§ 7. 3 正项级数

正项级数敛散性判别法

1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ 发散; 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

2 比值判别法; 若失效

3 比较判别法

4 根式判别法

5 充要条件

6 按基本性质

7. $S_n \overset{?}{\to} S$

4、重要参考级数:

1° 等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots \quad (a\neq 0)$$

当 $|q|<1$ 时, 收敛,

当 $|q|\geq 1$ 时, 发散.

2° 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

3° P–级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$

当 $p>1$ 时, 收敛,

当 $0<p\leq 1$ 时, 发散.

4. 用比较判别法判定下列级数的敛散性.

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}+\cdots$

解　由于 $\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$　　$n=1, 2, 3, \cdots$,

因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

所以, 级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}+\cdots$ 收敛 .

4. 用比较判别法判定下列级数的敛散性.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$

解 因为 $\displaystyle\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}$ $\quad n=1, 2, 3, \cdots,$

而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散,

所以, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 发散 .

4. 用比较判别法判定下列级数的敛散性

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

解　由于 $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$　$n=1, 2, 3, \cdots$,

因 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 收敛,

所以, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 收敛 .

5. 用比值判别法判定下列级数的敛散性.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$

解

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{[2(n+1)+1]!}}{\frac{1}{(2n+1)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$= 0 < 1,$$

由比值判别法知原级数收敛.

5. 用比值判别法判定下列级数的敛散性.

(8) $\dfrac{2}{1\cdot 2}+\dfrac{2^2}{2\cdot 3}+\dfrac{2^3}{3\cdot 4}+\dfrac{2^4}{4\cdot 5}+\cdots$

解 级数的通项 $u_n=\dfrac{2^n}{n\cdot(n+1)}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{2^n}{n(n+1)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+2}$$

$$=2>1,$$

由比值判别法知原级数发散.

5. 用比值判别法判定下列级数的敛散性.

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\times\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\times\frac{\pi}{3^n}}$$

$$=\frac{2}{3}<1,$$

由比值判别法知原级数收敛.

6. 用根式判别法判定下列级数的敛散性.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n(\arctan n)^n}$

解 因 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{n}}}{2\arctan n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{\pi}<1,$$

所以, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n(\arctan n)^n}$ 收敛 .

6. 用根式判别法判定下列级数的敛散性.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$

解 因 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1}$$

$$=\frac{3}{2}>1,$$

所以, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$ 发散 .

§ 7.4 任意项级数 绝对收敛

一、交错级数及其判别法

定义1：正、负项相间的级数称为交错级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots$$

(其中 $u_n > 0$)

或 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots + (-1)^{n}u_n + \cdots$$

定理7.10 (莱布尼茨Leibniz定理) 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件：

(1) $u_n \ge u_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数收敛, 且其和 $S \le u_1$.

其余项的绝对值 $|R_n| \le u_{n+1}$.

证 因 $u_n - u_{n+1} \geq 0$

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

$\{S_{2n}\}$是单调增加数列

又 $S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$

$\leq u_1,$

数列$\{S_{2n}\}$是有界的

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \leq u_1, \qquad \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + u_{2n+1}) = S.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. 所以级数收敛到和$S$, 且 $S \leq u_1$,

余项 $R_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \cdots)$,

$$|R_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \cdots$$

$$\leq u_{n+1} \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$$

例1 判定交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

的敛散性.

解 因为 $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}\cdots>\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}>\cdots$

即对$\forall n\in N$， $u_n>u_{n+1}$，

又 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

由Leibniz定理知交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛.

二、绝对收敛与条件收敛

定义2 正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

定理7.11 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

证 令 $v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)=\begin{cases}|u_n|, & u_n\geq 0,\\ 0, & u_n<0.\end{cases}$ $n=1,2,\cdots$

显然 $v_n\geq 0$，且 $v_n\leq|u_n|$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛.

由 $u_n=2v_n-|u_n|$，知

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|)=\sum_{n=1}^{\infty}2v_n-\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

例1* 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ 的敛散性.

解　$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛.　故原级数收敛.

定义3　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛.

例2* 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{2^n}$的敛散性，对收敛级数要指明是条件收敛还是绝对收敛.

解　因　$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

$q=\frac{1}{2}$ 的等比级数

又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，

所以原级数绝对收敛.

注：由比值判别法或根式判别法判定 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 级数发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定发散.

例3* 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{3n+2}{2n+1})^n$ 的收敛性.

解　因 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{3n+2}{2n+1})^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1}$$

$$=\frac{3}{2}>1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{3n+2}{2n+1})^n$ 发散 .

定理7.12 如果任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$满足条件 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, 则

(1) 当$l<1$时，级数绝对收敛;

(2) 当$l>1$时, 级数发散 .

证　(1) 当 $l<1$ 时，　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 ,

所以, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;

(2) 当 $l>1$时，　$\lim_{n\to\infty}|u_n| \neq 0$,　于是, $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 级数发散.

例2 证明下级数绝对收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}=-1+\frac{2!}{2^2}-\frac{3!}{3^3}+\cdots+(-1)^n\frac{n!}{n^n}+\cdots$$

证

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$=e^{-1}<1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}$ 绝对收敛.

定理1* 如果任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$满足条件 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$ ，则

(1) 当 $\rho<1$ 时，级数绝对收敛;

(2) 当 $\rho>1$时, 级数发散 .

例3* 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$ 的收敛性.

解 因 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1}$

$$= \frac{3}{2} > 1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$ 发散 .

例4* 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$ 是条件收敛还是绝对收敛.

解 令 $u_n=\frac{1}{\ln(1+n)}$, 由 $\ln(1+n)<n$, 知 $|u_n|=\frac{1}{\ln(1+n)}>\frac{1}{n}$,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 所以, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(1+n)}\right|$ 发散.

由 $\ln x$ 为单调增加函数, 有

$$u_n=\frac{1}{\ln(1+n)}>\frac{1}{\ln(1+n+1)}=u_{n+1},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}=0$,

P_{253} 习题七(A) 8-(3)

由莱布尼茨定理知, 原级数条件收敛.

例5* 判定级数 $\frac{1}{2}-\frac{3}{10}+\frac{1}{2^2}-\frac{3}{10^3}+\frac{1}{2^3}-\frac{3}{10^3}+\cdots$

是条件收敛还是绝对收敛.

P_{253} 习题七(A) 8-(5)

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{3}{10^3}+\cdots$$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots)+(\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{4}{3},$$

所以原级数绝对收敛.

例6* 判定级数 $\frac{1}{2}+\frac{9}{4}-\frac{25}{8}-\frac{49}{16}+\frac{81}{32}+\frac{121}{64}-\cdots$ 是条件收敛还是绝对收敛.

P_{253} 习题七(A) 8-(6)

解 级数的通项

$$u_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\frac{(2n-1)^2}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(2n-1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}<1,$$

所以级数 $\frac{1}{2}+\frac{9}{4}-\frac{25}{8}-\frac{49}{16}+\frac{81}{32}+\frac{121}{64}-\cdots$ 绝对收敛.

例3 判定级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (0!=1)的敛散性.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n}\right|$

$= 0,$

所以对一切当$x\in(-\infty, +\infty)$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 绝对收敛;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0, \quad \forall x\in R.$$

例4 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的敛散性.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n|x|}{n+1} = |x|,$

所以当$|x|<1$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$绝对收敛.

当$|x|>1$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$发散.

当$x=1$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

当$x=-1$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$条件收敛.

例5 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的敛散性.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}x\right| = |x|$,

所以 当$|x|<1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 绝对收敛.

当$|x|>1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 发散.

当$x=1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散.

当$x=-1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$ 发散.

三、小结

任意项级数收敛性判别法的思维程序

1. $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ 发散

2. 交错级数(莱布尼茨定理)

3. 绝对收敛

4. 按基本性质

5. $S_n \overset{?}{\to} S$

作业 P_{253} 习题七 (A)

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

7. 判定下列交错级数的敛散性 .

(1) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$

(2) $1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}-\dfrac{1}{4!}+\cdots$

(3) $1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{7}+\cdots$

8. 判定下列级数哪些是绝对收敛, 哪些是条件收敛.

(1) $1-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}-\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{1}{9^2}-\cdots$

(2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}-\dfrac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{(n+1)^2}$

练习题 判别下列级数的敛散性.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^{n}}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}$$

练习题 判别下列级数的敛散性.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}$

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 2^n}} = \frac{1}{2} < 1,$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ 绝对收敛.

解2 因为 $|u_n| = \frac{1}{n\cdot 2^n} \le \frac{1}{2^n},$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛, 知

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ 绝对收敛.

是**Leibniz**交错级数收敛

练习题 判别下列级数的敛散性.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}$

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^n}{3^n(n+1)}}{\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n|x|}{3(n+1)}=\frac{|x|}{3}$

所以当$|x|<3$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}$绝对收敛.

当$|x|>3$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}$发散.

当$x=3$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

当$x=-3$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$条件收敛.