

Résolution de l'inégalité :

Soit l'inégalité :

$$-2(1-2x)(x-3)^2 \geq 0$$

Étapes de la résolution :

1. Trouver les racines et les points où l'expression est nulle :

$$1-2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

$$(x-3)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

Les racines de l'expression sont donc $x=\frac{1}{2}$ et $x=3$.

2. Analyser le signe de l'expression $-2(1-2x)(x-3)^2$ sur les intervalles définis par ces racines.

Les trois intervalles sont :

$$(-\infty, \frac{1}{2}), \quad (\frac{1}{2}, 3), \quad (3, +\infty)$$

3. Construire le tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
-2	$-$	$-$	$-$	$-$
$(1-2x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(x-3)^2$	$+$	$+$	0	$+$
Produit	$-$	$+$	0	$-$

Explication : - Le facteur -2 est toujours négatif. - Le facteur $(1-2x)$ est positif lorsque $x < \frac{1}{2}$ et négatif pour $x > \frac{1}{2}$. - Le facteur $(x-3)^2$ est toujours positif ou nul (il est nul uniquement pour $x=3$).

L'expression $-2(1-2x)(x-3)^2$ est positive sur l'intervalle $(\frac{1}{2}, 3)$ et égale à 0 en $x=3$.

4. **Conclusion :** L'inégalité $-2(1-2x)(x-3)^2 \geq 0$ est vraie pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$.