow{\Omega(4/1)}$ avec $\overrightarrow{\Omega(4/1)}=\underbrace{\overrightarrow{\Omega(4/3)}}_{\overrightarrow{0}}+\overrightarrow{\Omega(3/2)}+\overrightarrow{\Omega(2/1)}=\dot{\theta}_{32}\overrightarrow{z_3}+\underbrace{\dot{\theta}_{21}}_{0}\overrightarrow{z_2}=\dot{\theta}_{32}\overrightarrow{z_4}$. Au vu des éléments d'inertie proposés, on a donc $\overrightarrow{\sigma(G_4,4/1)}=J_4\dot{\theta}_{32}\overrightarrow{z_4}$.

De plus, $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_4}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\overrightarrow{0}$. En conséquences, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma(G_4,4/1)}}{\mathrm{d}t}\cdot\overrightarrow{z_4}=J_4\ddot{\theta}_{32}$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{\Gamma(G_4\in 4/1)}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V(G_4\in 4/1)}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\dfrac{\mathrm{d}\left(-\dot{\theta}_{32}\,l_3\,\overrightarrow{x_3}+\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{z_3}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_0}=-\ddot{\theta}_{32}\,l_3\,\overrightarrow{x_3}-\dot{\theta}_{32}\,l_3\left(\dot{\theta}_{32}\overrightarrow{z_3}\wedge\overrightarrow{x_3}\right)+\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{z_3}$

$=-\ddot{\theta}_{32}\,l_3\,\overrightarrow{x_3}-l_3\dot{\theta}_{32}^2\,\overrightarrow{y_3}+\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{z_3}$.

$\left(\overrightarrow{BG_4}\wedge m_4\overrightarrow{\Gamma(G_4\in 4/1)}\right)\cdot\overrightarrow{z_4}=\left(\overrightarrow{BG_4}\wedge m_4\overrightarrow{\Gamma(G_4\in 4/1)}\right)\cdot\overrightarrow{z_4}$

$=m_4\left(\left(l_3\,\overrightarrow{y_3}+\lambda(t)\overrightarrow{z_3}+b_4\,\overrightarrow{z_4}\right)\wedge\left(-\ddot{\theta}_{32}\,l_3\,\overrightarrow{x_3}-l_3\dot{\theta}_{32}^2\,\overrightarrow{y_3}+\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{z_4}$

$=m_4\left(\left(l_3\,\overrightarrow{y_3}+\lambda(t)\overrightarrow{z_3}+b_4\,\overrightarrow{z_4}\right)\wedge\left(-\ddot{\theta}_{32}\,l_3\,\overrightarrow{x_3}\right)+\left(l_3\,\overrightarrow{y_3}+\lambda(t)\overrightarrow{z_3}+b_4\,\overrightarrow{z_4}\right)\wedge\left(-l_3\dot{\theta}_{32}^2\,\overrightarrow{y_3}\right)+\left(l_3\,\overrightarrow{y_3}+\lambda(t)\overrightarrow{z_3}+b_4\,\overrightarrow{z_4}\right)\wedge\left(\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{z_4}$

$=m_4\left(\left(\left(l_3\,\overrightarrow{y_3}+\lambda(t)\overrightarrow{z_3}+b_4\,\overrightarrow{z_4}\right)\wedge\left(-\ddot{\theta}_{32}\,l_3\,\overrightarrow{x_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{z_4}+\left(\left(l_3\,\overrightarrow{y_3}+\lambda(t)\overrightarrow{z_3}+b_4\,\overrightarrow{z_4}\right)\wedge\left(-l_3\dot{\theta}_{32}^2\,\overrightarrow{y_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{z_4}+\left(\left(l_3\,\overrightarrow{y_3}+\lambda(t)\overrightarrow{z_3}+b_4\,\overrightarrow{z_4}\right)\wedge\left(\ddot{\lambda}(t)\overrightarrow{z_3}\right)\right)\cdot\right.$

$=m_4\left(\left(\overrightarrow{z_4}\wedge\left(l_3\,\overrightarrow{y_3}+\lambda(t)\overrightarrow{z_3}+b_4\,\overrightarrow{z_4}\right)\right)\cdot\left(-\ddot{\theta}_{32}\,l_3\,\overrightarrow{x_3}\right)+\left(\overrightarrow{z_4}\wedge\left(l_3\,\overrightarrow{y_3}+\lambda(t)\overrightarrow{z_3}+b_4\,\overrightarrow{z_4}\right)\right)\cdot\left(-l_3\dot{\theta}_{32}^2\,\overrightarrow{y_3}\right)+\left(\overrightarrow{z_4}\wedge\left(l_3\,\overrightarrow{y_3}+\lambda(t)\overrightarrow{z_3}+b_4\,\overrightarrow{z_4}\right)\right)\cdot\left(\ddot{\lambda}(t)\right.\right.$

$=m_4\left(\left(\overrightarrow{z_4}\wedge l_3\,\overrightarrow{y_3}\right)\cdot\left(-\ddot{\theta}_{32}\,l_3\,\overrightarrow{x_3}\right)\right)$

$=\ddot{\theta}_{32}\,l_3^2\,m_4$.

Au final, $\overrightarrow{\delta(B,4/1)}\cdot\overrightarrow{z_4}=J_4\ddot{\theta}_{32}+\ddot{\theta}_{32}\,l_3^2\,m_4$.

Question 21

Question 22

Question 23

3 Définition et analyse de la chaine d'asservissement du robot esclave

Objectif Définir le régulateur de la chaine d'asservissement du robot esclave, analyser ses performances vis-à-vis des perturbations en se limitant à celles dues aux couples de frottement sec et compléter la chaine d'asservissement par la compensation de ces efforts.

3.1 Calcul d'un correcteur et analyse partielle des performances de la chaine d'asservissement

Objectif Déterminer un correcteur pour la chaine d'asservissement de la position angulaire des articulations. Afin d'aboutir à une démarche générale (indépendante d'une articulation particulière), la loi de commande sera paramétrée par le moment d'inertie équivalent de l'articulation considérée.

Question 24 En exprimant l'équation différentielle proposée dans le domaine de Laplace, on a $J_{\text{eq}}p^2Q_j(p)=C_j(p)+C_{\text{ext}}(p)$. En utilisant le schéma-blocs, on a $Q_j(p)=\left(C_{\text{ext}}(p)+C_{\text{j}}(p)\right)T(p)$. Par analogie, on a donc $T(p)=\dfrac{1}{J_{\text{eq}}p^2}$.

On considère que $C_{\text{ext}}(p)=0$. On peut alors exprimer $F_j(p)=\dfrac{\dfrac{K_1T(p)}{1+T(p)K_2p}}{1+\dfrac{K_1T(p)}{1+T(p)K_2p}}=\dfrac{\dfrac{K_1T(p)}{1+T(p)K_2p}}{1+\dfrac{K_1T(p)}{1+T(p)K_2p}}=\dfrac{K_1T(p)}{1+T(p)K_2p+K_1T(p)}$

$$=\frac{K_1\dfrac{1}{J_{\text{eq}}p^2}}{1+\dfrac{1}{J_{\text{eq}}p^2}K_2p+K_1\dfrac{1}{J_{\text{eq}}p^2}}=\frac{K_1}{J_{\text{eq}}p^2+K_2p+K_1}=\frac{1}{\dfrac{J_{\text{eq}}}{K_1}p^2+\dfrac{K_2}{K_1}p+1}.$$

On a donc $\dfrac{1}{\omega_0^2}=\dfrac{J_{\text{eq}}}{K_1}$ et $\dfrac{2\xi}{\omega_0}=\dfrac{K_2}{K_1}$. On a donc $K_1=J_{\text{eq}}\omega_0^2$ et $K_2=\dfrac{2\xi K_1}{\omega_0}=2\xi J_{\text{eq}}\omega_0$.

Question 25 On a $C_j(p)=-\left(K_1+K_2p\right)Q_j(p)$ et $Q_j(p)=\left(C_j(p)+C_{\text{ext}}(p)\right)T(p)$. On a donc

$$Q_j(p)=\left(-\left(K_1+K_2p\right)Q_j(p)+C_{\text{ext}}(p)\right)T(p)\Leftrightarrow\left(1-\left(K_1+K_2p\right)T(p)\right)Q_j(p)=C_{\text{ext}}(p)\Leftrightarrow\frac{Q_j(p)}{C_{\text{ext}}(p)}=\frac{1}{1-\left(K_1+K_2p\right)T(p)}.$$

En utilisant les valeurs déterminées précédemment, on a donc $D(p)=\dfrac{1}{1-\left(J_{\text{eq}}\omega_0^2+2\xi J_{\text{eq}}\omega_0p\right)\dfrac{1}{J_{\text{eq}}p^2}}$

$$=\frac{p^2}{p^2-2\xi\omega_0p-\omega_0^2}.$$

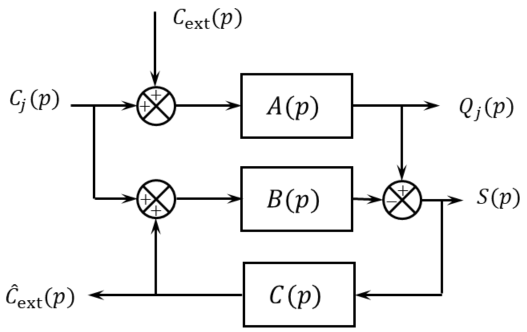
On a $C_{\text{ext}}(p)=\dfrac{C_{\text{ext}0}}{p}$. En conséquence, $\lim\limits_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=\lim\limits_{p\to0}p\varepsilon(p)$. Par ailleurs, $\varepsilon(p)=-Q_j(p)=-D(p)C_{\text{ext}}(p)$.

On a alors $\lim\limits_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=\lim\limits_{p\to0}-pD(p)C_{\text{ext}}(p)=\lim\limits_{p\to0}-p\dfrac{p^2}{p^2-2\xi\omega_0p-\omega_0^2}\dfrac{C_{\text{ext}0}}{p}=\lim\limits_{p\to0}-\dfrac{C_{\text{ext}0}p^2}{p^2-2\xi\omega_0p-\omega_0^2}=-C_{\text{ext}0}$.

Conclure.

3.2 Amélioration des performances par compensation du couple de perturbation

Objectif Améliorer les performances de la loi de commande vis-à-vis des couples perturbateurs extérieurs.



Question 26 On note $A(p)$, $B(p)$ et $C(p)$ les trois fonctions de transfert des trois blocs recherchés.

On a : $Q_j(p)=A(p)\left(C_j(p)+C_{\text{ext}}(p)\right)$, $S(p)=Q_j(p)-B(p)\left(C_j(p)+\hat{C}_{\text{ext}}(p)\right)$ et $\hat{C}_{\text{ext}}(p)=C(p)S(p)$.

soit

$\hat{C}_{\text{ext}}(p)=C(p)\left(Q_j(p)-B(p)\left(C_j(p)+\hat{C}_{\text{ext}}(p)\right)\right)$

$\Leftrightarrow\hat{C}_{\text{ext}}(p)\left(1+C(p)B(p)\right)=C(p)\left(Q_j(p)-C(p)B(p)\right)$

Question 27

Question 28

Question 29

4 Analyse des performances vis-à-vis des mouvements respiratoires

Objectif Quantifier le niveau de performance de la loi de commande déterminée en considérant la consigne correspondant aux mouvements physiologiques. Une amélioration de la loi de commande est ensuite envisagée sous la forme d'une anticipation sur la consigne pour améliorer les performances.

Question 30

Question 31

Question 32

On a $Q_j(p) = C_j(p)T(p) = \left(Q_j^{\star}(p)K_a(p) + C_u(p)\right)T(p) = \left(Q_j^{\star}(p)K_a(p) + C_u(p)\right)T(p) = \left(Q_j^{\star}(p)K_a(p) + \left(\varepsilon(p)K_1 - K_2 p Q_j(p)\right)\right)T(p)$
$= \left(Q_j^{\star}(p)K_a(p) + \left(\left(Q_j^{\star}(p) - Q_j(p)\right)K_1 - K_2 p Q_j(p)\right)\right)T(p)$
$\Leftrightarrow Q_j(p) = \left(Q_j^{\star}(p)K_a(p) + \left(\left(Q_j^{\star}(p) - Q_j(p)\right)K_1 - K_2 p Q_j(p)\right)\right)T(p)$
$\Leftrightarrow Q_j(p) = T(p)Q_j^{\star}(p)K_a(p) + T(p)\left(\left(Q_j^{\star}(p) - Q_j(p)\right)K_1 - K_2 p Q_j(p)\right)$
$\Leftrightarrow Q_j(p) = T(p)Q_j^{\star}(p)K_a(p) + T(p)K_1 Q_j^{\star}(p) - T(p)K_1 Q_j(p) - T(p)K_2 p Q_j(p)$
$\Leftrightarrow Q_j(p)\left(1 + T(p)K_1 + T(p)K_2 p\right) = Q_j^{\star}(p)T(p)\left(K_a(p) + K_1\right)$

On a donc $F(p) = \dfrac{Q_j(p)}{Q_j^{\star}(p)} = \dfrac{K_a(p) + K_1}{1 + T(p)K_1 + T(p)K_2 p}$.

CCS 2019