§ 8.6　二元函数的极值

定理8.4(必要条件)　如果函数$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)处有极值, 且两个一阶偏导数存在, 则有

$$f'_x(x_0, y_0)=0, \qquad f'_y(x_0, y_0)=0.$$

使各一阶偏导数同时为零的点, 称为函数的驻点.

定理8.5(充分条件)　如果函数 $z= f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内有连续的二阶偏导数, 且(x_0, y_0)是它的驻点, 设

$$P(x, y)=[f''_{xy}(x, y)]^2-f''_{xx}(x, y)\cdot f''_{yy}(x, y)$$

(1) 如果$P(x_0, y_0)<0$, 且$f''_{xx}(x_0, y_0)<0$, 则$f(x_0, y_0)$是极大值.

(2) 如果$P(x_0, y_0)<0$, 且$f''_{xx}(x_0, y_0)>0$, 则$f(x_0, y_0)$是极小值.

(3) 如果$P(x_0, y_0)>0$, 则$f(x_0, y_0)$不是极值.

(4) 如果$P(x_0, y_0)=0$, $f(x_0, y_0)$是否为极值需另外判别.

求函数$z=f(x, y)$极值的一般步骤:

第1步: 解方程组 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0, \end{cases}$ 求出实数解, 得驻点;

第2步: 求二阶偏导数及其在每一个驻点(x_0, y_0)的值;

第3步: 定出$P(x_0, y_0)$的符号, 再判定是否为极值;

第4步: 如果有偏导数不存在的点, 判定是否为极值.

无条件极值: 对自变量除了限制在定义域内外,

并无其他条件.

作业 P_{297} 习题八 (A)

19. 求下列函数的极值

(1) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$

(3) $z=x^3+y^3-3xy$

20. 设某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为P_1和P_2，销售量分别为Q_1和Q_2，需求函数分别为

$$Q_1=24-0.2P_1,\qquad Q_2=24-0.05P_2,$$

总成本函数为

$$C=35+40(Q_1+Q_2),$$

试问，厂家如何确定两个市场的产品售价，才能使其获得的总利润最大？最大利润是多少？

19. 求下列函数的极值

(1) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

解 $z'_x = 2x - y + 9$, $z'_y = 2y - x - 6$,

令 $\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ 2y - x - 6 = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(-4, 1)$,

又 $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = -1$, $z''_{yy} = 2$,

$P(-4, 1) = (-1)^2 - 2 \cdot 2 = -3 < 0$,

且 $z''_{xx} = 2 > 0$,

所以$(-4, 1)$是极小值点,

极小值 $z(-4, 1) = -1$.

19. 求下列函数的极值

(3) $z=x^3+y^3-3xy$

解 $z'_x=3x^2-3y$, $z'_y=3y^2-3x$,

令 $\begin{cases}3x^2-3y=0\\3y^2-3x=0\end{cases}$ 得驻点(0, 0),(1, 1)；

又 $z''_{xx}(x,y)=6x$, $z''_{xy}(x,y)=-3$, $z''_{yy}(x,y)=6y$,

$P(0,0)=(-3)^2-0=9>0$,

故(0, 0)不是极值点.

$P(1,1)=(-3)^2-6\cdot 6=-27<0$,

且 $z''_{xx}(1,1)=6>0$,

所以(1, 1)是极小值点，其极小值 $f(1,1)=-1$.

20. 设某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为 P_1 和 P_2, 销售量分别为 Q_1 和 Q_2, 需求函数分别为

$$Q_1 = 24-0.2P_1, \qquad Q_2 = 24-0.05P_2,$$

总成本函数为 $C = 35+40(Q_1+Q_2)$,

试问, 厂家如何确定两个市场的产品售价, 才能使其获得的总利润最大? 最大利润是多少?

解 $L = R - C = Q_1P_1 + Q_2P_2 - [35+40(Q_1+Q_2)]$

$= -0.2P_1^2 + 32P_1 - 0.05P_2^2 + 12P_2 - 1395$

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial P_1} = -0.4P_1 + 32 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial P_2} = -0.1P_2 + 12 = 0 \end{cases}$ 得驻点 $P_1=80$, $P_2=120$,

因驻点唯一, 所以, 两个市场的产品售价分别为 $P_1=80$, $P_2=120$ 时, 获得最大总利润: $L = 605$.

三、条件极值、拉格朗日乘数法

条件极值：对自变量有附加条件的极值.

1 求函数$z=f(x, y)$在约束条件$g(x, y)=0$下的极值.

拉格朗日乘数法

(1) 构造拉格朗日函数：$F(x, y)=f(x, y)+\lambda g(x, y)$

其中λ为常数, 称为拉格朗日乘数.

(2) 解联立方程组：

$$\begin{cases} F'_x(x, y)=f'_x(x, y)+\lambda g'_x(x, y)=0 \\ F'_y(x, y)=f'_y(x, y)+\lambda g'_y(x, y)=0 \\ g(x, y)=0 \end{cases}$$

消去λ, 解出x, y, 则函数$f(x, y)$的极值可能在解出的点(x, y)处取得.

(3) 判别(x, y)是否是极值点.

一般由具体问题的实际意义进行判定.

2 求函数$u=f(x,y,z)$在约束条件$g(x,y,z)=0$, $h(x,y,z)=0$下的极值.

拉格朗日乘数法

(1) 构造拉格朗日函数:

$$F(x, y, z)=f(x, y, z)+\alpha g(x, y, z)+\beta h(x, y, z)$$

其中α, β为拉格朗日乘数.

(2) 解联立方程组:

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z)=f'_x(x,y,z)+\alpha g'_x(x,y,z)+\beta h'_x(x,y,z)=0 \\ F'_y(x,y,z)=f'_y(x,y,z)+\alpha g'_y(x,y,z)+\beta h'_y(x,y,z)=0 \\ F'_z(x,y,z)=f'_z(x,y,z)+\alpha g'_z(x,y,z)+\beta h'_z(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0 \end{cases}$$

消去α, β, 解出x,y,z, 则函数$f(x,y,z)$的极值可能在解出的点(x, y, z)处取得.

(3) 判别(x,y,z)是否是极值点.

例5 要造一个容量一定的长方体箱子, 问选择怎样的尺寸, 才能使所用材料最少?

解 设长方体箱子的长、宽、高分别为x、y、z, 容量为V, 表面积为S, 则

问题为求 $S=2(xy+xz+yz)$ 在约束条件 $xyz=V$, 下的极值, 其中$x>0, y>0, z>0$.

目标函数

构造拉格朗日函数:

$$F(x,y,z)=2(xy+xz+yz)+\lambda(V-xyz)$$

令

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z)=2(y+z)-\lambda yz=0 \\ F'_y(x,y,z)=2(x+z)-\lambda xz=0 \\ F'_z(x,y,z)=2(x+y)-\lambda xy=0 \\ V-xyz=0 \end{cases}$$

令 $\begin{cases} F'_x(x,y,z)=2(y+z)-\lambda yz=0 \\ F'_y(x,y,z)=2(x+z)-\lambda xz=0 \\ F'_z(x,y,z)=2(x+y)-\lambda xy=0 \\ V-xyz=0 \end{cases}$ 消去λ，得 $\begin{cases} \dfrac{y+z}{x+z}=\dfrac{y}{x} \\ \dfrac{x+z}{x+y}=\dfrac{z}{y} \\ \dfrac{y+z}{x+y}=\dfrac{z}{x} \end{cases}$

解得 $x=y=z$ 所以 $x^3=V$

于是 $x=y=z=\sqrt[3]{V}$

因长方体的表面积一定有最小值，故当长方体的长、宽、高相等(都为$\sqrt[3]{V}$)时，所用材料最少.

练习题3 将正数12分成3个正数 x, y, z 之和使得 $u=x^3y^2z$ 为最大.

问题为求 $u=x^3y^2z$ 在约束条件 $x+y+z=12$ $(x>0,y>0,z>0)$ 下的极值

解2 用条件极值

构造拉格朗日函数:

$$F(x, y, z)=x^3y^2z+\lambda(x+y+z-12)$$

$$\text{令}\begin{cases} F'_x(x, y, z)=3x^2y^2z+\lambda=0 \\ F'_y(x, y, z)=2x^3yz+\lambda=0 \\ F'_z(x, y, z)=x^3y^2+\lambda=0 \\ x+y+z-12=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=3z \\ y=2z \end{array}$$

解得唯一驻点(6,4,2),

又实际问题一定存在最值,

故最大值 $u_{max}=6^3\cdot4^2\cdot2=6912$.

例8 求由一定点 (x_0, y_0, z_0)到平面$Ax+By+Cz+D=0$ 的最短距离.

解 设 (x, y, z)为平面上任意一点, 则

$$r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\frac{\lambda^2(A^2+B^2+C^2)}{4}$$

约束条件 $Ax+By+Cz+D=0$

设$F(x, y, z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda(Ax+By+Cz+D)$

$$令\quad\begin{cases} F'_x(x, y, z)=2(x-x_0)+\lambda A=0 \\ F'_y(x, y, z)=2(y-y_0)+\lambda B=0 \\ F'_z(x, y, z)=2(z-z_0)+\lambda C=0 \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-x_0=-\dfrac{\lambda A}{2}, \\ y-y_0=-\dfrac{\lambda B}{2}, \\ z-z_0=-\dfrac{\lambda C}{2} \end{cases}$$

代入 $Ax+By+Cz+D=0$ 得

$$A(x_0-\frac{\lambda A}{2})+B(y_0-\frac{\lambda B}{2})+(z_0-\frac{\lambda C}{2})+D=0.$$

$$x-x_0=-\frac{\lambda A}{2}, y-y_0=-\frac{\lambda B}{2}, z-z_0=-\frac{\lambda C}{2}$$

$$A(x_0-\frac{\lambda A}{2})+B(y_0-\frac{\lambda B}{2})+(z_0-\frac{\lambda C}{2})+D=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda=\frac{2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}$$

$$r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\frac{\lambda^2(A^2+B^2+C^2)}{4}$$

$$=\frac{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)^2}{A^2+B^2+C^2}$$

故点(x_0, y_0, z_0)到平面$Ax+By+Cz+D=0$ 的最短距离:

$$r_{\min}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

例4* 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离.

解 设$P(x, y, z)$为抛物面 $z=x^2+y^2$平面上任意一点,

则点$P(x, y, z)$到平面 $x+y-2z=2$ 的距离 d 为:

$$d=\frac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{6}}$$

拉格朗日乘数法

令 $F(x, y, z)=\frac{1}{6}(x+y-2z-2)^2+\lambda(x^2+y^2-z)$,

$$\left.\begin{aligned} F'_x(x,y,z)&=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)+2\lambda x=0\\ F'_y(x,y,z)&=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)+2\lambda y=0\\ F'_z(x,y,z)&=-\frac{2}{3}(x+y-2z-2)-\lambda=0\\ &x^2+y^2-z=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=y=\frac{1}{4}, \quad \Rightarrow z=\frac{1}{8},$$

本题变为求满足$z=x^2+y^2$的点$P(x, y, z)$, 使d为最小

即得唯一驻点 $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8})$,

根据题意距离的最小值一定存在, 故必在 $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8})$取得最小值.

$$d_{\min}=\frac{\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right|}{\sqrt{6}}=\frac{7}{4\sqrt{6}}.$$

$$d=\frac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{6}}$$

例4* 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离.

解2　设 $P(x, y, z)$ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 上任意一点,

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ 为平面 $x+y-2z=2$ 上任意一点,

由两点间距离公式有: $d^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$,

令 $F(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$
$+\alpha(x^2+y^2-z)+\beta(x_1+y_1-2z_1-2)$

由

$$\left.\begin{aligned}
F'_x &= 2(x-x_1)+2\alpha x=0\\
F'_y &= 2(y-y_1)+2\alpha y=0\\
F'_z &= 2(z-z_1)-\alpha=0\\
F'_{x_1} &= -2(x-x_1)+\beta=0\\
F'_{y_1} &= -2(y-y_1)+\beta=0\\
F'_{z_1} &= -2(z-z_1)-2\beta=0\\
&x^2+y^2-z=0\\
&x_1+y_1-2z_1-2=0
\end{aligned}\right\}$$

解2 $d^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$，

$$\begin{cases} 2(x-x_1)+2\alpha x=0 & \cdots(1) \\ 2(y-y_1)+2\alpha y=0 & \cdots(2) \\ 2(z-z_1)-\alpha=0 & \cdots(3) \\ -2(x-x_1)+\beta=0 & \cdots(4) \\ -2(y-y_1)+\beta=0 & \cdots(5) \\ -2(z-z_1)-2\beta=0 & \cdots(6) \\ x^2+y^2-z=0 & \cdots(7) \\ x_1+y_1-2z_1-2=0 & \cdots(8) \end{cases}$$

由(1)和(4)知: $\beta=-2\alpha x=-\dfrac{\alpha}{2}$,

由(3)和(6)得: $\alpha=-2\beta$,

由(4)和(5)得: $x-x_1=y-y_1$,

再由(1)和(2)得: $x=y,\ x_1=y_1$,

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{4}=y$, 代入(7)得 $z=\dfrac{1}{8}$

由(4)知: $2x_1=2x-\beta=\dfrac{1}{2}-\beta$,

由(6)知: $z_1=\beta+z=\beta+\dfrac{1}{8}$,

代入(8)得 $\beta=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}-2)=-\dfrac{7}{12}$

$d^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=6(x-x_1)^2=2\beta^2=\dfrac{3}{8}\times 11^2$

由两点间距离公式有：$d^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$，

$$=6(x-x_1)^2+\alpha(x^2+y^2-z)$$

由

$$\left.\begin{array}{l}
F'_x=2(x-x_1)+2\alpha x=0 \\
F'_y=2(y-y_1)+2\alpha y=0 \\
F'_z=2(z-z_1)-\alpha=0 \\
F'_{x_1}=-2(x-x_1)+\beta=0 \\
F'_{y_1}=-2(y-y_1)+\beta=0 \\
F'_{z_1}=-2(z-z_1)-2\beta=0 \\
x^2+y^2-z=0 \\
x_1+y_1-2z_1-2=0
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\Rightarrow x=y \\
\\
\\
\Rightarrow x-x_1=y-y_1
\end{array}\right\}\Rightarrow x_1=y_1 \\
\Rightarrow z-z_1=-2(x-x_1)=\dfrac{1}{4}, \\
\qquad z_1=-2x_1=-\dfrac{2}{3},
\end{array}$$

即得唯一驻点 $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8})$,

根据题意距离的最小值一定存在, 故必在 $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8})$取得最小值.

$$d_{\min}=\frac{\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right|}{\sqrt{6}}=\frac{7}{4\sqrt{6}}.$$

$$d=\frac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{6}}$$

练习题

1. 设生产某种产品的数量与所用两种原料A、B的数量x、y间有关系式$P(x, y) = 0.005\,x^2y$. 欲用150元购料, 已知A、B原料的单价分别为1元、2元, 问购进两种原料各多少, 可使生产的产品数量最多?

2 求抛物线$y^2 = 4x$上的点, 使它与直线$x-y+4 = 0$的距离最近.

练习题1. 设生产某种产品的数量与所用两种原料 A、B 的数量 x、y 间有关系式 $P(x, y) = 0.005\, x^2 y$. 欲用150元购料, 已知 A、B 原料的单价分别为1元、2元, 问购进两种原料各多少, 可使生产的产品数量最多?

解 问题为求 $P(x, y) = 0.005\, x^2 y$ 在约束条件 $x+2y=150$ $(x>0, y>0)$ 下的极值

构造拉格朗日函数:

$$F(x, y)=0.005\, x^2 y+\lambda(x+2y-150)$$

令 $\begin{cases} F'_x(x, y) = 0.01 x y + \lambda = 0 \\ F'_y(x, y) = 0.005\, x^2 + 2\lambda = 0 \\ x+2y=150 \end{cases}$ 解得 $x=100, y=25$,

因驻点唯一, 所以, 购进原料 A、B 分别为100、25单位时, 可使生产的产品数量最多.

练习题2 求抛物线 $y^2 = 4x$ 上的点，使它与直线 $x-y+4=0$ 的距离最近.

解 设$P(x, y)$为抛物线 $y^2 = 4x$ 平面上任意一点,

则点$P(x, y)$到直线 $x-y+4=0$ 的距离 d 为:

拉格朗日乘数法

$$d = \frac{|x-y+4|}{\sqrt{2}}$$

令 $F(x,y) = \frac{1}{2}(x-y+4)^2 + \lambda(y^2-4x),$

$$\begin{cases} F'_x(x,y) = x-y+4-4\lambda = 0 \\ F'_y(x,y) = -x+y-4+2\lambda y = 0 \\ y^2-4x = 0 \end{cases} \Rightarrow x=1,\ y=2$$

因驻点唯一，所以, 抛物线 $y^2 = 4x$上与直线 $x-y+4=0$ 距离最近的点为 $(1, 2)$.

作业 P_{297} 习题八 (A)

21.在半径为 a 的半球内, 内接一长方体, 问各边长为多少时, 其体积最大?

23. 用拉格朗日乘数法计算下列各题

(1) 欲围一个面积为60米^2 的矩形场地, 正面所用材料每米造价10元,其余三面每米造价5元,场地长宽各多少米时, 所用材料费最少?