§ 7.5 幂级数

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

一、幂级数的概念

定义: 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的级数称为幂级数.

二、幂级数的收敛性

定理1 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$

则 (1)当 $0< l <+\infty$ 时, $R=\frac{1}{l}$;

(2)当 $l=0$ 时, $R=+\infty$;

(3)当 $l=+\infty$ 时, $R=0$.

当 $|x|<R$ 时, 幂级数绝对收敛;

当 $|x|>R$ 时, 幂级数发散;

当 $x=R$ 与 $x=-R$ 时, 幂级数可能收敛也可能发散.

定理1* 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的系数满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

则 (1) 当 $0< l<+\infty$ 时，$R=\dfrac{1}{l}$；

(2) 当 $l=0$ 时，$R=+\infty$；

(3) 当 $l=+\infty$ 时，$R=0$.

当 $|x-x_0|<R$ 时, 幂级数绝对收敛;

当 $|x-x_0|>R$ 时, 幂级数发散;

当 $x=x_0+R$ 与 $x=x_0-R$ 时, 幂级数可能收敛也可能发散.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\quad -1<x<1.$$

三、幂级数的运算和性质

设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $R_1>0$和$R_2>0$.

1 四则运算

1° 加法 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$

$=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$

$=a_0+b_0 +(a_1+b_1)\, x +(a_2+b_2)\, x^2 + \cdots+(a_n+b_n)\, x^n + \cdots$

$= f(x)+g(x)$ 收敛半径 $R\geq \min\{R_1, R_2\}$.

2° 减法 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n$

$= (a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots+(a_n-b_n)x^n+\cdots$

$= f(x)-g(x)$ 收敛半径 $R\geq \min\{R_1, R_2\}$.

3° 柯西(Cauchy)乘法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

$$=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$$

$$= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)\,x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)\,x^2+\cdots$$

$$+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots$$

$$= f(x)\cdot g(x)$$ 收敛半径 $R \ge \min\{R_1, R_2\}$.

4° 除法

设 $a_0 \ne 0$, 则 $$\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots}$$

$$=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots$$

其中 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 由下式确定

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$$
$$\cdot(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots)$$

相除后所得级数的收敛域可能比原两级数的收敛域小得多, 由所得级数重新确定.

2 和函数的分析运算性质

性质1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内连续.

若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在端点收敛, 则 $S(x)$ 在端点单侧连续.

性质2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可导, 并可以逐项求导任意次, 且求导后级数的收敛半径不变.

即 $$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$x \in (-R, R)$$

性质3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可积，并可逐项求积分，且积分后级数的收敛半径不变.

即

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad x \in (-R, R).$$

注： 如果逐项求导或逐项求积分后的幂级数当 $x = -R$ 或 $x = R$ 时收敛，则在 $x = -R$ 或 $x = R$ 时，性质2和性质3中的等式仍然成立.

§7.6 泰勒(Taylor)公式与泰勒级数

一、泰勒公式的建立

二、麦克劳林(Maclaurin)公式

三、泰勒级数

马克劳林，C.

泰勒，B.

麦克劳林(Maclaurin,C.)
(英)1698-1746)公式

泰勒(*Taylor*)
(英)1685-1731

一、泰勒公式

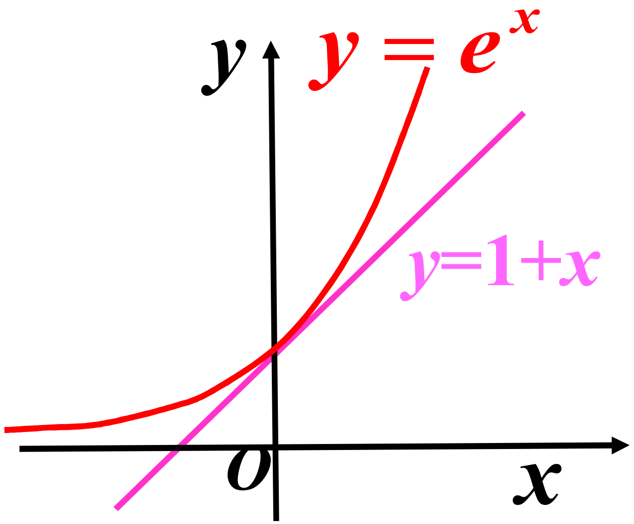
在微分的应用中有近似计算公式

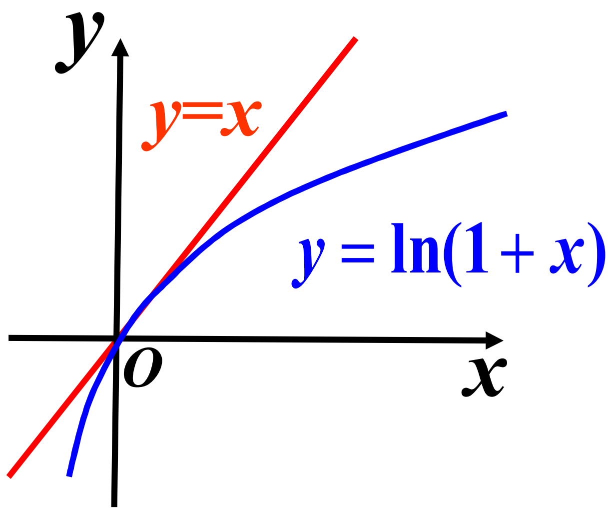
若 $f'(x_0)$存在, 则在 x_0点附近有

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

如 当$|x|$很小时, $e^x \approx 1 + x$, $\ln(1+x) \approx x$





以直代曲

若 $f'(x_0)$存在, 则在 x_0点附近有

$$f(x) \approx \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$$ 一次多项式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

不足: 1. 精确度不高;

2. 误差不能定量的估计.

需要解决的问题 $\begin{cases} \text{如何提高精度?} \\ \text{如何估计误差?} \end{cases}$

希望: 在x_0点附近, 用适当的高次多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n \approx f(x)$$

问题: (1) 系数怎么定?

(2) 误差(如何估计)表达式是什么?

n次多项式系数的确定

猜想

近似程度越来越好

1 若在x_0点相交

$$P_n(x_0)=f(x_0)$$

2 若有相同的切线

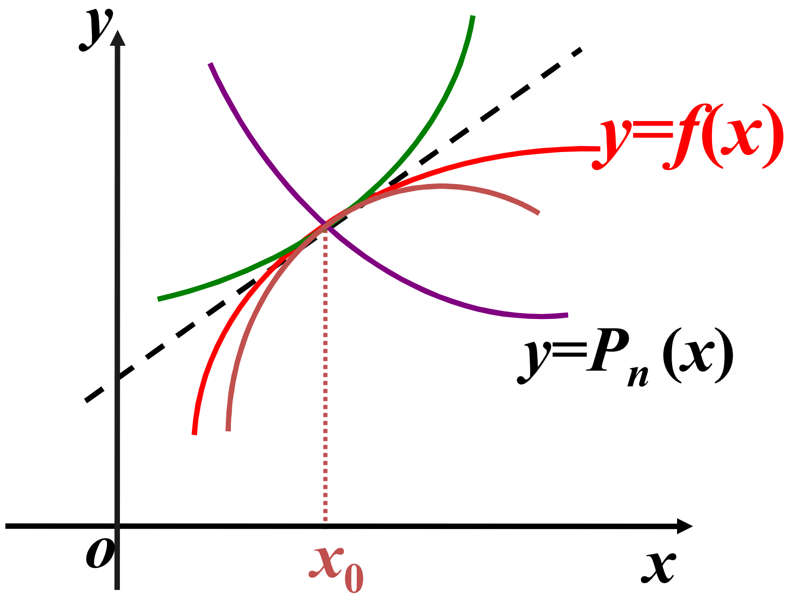
$$P_n'(x_0)=f'(x_0)$$

3 若弯曲方向相同

$$P_n''(x_0)=f''(x_0)$$

……

假设 $P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)$



$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

假设 $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$　　$k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n$

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$P_n''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_2(x-x_0) + \cdots + n\cdot(n-1)\cdot a_n(x-x_0)^{n-2}$$

……

$$P_n^{(n)}(x) = n!\,a_n$$

令 $x = x_0$ 得 $a_0 = f(x_0)$,　　即有 $a_0 = f(x_0)$,

$a_1 = f'(x_0)$,　　$a_1 = f'(x_0)$,

$2a_2 = f''(x_0)$,　　$a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2!}$

……　　……

$n!a_n = f^{(n)}(x_0)$,　　$a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad k=0, 1, 2, 3, \cdots, n$$

代入$P_n(x)$中得

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为函数$f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的n次泰勒多项式.

或称为函数$f(x)$在x_0处的n次泰勒多项式.

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad k=0, 1, 2, 3, \cdots, n$$ 称为泰勒系数.

$$f(x) = P_n(x) + o(x-x_0)^n.$$

定理7.14 (泰勒中值定理) 若函数$f(x)$在x_0点的某个开区间(a, b)内具有直到$n+1$阶连续导数, 则当x取(a, b)内任何值时, $f(x)$可按$(x-x_0)$的方幂展开为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ在x_0与x之间)

$R_n(x)$称为拉格朗日(Lagrange)余项.

$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $k=0, 1, 2, \cdots, n$ 称为泰勒系数

- 泰勒系数是唯一的

定义1 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ在x_0与x之间)

称为函数$f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的带有拉格朗日型余项的n阶泰勒公式.

$R_n(x)$称为拉格朗日(Lagrange)型余项.

泰勒系数 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $k=0, 1, 2, \cdots, n$是唯一的.

当$n=0$时, 泰勒公式 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$

--- 拉格朗日中值公式

二、麦克劳林(Maclaurin)公式

定义3 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$

称为$f(x)$的带有拉格朗日型余项的n阶麦克劳林公式.

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ (ξ在0与x之间).

或令$\xi=\theta x$, $0<\theta<1$,则

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

当$x_0=0$时的泰勒公式

马克劳林，C.

麦克劳林(Maclaurin,C.(英)1698-1746)公式

例1* 求函数$f(x)=e^x$的带有拉格朗日型余项的n阶麦克劳林公式.

按 x 的幂展开的带有拉格朗日余项的n阶泰勒公式

解 因为$f^{(n)}(x)=e^x$, $n=1, 2, 3, \cdots$

所以$f^{(n)}(0)=e^0=1$, $n=1, 2, 3, \cdots$

于是 $f(x)=e^x$ 在$x=0$的n阶泰勒公式为:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+R_n(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ $0<\theta<1$.

三、泰勒级数

定义 如果函数$f(x)$在x_0的某邻域内是任意阶可导, 则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

称为函数$f(x)$在x_0处的泰勒级数.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为函数$f(x)$的麦克劳林级数.

问题: 泰勒级数在收敛区间是否收敛于$f(x)$?

不一定.

定理1* 设函数$f(x)$在x_0的某邻域$U(x_0)$内具有任意阶导数，则$f(x)$在x_0点的泰勒级数在该邻域内收敛于$f(x)$$\Leftrightarrow$泰勒公式中的余项$R_n(x)$在$U(x_0)$内，当$n\to\infty$时，$R_n(x)\to 0$.

证明 因函数 $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ ， $x\in U(x_0)$

即 $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$， $x\in U(x_0)$

由级数收敛的定义有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x)\ ,\quad x\in U(x_0)$$

$$\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)\ ,\quad x\in U(x_0)$$

$$\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}[f(x)-P_n(x)]=0,\quad x\in U(x_0)$$

$$\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\quad x\in U(x_0)$$

P_{246} 例2 将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 幂级数.

解 因 $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2}),\quad f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2},$

当 $n=2k$ 时，$f^{(2k)}(0)=\sin(k\pi)=0,\quad k=0,1,2,\cdots,$

当 $n=2k+1$ 时，$f^{(2k+1)}(0)=\sin(k\pi+\frac{\pi}{2})=(-1)^k,$

得 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}=0,$$

收敛区间为: $(-\infty,+\infty)$，于是 $R=+\infty$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

其中 $$0\le\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right|$$

ξ在0到x之间

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin^{(2n+2)}\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right|$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}=0,$$

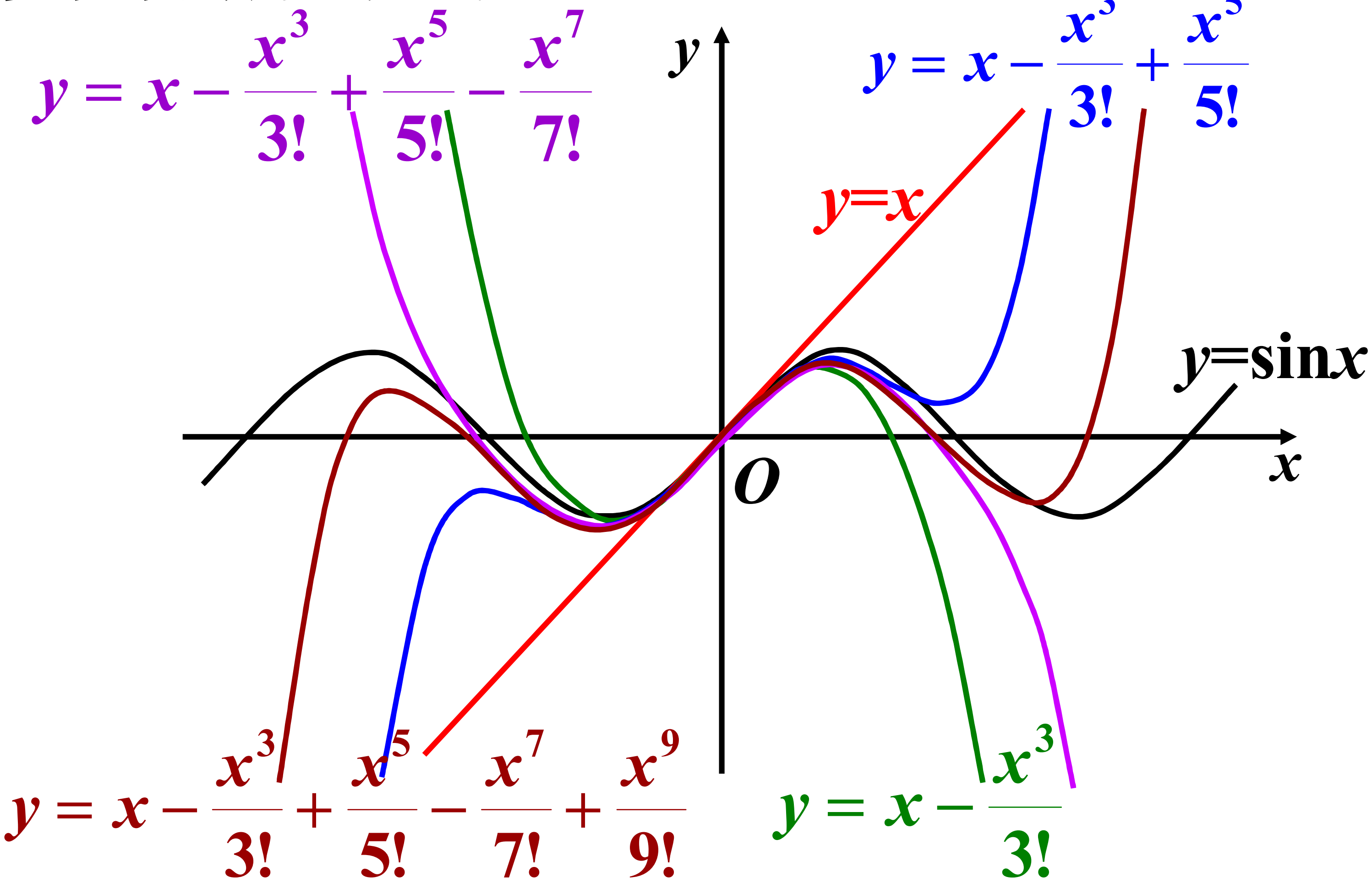
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0\quad\forall x\in R$$

即 $$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

所以 $$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

麦克劳林多项式逼近$\sin x$



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

例2* 将函数$f(x)=e^{-\frac{x}{3}}$展开为带有佩亚诺型余项的n阶麦克劳林公式.

解 因为 $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+R_n^*(x)$

以 $-\frac{x}{3}$ 代替上式中的 x,

$$e^{-\frac{x}{3}}=1-\frac{x}{3}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{3}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(-\frac{x}{3}\right)^n+R_n(x)$$

$$=1-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3^2\cdot 2!}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{3^n\cdot n!}x^n+R_n(x).$$

用间接展开的方法较简便.

四、小结

1.如何求函数的泰勒级数;

2.泰勒级数收敛于函数的条件;

3.函数展开成泰勒级数的方法.