无穷级数的概念和性质

1 定义(常数项)无穷级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

2 常数项级数敛散性的判别法

1° 由定义部分和数列$S_n \to S$, 级数收敛.

2° 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则级数发散.

3° 按基本性质.

3° 按基本性质.

性质1：级数的每一项同乘一个不为零的常数，敛散性不变.

性质2: 收敛级数可以逐项相加与逐项相减.

性质3: 在级数前面加上、减去或改变有限项不影响级数的敛散性.

性质4: 收敛级数加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和.

3 等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} \text{当} |q|<1 \text{时, 收敛,} \\ \text{当} |q|\geq 1 \text{时, 发散.} \end{cases}$$

作业 P_{252} 习题七 (A)

2. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第n次部分和 $S_n = \dfrac{3n}{n+1}$, 试写出此级数, 求其和.

解 $u_1 = S_1$

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3n}{n+1} - \frac{3(n-1)}{n} = \frac{3}{n(n+1)}, \quad n \geq 2,$$

于是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{3}{1\cdot 2} + \frac{3}{2\cdot 3} + \frac{3}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{3}{n(n+1)} + \cdots$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = 3\,.$$

3 判定下列级数的敛散性, 若级数收敛, 求其和.

(1) $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots+\sqrt[n]{0.001}+\cdots$

解 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001} = 1 \neq 0$, 所以, 此级数发散.

(2) $\frac{4}{5}-\frac{4^2}{5^2}+\frac{4^3}{5^3}-\frac{4^4}{5^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{4^n}{5^n}+\cdots$

解 $\frac{4}{5}-\frac{4^2}{5^2}+\frac{4^3}{5^3}-\frac{4^4}{5^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{4^n}{5^n}+\cdots$ 是以 $q=-\frac{4}{5}$ 为公比的等比级数, 所以级数收敛.

且故其和 $S=\dfrac{\frac{4}{5}}{1-(-\frac{4}{5})}=\dfrac{4}{9}.$

作业 P_{252} 习题七 (A)

3 判定下列级数的敛散性, 若级数收敛, 求其和.

(3) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{8}+\cdots$

解 级数通项 $u_n=\dfrac{2n-1}{2n}$, 于是, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1\neq 0$,

所以, 此级数发散.

(4) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}+\cdots$

解 级数通项 $u_n=\dfrac{n}{n+1}$, 因此, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1\neq 0$,

所以, 此级数发散.

3 判定下列级数的敛散性, 若级数收敛, 求其和.

(5) $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{9})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{27})+\cdots$

解 $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{9})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{27})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\cdots$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots)+(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

即原级数收敛到 $\frac{3}{2}$.

§ 7. 3　正项级数

一、定义 满足条件 $u_n \geq 0$ $(n=1, 2, \cdots)$的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 称为正项级数.

二、正项级数收敛性的判别方法:

因　$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = S_{n-1} + u_n \geq S_{n-1}$,

所以　$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots$

正项级数的部分和数列$\{S_n\}$为单调增加数列.

定理7.6 正项级数收敛的充要条件:

正项级数收敛充要条件它的部分和数列$\{S_n\}$有界.

P_{226} 注: 正项级数加括弧后所成的级数与原级数有相同的敛散性.

例1* 判定$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$的敛散性.

解 由于$\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$, 故级数的部分和

$$S_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\triangleq+\frac{1}{2^n+1}$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\triangleq+\frac{1}{2^n}$$

$$=1-\frac{1}{2^n}<1$$

P_{252}习题七(A) 4-(2)

由定理1知, 该正项级数收敛.

定理7.7 比较判别法 如果两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足关系式 $u_n \le c\, v_n$ $(n=1,2,\cdots, c$为大于0的常数), 则

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证 设 $S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$, $W_n = v_1+v_2+\cdots+v_n$,

则 $S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n \le c(v_1+v_2+\cdots+v_n) = cW_n$,

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则$\{W_n\}$有界,

于是 $S_n \le cW_n$ 有界, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则$\{S_n\}$无界, 由 $W_n \ge \dfrac{S_n}{c}$

知$\{W_n\}$无界, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

例1 判定调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 的敛散性.

2项　2项　4项　8项

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=(1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16})$$
$$+\cdots+(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}})+\cdots$$

2^m项

$$>\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16})$$
$$+\cdots+(\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}})+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots$$

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ 发散，所以调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

例1 判别调和级数 $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \triangleq \ + \frac{1}{n} + \triangleq}$ 的收敛性.

解2 由 $x > \ln(1+x)\ (x>0)$，知 $\frac{1}{n} > \ln(1 + \frac{1}{n})$

得 $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k})$$

$$= \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \triangleq \ + \ln \frac{n+1}{n}$$

$$= \ln(n+1)$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty,$

故原级数发散.

P_{223} 例3 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 发散

例2 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ 的敛散性.

解 1°当 $p\le 1$时, $\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$, 由调和级数发散知$p$级数发散;

2°当 $p>1$时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)$$

$$+\cdots+\left[\frac{1}{(2^m)^p}+\frac{1}{(2^m+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{m+1}-1)^p}\right]+\cdots$$

2^m 项

$$<1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)$$

$$+\cdots+\left[\frac{1}{(2^m)^p}+\frac{1}{(2^m)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^m)^p}\right]+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{(2^2)^{p-1}}+\frac{1}{(2^3)^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{(2^m)^{p-1}}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{(2^2)^{p-1}}+\frac{1}{(2^3)^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{(2^m)^{p-1}}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{(2^{p-1})^2}+\frac{1}{(2^{p-1})^3}+\cdots+\frac{1}{(2^{p-1})^m}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{p-1})^n}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{p-1})^n}$ 是公比为 $\frac{1}{2^{p-1}}<1$的几何级数, 收敛.

所以p–级数收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{当 } p>1 \text{ 时, 收敛,}\\ \text{当 } p\le 1 \text{ 时, 发散.}\end{cases}$$

例4 判定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n^2+n}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3\times4+2}}+\triangleq\ +\frac{1}{\sqrt{3n^2+n}}+\triangleq$$

的收敛性.

解　因为 $\dfrac{1}{\sqrt{3n^2+n}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{3n^2+n^2}}=\dfrac{1}{2n}$

$n=1, 2, 3, \cdots,$

而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散,

所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n^2+n}}$ 发散.

例5 判定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^3-3}}=1+\frac{1}{\sqrt{4\times8-3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^3-3}}+\cdots$$

的收敛性.

解　因 $\dfrac{1}{\sqrt{4n^3-3}}<\dfrac{1}{\sqrt{4n^3-n^3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot n^{\frac{3}{2}}}$

$n=2,3,\cdots,$

由级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n^3}}$ 收敛, 知 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n^3}}$ 收敛,

故级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^3-3}}$ 收敛,

所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^3-3}}$ 收敛.

推论 如果两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足关系式 $u_n \le c\, v_n$ ($n \ge k$, $n, k \in N$, c为大于0的常数), 则

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

例3 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$ 的收敛性.

解 因为 $\frac{1}{n^n}\le\frac{1}{2^n}$, $n=2, 3, 4, \cdots$,

与几何数级比较

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 收敛,

方法2 $\frac{1}{n^n}\le\frac{1}{n^2}$, $n=1, 2,3, \cdots$,

与p级数比较

因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 收敛.

方法3 $S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}$

$$<1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}=2-\frac{1}{n}<2$$

由定理1知, 该正项级数收敛.

推论: (比较判别法的极限形式)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$ 则

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时, 两级数有相同的敛散性;

(2) 当 $l=0$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l=+\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

例6 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$ 的敛散性.

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}=1,$

因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$ 收敛 .

例2* 判定下列级数的敛散性

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n} \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$$

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$, 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$ 也发散 .

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3^n-n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-\frac{n}{3^n}}=1$,

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 收敛, 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n-n}$ 收敛.

定理7.8 比值判别法 [达朗贝尔(D′Alembert)判别法]

如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, 则

(1) 当$l<1$时，级数收敛;

(2) 当$l>1$时, 级数发散;

(3) 当$l=1$时, 级数敛散性不能确定;

证　当l为有限数时, 对$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in Z^+$, 当$n>N$时, 有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\varepsilon,\ \text{即}\quad l-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon,$$

(1) 当$l<1$时，取$0<\varepsilon<1-l$, 使 $q=l+\varepsilon<1$,

$$u_{N+2}<q\,u_{N+1},$$

$$u_{N+3}<qu_{N+2}<q^2u_{N+1},$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_{N+m}<q^{m-1}u_{N+1},$$

$$\cdots\cdots$$

而级数 $\sum_{m=1}^{\infty} q^m u_{N+1}$ 收敛，所以 $\sum_{n=N+2}^{\infty} u_n$ 收敛，

故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，

$$l-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon$$

(2) 当$l>1$时，取$0<\varepsilon<l-1$， 使 $q=l-\varepsilon>1$，

当$n>N$时，有 $u_{n+1}>qu_n>u_n$

即 $0<u_N<u_{N+1}<u_{N+2}<\cdots<u_n<u_{n+1}<\cdots$

由此知 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$， 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

注1：若用比值判别法判定级数发散($l>1$)，级数的通项u_n不趋于零

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

$(l=1)$

因此当$l=1$时，比值判别法失效.

例3* 判定下级数的敛散性.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

P_{253} 习题七(A) 5-(2)

证明 因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$$

$$=0<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

例7 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ $(x>0)$ 的敛散性.

解
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n+1}=x,$$

由比值判别法知,

当$0<x<1$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$收敛.

当$x>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$发散.

当$x=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

例8 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n}{3}\pi}{2^n}$的敛散性.

解 因为 $0\le\cos^2\frac{n}{3}\pi\le 1$,

所以 $0\le\frac{n\cos^2\frac{n}{3}\pi}{2^n}\le\frac{n}{2^n}$ $n=1,2,\cdots,$

又因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1,$

所以,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛, 再由比较判别法知,

原级数也收敛.

例4* 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}}=1,$ 因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

P_{231} 例

故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 也收敛.

方法2 因 $\frac{1}{n(n+1)}\le\frac{1}{n^2}$ $n=1, 2, 3, \cdots$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛. 得原级数收敛.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1,$$

比值判别法失效, 改用比较判别法

定理7.9 根式判别法 [柯西(Cauchy)判别法]

如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$ ，则

(1) 当$\rho<1$时，级数收敛；

(2) 当$\rho>1$时，级数发散；

(3) 当$\rho=1$时，级数敛散性不能确定；

注2：用根式判别法判定级数发散 ($\rho>1$)，级数的通项u_n极限不为零 .

例5* 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$ 的敛散性.

P_{253} 习题七(A) 6-(4)

解 因 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{n}}}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$=\frac{1}{e}<1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$ 收敛.

例9 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{na}{n+1}\right)^n$ $(a>0)$的敛散性.

解　因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na}{n+1}=a$,

所以当$0<a<1$时, 级数收敛;

当$a>1$时, 级数发散;

当$a=1$时, 根式判别法失效, 此时

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=e^{-1}\neq 0,$$

故$a=1$时, 级数发散.

三、小结

1 比较判别法 如果两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足关系式 $u_n \le c\, v_n$ $(n \ge k,\ n,\ k \in N^+,\ c$为大于0的常数$)$, 则

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

推论: (比较判别法的极限形式)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 则

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时, 两级数有相同的敛散性;

(2) 当 $l=0$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l=+\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

2 比值判别法 [达朗贝尔(D′Alembert)判别法]

如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ ，则

(1) 当 $l<1$ 时，级数收敛;

(2) 当 $l>1$ 时，级数发散;

(3) 当 $l=1$ 时，级数敛散性不能确定;

3 根式判别法 [柯西(Cauchy)判别法]

如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$ ，则

(1) 当 $\rho<1$ 时，级数收敛;

(2) 当 $\rho>1$ 时，级数发散;

(3) 当 $\rho=1$ 时，级数敛散性不能确定.

4、重要参考级数:

1° 等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots \quad (a\neq 0)$$

当$|q|<1$时, 收敛,

当$|q|\geq 1$时，发散.

2° 调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\triangleq+\frac{1}{n}+\triangleq$ 发散.

3° P–级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\triangleq+\frac{1}{n^p}+$

当 $p>1$ 时， 收敛,

当$0<p\leq 1$时，发散.

作业 $P_{252\text{-}3}$ 习题七 (A)

4. 用**比较判别法**判定下列级数的敛散性.

(2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{17}+\triangleq\ +\dfrac{1}{n^2+1}+\triangleq$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

5. 用**比值判别法**判定下列级数的敛散性.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$ (9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$

(8) $\dfrac{2}{1\cdot 2}+\dfrac{2^2}{2\cdot 3}+\dfrac{2^3}{3\cdot 4}+\dfrac{2^4}{4\cdot 5}+\cdots$

6. 用**值根式判别法**判定下列级数的敛散性.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n(\arctan n)^n}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$