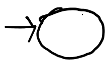
1. Mějme následující jazyky:

   (a) $L_1 = \{ww^R \mid w \in \{a,b,c\}^*\}$

   (b) $L_2 = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^* \wedge \#_a(w)\ mod\ 2 = \#_b(w)\ mod\ 2 = 1\}$

   Rozhodněte a dokažte, zda jazyky $L_1 \cap L_2$ a $L_1 \cup L_2$ jsou regulární. Pro důkaz regularity sestrojte příslušný konečný automat, nebo gramatiku. Pro důkaz neregularity použijte Pumping lemma, nebo Myhill-Nerodovu větu.
   15 bodů

1. $\exists w \in \Sigma^* : w \in L_1 \wedge w \in L_2$
2. Aby slovo patřilo do L2, bude muset obsahovat $2k+1$ "a" a $2j+1$ "b", kde $k, j > 0$
3. Aby slovo patřilo i do L1, bude se slovo muset skládat ze dvou části, kde druhá část vznikne reverzací první části. Takto vzniklé slovo ovšem bude mít sudou četnost symbolů "a", "b" i "c".
4. z toho plyne, že neexistuje slovo w, které patří do L1 a L2 zároveň. Tudíž $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ a $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3$
5. Sestrojíme KA přijímající $L_1 \cap L_2$



$(\forall k \in \mathbb{N}^+ : \exists w \in \Sigma^* : w \in (L_1 \cup L_2) \wedge |w| \geq k \wedge \forall xyz \in \Sigma^* : w = xyz \wedge |xy| \leq k \wedge |y| > 0 \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} : xy^iz \notin (L_1 \cup L_2)) \Rightarrow ((L_1 \cup L_2) \notin \mathcal{L}_3)$

$w = a^k b^2 a^k$

$x = a^{\alpha_1}$ $\qquad \alpha_2 > 0$

$y = a^{\alpha_2}$ $\qquad \alpha_1 + \alpha_2 \leq k$

$z = a^{k-\alpha_1-\alpha_2} b^2 a^k$

$i = 3$

$xy^3z = a^{k+2\alpha_2} b^2 a^k$

slovo nepatří do L_1, jelikož $\alpha_2 > 0$. tak $k + 2\alpha > k$. Počet "a" na začátku se nebude rovnat počtu "a" na konci, tudíž druhá část nebude reverzací první části. Zároveň slovo nepatří ani do L_2, jelikož počet "b" i "a" je sudý.

Tím pádem slovo nenáleží $L_1 \cup L_2$ a $L_1 \cup L_2 \notin \mathcal{L}_3$.

2. Uvažujme jazyk $L_3 = \{puvw \mid p, v \in \{a,b\}^*, u, w \in \{c,d\}^*, (p = v^R \vee u = w^R)\}$

(a) Sestrojte bezkontextovou gramatiku G_3 takovou, že $L(G_3) = L_3$.

(b) Sestrojte zásobníkový automat Z_3 takový, že $L(Z_3) = L_3$.

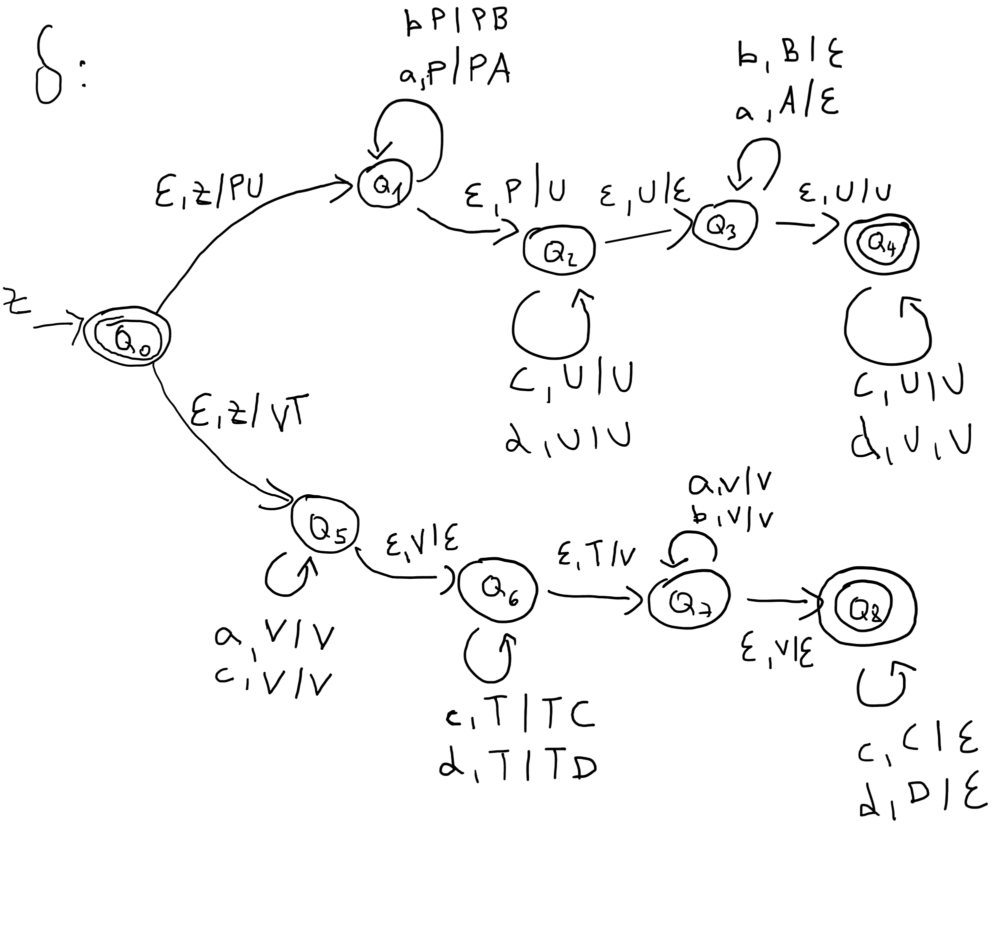
10 bodů

a) $G = (\{P, U, V, T, S\}, \{a, b, c, d\}, R, S)$

R:
$S \to PU \mid VT \mid$
$P \to aPa \mid bPb \mid U$
$U \to cU \mid dU \mid \varepsilon$
$T \to cTc \mid dTd \mid V$
$V \to aV \mid bV \mid \varepsilon$

b) $KA = (\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8\}, \{a, b, c, d\}, \{Z, P, U, A, B, V, T, C, D\}, \delta, Q_0, Z, \{Q_4, Q_8, Q_0\})$

δ:



3. Rozhodněte a dokažte následující tvrzení:

(a) $\exists L_1 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$ takový, že jeho doplněk $\overline{L_1}$ je konečný jazyk.

(b) $\exists L_1 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$ takový, že $\forall L_2 \in \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$

(c) $\exists L_1 \in \mathcal{L}_3$ takový, že $\forall L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$

a) Pokud $\overline{L_1} \in \mathcal{L}_{FIN}$ pak $\overline{L_1} \in \mathcal{L}_3$. Ovšem pokud $\overline{L_1} \in \mathcal{L}_3$ z uzávěrových vlastností plyne, že i $\overline{\overline{L_1}} \in \mathcal{L}_3$. ovšem $\overline{\overline{L_1}} = L_1$, což vede ke sporu, protože nemůže platit, že $L_1 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 \wedge L_1 \in \mathcal{L}_3$. Tvrzení neplatí.

b) Důkaz sporem:

1) $\forall L_1 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 : \exists L_2 \in \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 \notin \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$

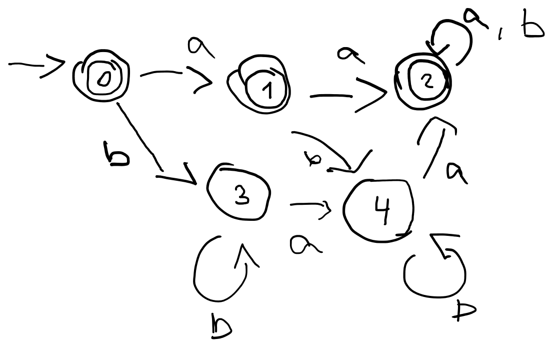
2) pokud $L_2 = \emptyset$, pak pro $\forall L_1 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 = \emptyset$, tudíž $L_1 \cap L_2 \notin \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$.

3) Platí negace tvrzení, tudíž tvrzení neplatí

c) Pokud $L_1 = \Sigma^*$, pak pro $\forall L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 = L_2$ tím pádem $(L_1 \cap L_2) \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$. Tvrzení platí.

4. Uvažujme jazyk $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \geq 2 \vee \#_b(w) = 0\}$. Sestrojte relaci pravé kongruence $\sim$, která splňuje následující dvě podmínky: 1) L je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$ a 2) index $\sim$ je o jedna vetší než index $\sim_L$. 10 bodů

1, Sestrojíme úplný deterministický KA, přijímající jazyk L



2, Ověříme, že jde o minimální KA, který přijímá L.

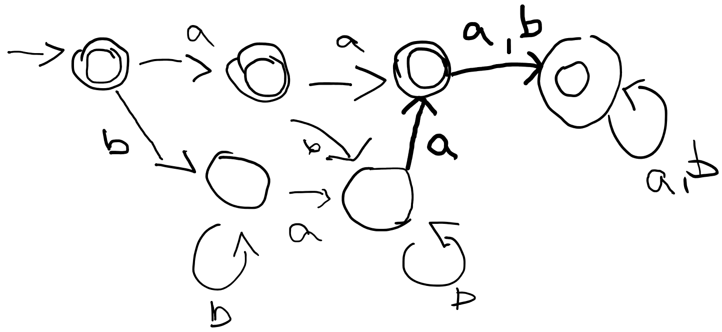
	$\equiv_0$	a	b
I	0	I	II
	1	I	II
	2	I	I
II	3	II	II
	4	I	II

	$\equiv_1$	a	b
I	0	I	III
	1	II	IV
II	2	II	II
III	3	IV	III
IV	4	II	IV

	$\equiv_2$	a	b
I	0	...	...
II	1	...	...
III	2	...	...
IV	3	...	...
V	4	...	...

3, KA je minimální, tudíž počet jeho stavů odpovídá indexu $\sim_L$

4, Sestrojíme druhý KA, kde přidáme 1 stav.



5, Sestrojíme výslednou relaci kongruence, která odpovídá tomuto KA.

$$\begin{aligned}
\forall u,v \in \Sigma^*: u \sim v \Leftrightarrow \big(& (\#_a(u) = \#_a(v) = 0 \ \wedge \ \#_b(u) = \#_b(v) = 0) \\
\vee \ & (\#_a(u) = \#_a(v) = 1 \ \wedge \ \#_b(u) = \#_b(v) = 0) \\
\vee \ & (\#_a(u) = \#_a(v) = 2) \\
\vee \ & (\#_a(u) = \#_a(v) = 0 \ \wedge \ \#_b(u) > 0 \wedge \ \#_b(v) > 0) \\
\vee \ & (\#_a(u) = \#_a(v) = 1 \ \wedge \ \#_b(u) > 0 \wedge \#_b(v) > 0) \\
\vee \ & (\#_a(u) \geq 3 \ \wedge \ \#_a(v) \geq 3) \big)
\end{aligned}$$