

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Diplomová práce

BRNO 2025

TOMÁŠ PETIT

MASARYKOVA
UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Topological data analysis

Diplomová práce

Tomáš Petit

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.

Brno 2025

Bibliografický záznam

| | |
|--------------------------|---|
| Autor: | Bc. Tomáš Petit Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky |
| Název práce: | Topological data analysis |
| Studijní program: | Matematika |
| Studijní obor: | Matematika |
| Vedoucí práce: | prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc. |
| Akademický rok: | 2024/2025 |
| Počet stran: | ?? + ?? |
| Klíčová slova: | Topologie; Algebraická Topologie; Homologie; Persistentní Homologie; Topologická analýza dat; TDA; Topologické Metody |

Bibliographic Entry

| | |
|--------------------------|--|
| Author: | Bc. Tomáš Petit Faculty of Science, Masaryk University Department of mathematics and statistics |
| Title of Thesis: | Topological data analysis |
| Degree Programme: | Mathematics |
| Field of Study: | Mathematics |
| Supervisor: | prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc. |
| Academic Year: | 2024/2025 |
| Number of Pages: | ?? + ?? |
| Keywords: | Topology; Algebraic Topology; Homology; Persistent Homology; Topological data analysis; TDA; Topological Methods |

Abstrakt

V této bakalářské/diplomové/rigorózní práci se věnujeme ...

Abstract

In this thesis we study ...

ZADÁNÍ
DIPLOMOVÉ PRÁCE

Akademický rok: 2024/2025

| | |
|---------------|------------------------|
| Ústav: | Přírodovědecká fakulta |
| Student: | Bc. Tomáš Petit |
| Program: | Matematika |
| Specializace: | Matematika |

Ředitel ústavu PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s názvem:

| | |
|------------------------|---------------------------|
| Název práce: | Topological data analysis |
| Název práce anglicky: | Topological data analysis |
| Jazyk závěrečné práce: | angličtina |

Oficiální zadání:

Goal: The goal is to understand the concepts and tools of Topological Data Analysis, and to be ready to use them in practical tasks. Aim: Depending on the results of the initial period, the student will either focus on theoretical understanding and original research in Mathematics and Statistics, or the focus will be on smart use of advanced tools in solving practical problems, including the implementation issues. One of the resources for real data requiring sophisticated analysis will come from the project Machine Learning in Nanomaterial Biocompatibility Assessment (MUNI/G/1125/2022).

Literatura: RAÚL RABADÁN, ANDREW J. BLUMBERG, Topological Data Analysis for Genomics and Evolution, Cambridge University Press, 2020, DOI: 10.1017/9781316671665

| | |
|---------------------|-------------------------------|
| Vedoucí práce: | prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc. |
| Datum zadání práce: | 20. 9. 2023 |
| V Brně dne: | 25. 7. 2024 |

Zadání bylo schváleno prostřednictvím IS MU.

Bc. Tomáš Petit, 16. 10. 2023
prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc., 17. 10. 2023
RNDr. Jan Vondra, Ph.D., 18. 10. 2023

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl(-a) poděkovat ...

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou/ diplomovou práci vypracoval(-a) samostatně pod vedením vedoucího práce s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány. ■

Prohlašuji, že jsem svoji rigorózní práci vypracoval(-a) samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno xx. měsíce 20xx

.....
Tomáš Petit

Contents

| | |
|---------------------------------|----|
| List of used notation | xv |
| Introduction | 1 |
| Kapitola 1. Why Topology? | 3 |
| 1.1 Podkapitola | 3 |
| 1.1.1 Odstavec | 3 |
| Kapitola 2. Persistence | 5 |
| Summary | 7 |
| Appendix A | 9 |
| Bibliography and sources | 11 |

List of used notation

Pro snazší orientaci v textu zde čtenáři předkládáme přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje.

| | |
|--------------|---------------------------------|
| \mathbb{C} | množina všech komplexních čísel |
| \mathbb{R} | množina všech reálných čísel |
| \mathbb{Z} | množina všech celých čísel |
| \mathbb{N} | množina všech přirozených čísel |
| \mathbb{C} | množina všech komplexních čísel |
| \mathbb{R} | množina všech reálných čísel |
| \mathbb{Z} | množina všech celých čísel |
| \mathbb{N} | množina všech přirozených čísel |
| \mathbb{C} | množina všech komplexních čísel |
| \mathbb{R} | množina všech reálných čísel |
| \mathbb{Z} | množina všech celých čísel |
| \mathbb{N} | množina všech přirozených čísel |
| \mathbb{C} | množina všech komplexních čísel |
| \mathbb{R} | množina všech reálných čísel |
| \mathbb{Z} | množina všech celých čísel |
| \mathbb{N} | množina všech přirozených čísel |
| \mathbb{C} | množina všech komplexních čísel |
| \mathbb{R} | množina všech reálných čísel |
| \mathbb{Z} | množina všech celých čísel |

Introduction

Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky. Toto je nějaký úvodní text, ve kterém se obvykle popisuje struktura práce, cíle a případně i výsledky.

Chapter 1

Why Topology?

1.1 Podkapitola

1.1.1 Odstavec

In accumsan convallis metus. Aenean est. Donec pharetra porta odio. Duis nunc nisl, imperdiet ac, tincidunt vitae, varius sit amet, felis. Curabitur wisi. Ut iaculis, nunc in lacinia egestas, elit enim tincidunt turpis, at luctus ipsum augue condimentum metus. Aenean lorem wisi, cursus sit amet, mollis nec, porta ac, augue. Vivamus massa. Praesent rhoncus imperdiet orci. Aenean pharetra dolor ut sapien. Maecenas egestas augue semper dolor.

Vestibulum at lectus. Vestibulum dapibus placerat magna. Suspendisse dolor urna, condimentum sit amet, euismod a, adipiscing a, enim. Aliquam erat volutpat. Donec imperdiet dolor non mi. Phasellus magna metus, dictum sit amet, laoreet non, dictum vel, dui. Suspendisse potenti. Nunc turpis risus, porta vel, pharetra id, eleifend vitae, justo. Duis pulvinar dolor sit amet urna. Integer eu eros. Nulla facilisi. Duis dui. Nullam vitae quam. Morbi a nunc in elit sodales euismod. Nunc sed orci. Etiam malesuada metus vitae felis. Suspendisse imperdiet velit in tellus.

Nullam elit orci, condimentum vitae, accumsan quis, gravida non, velit. Morbi pellentesque accumsan elit. Aenean est purus, eleifend ac, dictum at, dignissim sed, dolor. Vestibulum volutpat sapien quis augue. Maecenas vulputate accumsan sapien. Nam mattis, lacus non iaculis aliquet, mi elit varius lectus, eu malesuada dolor nunc at wisi. Aliquam ligula. Mauris nisl elit, molestie vitae, gravida sit amet, facilisis convallis, enim. Sed urna. Praesent et augue. Fusce pellentesque. Maecenas varius orci eget nisl. Donec tempor rhoncus turpis. Integer nibh. Cras metus erat, tincidunt et, scelerisque quis, bibendum sed, dui. Suspendisse potenti.

Integer ac diam. Nullam porttitor dolor eget metus. Nulla sed metus quis tortor lacinia tempor. Mauris mauris dui, faucibus vitae, aliquet sit amet, placerat a, ante. Nunc placerat tincidunt neque. Mauris egestas dolor ut ipsum cursus malesuada. Curabitur odio. Nunc lobortis. Sed mattis tempor felis. Mauris dolor quam, facilisis at, bibendum sit amet, rutrum ornare, pede. Suspendisse accumsan sagittis velit. Pellentesque varius laoreet lorem. Vivamus egestas sapien id diam.

Integer viverra, felis ac tempus cursus, neque risus interdum turpis, eget venenatis tellus velit in neque. Nulla feugiat luctus tellus. Nam pulvinar lacus id leo. Vestibulum at ligula. Duis laoreet tincidunt enim. Suspendisse at nisl molestie est laoreet laoreet. Suspendisse euismod metus vel nisl. Aenean ullamcorper imperdiet massa. Aliquam nibh. Donec quis erat. Nunc sodales auctor ante.

Nam quis ante. Nullam interdum quam in eros. Sed eleifend libero eu tellus consequat fermentum. Nullam pellentesque risus ut augue. Vestibulum eu tellus. Integer eleifend suscipit urna. Fusce porttitor leo et odio. Vivamus vehicula justo a nisl. In rutrum, purus ut dictum auctor, dolor velit accumsan dolor, eu convallis augue dui ac lectus. Nullam eleifend pellentesque ligula. Nam quis magna. Donec elementum dapibus erat. Pellentesque vel ipsum nec orci fermentum accumsan. Nunc porta magna eu neque. Nam id erat eu mi aliquet cursus. Morbi ut felis. Vestibulum in ipsum.

Chapter 2

Persistence

$$\int f(x) \, dx \qquad \text{(rovnice)}$$

odkaz na rovnici s tagem (**rovnice**) – pokud nechcete vzorci přidělit číslo, ale nějaký vlastní symbol, používejte hvězdičková prostředí, tj. např. `equation*`

$$\iint f(x) \, dx \qquad (2.1)$$

odkaz na druhý vzorec (**2.1**)

Summary

Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.
Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.
Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.
Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.
Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.
Zde můžete napsat závěr.

Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.
Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.
Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.
Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.
Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.
Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr. Zde můžete napsat závěr.
Zde můžete napsat závěr.

Appendix A

Bibliography and sources

- [1] S. J. Monaquel a K. M. Schmidt, *On M -functions and operator theory for non-self-adjoint discrete Hamiltonian systems*, v Special Issue: 65th birthday of Prof. Desmond Evans, J. Comput. Appl. Math. **208** (2007), č. 1, 82–101.
- [2] M. Murata, *Positive solutions and large time behaviors of Schrödinger semigroups, Simon's problem*, J. Funct. Anal. **56** (1984), č. 3, 300–310.
- [3] J. Qi a S. Chen, *Strong limit-point classification of singular Hamiltonian expressions*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), č. 6, 1667–1674 (elektronicky).
- [4] Z. Pospíšil, *An inverse problem for matrix trigonometric and hyperbolic functions on measure chains*, v Colloquium on Differential and Difference Equations — CDDE 2002 (Brno, 2002), Folia Fac. Sci. Natur. Univ. Masaryk. Brun. Math. **13**, str. 205–211, Masarykova univerzita, Brno, 2003.
- [5] R. Šimon Hilscher a P. Zemánek, *Friedrichs extension of operators defined by linear Hamiltonian systems on unbounded interval*, v Equadiff 12, Proceedings of the Conference on Differential Equations and their Applications (Brno, 2009), J. Diblík, O. Došlý, P. Drábek a E. Feistauer, editoři, Math. Bohem. **135** (2010), č. 2, 209–222.
- [6] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.
- [7] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.
- [8] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.
- [9] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.
- [10] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.
- [11] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.

- [12] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.
- [13] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.
- [14] W. T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1980. ISBN 0-387-90542-1.

