§ 8.5 复合函数与隐函数的微分法

一、复合函数的微分法----链式法则

定理1 如果函数$u=\varphi(x, y)$及$v=\psi(x, y)$在点(x, y)具有对x, y的偏导数, 且函数$z=f(u, v)$在对应点(u, v)处可微, 则复合函数$z=f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$在点$(x, y)$处对$x$及$y$的偏导数都存在, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

二、 全微分形式的不变性

若函数$z=f(u, v)$可微, $u=\varphi(x, y)$及$v=\psi(x, y)$是x, y的可微函数, 且则复合函数$z=f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$是$x, y$ 的可微函数, 且

$$\mathrm{d}z = z'_x \mathrm{d}x + z'_y \mathrm{d}y$$

$$= z'_u \mathrm{d}u + z'_v \mathrm{d}v$$

三、隐函数的求导法则

(1) $F(x, y)=0$ $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{F'_x}{F'_y}.$

(2) $F(x, y, z)=0$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_z}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y}{F'_z}.$

作业 $P_{296\sim7}$ 习题八 (A)

16. 求由下列方程确定的隐函数的导数或偏导数

(3) $\sin y + e^{x} - x y^{2} = 0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(5) $x+y-z = xe^{z-y-x}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(6) $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

17. 计算下列各题

(1) 设$F(u, v)$有连续偏导数,方程 $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$ 确定函数 $z=f(x, y)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

16. 求由下列方程确定的隐函数的导数或偏导数

(3) $\sin y + e^{x} - x y^{2} = 0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 令 $F(x, y) = \sin y + e^{x} - x y^{2}$

则 $F'_x = e^{x} - y^{2}$

$F'_y = \cos y - 2xy$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = \dfrac{y^2 - e^x}{\cos y - 2xy}$.

16. 求由下列方程确定的隐函数的导数或偏导数

(5) $x+y-z=xe^{z-y-x}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $F(x,y,z)=x+y-z-xe^{z-y-x}$

则 $F'_x=1-1\cdot e^{z-y-x}-x\cdot e^{z-y-x}\cdot(-1)$

$=1-(1-x)e^{z-y-x}$

$F'_y=1+xe^{z-y-x}$

$F'_z=-1-x\cdot e^{z-y-x}$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{1-(1-x)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=1.$$

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

(5) $x+y-z=xe^{z-y-x}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

利用全微分形式不变性求

解2 方程 $x+y-z=xe^{z-y-x}$ 两边求微分得

$$dx+dy-dz=e^{z-y-x}dx+x\cdot e^{z-y-x}(dz-dy-dx)$$

即

$$(1+xe^{z-y-x})dz=[1-(1-x)e^{z-y-x}]dx+(1+xe^{z-y-x})dy$$

当 $1+xe^{z-y-x}\neq 0$ 时, 有

$$dz=\frac{1-(1-x)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy,$$

所以,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-(1-x)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=1\,.$$

16. (6) $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 令 $F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}=\dfrac{x}{z}-\ln z-\ln y$，则

$$F'_x=\frac{1}{z},\quad F'_y=\frac{1}{y},\quad F'_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z},$$

当 $y\neq 0,\ z\neq 0$ 时，$F'_x(x,y,z),\ F'_y(x,y,z),\ F'_z(x,y,z)$ 连续；

所以，当 $F'_z(x,y,z)\neq 0$，即 $x+z\neq 0$ 且 $y\neq 0,\ z\neq 0$ 时，

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{z}{x+z},\qquad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{z^2}{y(x+z)},$$

$$z''_{xy}=\left(\frac{z}{x+z}\right)'_y=\frac{z'_y\cdot(x+z)-z\cdot z'_y}{(x+z)^2}=\frac{x\cdot\dfrac{z^2}{y(x+z)}}{(x+z)^2}$$

$$=\frac{xz^2}{y(x+z)^3}.$$

17. 计算下列各题

(1) 设$F(u, v)$有连续偏导数,方程 $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$

确定函数 $z=f(x, y)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解

$$F'_x = F'_u + 2xF'_v,$$

$$F'_y = F'_u + 2yF'_v,$$

$$F'_z = F'_u + 2zF'_v,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{F'_u + 2x F'_v}{F'_u + 2z F'_v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{F'_u + 2y F'_v}{F'_u + 2z F'_v}.$$

17. 计算下列各题

(1) 设$F(u, v)$有连续偏导数,方程 $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$ 确定函数 $z=f(x, y)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

利用全微分形式不变性求

解2 方程 $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$两边求微分得

$$F'_u\, \mathrm{d}(x+y+z) + F'_v\, \mathrm{d}(x^2+y^2+z^2) = 0$$

$$F'_u(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z) + F'_v\, (2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z) = 0$$

整理得

$$\mathrm{d}z = -\frac{F'_u + 2x F'_v}{F'_u + 2z F'_v}\mathrm{d}x - \frac{F'_u + 2y F'_v}{F'_u + 2z F'_v}\mathrm{d}y.$$

所以,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_u + 2x F'_v}{F'_u + 2z F'_v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_u + 2y F'_v}{F'_u + 2z F'_v}.$$

§8.6 二元函数的极值

一、 二元函数极值的概念

二、 二元函数极值存在的条件

三、 条件极值与拉格朗日定理

一、极值的概念

1 定义8.7 若函数$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内异于(x_0, y_0)的所有点都有

(1) $f(x, y)< f(x_0, y_0)$,

则称$f(x_0, y_0)$为函数$f(x, y)$的一个极大值;

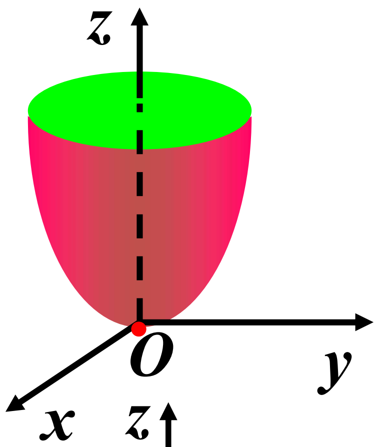
(2) $f(x, y)> f(x_0, y_0)$,

则称$f(x_0, y_0)$为函数$f(x, y)$的一个极小值.

极大值和极小值统称为极值.

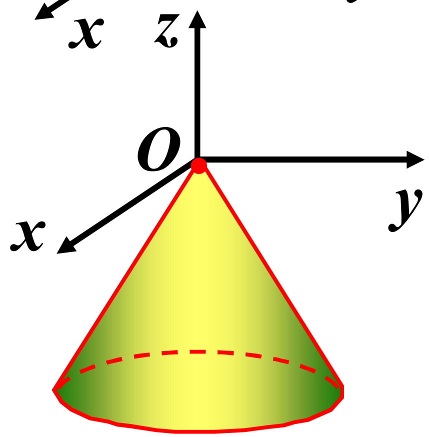
使函数取得极值的点(x_0, y_0)称为函数的极值点.

函数是否存在极值,在简单的情形下是容易判断的.



例1 函数 $z=x^2+y^2$ 旋转抛物面

在(0,0)点取极小值. (也是最小值).

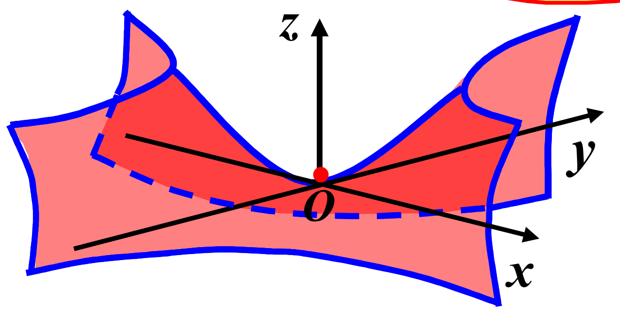


例1* 函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 下半个圆锥面

在(0,0)点取极大值. (也是最大值).

例2* 函数 $z=xy$ 马鞍面

在(0,0)点无极值.



二、极值存在的条件

定理8.4(必要条件) 如果函数$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)处有极值, 且两个一阶偏导数存在, 则有

$$f'_x(x_0, y_0)=0, \qquad f'_y(x_0, y_0)=0.$$

证 设函数$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)处有极值,

则对于点(x_0,y_0)的某邻域内任意$(x, y)\neq(x_0, y_0)$都有

$$f(x, y)< f(x_0, y_0), \text{ 或 } f(x, y) > f(x_0, y_0).$$

故当$y=y_0$, $x\neq x_0$时, 有$f(x,y_0)<f(x_0, y_0)$, 或$f(x,y_0)>f(x_0,y_0)$.

即一元函数 $z=f(x, y_0)$ 在点$x=x_0$有极值,

又$f'_x(x, y_0)$存在, 所以 $f'_x(x_0, y_0)=0$,

同理可得 $f'_y(x_0, y_0)=0$.

定理8.4 可以推广到三元以上的函数 .

问题1　如果$z=f(x_0, y)$或$z=f(x, y_0)$在点(x_0, y_0)处均取得极值, 则$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处是否也取得极值?

不一定！

例如 函数$f(x, y) = x^2 - y^2$,

$f(0, y) = -y^2$在$(0, 0)$取得极大值,

$f(x, 0) = x^2$在$(0, 0)$取得极小值,

但是函数$f(x, y) = x^2 - y^2$在$(0, 0)$没有极值.

使各一阶偏导数同时为零的点, 称为函数的驻点.

偏导数存在的极值点 $\rightarrow$ 驻点

注意　驻点 $\not\longrightarrow$ 极值点

问题2: 如何判定一个驻点是否为极值点?

注 由极值的必要条件知, 如果偏导数存在, 极值只可能在驻点处取得.

然而,如函数在个别点处的偏导数不存在,

这些点当然不是驻点, 但也可能是极值点.

如: 函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0,0)处的偏导数不存在,

但函数在点(0,0)处都具有极大值.

在研究函数的极值时, 除研究函数的驻点外, 还应研究偏导数不存在的点.

问题2: 如何判定一个驻点是否为极值点?

使各一阶偏导数同时为零的点, 称为函数的驻点.

偏导数存在的极值点 $\rightarrow$ 驻点

定理8.5(充分条件) 如果函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内有连续的二阶偏导数, 且(x_0, y_0)是它的驻点, 设

$$P(x, y)=[f''_{xy}(x, y)]^2-f''_{xx}(x, y)\cdot f''_{yy}(x, y)$$

(1) 如果$P(x_0, y_0)<0$, 且$f''_{xx}(x_0, y_0)<0$, 则$f(x_0, y_0)$是极大值.

(2) 如果$P(x_0, y_0)<0$, 且$f''_{xx}(x_0, y_0)>0$, 则$f(x_0, y_0)$是极小值.

(3) 如果$P(x_0, y_0)>0$, 则$f(x_0, y_0)$不是极值 .

(4) 如果$P(x_0, y_0)=0$, $f(x_0, y_0)$是否为极值需另外判别.

求函数$z=f(x, y)$极值的一般步骤:

第1步: 解方程组 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0, \end{cases}$ 求出实数解, 得驻点;

第2步: 求二阶偏导数及其在每一个驻点(x_0, y_0)的值;

第3步: 定出$P(x_0, y_0)$的符号, 再判定是否为极值;

第4步: 如果有偏导数不存在的点, 判定是否为极值.

无条件极值: 对自变量除了限制在定义域内外,

并无其他条件.

例4 求函数 $f(x, y)=y^3-x^2+6x-12y+5$ 的极值.

解 $f'_x(x, y) = -2x+6$, $f'_y(x, y)=3y^2-12$,

令 $\begin{cases} -2x+6=0 \\ 3y^2-12=0 \end{cases}$ 得驻点 $(3, -2)$, $(3, 2)$;

又 $f''_{xx}(x, y)= -2$, $f''_{xy}(x, y)= 0$, $f''_{yy}(x, y)=6y$,

$$P(3, -2)=0^2-(-2)\cdot 6\cdot(-2) = -24 < 0,$$

且 $f''_{xx}(x, y)= -2 < 0$, 所以 $(3, -2)$ 是极大值点,

其极大值 $f(3, -2)=30$.

$$P(3, 2)=0^2-(-2)\cdot 6\cdot 2= 24 > 0,$$

故 $(3, 2)$ 不是极值点.

3. 多元函数的最值

与一元函数相类似，我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值.

求最值的一般方法:

将函数在D内的所有驻点和偏导数不存在点处的函数值及在D的边界上的最大值和最小值相互比较, 其中最大者即为最大值, 最小者即为最小值.

例6 某工厂生产两种产品I 和 II, 出售单价分别为10元与9元, 生产x单位的产品I与生产y单位的产品II的总费用是:

$$400+2x+3y+0.01(3x^2+xy+3y^2)(\text{元})$$

求两种产品的产量各多少, 工厂取得最大利润.

解
$$L(x, y)=10x+9y-[400+2x+3y+0.01(3x^2+xy+3y^2)]$$
$$=8x+6y-0.01(3x^2+xy+3y^2)-400,$$

$$L'_x(x, y)=8-0.01(6x+y),$$

$$L'_y(x, y)=6-0.01(x+6y),$$

令 $\begin{cases} 8-0.01(6x+y)=0 \\ 6-0.01(x+6y)=0 \end{cases}$ 得驻点(120, 80),

$L(x,y)=8x+6y-0.01(3x^2+xy+3y^2)-400$,

驻点(120, 80),

因驻点唯一, 由实际问题知利润一定有最大值, 所以当生产120单位的产品I与生产80单位的产品II时,工厂取得最大利润.

最大利润 $L(120, 80)=320$(元)

事实上由 $L'_x(x, y)=8-0.01(6x+y)$,

$L'_y(x, y)=6-0.01(x+6y)$,

得 $f''_{xx}(x, y)=-0.06<0$, $f''_{xy}(x, y)=-0.01$

$f''_{yy}(x, y)=-0.06$

$P(120, 80)=(-0.01)^2-(-0.06)\cdot(-0.06)$

$=-0.0035<0$.

例3* 求函数 $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$ 的最大值与最小值.

解 $z'_x=\dfrac{1\cdot(x^2+y^2+1)-(x+y)\cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+y^2-2xy+1}{(x^2+y^2+1)^2}$

由对称性知 $z'_y=\dfrac{x^2-y^2-2xy+1}{(x^2+y^2+1)^2}$

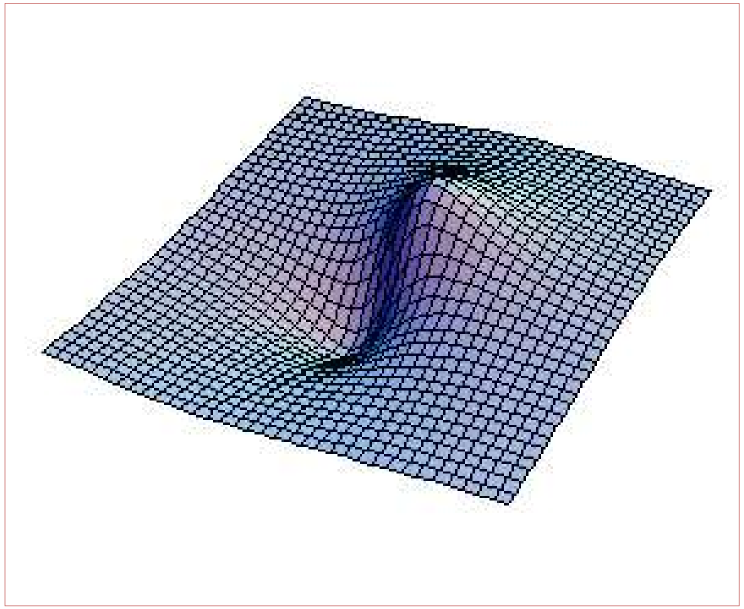
令 $\begin{cases}-x^2+y^2-2xy+1=0\\ x^2-y^2-2xy+1=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\pm y\\ 2xy=1\end{cases}$

得驻点 $(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}),(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}})$.

$$z\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$z=\frac{x+y}{x^2+y^2+1}$$

$$z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$



因 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}=0,$

即边界上的值趋近来于0,

所以函数的最大值为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，最小值为 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

例5 要造一个容量一定的长方体箱子, 问选择怎样的尺寸, 才能使所用材料最少?

解 设长方体箱子的长、宽、高分别为x、y、z, 容量为V, 表面积为S, 则

由题意有 $xyz = V$, $\boxed{z = \dfrac{V}{xy}}$,

$$S = 2(xy + x\boxed{z} + y\boxed{z}) = 2(xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y})$$

令 $$\begin{cases} S'_x = 2(y - \dfrac{V}{x^2}) = 0 \\ S'_y = 2(x - \dfrac{V}{y^2}) = 0 \end{cases}$$ 得驻点$(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$

因驻点唯一, 且长方体的表面积一定有最小值, 故当长方体的长、宽、高相等(都为$\sqrt[3]{V}$)时, 所用材料最少.

上例的极值问题也可以看成是求三元函数

$S=2(xy+xz+yz)$的极值,

目标函数

约束条件

但 x、y、 z 的要受到条件 $xyz=V$ 的限制,

这便是一个条件极值问题.

有时条件极值可通过将约束条件代入目标函数中化为无条件极值.

但在一般情形下,这样做是有困难的,甚至是不可能的.

问题:条件极值问题是否有一般的解决方法?

拉格朗日乘数法

练习题

1 求函数 $z=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

2 求二元函数 $f(x,y)=x^2(6+y^2)+y\ln y$ 的极值.

3 将正数12分成3个正数 x, y, z 之和使得 $u=x^3y^2z$ 为最大.

练习题1 求函数 $z=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

P_{296}习题八(A) 19-(2)

解

$$z'_x=4-2x,\qquad z'_y=-4-2y,$$

令 $\begin{cases}4-2x=0\\-4-2y=0\end{cases}$ 得驻点(2, –2) ;

又 $z''_{xx}=-2,\quad z''_{xy}=0,\quad z''_{yy}=-2,$

$$P(x,y)=0^2-(-2)(-2)=-4<0,$$

且 $z''_{xx}=-2<0,$

所以(2, –2)是极大值点,

其极大值 $f(2,-2)=8.$

练习题2 求二元函数 $f(x, y)=x^2(6+y^2)+y\ln y$ 的极值.

解 $f'_x(x, y) = 2x(6+y^2)$, $f'_y(x, y)=2x^2y+\ln y+1$,

令 $\begin{cases} 2x(6+y^2)=0 \\ 3x^2y+\ln y+1=0 \end{cases}$ 得驻点 $(0, e^{-1})$,

又 $f''_{xx}(x,y)=2(6+y^2)$, $f''_{yy}(x,y)=2x^2+\dfrac{1}{y}$,

$f''_{xy}(x,y)=4xy$,

$$P(0, e^{-1})= -2(6+e^{-2})\, e < 0\ ,$$

且 $f''_{xx}(0, e^{-1})=2(6+e^{-2}) > 0$,

所以 $(0, e^{-1})$ 是极小值点,

其极小值 $f(0, e^{-1})= -e^{-1}$.

练习题3 将正数12分成3个正数 x, y, z 之和使得 $u=x^3y^2z$ 为最大.

问题为求 $u=x^3y^2z$在条件 $x+y+z=12(x>0,y>0,z>0)$下的极值

解 由已知条件有

$$u=x^3y^2z=x^3y^2(12-x-y)$$

令 $\begin{cases} u'_x=36x^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^3=0 \\ u'_y=24x^3y-2x^4y-3x^3y^2=0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} 36-4x-3y=0 \\ 24-2x-3y=0 \end{cases} \Rightarrow x=6,\ y=4,$

因驻点唯一, 又实际问题一定存在最值,

所以当$x=6, y=4, z=2$时u 有最大值, 且

$$u_{max}=6^3\cdot 4^2\cdot 2=6912.$$

作业 P_{297} 习题八 (A)

19. 求下列函数的极值

(1) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

(3) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

20. 设某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为P_1和P_2, 销售量分别为Q_1和Q_2, 需求函数分别为

$$Q_1 = 24 - 0.2P_1, \qquad Q_2 = 24 - 0.05P_2,$$

总成本函数为

$$C = 35 + 40(Q_1 + Q_2),$$

试问, 厂家如何确定两个市场的产品售价, 才能使其获得的总利润最大? 最大利润是多少?