§ 7.2 无穷级数的基本性质

定理7.1 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都收敛, 其和分别为S及W, 则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$也收敛, 且其和为$(S+W)$.

证 设$\{T_n\},\{S_n\},\{W_n\}$分别为级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$与$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$及$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$的部分和, 则

$$
\begin{aligned}
T_n &= (u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n)\\
&= (u_1+u_2+\cdots+u_n)+(v_1+v_2+\cdots+v_n)\\
&= S_n+W_n
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n\to\infty} T_n=\lim_{n\to\infty}(S_n+W_n)=S+W$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=S+W=\sum_{n=1}^{\infty} u_n+\sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

定理7.2 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 其和为S, 则$\sum_{n=1}^{\infty} au_n$也收敛, 且其和为 aS.

证 设$\{S_n\}$,$\{W_n\}$分别为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} au_n$的部分和,

则 $$W_n = au_1+au_2+\cdots+au_n$$

$$= a(u_1+u_2+\cdots+u_n) = aS_n$$

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \lim_{n\to\infty} aS_n = aS,$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = aS.$$

推理1* 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n .$$

例1 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^n}+\frac{2}{5^n})$ 的收敛性.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^n}+\frac{2}{5^n})=(\frac{1}{3}+\frac{2}{5})+(\frac{1}{3^2}+\frac{2}{5^2})+\cdots+(\frac{1}{3^n}+\frac{2}{5^n})+\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}$$

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}$ 都收敛，所以级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^n}+\frac{2}{5^n})$收敛.

例2 判定级数

$$3\ln\frac{2}{1}+3\ln\frac{3}{2}+3\ln\frac{4}{3}+\cdots+3\ln\frac{n+1}{n}+\cdots$$

的收敛性.

解 P_{223} 第一节例3 知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}+\cdots$$

发散.

所以级数

$$3\ln\frac{2}{1}+3\ln\frac{3}{2}+3\ln\frac{4}{3}+\cdots+3\ln\frac{n+1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}3\ln\frac{n+1}{n}$$

发散.

注1: 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散, 则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$发散.

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \sum_{n=1}^{\infty}v_n$均发散, 则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$敛散性不确定.

例1* 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n} - \frac{\ln^n 3}{3^n}\right)$的敛散性

解 因调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 由性质1知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$发散.

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n 3}{3^n}$是以$q = \frac{\ln 3}{3}$为公比的等比级数,

$|q| = \frac{\ln 3}{3} < 1$, 所以这个等比级数收敛.

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n} - \frac{\ln^n 3}{3^n}\right)$发散.

定理7.3 在一个级数的前面加上(或去掉)(或改变)有限项, 级数的敛散性不变.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+m} + \cdots$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+m} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$$

令 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, $W_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n}$,

$A = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$,

则 $W_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n}$

$$-(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = S_{k+n} - A$$

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \lim_{n\to\infty}(S_{n+k} - A) = \lim_{n\to\infty} S_n - A,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散.

例3 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的第n次部分和$S_n=\dfrac{n}{2n-1}$，判定级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+2}$的收敛性．若级数收敛，求它的和．

解 由 $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n-1}=\dfrac{1}{2}$，

得级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，和为$\dfrac{1}{2}$，

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+2}$收敛，

和为 $S-(u_1+u_2)=S-S_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{2\times2-1}$

$$=-\frac{1}{6}.$$

定理7.4 如果一个级数收敛, 加括号后所成的级数也收敛, 且与原级数有相同的和.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和为S, 部分和为S_n,

设按照某一规律加括号后所成的级数为

$$u_1+(u_2+u_3)+(u_4+u_5+u_6)+\cdots$$

并设其部分和为W_m, 则

$$W_1=S_1,\ W_2=S_3,\ W_3=S_6,\ \cdots, W_m=S_n,\ \cdots \quad m<n,$$

显然, 数列$\{W_m\}$是数列$\{S_n\}$的子数列, 所以

$$\lim_{m\to\infty} W_m = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

例2*设$\{u_n\}$是数列, 则下列命题正确的是 【 A 】

(A) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛. √

(B) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(C) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.

(D) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

2011数3

推论 如果加括号后所成的级数发散, 则原来级数也发散.

注2 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

如 级数:

$$(a-a)+(a-a)+(a-a)+\cdots+(a-a),\cdots \quad \text{收敛}$$

去括号后所成的级数

$$a-a+a-a+a-a+\cdots+a-a+\cdots \quad \text{发散}$$

定理7.5 (级数收敛的必要条件) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,

则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, 即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$,

因 $u_n = S_n - S_{n-1}$,

所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

$$= 0.$$

注3: 如果级数的一般项不趋于零, 则级数发散;

例如 级数(1) $1-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1},\cdots$ 发散

(2) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$ 发散

(3) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+\cdots$发散

注4: $u_n\to 0(n\to\infty)$是收敛的必要条件, 但不充分.

例如 级数(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}+\cdots$

有 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, 但级数不收敛.

三、小结

1 定义 (常数项)无穷级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

2 常数项级数敛散性的判别法

1° 由定义部分和数列$S_n \to S$, 级数收敛.

2° 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则级数发散.

3° 按基本性质.

3° 按基本性质.

性质1: 级数的每一项同乘一个不为零的常数, 敛散性不变.

性质2: 收敛级数可以逐项相加与逐项相减.

性质3: 在级数前面加上、减去或改变有限项不影响级数的敛散性.

性质4: 收敛级数加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和.

例3* 判别级数

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})+\cdots+(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n})+\cdots$$

的收敛性.

解

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})+\cdots+(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n})+\cdots$$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots)-(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 都收敛, 所以级数

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})+\cdots+(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n})+\cdots$$ 收敛.

作业 P_{252} 习题七 (A)

2. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的第$n$次部分和$S_n=\dfrac{3n}{n+1}$，试写出此级数，求其和.

3 判定下列级数的敛散性，若级数收敛，求其和.

(1) $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots+\sqrt[n]{0.001}+\cdots$

(2) $\dfrac{4}{5}-\dfrac{4^2}{5^2}+\dfrac{4^3}{5^3}-\dfrac{4^4}{5^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{4^n}{5^n}+\cdots$

(3) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{8}+\cdots$

(4) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}+\cdots$

(5) $(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9})+(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{27})+\cdots$