§ 7.5 幂级数

1 定义 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的级数称为$(x-x_0)$的**幂级数**. a_n称为幂级数的**系数**.

当$x_0=0$时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

2 收敛性

定义2 如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$收敛，则称$x_0$为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的**收敛点**，否则称为发散点.

幂级数的全部收敛点构成的集合称为幂级数**的收敛域**.

定理2* 阿贝尔(Abel)定理

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=x_0(x_0\neq 0)$处收敛, 则它在满足不等式$|x|<|x_0|$的一切$x$处绝对收敛;

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=x_0$处发散, 则它在满足不等式$|x|>|x_0|$的一切$x$处发散.

推论1 如果幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$不是仅在$x=0$一点收敛, 也不是在整个数轴上都收敛,则必有一个完全确定的正数R存在,它具有下列性质:

当$|x|<R$时, 幂级数绝对收敛;

当$|x|>R$时, 幂级数发散;

当$x=R$与$x=-R$时, 幂级数可能收敛也可能发散.

- 幂级数的收敛半径R.
- 开区间 $(-R, R)$ 称为幂级数的收敛区间.

规定 (1)幂级数只在$x=0$处收敛, $R=0$,

(2)幂级数对一切 x 都收敛, $R=+\infty$,

定理1 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的系数满足条件$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$

则 (1)当$0< l <+\infty$时, $R=\frac{1}{l}$;

(2)当$l=0$时, $R=+\infty$;

(3)当$l=+\infty$时, $R=0$.

定理2* 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$的系数满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

则 (1)当$0< l <+\infty$时， $R=\frac{1}{l}$;

(2)当$l=0$时，$R=+\infty$;

(3)当$l=+\infty$时，$R=0$.

当 $|x-x_0|<R$ 时, 幂级数绝对收敛;

当 $|x-x_0|>R$ 时, 幂级数发散;

当$x=x_0+R$ 与 $x=x_0-R$ 时, 幂级数可能收敛也可能发散.

收敛区间为 $(x_0-R, \ x_0+R)$.

9. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)(2n)}$

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(2n+1)\cdot 2(n+1)}}{\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)n}{(2n+1)(n+1)}$

$= 1,$

收敛半径 $R=1$,

当 $x=1$时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n)}$ 收敛,

当 $x=-1$时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n)}$ 收敛,

所以, 原幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

9. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}$

解 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3^n\cdot(n+1)}}{\dfrac{1}{3^{n-1}\cdot n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}=\frac{1}{3},$$

收敛半径 $R=3$,

当$x=-3$时, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}\cdot n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛,

当$x=3$时, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}\cdot n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

故原级数的收敛域为 $[-3, 3)$.

9. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{2^n}+3^n]x^n$

解 $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}+3^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{2^n}+3^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(-\frac{1}{6})^{n+1}+1}{\frac{1}{3}[(-\frac{1}{6})^n+1]}=3,$

收敛半径 $R=\frac{1}{3},$

$u_n\to1\neq0$

当$x=\frac{1}{3}$时, $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{2^n}+3^n]x^n=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{6^n}+1]$ 发散,

当$x=-\frac{1}{3}$时, $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{2^n}+3^n]x^n=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{6^n}+(-1)^n]$ 发散,

u_n极限不存在

故原级数的收敛域为 $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}).$

9. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$

解　因 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1,$

所以收敛半径 $R=1$,

故当 $|x-2|<1$, 即 $1<x<3$ 时, 级数绝对收敛 ;

当 $x=1$时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 收敛,

当 $x=3$时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

故收敛域为 $[1, 3]$.

9. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(14) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}$

解 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{2n-1}(x-\frac{3}{2})^n$,

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{2n+1}}{\frac{2^n}{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n-1)}{2n+1}=2,$$

收敛半径 $R=\frac{1}{2}$,

当 $|x-\frac{3}{2}|<\frac{1}{2}$, 即 $1<x<2$ 时，级数绝对收敛；

当$x=1$时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$ 发散,

当$x=2$时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛.

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}$ 的收敛域为: $(1, 2\,]$.

9. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(14) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}$

用比值判别法

解2

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2x-3)^{n+1}}{2n+1}}{\frac{(2x-3)^n}{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)|(2x-3)|}{2n+1}=|2x-3|,$$

当$|2x-3|<1$, 即 $1<x<2$时，级数绝对收敛；

当$x=1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$ 发散,

当$x=2$时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛.

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}$ 的收敛域为: $(1, 2\,]$.

收敛半径为: $R=\frac{1}{2}$.

三、幂级数的运算和性质

设$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$和$g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径分别为 $R_1>0$和$R_2>0$.

1 四则运算

1° 加法 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n \triangleq \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$

$=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$

$=a_0+b_0+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots$

$=f(x)+g(x)$ 收敛半径 $R\geq\min\{R_1,R_2\}$.

2° 减法 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n \triangleq \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n$

$=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots+(a_n-b_n)x^n+\cdots$

$=f(x)-g(x)$ 收敛半径 $R\geq\min\{R_1,R_2\}$.

3° 柯西(Cauchy)乘法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

$$=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$$

$$= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)\,x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)\,x^2+\cdots$$

$$+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots$$

$$= f(x)\cdot g(x)$$

收敛半径 $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

4° 除法

设$a_0 \neq 0$, 则
$$\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots}$$

$$=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots$$

其中$c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 由下式确定

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$$

$$\cdot(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots)$$

相除后所得级数的收敛域可能比原两级数的收敛域小得多, 由所得级数重新确定.

例3* 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{2^n}+3^n]x^n$的收敛半径和收敛域.

P_{254} 习题七 (A) 9-(10)

解 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n$的收敛半径 $R_1=2$,

$\sum_{n=1}^{\infty}3^n x^n$ 的收敛半径 $R_2=\frac{1}{3}$

$u_n\to 1\neq 0$

当$x=\frac{1}{3}$时, $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{2^n}+3^n]x^n=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{6^n}+1]$ 发散,

当$x=-\frac{1}{3}$时, $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{2^n}+3^n]x^n=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{6^n}+(-1)^n]$ 发散,

u_n极限不存在

从而原幂级数的收敛半径 $R=\frac{1}{3}$

故原级数的收敛域为 $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

2 和函数的分析运算性质

性质1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内连续.

若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在端点收敛, 则 $S(x)$ 在端点单侧连续.

性质2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可导, 并可以逐项求导任意次, 且求导后级数的收敛半径不变.

即 $$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$x \in (-R, R)$$

注1: 逐项求导后所得幂级数的收敛域不会变大.

性质3 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可积, 并可逐项求积分, 且积分后级数的收敛半径不变.

即

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad x \in (-R, R).$$

注2: 逐项求积分后所得幂级数的收敛域不会变小.

注3: 如果逐项求导 或 逐项求积分后的幂级数当 $x=-R$ 或 $x=R$ 时收敛, 则在 $x=-R$ 或 $x=R$ 时, 性质2和性质3中的等式仍然成立.

例6 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛域及和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和.

解 由 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$

知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛半径 $R=1,$

当$x=-1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$ 发散.

当$x=1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散.

所以, 收敛域为 $(-1, 1)$.

例6 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ 的收敛域及和函数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和.

解 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$,

则 $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x n t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$

$$=\frac{x}{1-x},$$

两边对 x 求导得

$$S(x) = \left(\int_0^x S(t)\mathrm{d}t\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2},$$

例6 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛域及和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和.

解 所以, $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\quad -1<x<1,$

且 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=2.$$

例6 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$的收敛域及和函数, 并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$的和.

解2 和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'$

$$=(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=(\frac{x}{1-x})'$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2},$$

收敛域为 $(-1, 1)$.

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=2.$

例4* 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$的收敛域, 并求其和函数.

解 设 $$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\frac{1}{1-x}$$

$$=2x\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}$$

1990数3

$$=\frac{1+x}{(1-x)^2}.\quad(-1<x<1).$$

例5*求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的收敛域，并求和函数.

解 和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n\,x^{n-1}$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})'' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right)''$$

$$= x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = x\left[\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right]'$$

$$= \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

P_{254} 习题七(A) 10-(3)

当$x=1$时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$ 发散.

当$x=-1$时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(-1)^n$ 发散.

所以，$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3}$，收敛域为 $(-1, 1)$. ？

例6*求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数.

解 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n+1}+\cdots$

则 $[xS(x)]'=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\ (-1<x<1)$

上式两边积分得

$$xS(x)=xS(x)-0S(0)=\int_0^x[tS(t)]'\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x)$$

当 $x=-1$时, 级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛,

当 $x=1$时, 级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散,

又 $S(0)=1$, 所以

$$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

作业 P_{254} 习题七 (A)

9. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+(-3)^n}{n}x^n$

10 求下列幂级数的收敛域, 且求和函数.

(1) $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots$

(2) $2x+4x^2+6x^5+8x^7+\cdots$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$

练习题1 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$的收敛半径为______.

练习题2 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域及和函数.

练习题1 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$的收敛半径为 $\underline{R=\frac{1}{e}}$.

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{n+1}-(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{e^n-(-1)^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{e^{n+1}-(-1)^{n+1}}{e^n-(-1)^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e[1-(-\frac{1}{e})^{n+1}]}{1-(-\frac{1}{e})^n}=e,$$

2009数3

得幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$的收敛半径$R=\frac{1}{e}$.

练习题1 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为 $\underline{R=\frac{1}{e}}$.

解: 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2}x^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{e^n}{n+1}}\right|=e,$$

收敛半径 $R_1=\frac{1}{e}$,

2009数3

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}x^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right|=1,$$

收敛半径 $R_2=1$.

练习题2 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域及和函数.

解 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, 显然 $S(0)=0$,

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x},$$

两边积分得 $\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \quad (-1<x<1)$

即 $S(x)-S(0)=\ln(1+x)$ 得 $S(x)=\ln(1+x)$

当$x=-1$时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})$ 发散.

又 $x=1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)$, $x\in(-1, 1]$.