ILG 2020/2021	Vektorové prostory	Úkol 4

Příjmení a jméno:	Login:
Plička Maxim	xplick04 (Čt A113, 14.00–15.50, Hliněná)

Toto zadání si vytiskněte a řešení (včetně postupu) napište úhledně na ně. Odpověď bez postupu nebude hodnocena! Nevejde-li se postup na tento list, vypracujte ho (úhledně) na čistý list. Všechny listy naskenujte/vyfoťte tak, aby byl text jasně čitelný, a nahrajte do informačního systému.

1. **(1 b)** Určete všechna $c \in \mathbb{R}$, pro která má prostor $\langle [c, -1, -1], [9, 3, c], [1, c, c] \rangle$ dimenzi 2.

$$\begin{vmatrix} c & -1 & -1 \\ 9 & 3 & c \\ 1 & c & c \end{vmatrix} = 3c^2 - 9c - c + 3 - c^3 + 9c = -c^3 + 3c^2 - c + 3 = c^2(-c+3) - c + 3 = (c^2+1)(3-c)^2$$

$c = 3$

$$\begin{matrix} c & -1 & -1 \\ 9 & 3 & c \end{matrix}$$

$c\ ,\ 3 = 9a + b$

$\checkmark$ $-1 = 3a + 3b$

$-1 = 3a + 3b$

Odpověď: $c = 3$

2. **(1 b)** Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortogonální a pak i ortonormální bázi prostoru generovaného vektory

$$\overline{a}_1 = [1, 2, -3, 1],\ \overline{a}_2 = [-1, -4, 6, -3],\ \overline{a}_3 = [4, 9, -7, 2].$$

Odpověď:

Prohlašuji, že jsem tento úkol vypracoval(a) samostatně.

(termín odevzdání: 27. listopadu 17:00)

podpis Plička

$a_1 = (1, 2, -3, 1)$
$a_2 = (-1, -4, 6, -3)$
$a_3 = (4, 9, -7, 2)$

①

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 6 & -3 \\ 4 & 9 & -7 & 2 \end{pmatrix} (1)\ (-4) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} (-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Jsou nezávislé

② ortogonální báze

$\bar{b}_1 = \bar{a}_1 = (1, 2, -3, 1)$ $\quad \bar{b}_1 \perp \bar{b}_2$

$\bar{b}_2 = \bar{a}_2 + x \cdot \bar{b}_1 \quad | \cdot \bar{b}_1$

$0 = \bar{b}_1 \cdot \bar{a}_2 + x \cdot \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_1$

$0 = (1, 2, -3, 1) \cdot (-1, -4, 6, -3) + x (1, 2, -3, 1)(1, 2, -3, 1)$

$0 = -30 + 15x$

$x = 2$

$\bar{b}_2 = \bar{a}_2 + 2\bar{b}_1$

$\bar{b}_2 = (-1, -4, 6, -3) \cdot 2 (1, 2, -3, 1)$

$\bar{b}_2 = (1, 0, 0, -1)$

$\bar{b}_3 = a_3 + y \cdot \bar{b}_1 + z \cdot \bar{b}_2 \quad | \cdot \bar{b}_1$ $\quad \bar{b}_3 \perp \bar{b}_1$

$0 = \bar{b}_1 \cdot a_3 + y \cdot \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_1 + 0$

$0 = (1, 2, -3, 1)(4, 9, -7, 2) + y (1, 2, -3, 1)(1, 2, -3, 1)$

$0 = 45 + 15y$

$y = -3$

$\bar{b}_3 = \bar{a}_3 + y \cdot \bar{b}_1 + z \cdot \bar{b}_2 \quad | \cdot \bar{b}_2$

$0 = \bar{b}_2 \cdot \bar{a}_3 + 0 + z \cdot \bar{b}_2 \cdot \bar{b}_2$

$0 = (1, 0, 0, -1)(4, 9, -7, 2) + z (1, 0, 0, -1)(1, 0, 0, -1)$

$0 = 2 + 2z$

$z = -1$

$\bar{b}_3 = \bar{a}_3 - 3\bar{b}_1 - \bar{b}_2$

$\bar{b}_3 = (4, 9, -7, 2) - (3, 6, -9, 3) - (1, 0, 0, -1)$

$\bar{b}_3 = (0, 3, 2, 0)$

③ ortonormální báze

$\|\bar{b}_1\| = \sqrt{15}$

$\|\bar{b}_2\| = \sqrt{2}$

$\|\bar{b}_3\| = \sqrt{13}$

$c_1 = \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot (1, 2, -3, 1)$

$c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 0, 0, -1)$

$c_3 = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (0, 3, 2, 0)$