ILG 2020/2021 Vektorové podprostory a lineární transformace Úkol 5

Příjmení a jméno:	Login:
Plička Maxim	xplick04 (Čt A113, 14:00–15:50, Hliněná)

Toto zadání si vytiskněte a řešení (včetně postupu) napište úhledně na ně. Odpověď bez postupu nebude hodnocena! Nevejde-li se postup na tento list, vypracujte ho (úhledně) na čistý list. Všechny listy naskenujte/vyfoťte tak, aby byl text jasně čitelný, a nahrajte do informačního systému.

1. **(1 b)** Transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dána následovně: $[x, y, z]^T \mapsto [y, 2x + z, x - y]^T$. Zjistěte, jestli je f lineární transformace. Svoje tvrzení zdůvodněte.

Odpověď: Ano, je

2. **(1 b)** Nechť $\overline{v}_1 = [1, 0, 2]^T, \overline{v}_2 = [0, 1, -3]^T, \overline{v}_3 = [1, 1, 0]^T$.
Transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dána obrazy $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ následovně:

$$f(\overline{v}_1) = [12, 3, 9]^T, f(\overline{v}_2) = [-16, 1, -13]^T, f(\overline{v}_3) = [1, 4, 0]^T.$$

a) Najděte matici transformace f vzhledem k jednotkové bázi.

b) Zjistěte, zda vektor $\overline{u} = [2, -1, -1]^T$ leží v jádru transformace f.

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 12 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -16 & 1 & -13 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \cdot (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 12 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -16 & 1 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & -11 & 1 & -9 \end{array}\right) \cdot (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 12 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -16 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 4 \end{array}\right) \cdot 3 \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 12 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 4 \end{array}\right) \cdot (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Odpověď:
a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

b, vektor $\overline{u}$ není v jádru transformace.

Prohlašuji, že jsem tento úkol vypracoval(a) samostatně.

Plička

1) $(x,y,z)^T \longrightarrow (y, 2x+z, x-y)^T$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$
$r \cdot f(x) = f(r \cdot x)$
} Vlastnosti lineární transformace

$\overline{a_1} = (x_1, y_1, z_1)$
$\overline{a_2} = (x_2, y_2, z_2)$

$$f(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = f(\bar{a}_1) + f(\bar{a}_2) \checkmark$$

$f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (y_1, 2x_1+z_1, x_1-y_1) + (y_2, 2x_2+z_2, x_2-y_2)$

$(y_1+y_2, 2x_1+z_1+2x_2+z_2, x_1-y_1+x_2-y_2) = (y_1+y_2, 2x_1+z_1+2x_2+z_2, x_1-y_1+x_2-y_2)$

$$r \cdot f(\bar{a}_1) = f(r \cdot \bar{a}_1) \checkmark$$

$r \cdot (y_1, 2x_1+z_1, x_1-y_1) = (r \cdot y_1, r \cdot (2x_1+z_1), r \cdot (x_1-y_1))$

$(r \cdot y_1, r \cdot (2x_1+z_1), r \cdot (x_1-y_1)) = (r \cdot y_1, r \cdot (2x_1+z_1), r \cdot (x_1-y_1))$

platí obě vlastnosti lineární transformace