目　录

第三章 地震波传播的动力学特征

在理想化模型假设下，讨论地震波的动力学特征，从简单到复杂，由浅入深。掌握地震波的能量的表示，地震波球面扩散现象。掌握Huygens—Fresnel原理，了解波场计算公式—Kirchhoff绕射积分公式，掌握公式的物理意义，在此基础上重点阐述倾斜因子的物理意义，从理论上清楚地震波沿射线方向能量最集中的道理。

本章讲授的要点

1、地震波球面扩散

2、Huygens-Fresnel原理

3、波场计算公式Kirchhoff及其意义

ρ

3-1 地震波的能量及球面扩散现象

一、地震波的能量

地震波的传播是能量的传播，根据一般的波动理论，对于谐和振动波的能量：

$$E = E_r + E_p \propto \rho A^2 f^2 V$$

E_r :动能　E_p : 势能

A:振幅 , f:谐和振动频率, p:密度，　W:波通过体积

把包含在介质中单位体积的能量，**称为能量密度**

$$e = \frac{E}{V} \propto \rho A^2 f^2$$

单位时间内通过单位面积的能量**称波的强度I（能流密度）**

$$I = \frac{e\ \overbrace{v\ dt\ ds}^{\text{体积}}}{dt\ ds} = ev \propto \rho A^2 f^2 v$$

其中v是波的速度

波的强度正比于波的振幅的平方（当波的频率和传播速度一定时）

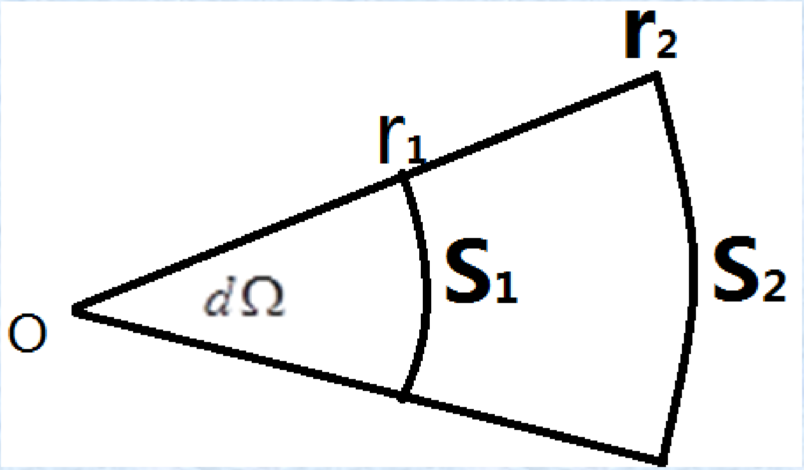
二、地震波的球面扩散

波从震源出发，向地下传播，在某一时刻，波前面到达r_1位置，波前面为S_1，经过一定时间为r_2，S_2（部分球面面积）

单位时间内流过S_1的能量等于流出S_2的能量.

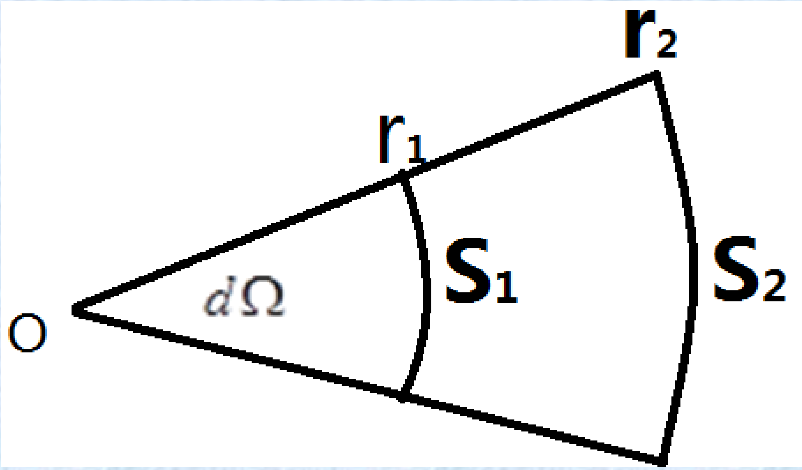
$$I_1 S_1 = I_2 S_2$$

因为 S_1、S_2具有相同的立体角 $d\Omega$



$$d\Omega = \frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2} \qquad I_1 S_1 = I_2 S_2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{S_1}{S_2}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \qquad A \propto \sqrt{r}$$



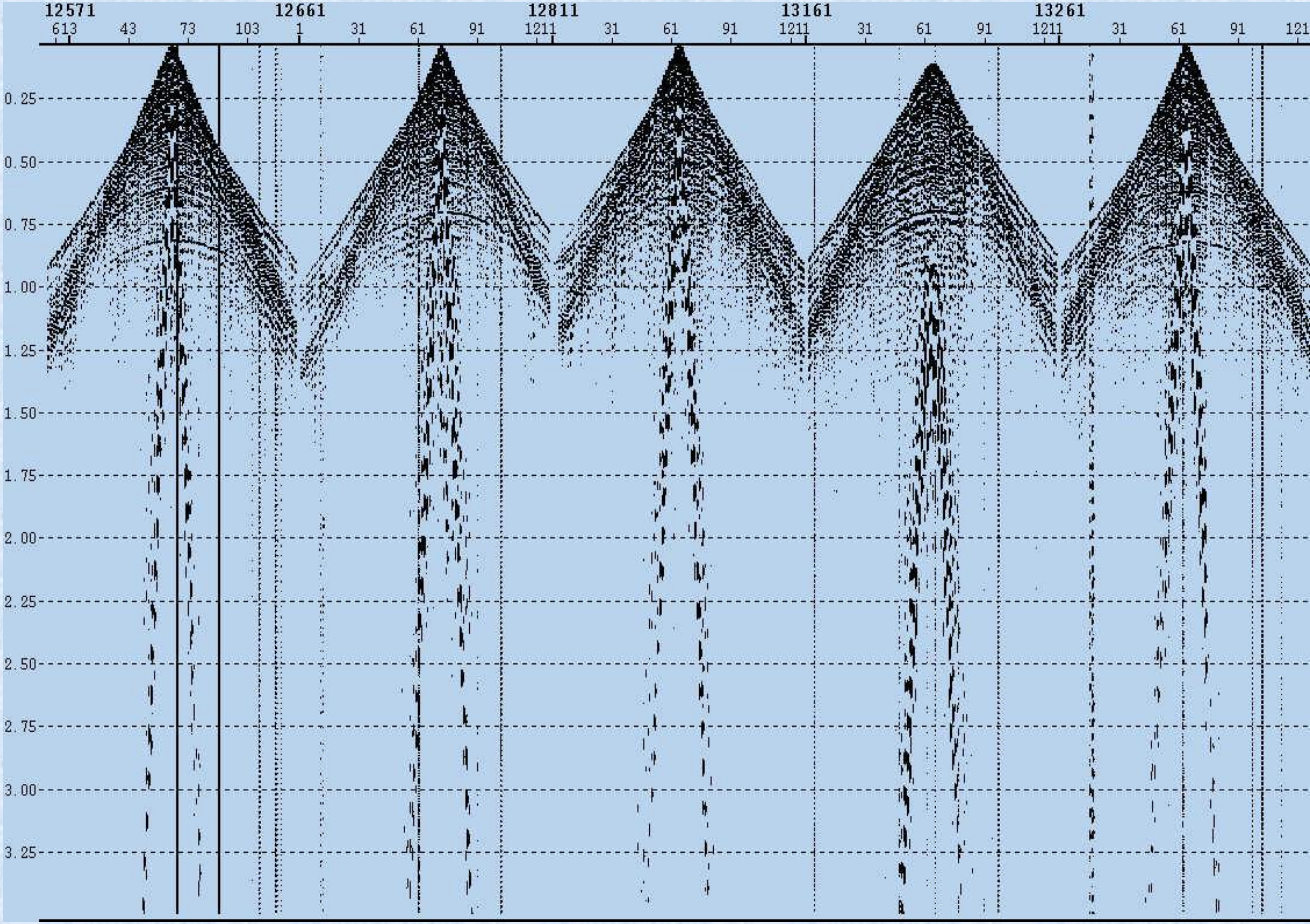
$$\therefore \frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\because I \propto A^2 \qquad \frac{A_2^2}{A_1^2} \propto \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} \propto \frac{r_1}{r_2}$$

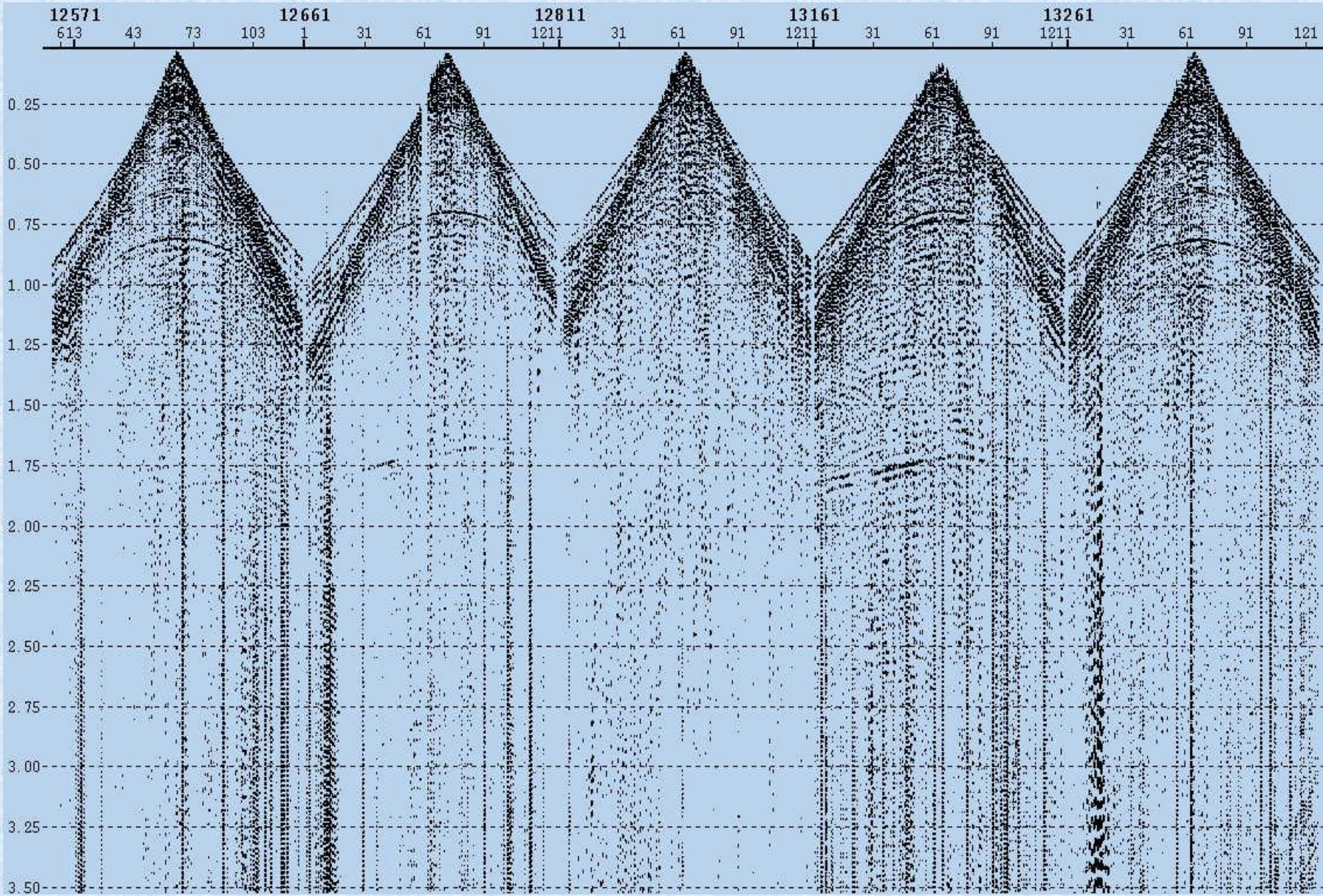
说明波的振幅与波的传播距离成反比，这种现象称为：波的球面扩散，又称几何扩散

球面扩散补偿



原始单炮记录

球面扩散补偿



球面扩散补偿后

3-2 Huygens-Fresnel原理及波场计算

一、Huygens-Fresnel（惠更斯—菲涅尔）原理

研究地震波在地下介质传播问题，有两个值得关注的问题：

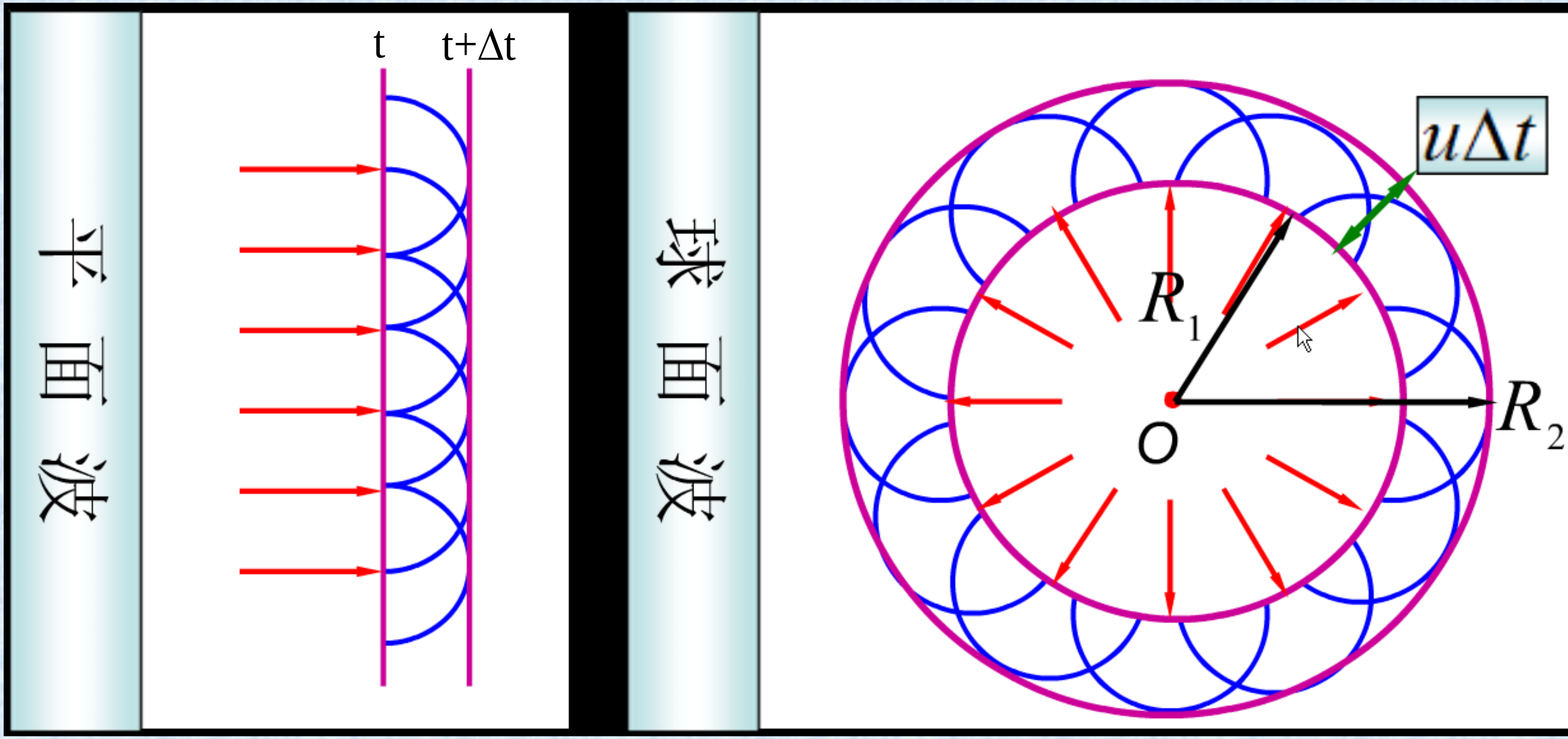
一是：波传播时如何确定不同时刻波所到达的空间位置；

二是：如何计算波到达任一空间点处的波场值。

对于解决地质构造（偏移）和地层岩性（真振幅偏移）问题至关重要。

对于第一个问题，已由Huygens解决了，即：惠更斯（Huygens）原理

惠更斯（Huygens）原理



Huygens原理：

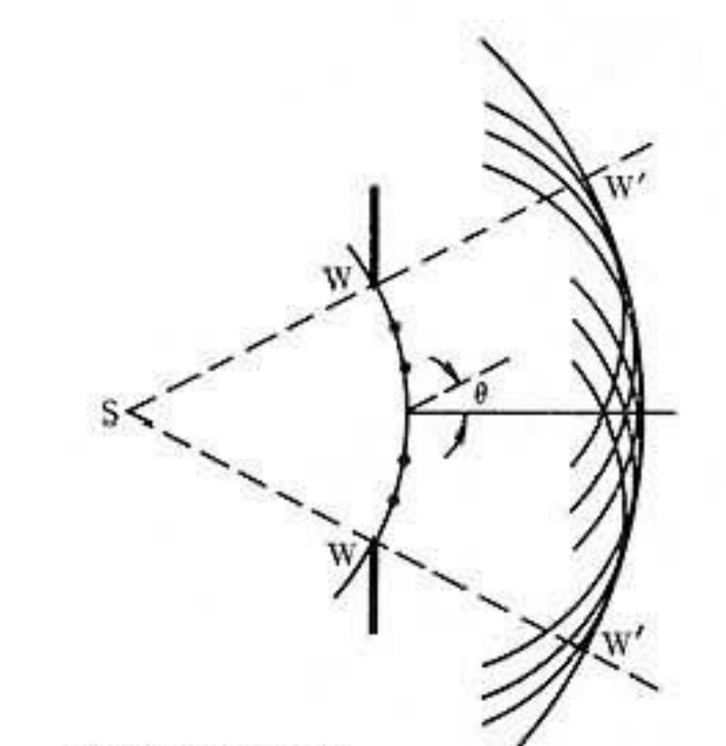
若已知t时刻的波前，此波前面上的每一点都可以看作是新的点震源，这些点震源发射出新的绕射子波，所有发生的绕射子波都以速度V（**可以随空间变化**）向各个方向传播，经△t后，到达新的位置，这些子波波前面的包络（公切面），便是新时刻波前面的位置。

Huygens原理只给出了波的**相位信息**，而未给出振幅信息，后来Fresnel（菲涅尔）在Huygens基础上丰富了Huygens原理，提出：

任一时刻的波前面上的每一点都可视为新的点源，发出新的绕射子波，这些子波在传播过程中相互干涉叠加（相长或相消），因此空间任一观测点处观测的波场是这些绕射子波叠加的结果。

全面给出了任一时刻、任一空间位置的波动；既有相位信息又有振幅信息。

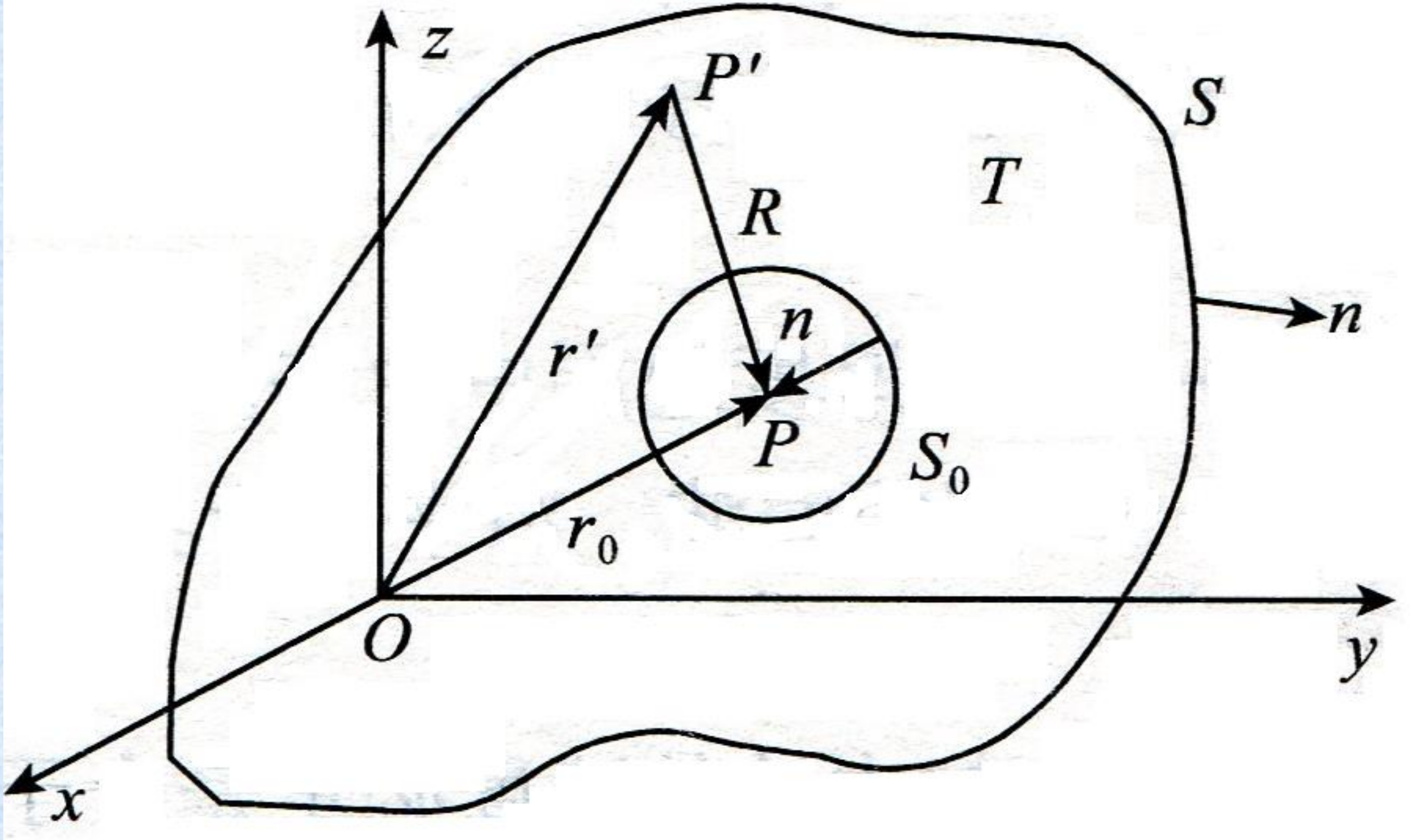
尽管如此，尚未给出如何计算任一观测点处的波场值，后来德国科学家Kirchhoff推出了计算公式，即Kirchhoff积分公式。



球面波的作图法

二、波场计算公式—Kirchhoff（克希霍夫）积分公式

1883年德国科学家Kirchhoff提出：如果围绕着观测点P所在的某一闭合面S的空间域T，已知波动的位移位及其导数，且这些值是连续的（没有奇点），则可以计算出P处的位移位。



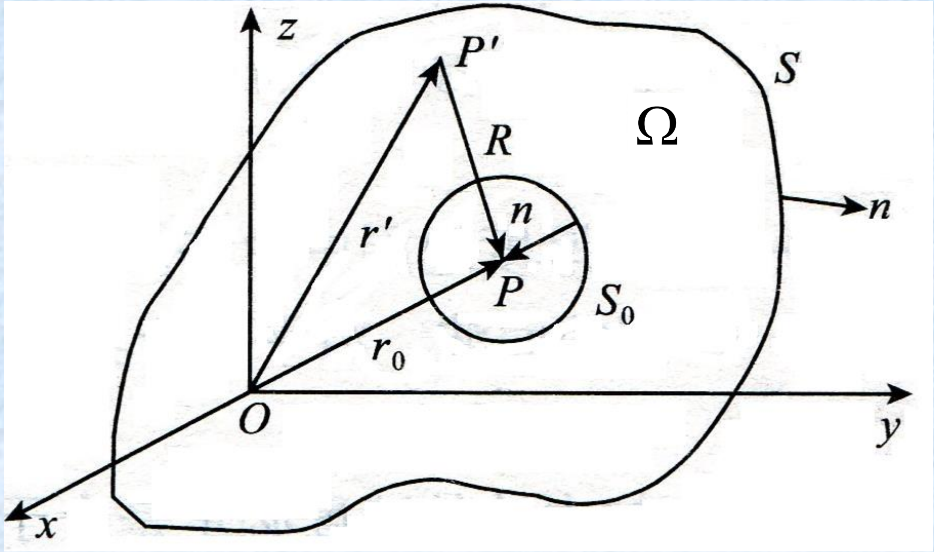
计算出的P处的位移位分两部分，T域内的震源和T域外的震源；

$$\varphi(P,t)=\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{[F]}{r}dV-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\oint_{S}\left\{[\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]-\frac{1}{cR}\frac{\partial R}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\right\}dS$$

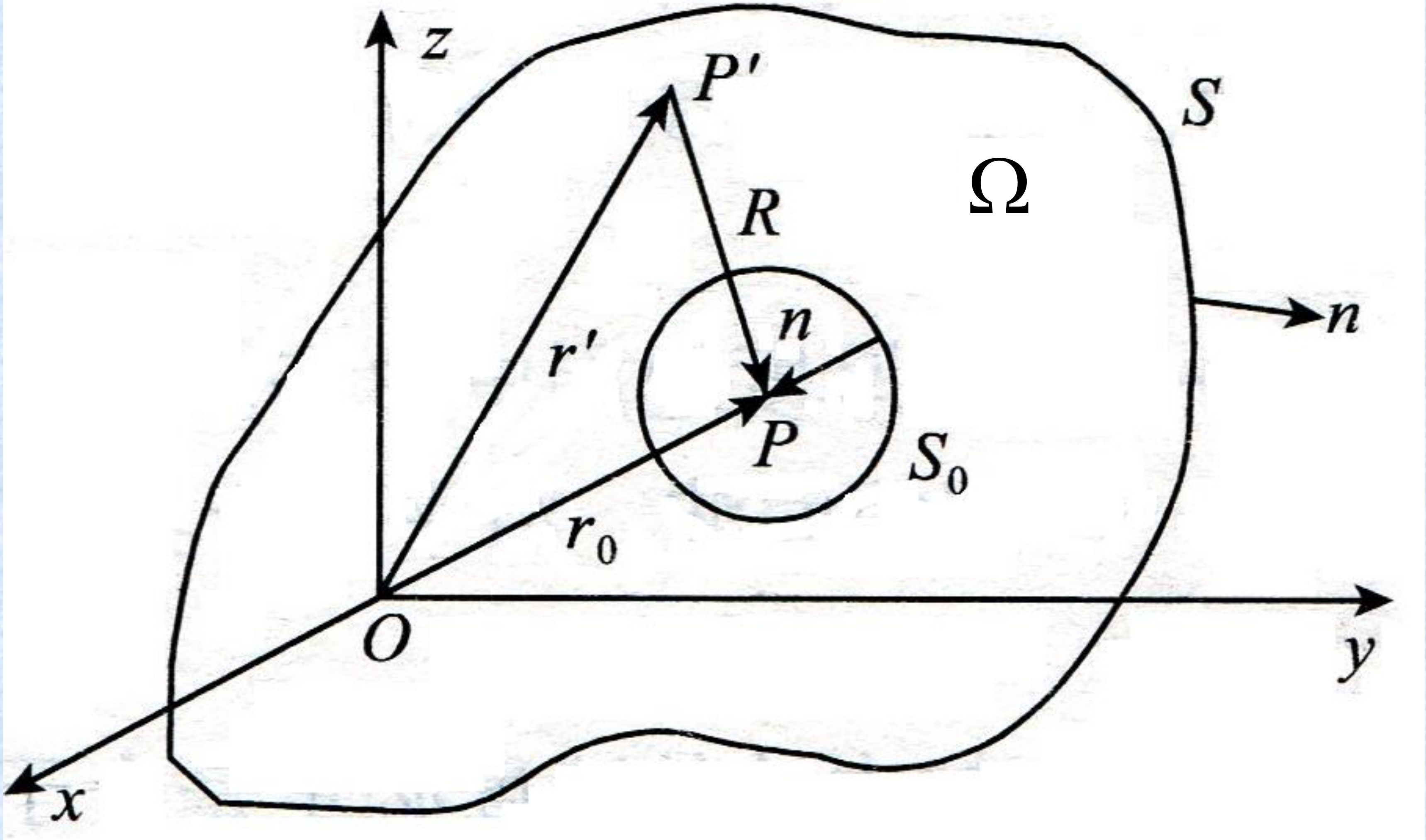
式中 [.]不是方括号，表示不是在时刻t，而是在时刻t1=t-R/c 时刻的值，故称为延迟位，

*F*是T域内震源分布函数或力位

三维纵波波动方程的Kirchhoff积分解



计算克希霍夫积分的空间区域



P点为需要计算的**波场点**，P`为积分计算的**震源点**

R表示震源点到场点的距离，n表示S面的**外法线**方向。

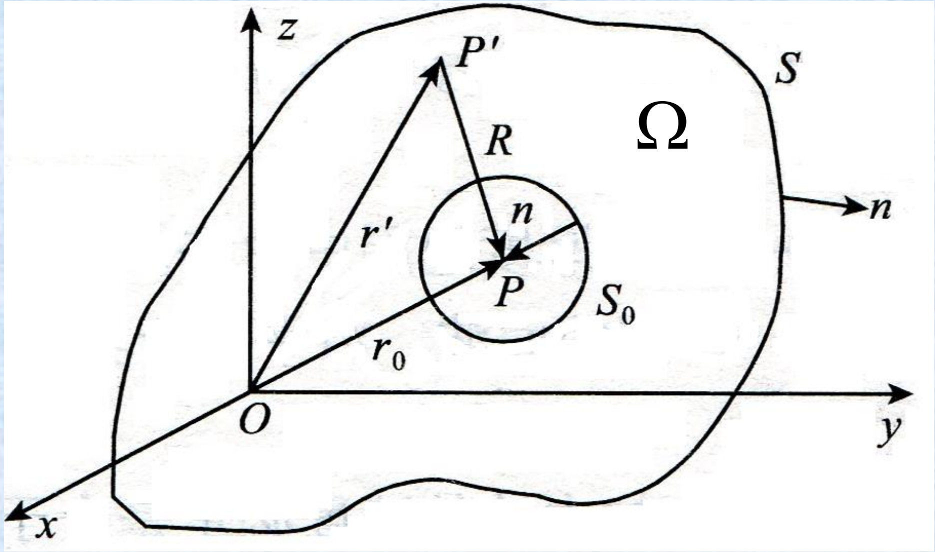
当闭合面外及其上均无震源时，面积分项为零，得：

$$\varphi(P,t)=\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{[F]}{r}dV$$

是非齐次波动方程的解。
当S面内无震源时得：

$$\varphi(P,t)=-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{S}\left\{[\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]-\frac{1}{cR}\frac{\partial R}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\right\}dS$$

此式是惠更斯原理的定量表达式。



基于波动方程的波场计算

根据波动方程，给定初始条件（震源）和边界条件（吸收表面、自由表面），利用有限差分代替微分，求解波动方程。

得到任意时刻，给定区域内的波场值——压力、位移或质点震动速度等

以一个二维的时空域声波波动方程为例

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

其中P为压力，v为速度，t为时间，x，z为空间坐标。二阶差分可以写成如下的格式：

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=\frac{1}{\Delta x^2}\{P(x+\Delta x)-2P(x)+P(x-\Delta x)\}+o(\Delta x^2)$$

按此式将上式进行离散可得：

$$\frac{1}{V^2}\frac{1}{\Delta t^2}(P_{i,j}^{k+1}-2P_{i,j}^{k}+P_{i,j}^{k-1})=\frac{1}{\Delta x^2}(P_{i+1,j}^{k}-2P_{i,j}^{k}+P_{i-1,j}^{k})+\frac{1}{\Delta z^2}(P_{i,j+1}^{k}-2P_{i,j}^{k}+P_{i,j-1}^{k})$$

进而，可以写成如下形式：

$$P_{i,j}^{k+1}=2P_{i,j}^{k}-P_{i,j}^{k-1}+V^{2}\Delta t^{2}\left[\frac{1}{\Delta x^{2}}(P_{i+1,j}^{k}-2P_{i,j}^{k}+P_{i-1,j}^{k})+\frac{1}{\Delta z^{2}}(P_{i,j+1}^{k}-2P_{i,j}^{k}+P_{i,j-1}^{k})\right]$$

从上式可以，对于 $P_{i,j}^{k+1}$ 来说，如果知道它上一时刻同一位置 $P_{i,j}^{k}$ 及其周边的波场值 $P_{i+1,j}^{k}$， $P_{i-1,j}^{k}$， $P_{i,j+1}^{k}$， $P_{i,j-1}^{k}$， 并且知道 $P_{i,j}^{k}$ 上一时刻的波场值 $P_{i,j}^{k-1}$， 就可以得到当前时刻下的波场。

3-3 倾斜因子及其物理意义

Kirchhoff积分公式能定量地描述空间内任一点处的波场值，我们以球面简谐波为例，从kirchhoff积分公式出发推导倾斜因子的公式，并说明其物理意义。

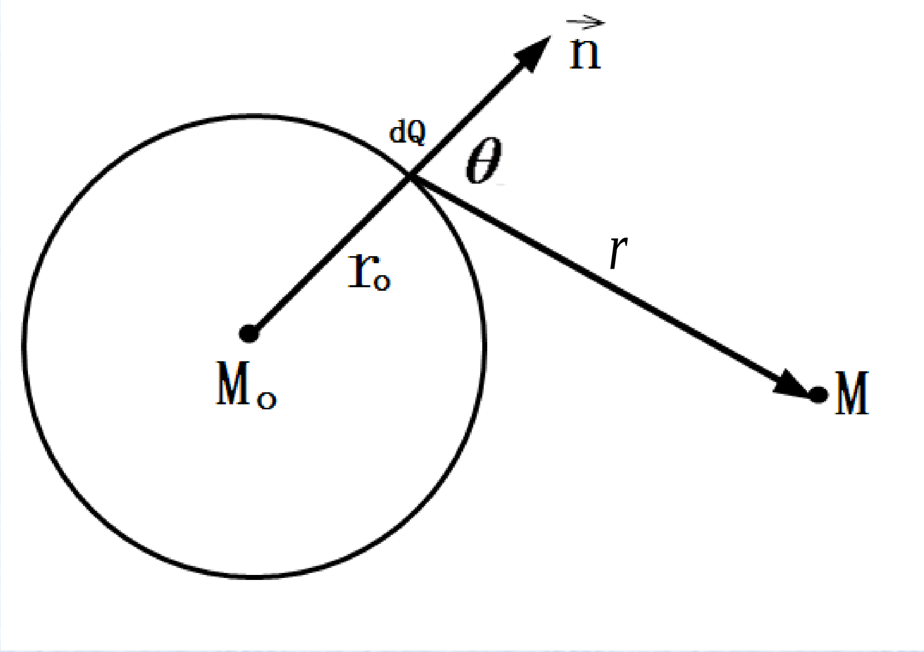
M_0点出发的球面波振幅为A，圆频率为 ω ，则传播到 r_0 处波场为：

$$u=\frac{A}{r_0}e^{i\omega(t-\frac{r_0}{v})}=\frac{A}{r_0}e^{i\omega t}\cdot e^{-i\frac{\omega}{v}\cdot r_0}$$

$K=\frac{\omega}{v}$ 表示圆波数，且略去周期因子$e^{i\omega t}$（只表示波形与能量无关），

则到达dQ的振动为：

$$\frac{A}{r_0}e^{-ikr_0}$$

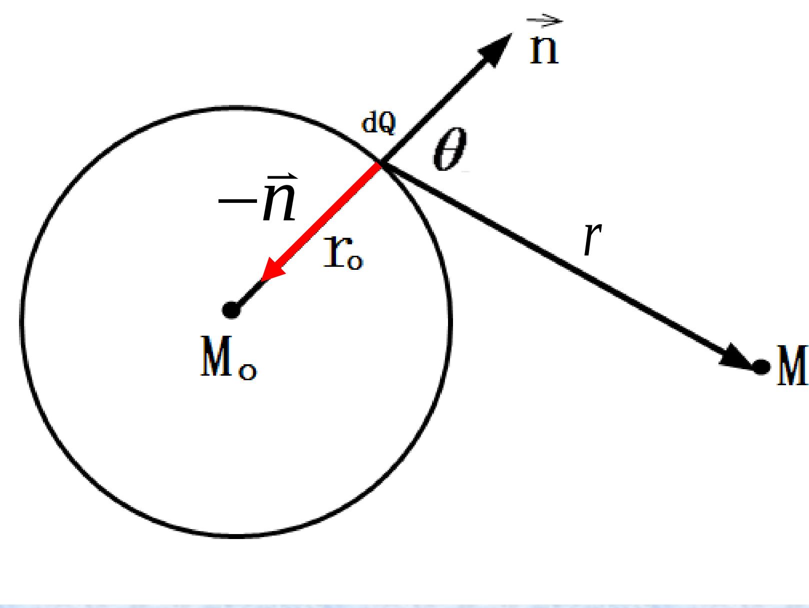


根据惠更斯—菲涅尔原理，把dQ看作二次震源，其在 M 点产生的扰动为：

$$du(\mathrm{M}) = \mathrm{k}(\theta)\frac{A}{r_0}e^{-ikr_0}\cdot\frac{1}{r}e^{-ikr}dQ$$

由整个波前面Q在 M 点形成的总扰动为：

$$u(\mathrm{M}) = \frac{A}{r_0}e^{-ikr_0}\iint_Q \frac{e^{-ikr}}{r}K(\theta)\,\mathrm{dQ}$$



$K(\theta)$ 与夹角 θ 有关的因子，称为倾斜因子，利用kirchhoff积分公式可以证明 $K(\theta)$ 的表达式为：

$$K(\theta)=\frac{i}{2\lambda}(1+\cos\theta)$$

λ 为波长

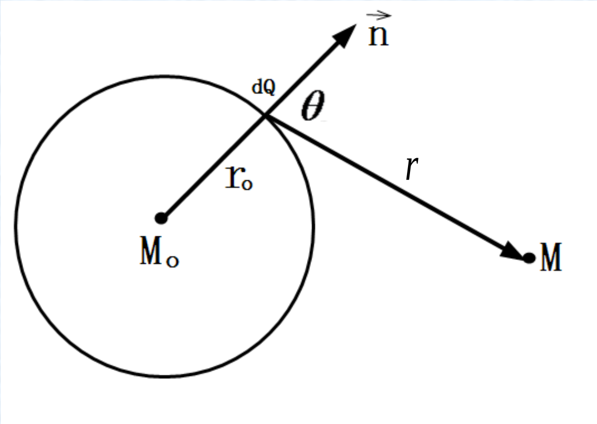
$$K(\theta)=\frac{i}{2\lambda}(1+\cos\theta)$$

因 θ 表示倾斜角度，观测点 M 处波场 与 θ 角有关，

当 $\theta=0^0$ 时，$K(\theta)$ 取最大值，说明观测点在波前的法线n方向有最大值

（这个方向称为波的射线方向）；

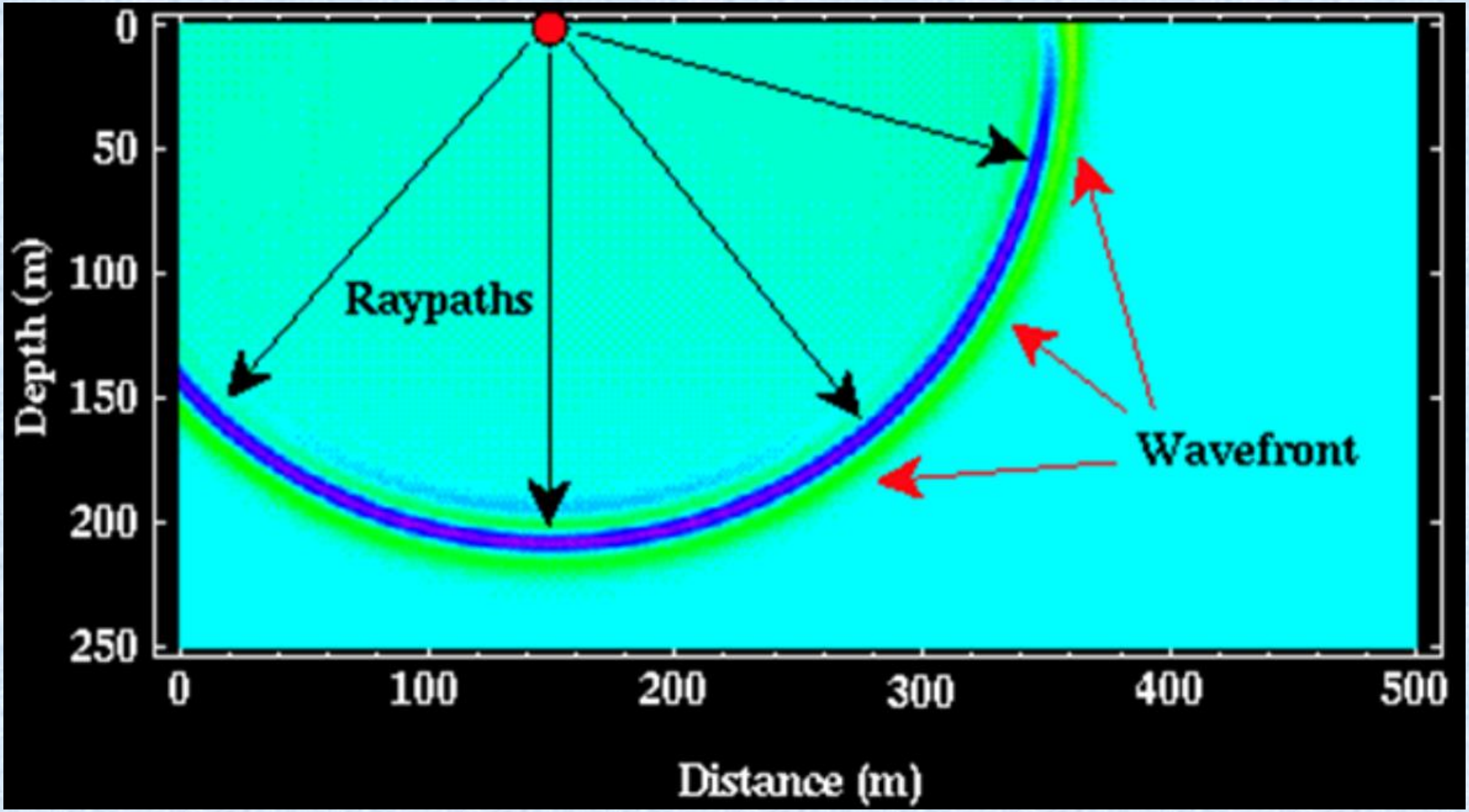
当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$K(\theta)$ 减小了一半，波的能量也减小了一半；



当 $\theta=\pi$ 时，$K(\theta)=0$，意味着无波场。

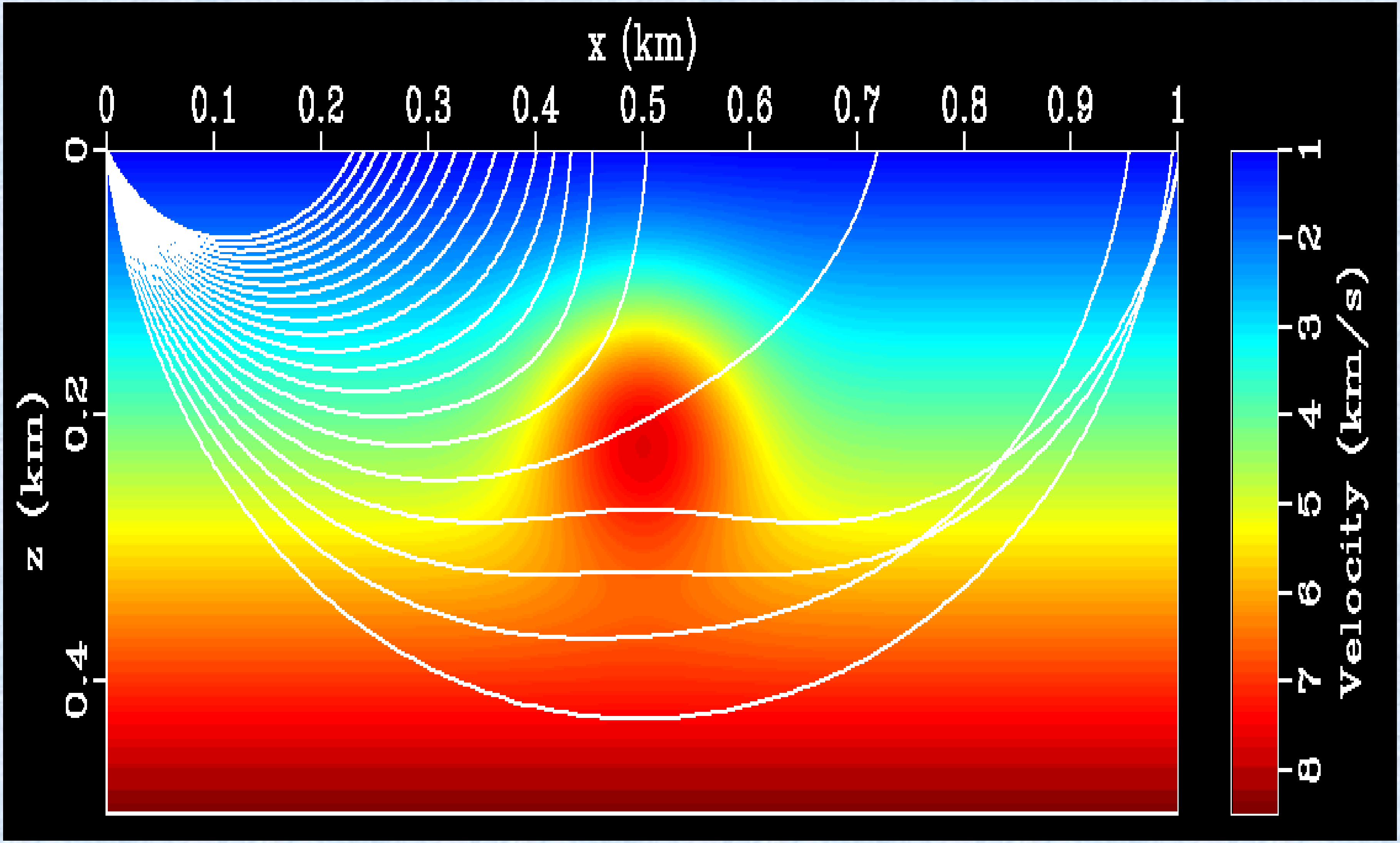
$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ 表示波前面上发射的子波相位超前 $\frac{\pi}{2}$。

波前面与射线

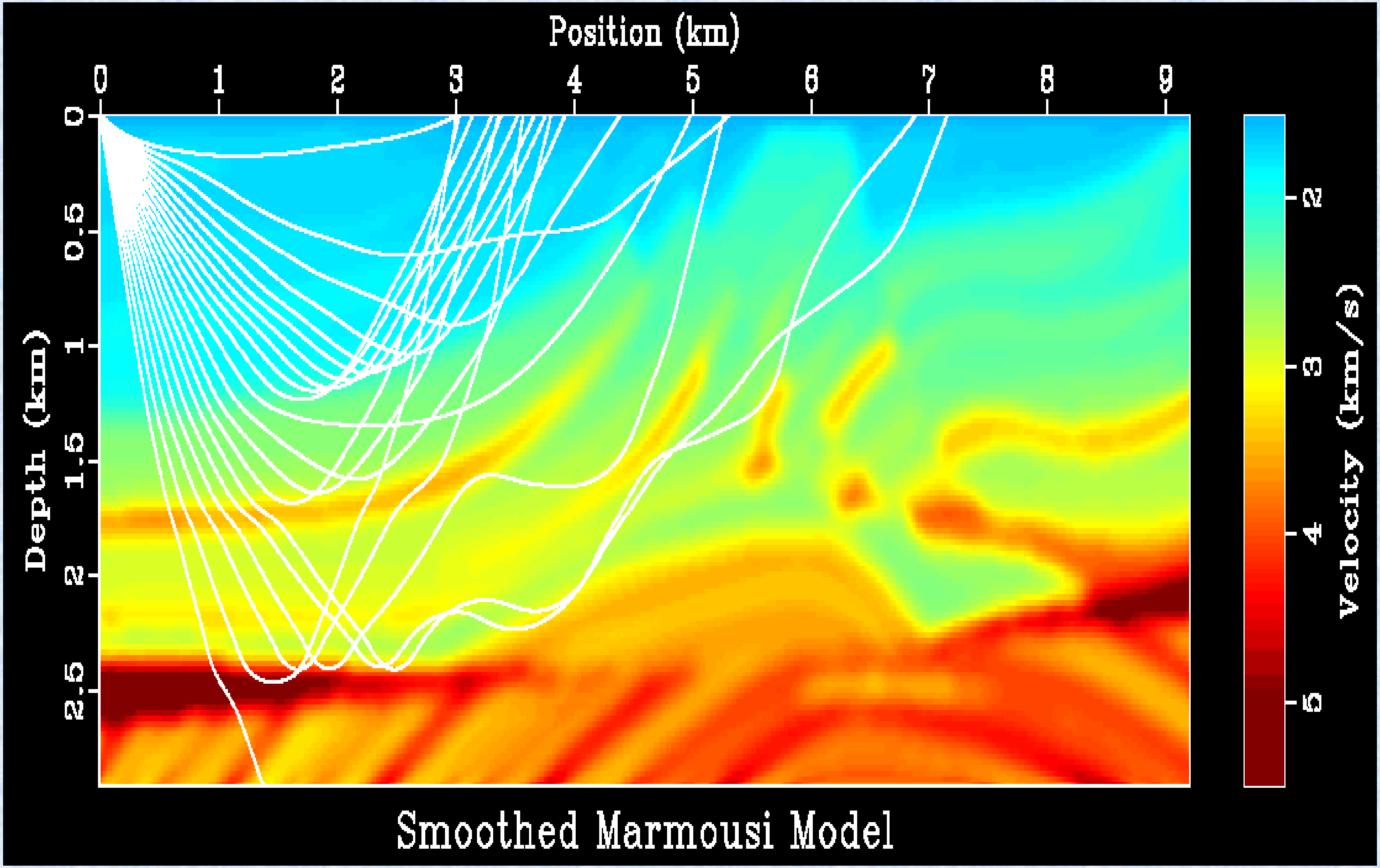


通常可认为波及其能量是沿着某一条路线传播，这条路线称为射线，射线通常垂直于波前面，可以是直线也可以是曲线。波沿射线方向传播，能量最强，波动的大部分能量集中在射线方向。

费马（Fermat）原理：波在一般情况下沿垂直于波前面的路径传播时间最短，这个路径称为射线



复杂介质中波的射线路径



复杂介质中波的射线路径

结论：

- 波沿射线方向传播能量最强，也可以说波动的大部分能量集中在射线方向。
- 射线：通常可以认为波及其能量沿着一条路线传播，这条路线称为射线，射线垂直于波前面，可以是直线，也可以是曲线。

利用Kirchhoff积分公式还可以推导著名的费马（Fermat）原理：波沿垂直于波前面的路径传播时间最短，这个路径称为**射线**。