§ 7.6 泰勒(Taylor)公式与泰勒级数

定理1 (泰勒中值定理) 若函数$f(x)$在x_0点的某个开区间(a, b)内具有直到$n+1$阶连续导数, 则当x取(a, b)内任何值时, $f(x)$可按$(x-x_0)$的方幂展开为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ在x_0与x之间)

$R_n(x)$称为拉格朗日(Lagrange)余项.

泰勒系数 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $k=0, 1, 2, \cdots, n$ 是唯一确定的.

三、泰勒级数

定义 如果函数$f(x)$在x_0的某邻域内是任意阶可导，则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

称为函数$f(x)$在x_0处的泰勒级数.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为函数$f(x)$的麦克劳林级数.

定理1* 设函数$f(x)$在x_0的某邻域$U(x_0)$内具有任意阶导数，则$f(x)$在x_0点的泰勒级数在该邻域内收敛于$f(x)$ $\Leftrightarrow$ 泰勒公式中的余项$R_n(x)$在$U(x_0)$内，当$n\to\infty$时，$R_n(x)\to 0$.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad x\in(-1,1).$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x\in(-\infty,+\infty).$$

§7.7 初等函数的幂级数展开式

一、直接法(泰勒级数法)

二、间接法

三、常见函数的幂级数展开式

一、直接法(泰勒级数法)

利用泰勒公式或麦克劳林公式将$f(x)$展开为幂级数

步骤：(1) 求 $f^{(n)}(x)$， $n=0,1,2,\cdots$

(2) 计算 $f^{(n)}(x_0)$， $n=0,1,2,\cdots$

(3) 写出幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ 并求出其收敛区间.

(4) 讨论 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) \overset{?}{=} 0$

若为0, 则幂级数在此收敛区间内等于函数$f(x)$；

若不为0, 则幂级数虽然收敛, 但它的和不是$f(x)$.

例1 将 $f(x)=e^x$ 在展开成 x 的幂级数.

解 因 $f^{(n)}(x)=e^x$, $n=1, 2, 3, \cdots$, $f^{(n)}(0)=e^0=1$,

于是 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 的麦克劳林级数为:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

收敛区间为: $(-\infty, +\infty)$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ $\quad 0<\theta<1$

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=e^{\theta x}\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=0, \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

所以 $\boxed{e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$-\infty<x<+\infty.$

二项展开式

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ell \quad + \frac{n(n-1)\ell \quad (n-k+1)}{k!}x^k$$

$$+ \cdots + nx^{n-1} + x^n$$

$$(1+x)^\alpha \overset{?}{=} 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

例3 将 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 展开成 x 的幂级数.

解 $[(1+x)^{\alpha}]^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$,

$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1) \quad n=0,1,2,\cdots,$

得 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1,\qquad \text{于是 } R=1.$$

注意: 当 $x=\pm1$ 时, 级数的收敛性与 α 的取值有关.

$\alpha\le-1$, 收敛域为: $(-1, 1)$.

$-1<\alpha<0$, 收敛域为: $(-1, 1]$.

$\alpha>0$, 收敛域为: $[-1, 1]$.

所以 $(1+x)^{\alpha}$ 的泰勒级数的收敛区间是 $(-1, 1)$.

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}\qquad x\in(-1,1)$$

牛顿二项式展开式

当$\alpha=-1$时，

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^{2}-x^{3}+\cdots+(-1)^{n}x^{n}+\cdots\qquad x\in(-1,1).$$

当$\alpha=\dfrac{1}{2}$时，有

双阶乘

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^{3}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^{4}+\cdots$$

$$x\in(-1,1].$$

二、间接展开法

根据唯一性，利用常见展开式、等比级数的和及幂级数的性质等，通过变量代换，四则运算，恒等变形，逐项求导，逐项积分等方法，求展开式.

例7 将函数 $e^{-\frac{x}{3}}$ 展开 x 的幂级数.

解 因为 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty).$

以 $-\frac{x}{3}$ 代替上式中的 x，

$$e^{-\frac{x}{3}} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(-\frac{x}{3}\right)^n + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3^2 \cdot 2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{3^n \cdot n!}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!} x^n \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

例1* 将函数 $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ 展开成 x的幂级数.

解 $$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}[(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots)$$

$$+(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots)]$$

$$=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

变量代换
四则运算

$$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

以 $-x$ 代替上式中的 x, 得　　$x\in(-\infty,+\infty)$.

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

例2* 将 $f(x)=a^x$ 展开成 x的幂级数.

P_{254}习题七(A) 11--(1)

解

$$a^x = e^{x\ln a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n \qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

变量代换

$$=1+(\ln a)x+\frac{\ln^2 a}{2!}x^2+\cdots+\frac{\ln^n a}{n!}x^n+\cdots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

以$x\ln a$ 代替上式中的 x, 得

例10 将函数 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ 展开成 x 的幂级数.

解 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{e^x-1}{\boxed{x}}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\boxed{1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots}-1}{x}\right)$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\frac{x^n}{(n+1)!}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\cdots+\frac{n-1}{n!}x^{n-2}+\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}\qquad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

$$\boxed{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty).}$$

例10 将函数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ 展开成 x 的幂级数.

解 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$

$$=\frac{x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n!}+\cdots-\boxed{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots\right)}+1}{x^2}$$

$$=\frac{\frac{x^2}{2!}+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3+\cdots+\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]x^{n+1}+\cdots}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}+\cdots$$

$$\boxed{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty,+\infty)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}\qquad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

例6 将函数$\cos x$展开成 x的幂级数.

解 因 $(\sin x)'=\cos x$， 又

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

对上式逐项求导得

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

例5 将下列函数展开成 x 的幂级数.

$$(1)\ \frac{1}{1+x^2} \qquad (2)\ \arctan x$$

解 因为 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \qquad x\in(-1,1).$

(1) 以 $-x^2$ 代替上式中的 x，

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$$

$x\in(-1,1).$

(2) 因 $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，从0到 x 逐项积分得

$$\arctan x=\int_0^x[\arctan x]'\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

当$x=-1$时, 为$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$ 交错级数, 收敛,

当$x=1$时, 为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}$ 交错级数, 收敛,

所以,

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \quad x\in[-1,1]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan 1 = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

注: 利用间接展开法时,要注意区间端点的收敛性.

例4 将函数ln(1+x)展开成 x的幂级数.

解 因为 $[\ln(1+x)]' = \dfrac{1}{1+x}$,

又 $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

$x \in (-1,1)$.

从0到x逐项积分得

$$\ln(1+x) - \ln 1 = \int_0^x [\ln(1+t)]' \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

当$x=-1$时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n}$， 发散,

当$x=1$时, 级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$， 收敛,

所以,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

$$x\in(-1,1]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$\Rightarrow \ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

例12 将函数$\ln x$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并求收敛域 .

解 $\ln x = \ln(1 + x - 1)$

$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \cdots$$

由$-1 < x - 1 \le 1$,

得收敛区域为: $x \in (0, 2]$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$x \in (-1, 1]$$

例11 将函数 $\dfrac{1}{5-x}$ 分别展开成 x 和 $x-2$ 的幂级数.

解 (1) $\dfrac{1}{5-x}=\dfrac{1}{5(1-\frac{x}{5})}=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{x}{5})^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{5^{n+1}}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad x\in(-1,1)$$

由 $|\dfrac{x}{5}|<1$ 得收敛区间为: $x\in(-5,5)$.

(2) $\dfrac{1}{5-x}=\dfrac{1}{3-(x-2)}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x-2}{3}}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{x-2}{3})^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^{n+1}}$$

由 $\dfrac{|x-2|}{3}<1$ 得收敛区间为: $x\in(-1,5)$.

例9 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-2}$ 展开成x幂级数.

解 $$\frac{x}{x^2-x-2}=\frac{x}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left[(-1)^n-\frac{1}{2^n}\right]x^n$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$
$x\in(-1, 1).$

收敛域为: $x\in(-1, 1)$.

2006数1, 12分 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$

例8 将函数$\sin^2 x$展开成x的幂级数.

解 因为 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

又 $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty).$

所以 $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ell + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ell\right]$$

$$= \frac{(2x)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(2x)^4}{2\cdot 4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!} + \cdots$$

$$= x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

作业 P_{254} 习题七 (A)

12. 利用已知展开式把下列函数展开为x的幂级数，并确定收敛域.

(2) $f(x)=\cos^2 x$

(6) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x-3}$

13. 利用已知展开式把下列函数展开为 $x-2$ 的幂级数, 并确定收敛域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$

(4) $f(x)=\ln\dfrac{1}{5-4x+x^2}$

例3* 将函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

解 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ell\ \ +(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ell \qquad x\in(-1,1]$$

$$-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ell\ \ -\frac{x^n}{n}-\ell\ \right)] \qquad x\in[-1,1)$$

$$=2x+\frac{2}{3}x^3+\cdots+\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad x\in(-1,1]$$

当$x=\pm 1$时, $f(x)$无定义,

所以收敛域为: $(-1,1)$.

例3* 将函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

解2 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2}=2\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$$

对上式从0到x逐项积分得

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}$$

因 $f(0)=0$, 且当$x=\pm1$时, $f(x)$无定义, 所以

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1).$$