DU2

sobota 11. listopadu 2023 23:58

1. Rozhodněte a dokažte, zda je jazyk $L_{prime} = \{w \in \Sigma^* : |w| \text{ je prvočíslo}\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ bezkontextový. Pro důkaz bezkontextovosti sestavte gramatiku či zásobníkový automat. Pro důkaz nebezkontextovosti použijte pumping lemma nebo uzávěrové vlastnosti.

10 bodů

$(\forall k > 0 : \exists z \in L_{prime} : |z| \geq k \wedge \forall uvwxy \in \Sigma^* : z = uvwxy$
$\wedge\ |vx| > 0 \wedge |vwx| \leq k \Rightarrow \exists i \geq 0 : uv^iwx^iy \notin L_{prime})$
$\Rightarrow L_{prime} \notin \mathcal{L}_2$

1. zvolíme $z = a^r$, kde r je prvočíslo větší než k

2. Uvažujme všechna rozdělení, kde $vx = a^s \wedge 0 < s \leq k$

3. zvolme $i = r+1$, poté $|uv^iwx^iy| = |uvwxy| + |v^rx^r| =$
$r + r \cdot s = r(1+s)$

4. Jelikož je r prvočíslo větší než k a $k > 0$, r bude minimálně prvočíslo 2, dále jelikož $s > 0$ bude $(1+s) \geq 2$ a $r(1+s)$ bude součin prvočísla a čísla, které je minimálně 2. Z toho plyne, že délka takto vzniklého slova nesplňuje podmínku pro prvočíslo. (dělitelnost 1 a samo sebou)

5. $uv^iwx^iy \notin L_{PRIME} \Rightarrow L_{PRIME} \notin \mathcal{L}_2$

2. Uvažujte jazyk $L_{BKG} = \{\langle M\rangle\#\langle G\rangle : M \text{ je TS}, G \text{ je BKG}, L(G) \subseteq L(M)\}$ nad abecedou $\{0, 1\}$ ($\langle G\rangle$ je kódování BKG G do binárního řetězce). Rozhodněte a dokažte, zda jazyk L_{BKG} (a) je rozhodnutelný, (b) je nerozhodnutelný, ale částečně rozhodnutelný, (c) není ani částečně rozhodnutelný. Pro důkaz (a) popište princip činnosti TS, který jazyk rozhoduje (není třeba sestavovat detailně přechodový diagram), pro důkaz (b) nebo (c) použijte redukci.

15 bodů

c)

- Jazyk L_{BKG} není rekurzivně vyčíslitelný, což ukážeme pomocí redukce $\text{co-HP} \leq L_{BKG}$.
- Redukční funkce má následující signaturu: $\varphi : \{0,1,\#\}^* \to \{0,1,\#\}^*$
- pokud vstup redukční funkce není ve tvaru $\langle M\rangle\#\langle w\rangle$, pak φ vrací řetězec $\langle M'\rangle\#\langle G'\rangle$, kde $L(M') = \emptyset \wedge L(G') = \Sigma^*$
- z toho plyne, že $\langle M'\rangle\#\langle G'\rangle \notin L_{BKG}$, jelikož je narušena podmínka $L(G') \subseteq L(M')$.
- V případě, že vstup redukční funkce je ve tvaru $\langle M\rangle\#\langle w\rangle$, pak se její výstup zobrazí na $\langle M'\rangle\#\langle G'\rangle$, kde $L(G') = \Sigma^*$ a M' se chová následovně:

1. M' si zapamatuje délku svého vstupu $|w'|$
2. M' spustí nejvýše $|w'|$ kroků simulace M na w
3. pokud simulace neskončí do $|w'|$ kroků pak M' akceptuje
4. jinak M' zamítá

Pro TS M' platí:

- pokud $\langle M\rangle\#\langle w\rangle \in \text{co-HP} \Rightarrow M$ na w cyklí $\wedge\ L(M') = \Sigma^* \wedge L(G') = \Sigma^*$

$\Rightarrow L(G') \subseteq L(M') \land \langle M'\rangle \# \langle G'\rangle \in L_{BKG}$

- pokud $\langle M\rangle \# \langle w\rangle \in HP \Rightarrow M$ na w necyklí $\land \; L(M') \neq \Sigma^* \land L(G') = \Sigma^*$

  $\Rightarrow L(G') \not\subseteq L(M') \land \langle M'\rangle \# \langle G'\rangle \notin L_{BKG}$

- $\langle M\rangle \# \langle w\rangle \in co\_HP \Leftrightarrow \varphi(\langle M\rangle \# \langle w\rangle) \in L_{BKG}$

3. Plný binární strom je graf $T = (V, E_L, E_R)$, kde V je množina vrcholů, $E_L, E_R\colon V \to V$ jsou injektivní totální zobrazení *levého* a *pravého* následníka taková, že $img(E_L) \cap img(E_R) = \emptyset$, kde $img(f)$ značí *obor hodnot* zobrazení f. Dále platí, že existuje právě jeden vrchol $r \in V$ takový že, $\nexists u \in V\colon (u, r) \in E_L \cup E_R$ a $\forall v \in V\colon (r, v) \in (E_L \cup E_R)^{RT}$, kde A^{RT} značí reflexivně-tranzitivní uzávěr relace A.

   (a) Dokažte, že množina V je spočetně nekonečná (tj. existuje bijekce mezi V a $\mathbb{N}$).

   (b) Nechť *obarvení stromu* T je funkce, která přiřazuje každému vrcholu $v \in V$ barvu $c(v) \in \{red, black\}$. Dokažte pomocí diagonalizace, že množina všech obarvení stromu T je nespočetně nekonečná.

10 bodů

a)

1. Najdeme vrchol "r" pro který platí, že $\nexists u \in V\colon (u,r) \in E_L \cup E_R \land \forall v \in V\colon (r,v) \in (E_L \cup E_R)^{RT}$
2. na uzlu "r" spustíme BFS a postupně při zpracování uzlu připisujeme danému uzlu číslo, které odpovídá pořadí zpracování uzlu
3. Z faktu, že je možné vrcholy takto očíslovat plyne, že existuje bijekce mezi vrcholy a přirozenými čísly, tudíž je množina vrcholů tohoto grafu spočetná

b)

1. Předpokládejme, že množina všech obarvení funkcí q je spočetně nekonečná
2. Existuje $f\colon \mathbb{N} \Leftrightarrow q$
3. Jelikož je množina všech obarvení funkcí q spočetná, je možné vypsat všechna tato obarvení pod sebe do matice
4. $q = \{q_0, q_1, \dots\}$ a $q_i\colon V \to \{red, black\}$ a $f(i) = q_i$

obarvení \ vrcholy	V_0	V_1	V_2	$\dots$
$f(0) = q_0$	$c_{0,0}$	$c_{1,0}$	$c_{2,0}$	
$f(1) = q_1$	$c_{0,1}$	$c_{1,1}$	$c_{2,1}$	$\dots$
$f(2) = q_2$	$c_{0,2}$	$c_{1,2}$	$c_{2,2}$	
$\vdots$		$\vdots$		$\ddots$

$$c_{x,y} = \begin{cases} R & q_x(V_y) = red \\ B & q_x(V_y) = black \end{cases}$$

5. sestrojíme nové obarvení funkcí q následovně:

5. sestrojíme nové obarvení funkcí g následovně:

$$g_c(V_n) = \begin{cases} R & g_n(V_n) = black \\ B & g_n(V_n) = red \end{cases}$$

6. g_c není zastoupeno v matici, jelikož se od všech předchozích obarvení liší minimálně v prvku na diagonále, což je ovšem ve sporu s tím, že matice obsahuje všechna možná obarvení funkcí g

7. Z toho plyne, že množina všech obarvení funkcí g je nespočetná

4. Navrhněte algoritmus, který pro bezkontextovou gramatiku $G = (N, \Sigma, P, S)$ a symbol $a \in \Sigma$ spočítá množinu

$$_aN_a = \{A \in N \mid \exists w \in \Sigma^* \colon A \Rightarrow_G^+ w \wedge \exists u \in \Sigma^* \colon w = aua\}.$$

V algoritmu můžete využít množinu $N_\epsilon = \{A \in N \mid A \Rightarrow_G^+ \epsilon\}$. Doporučujeme nadefinovat si další vhodné množiny neterminálů a algoritmicky popsat jejich výpočet (u N_ϵ popis výpočtu není potřeba).

Ilustrujte použití algoritmu na příkladě gramatiky s pravidly

$S \to aWU \mid UWa \qquad W \to YacU \mid Xa \qquad Y \to X \mid \epsilon \qquad X \to aXa \qquad U \to bcaYY \mid Ucb$

15 bodů

$N_+ = \{A \in N \mid A \overset{+}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \wedge w \in \Sigma^*\}$

1. $N_+^0 = \emptyset$
2. for(i in (1...n)):
3. $\quad N_+^i = N_+^{i-1} \cup \{A \in N \mid (A, \alpha) \in P \wedge \alpha \in (N_+^{i-1} \cup \Sigma)^*\}$
4. $\quad$ if $(N_+^{i-1} == N_+^i)$ return N_+^i

$N_+^0 = \emptyset$
$N_+^1 = \{Y\}$
$N_+^2 = \{Y, U\}$
$N_+^3 = \{Y, U, W\}$
$N_+^4 = \{Y, U, W, S\}$
$N_+^5 = \{Y, U, W, S\}$

$N_\epsilon^0 = \emptyset$
$N_\epsilon^1 = \{Y\}$
$N_\epsilon^2 = \{Y\}$

$_aN = \{A \in N \mid A \overset{+}{\underset{G}{\Rightarrow}} av \wedge v \in \Sigma^*\}$

1. $_aN^0 = \emptyset$
2. for(i in (1...n)):
3. $\quad {_aN^i} = {_aN^{i-1}} \cup \{A \in N_+ \mid (A, \gamma\alpha\beta) \in P \wedge \beta \in (N_\epsilon \cup N_+ \cup \Sigma)^* \wedge \alpha \in ({_aN^{i-1}} \cup \{a\}) \wedge \gamma \in N_\epsilon^*\}$
4. $\quad$ if $({_aN^{i-1}} == {_aN^i})$ return $_aN^i$

$_aN^0 = \emptyset$
$_aN^1 = \{S, W\}$
$_aN^2 = \{S, W\}$

$N_a = \{A \in N \mid A \overset{+}{\underset{G}{\Rightarrow}} ua \wedge u \in \Sigma^*\}$

1. $N_a^0 = \emptyset$
2. for(i in (1...n)):
3. $\quad N_a^i = N_a^{i-1} \cup \{A \in N_+ \mid (A, \beta\alpha\gamma) \in P \wedge \beta \in (N_\epsilon \cup N_+ \cup \Sigma)^* \wedge \alpha \in (N_a^{i-1} \cup \{a\}) \wedge \gamma \in N_\epsilon^*\}$

$N_a^0 = \emptyset$
$N_a^1 = \{S, U\}$
$N_a^2 = \{S, U, W\}$

2. $for(i \text{ in } (1 \dots n))$:

3. $N_a^i = N_a^{i-1} \cup \{A \in N_+ \mid (A, \beta\alpha\gamma) \in P \land \beta \in (N_\varepsilon \cup N_+ \cup \Sigma)^* \land \alpha \in (N_a^{i-1} \cup \{a\}) \land \gamma \in N_\varepsilon^*\}$

4. $if\ (N_a^{i-1} == N_a^i)$ return N_a^i

$N_a = \{S, U\}$

$N_a^2 = \{S, U, W\}$

$N_a^3 = \{S, U, W\}$

---

1. $_aN_a^0 = \emptyset$

2. $for(i \text{ in } (1 \dots n))$:

3. $_aN_a^i = {_aN_a^{i-1}} \cup \{ A \in N_+ \mid ((A, \alpha\beta\gamma\delta\lambda) \in P \land \alpha, \lambda \in N_\varepsilon^* \land \gamma \in (N_+ \cup \Sigma)^*$
$\land \beta \in ({_aN} \cup \{a\}) \land \delta \in (N_a \cup \{a\})) \lor$
$((A, \alpha\beta\gamma) \in P \land \alpha, \gamma \in N_\varepsilon^* \land \beta \in {_aN_a^{i-1}}) \}$

4. $if\ ({_aN_a^{i-1}} == {_aN_a^i})$ return $_aN_a^i$

$_aN_a = \emptyset$

$_aN_a = \{S, W\}$

$_aN_a = \{S, W\}$