作业 P_{297} 习题八 (A)

21. 在半径为 a 的半球内, 内接一长方体, 问各边长为多少时, 其体积最大?

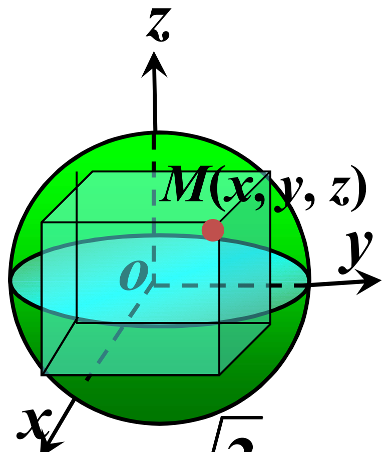
23. 用拉格朗日乘数法计算下列各题

(1) 欲围一个面积为60米^2 的矩形场地, 正面所用材料每米造价10元,其余三面每米造价5元,场地长宽各多少米时, 所用材料费最少?

21. 在半径为 a 的半球内, 内接一长方体, 问各边长为多少时, 其体积最大?

解 设长方体的长、宽、高分别为 $2x$、$2y$、z, 体积为 V, 则

$$V=4xyz, \quad 且 \quad x^2+y^2+z^2=a^2.$$



构造拉格朗日函数:

$$F(x,y,z)=4xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$$

令

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z)=4yz+2x\lambda=0 \\ F'_y(x,y,z)=4xz+2y\lambda=0 \\ F'_z(x,y,z)=4xy+2z\lambda=0 \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{cases}$$

解得 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

因驻点唯一,

所以,长方体的长、宽、高分别为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a, \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

时体积最大.

23. 用拉格朗日乘数法计算下列各题

(1) 欲围一个面积为60米^2 的矩形场地, 正面所用材料每米造价10元,其余三面每米造价5元,场地长宽各多少米时,所用材料费最少?

解 设矩形的长、宽分别为x、y, 所用材料费为z , 则

$$z=10x+5(x+2y),\quad 且\ xy=60,\ 其中x>0,\ y>0\ .$$

构造拉格朗日函数:

$$L(x,y)=15x+10y+\lambda(xy-60)$$

令 $\begin{cases} L'_x(x,y)=15+\lambda y=0 \\ L'_y(x,y)=10+\lambda x=0 \\ xy-60=0 \end{cases}$ 解得 $x=2\sqrt{10}$, $y=3\sqrt{10}$.

因驻点唯一, 又实际问题存在最小值,

所以, 矩形场地的长为$2\sqrt{10}$,宽为$3\sqrt{10}$ 时, 所用材料费最少 , $z_{min}=60\sqrt{10}$.

§ 8.7 二重积分

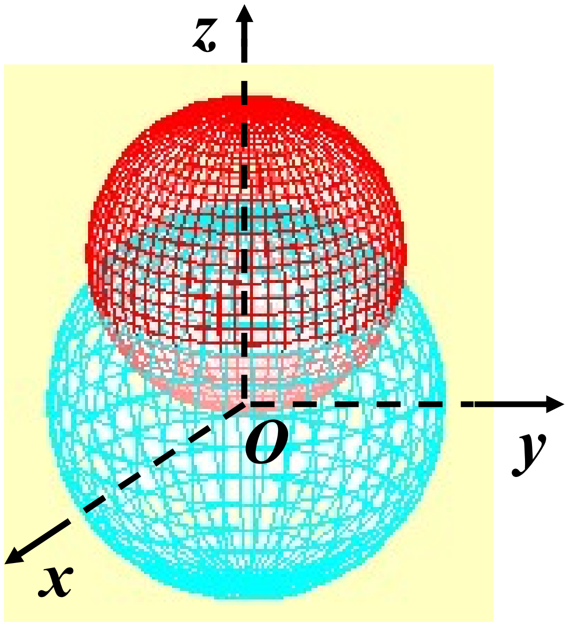
一、二重积分的概念

二、二重积分的性质

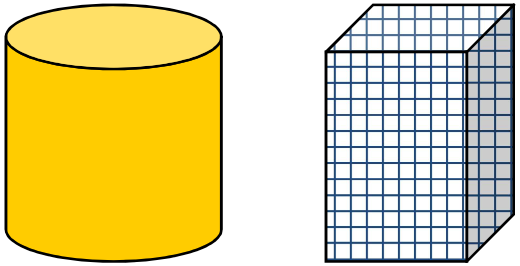
三、二重积分的计算

1. 直角坐标系下二重积分的计算

2. 极坐标系下二重积分的计算



一、问题的提出

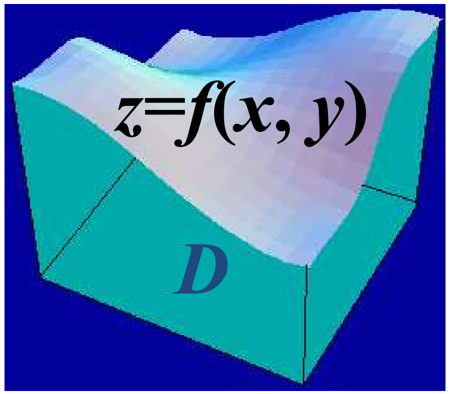


柱体体积=底面积×高

特点：平顶.

利用定积分会求旋转体的体积.

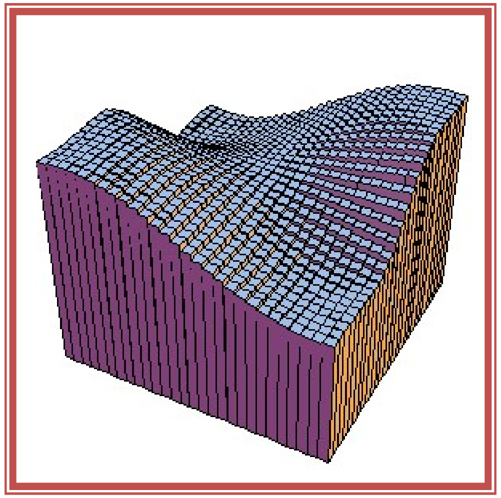
一般立体的体积如何求?



曲顶柱体

特点：曲顶.

柱体体积=？



• 曲顶柱体的体积

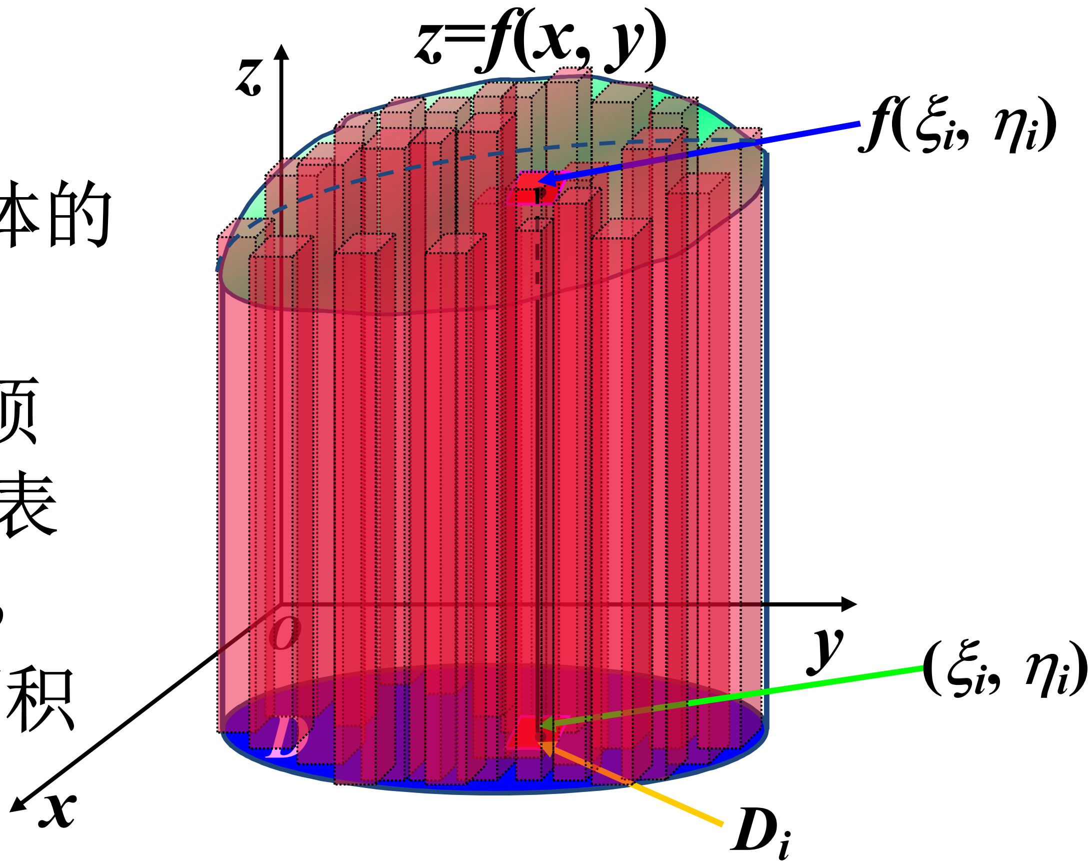
求曲顶柱体的体积采用“分割、求和、取极限”的方法，

步骤如下：

先分割曲顶柱体的底，并任取小区域，

用若干个小平顶柱体体积之和近似表示曲顶柱体的体积，

令$\Delta\sigma_i$表示D_i的面积



曲顶柱体的体积

$$V=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

二、二重积分的概念

1. 定义 设$f(x,y)$是有界闭区域D上的二元函数, 将D任意分成n个小区域:

$$D_1, D_2, \cdots, D_{n-1}, D_n,$$

令$\Delta\sigma_i$表示第i个小区域D_i的面积, 在每个小区域D_i $(i=1,2,\cdots\cdots, n)$内任取一点(ξ_i,η_i), 作和式

$$V_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

若当各小区域的最大直径$d=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$趋近于零$(d\to 0)$时, 总和$V_n$的极限存在, 且此极限与$D$的分法以及$(\xi_i,\eta_i)$的取法无关, 则称函数$f(x,y)$在$D$上是可积的, 并将此极限值称为$f(x,y)$在区域$D$上的二重积分. 记为

若当各小区域的最大直径 $d=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$ 趋近于零时, 总和 V_n 的极限存在, 且此极限与 D 的分法以及 (ξ_i,η_i) 的取法无关, 则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上是可积的, 并将此极限值称为 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分.
记为

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

积分区域　被积函数　积分变量　被积表达式　面积元素　积分和

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

2. 二重积分的存在定理

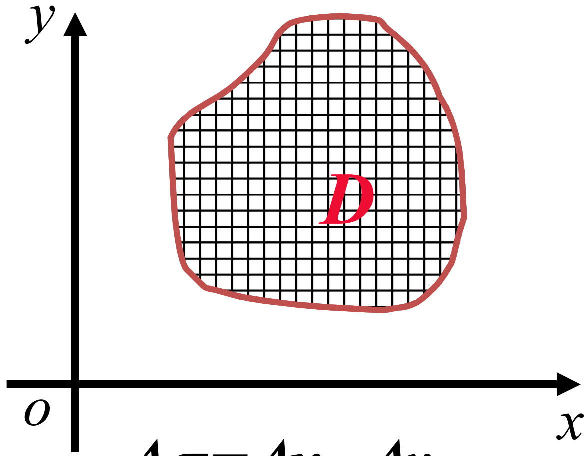
定理1. 有界闭区域在上的连续函数一定可积.

定理2 有界闭区域D上除去有限个点或有限条光滑曲线外都连续的有界函数在D上可积.

在直角坐标系下用平行于坐标轴的直线网来划分区域D, 则面积元素为 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

故二重积分可写为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$\Delta\sigma_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$

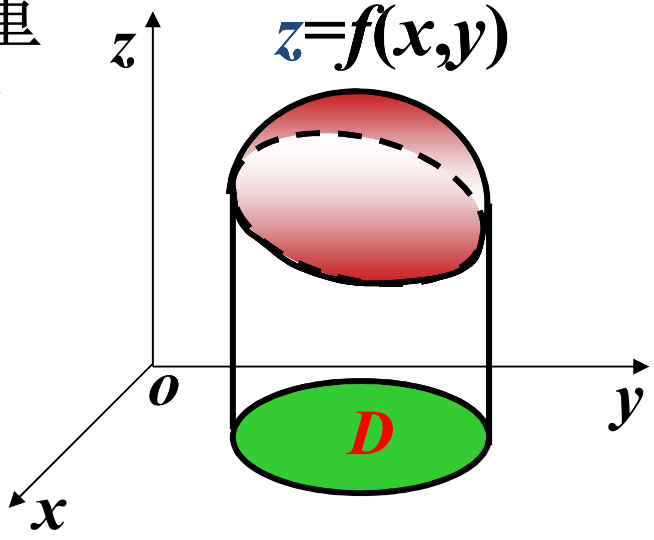
注1. 重积分与定积分的区别:

重积分中$\mathrm{d}\sigma \ge 0$, 定积分中$\mathrm{d}x$ 可正可负.

3. 二重积分的几何意义

曲顶 $z=f(x, y)$ (≥ 0) 在底D上的二重积分

(1) 当被积函数$f(x, y)\geq 0$时, 二重积分是以D为底, 以曲面$z=f(x, y)$为曲顶的柱体的体积.

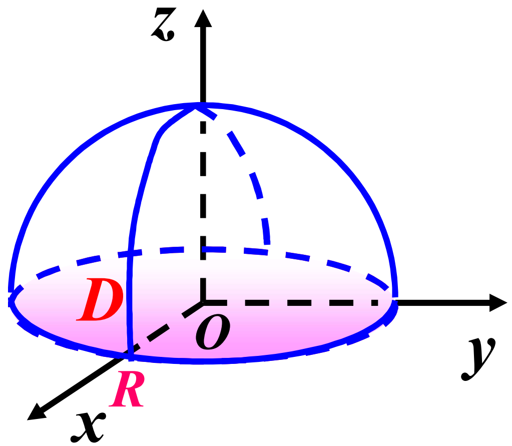


(2) 当被积函数$f(x, y)\leq 0$时, 二重积分是以D为底, 以曲面$z=f(x, y)$为曲顶的柱体体积的负值.

(3) 当被积函数$f(x, y)$在D上的若干部分区域上是正的, 而在其它的部分区域上是负的, 则二重积分是这些部分区域上的柱体体积的代数和.

例1* 设D为圆域: $x^2+y^2 \le R^2$, 求二重积分

$$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$$



解 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 是上半球面

由二重积分的几何意义可知,

$$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{2}{3}\pi R^3$$

等于上半球体的体积

为负

例2* $\displaystyle\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4} \frac{\boxed{\sin\pi\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值=【 B 】.

(A) 为正 (B) 为负 (C) 等于0 (D) 不能确定

三、二重积分的性质

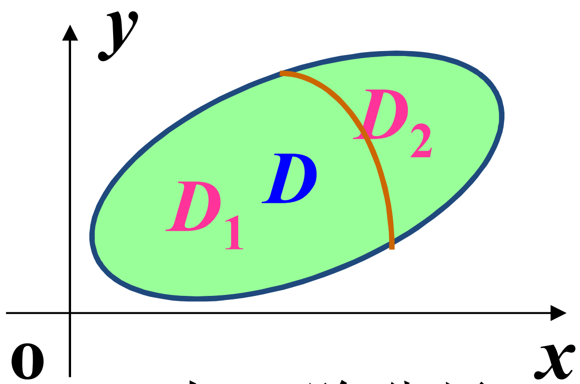
二重积分有与定积分类似的性质

性质1 当k为常数时，$\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$

性质2 $\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$

性质3 对区域具有可加性：若 $D=D_1+D_2$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$



D_1与D_2除分界线外无公共点

性质4 若在D上$f(x,y) \le g(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

特殊地

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

性质5 若A为区域D的面积，则

$$\iint_D 1\cdot \mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma = A\ .$$

$\iint_D \mathrm{d}\sigma$既可看成是以D为底，以1为高的柱体体积.

又可看成是D的面积.

性质6 设M与m分别是函数$f(x,y)$在闭区域D上的最大值与最小值，σ是D的面积，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le M\sigma$$

(二重积分估值不等式)

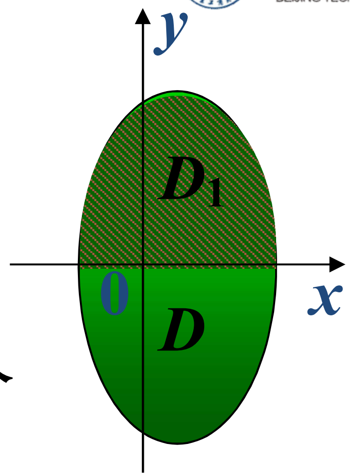
性质7 设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，σ是D的面积，则在D与上至少存在一点(ξ,η)使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\,\sigma\ .$$

(二重积分中值定理)

性质1* 对称性质

设$f(x, y)$有在界闭区域 D上连续,



1° 若区域D关于x轴对称,

D_1为D位于 x 轴上方(上半平面)的部分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f(x,-y) = -f(x,y), \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,-y) = f(x,y). \end{cases}$$

2° 若区域D关于y轴对称,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f(-x,y) = -f(x,y), \\ 2\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(-x,y) = f(x,y). \end{cases}$$

其中D_2为D位于y 轴右(或左)方的部分.

四、二重积分的计算

1. 利用直角坐标计算二重积分

2. 利用极坐标计算二重积分

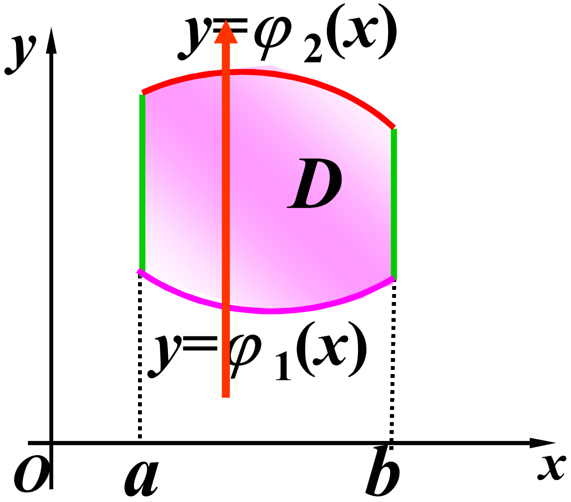
二重积分化为累次积分(两次定积分)

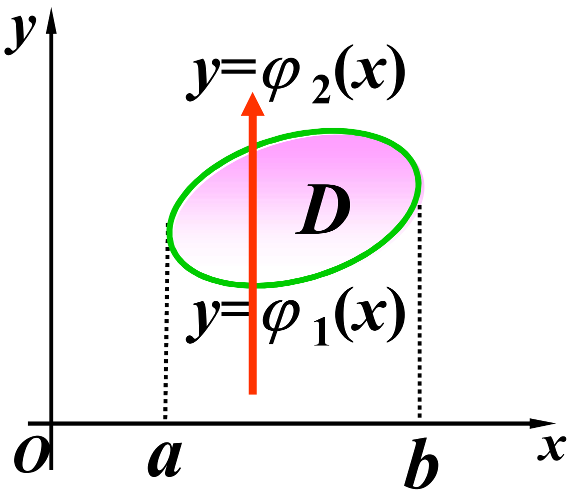
1. 直角坐标系下二重积分的计算

(1) 如果积分区域为: $a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$

其中函数 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续.

[X–型]





$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

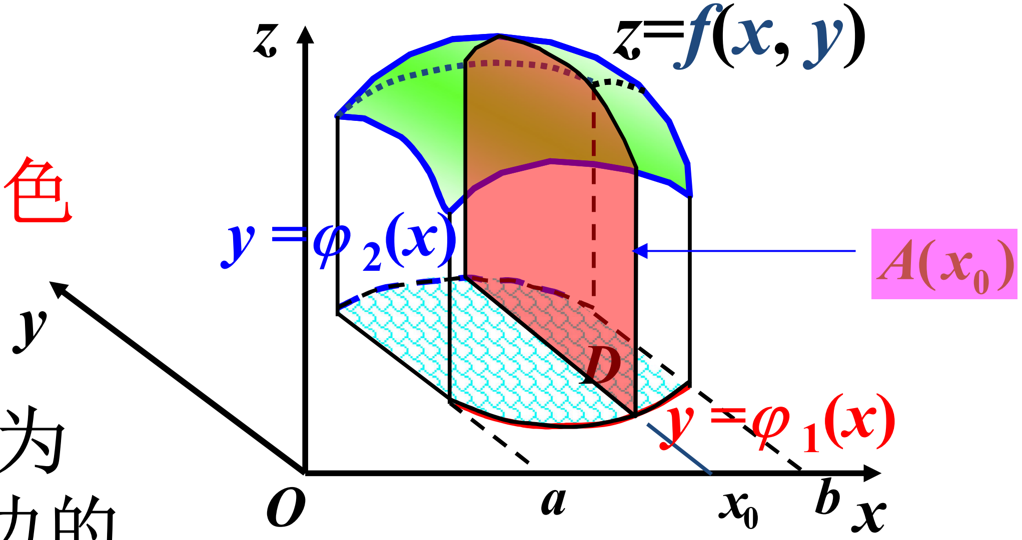
先对 y 后对 x 的二次积分

X型区域的特点: 穿过区域内部且平行于 y 轴的直线与区域边界相交不多于两个点.

当$f(x,y)>0$时, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值等于以D为底, 以曲面$z=f(x, y)$为曲顶柱体的体积.

应用计算“平行截面面积为已知的立体求体积”的方法.

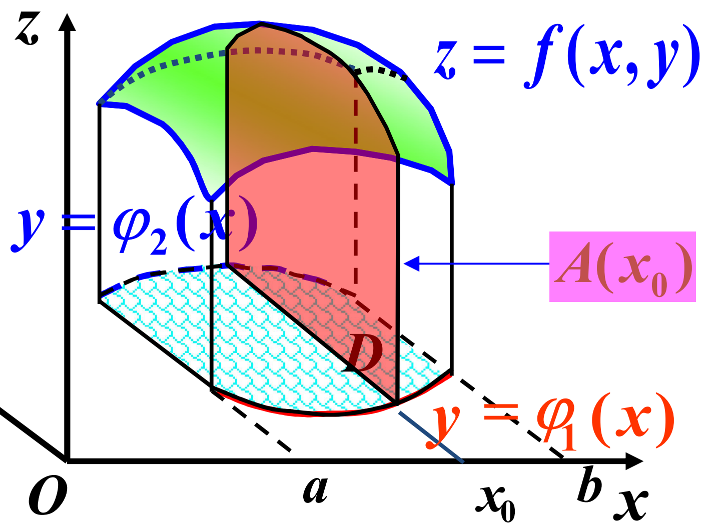
计算截面面积(红色部分即$A(x_0)$)



是区间$[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$为底,曲线$z=f(x_0, y)$为曲边的曲边梯形.

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)\mathrm{d}y$$

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$$



$\forall x\in[a,b]$, 有

$$\boxed{A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

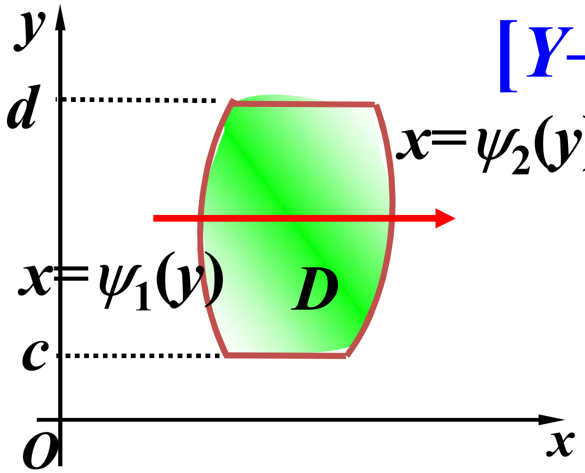
$$=\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$ 称为累次积分.

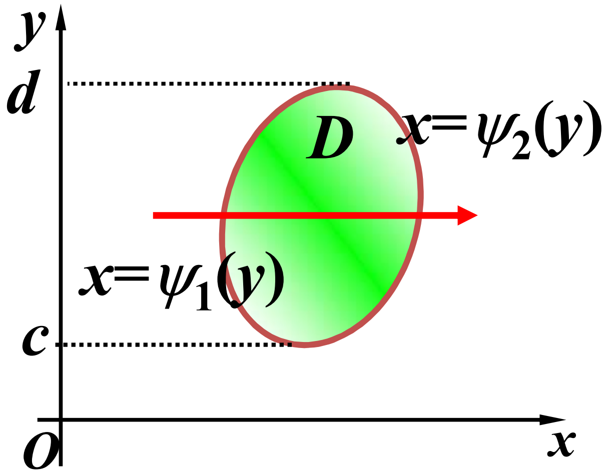
先对y后对x的二次积分

(2) 如果积分区域为: $c \le y \le d$， $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$

其中函数 $\psi_1(y)$ 、 $\psi_2(y)$在区间$[c, d]$上连续.

[Y–型]





$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

先对x后对y的二次积分

Y型区域的特点: 穿过区域内部且平行于x轴的直线与区域边界相交不多于两个点.

例2 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域是$D$ 由x=0, y=0与 x^2+y^2 =1 所围成的第一象限的图形.

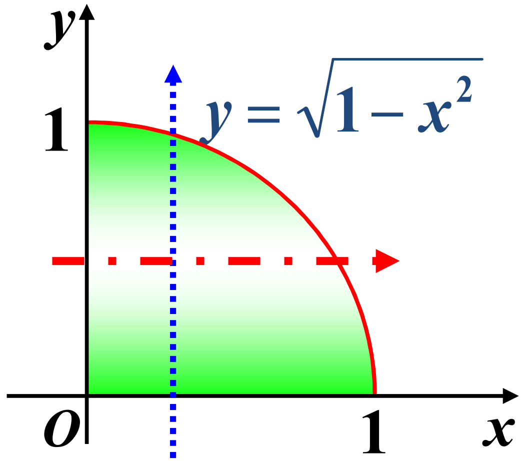
解 $$\iint\limits_D x^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 x^2\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

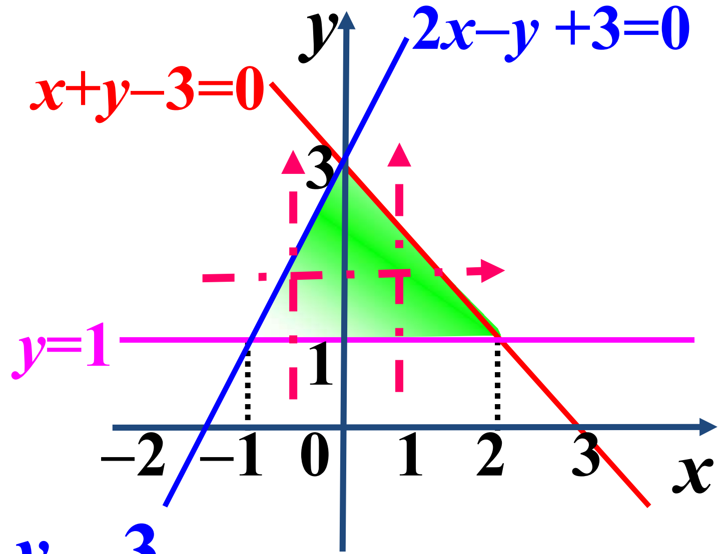
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^4)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{15}.$$



例3 计算二重积分 $\iint\limits_D (2x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域是$D$ 由直线$y=1$, $2x-y+3=0$与$x+y-3=0$ 所围成图形.



解 $\iint\limits_D (2x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_1^3 \mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}(y-3)}^{3-y}(2x-y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^3 \left[x^2\Big|_{\frac{1}{2}(y-3)}^{(3-y)}-y\left(3-y-\frac{y-3}{2}\right)\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{9}{4}\int_1^3(y^2-4y+3)\mathrm{d}y=\frac{9}{4}\left(\frac{y^3}{3}-2y^2+3y\right)\Big|_{y=1}^{3}$$

$$=-3.$$

***X*型区域的特点:** 穿过区域内部且平行于y轴的直线与区域边界相交不多于两个点.

***Y*型区域的特点:** 穿过区域内部且平行于x轴的直线与区域边界相交不多于两个点.

(3)积分区域D既是X型:

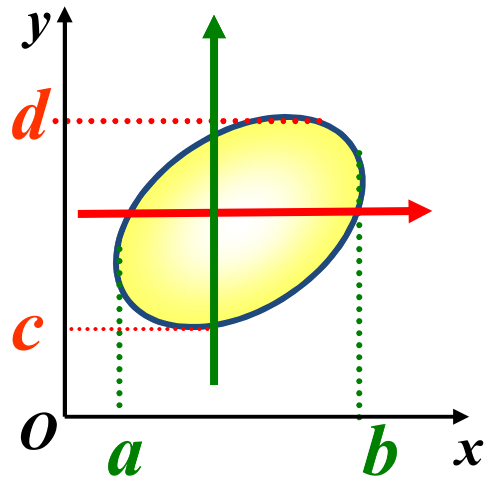
$$a\le y\le b,\ \varphi_1(x)\le x\le \varphi_2(x)$$

又是Y型:

$$a\le y\le b,\quad \psi_1(y)\le y\le \psi_2(y)$$

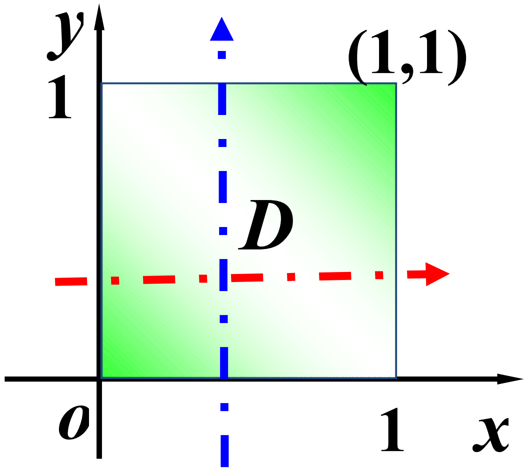
计算结果一样.

但可作出适当选择.



口诀 后积先定限，限内化垂线；
穿入是下限，穿出是上限.

例1 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域是$D$由$x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ 围成的矩形.



解 $\iint\limits_D e^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D e^x \cdot e^y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$= \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \int_0^1 e^y \mathrm{d}y$

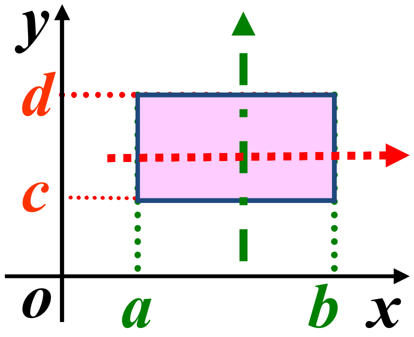
$= (e^x \big|_0^1)^2$

$= (e-1)^2$.

注1 如果积分区域为：$D=\{(x, y)|a\le x\le b, c\le y\le d\}$, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$



注2 如果函数$f(x, y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$在$D$为上可积, 且积分区域 $D=\{(x, y)|a\le x\le b, c\le y\le d\}$, 则

$$\iint_D f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\cdot\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y$$

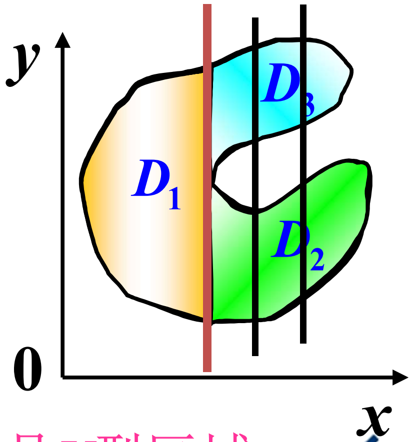
即等于两个定积分的乘积

注3 若积分域较复杂,则必须将它分割成若干 X-型域或Y-型域 .

如右区域,可在分割后的三个区域上分别使用积分公式.

$$\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}+\iint_{D_3}.$$

(用积分区域的可加性质)



D_1、D_2、D_3都是X型区域

例4 应用二重积分，求xoy平面上由$y=x^2$与 $y=4x-x^2$所围成的区域的面积.

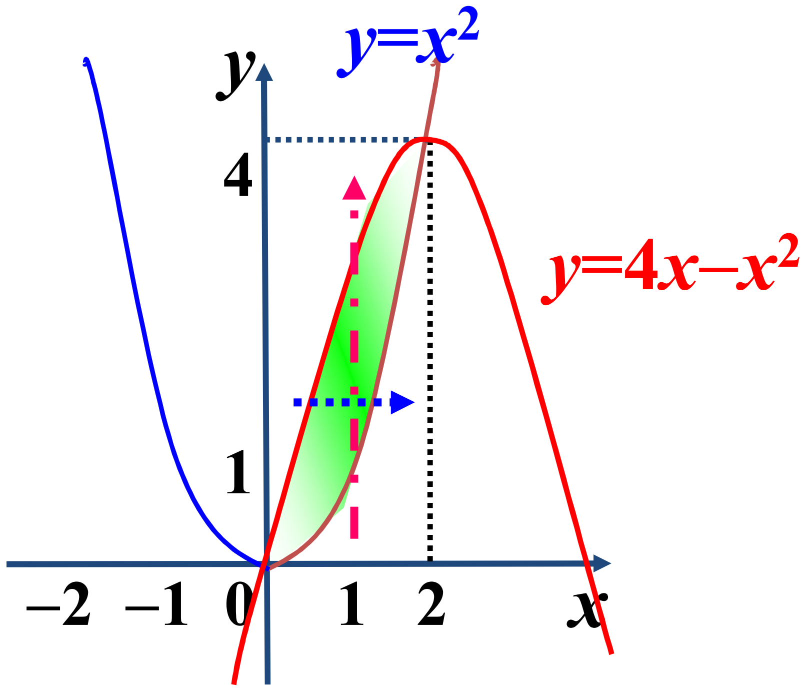
解 $$A=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{4x-x^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 (4x-2x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=(2x^2-\frac{2}{3}x^3)\Big|_0^2$$

$$=\frac{8}{3}.$$



例3* 求底圆半径为R, 且方程分别为 $x^2+y^2=R^2$ 及$x^2+z^2=R^2$ 的两个圆柱面所围成的立体的体积.

解 利用对称性, 考虑第一卦限部分,

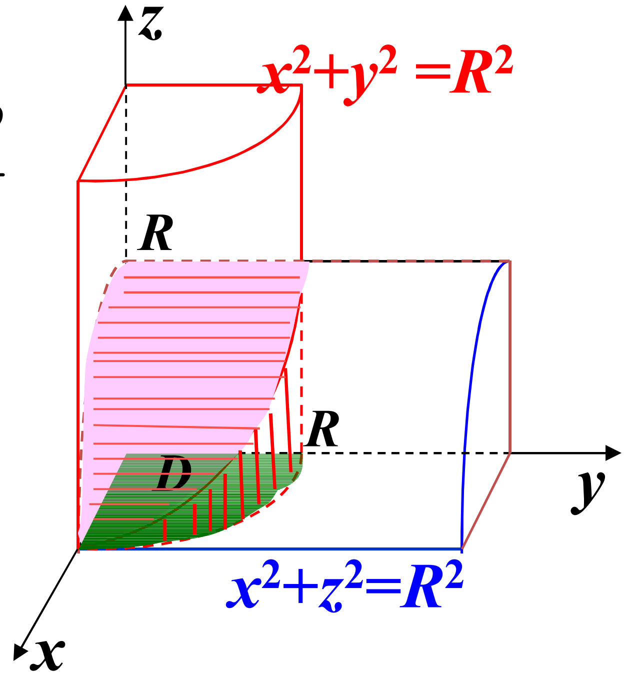
其曲顶柱体的顶为 $z=\sqrt{R^2-x^2}$

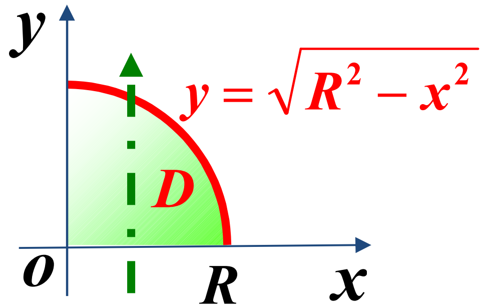
$$V_1=\iint_D \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^R (R^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}R^3$$

$$V=8V_1=\frac{16}{3}R^3.$$





立体顶部 $x^2+z^2=R^2$

立体底部 $x^2+y^2=R^2$

例5 证明 $\int_0^a dy\int_0^y e^{b(x-a)}f(x)dx=\int_0^a (a-x)e^{b(x-a)}f(x)dx$

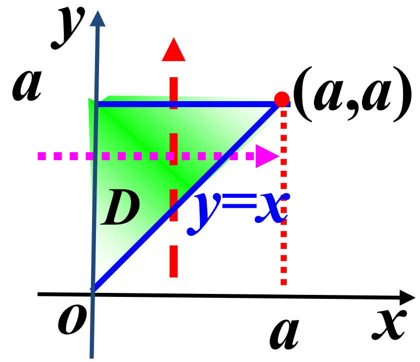
其中a、b均为常数, 且$a>0$.

证 交换积分次序的方法是:

(1) 将所给的积分域用联立不等式表示 $D=\{(x,y)|0\le y\le a,\ 0\le x\le y\}$,

(2) 画出积分域的草图

(3)交换积分次序, 确定新的积分限



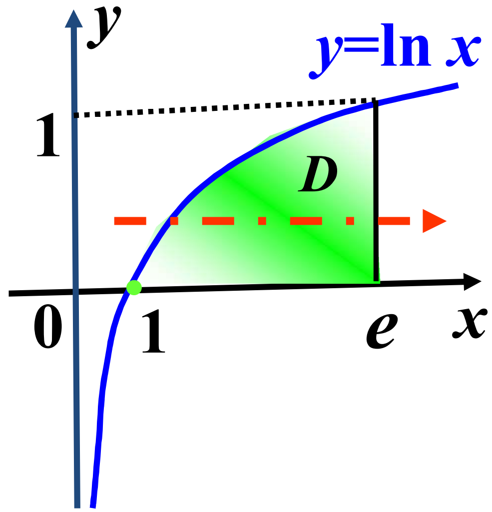
$$\int_0^a dy\int_0^y e^{b(x-a)}f(x)dx=\iint_D e^{b(x-a)}f(x)dxdy$$

$$=\int_0^a e^{b(x-a)}f(x)dx\int_x^a dy$$

$$=\int_0^a (a-x)e^{b(x-a)}f(x)dx$$

例4* 交换下二次积分的积分次序

$$\int_1^e \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y$$



解 $\int_1^e \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{e^y}^{e} f(x,y)\mathrm{d}x$$

(1) 由原积分限得积分域为: $D=\{(x,y)|1\le x\le e,\ 0\le y\le \ln x\}$,

(2) 画出积分域的草图

(3)交换积分次序, 确定新的积分限:

$D=\{(x,y)|0\le y\le 1,\ e^y\le x\le e\}$.

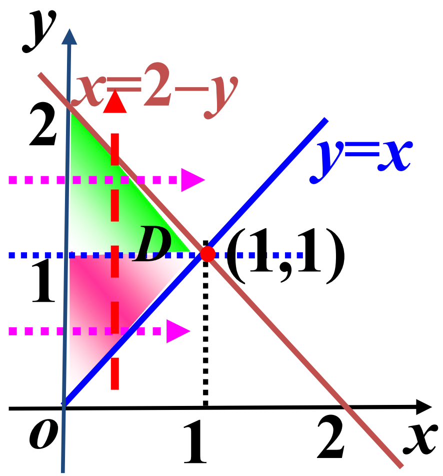
例5* 交换下二次积分的积分次序

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx$$

证 $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx$

$$= \iint_D f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x,y)dy.$$



P_{298} 习题八(A) 27: (2)

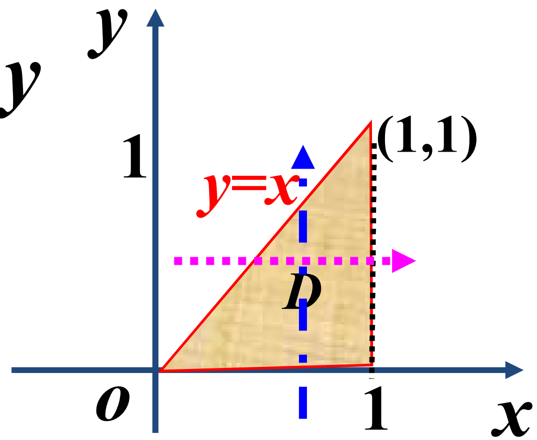
例6* 积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{\tan x}{x} \mathrm{d}x =$ ________.

解 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{\tan x}{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\tan x}{x} \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y$

$= \int_0^1 \tan x \, \mathrm{d}x$

$= -\ln(\cos x) \Big|_0^1$

$= -\ln(\cos 1)$.



2017 数2

因 $\int \frac{\tan x}{x} \mathrm{d}x$ 不能用初等函数表示,

故积分时必须交换积分次序.

例7* 二次积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^2 e^{-y^2} \mathrm{d}y =$ $\underline{\frac{1}{2}(1-e^{-4})}$.

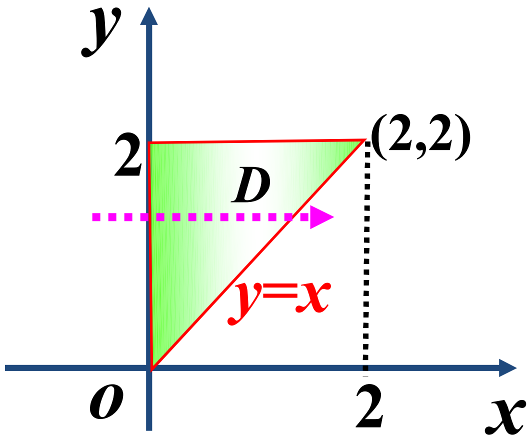
解 $$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^2 e^{-y^2} \mathrm{d}y = \int_0^2 e^{-y^2} \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 y e^{-y^2} \mathrm{d}y$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-y^2} \mathrm{d}(-y^2)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2}(1-e^{-4}).$$



1990 数1, 2

因 $\int e^{-y^2} \mathrm{d}y$ 不能用初等函数表示,
故积分时必须交换积分次序.

作业 P_{298} 习题八 (A)

26. 化二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为二次积分(写出两种积分次序)

(3) D是由x轴, $y=\ln x$ 及 $x=e$ 所围的区域.

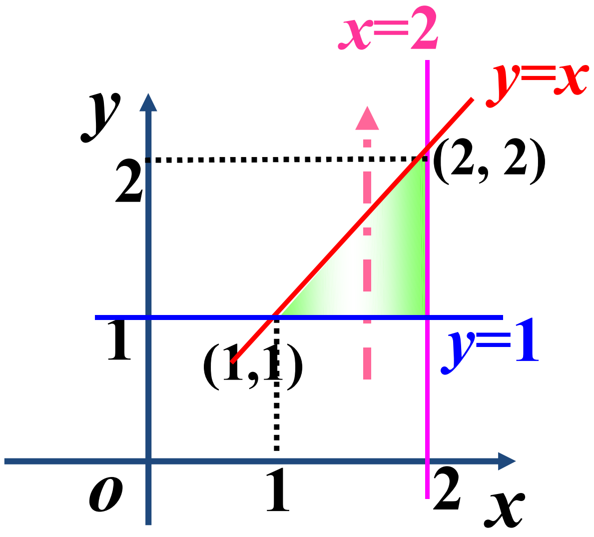
29. 计算下列二重积分

(1) $\iint\limits_D xe^{xy}\mathrm{d}\sigma$, $D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$.

(4) $\iint\limits_D (x+6y)\mathrm{d}\sigma$, D是由 $y=x$, $y=5x$, $x=1$ 围成的区域.

(8) $\iint\limits_D \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D是由直线 $y=x$及抛物线 $y=x^2$围成的区域.

练习题 计算 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由直线 $y=1$、$x=2$与及 $y=x$ 所围成平面闭区域.



解　三直线的交点(1,1),(1,2), (2,2)

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^x xy\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_1^2 x \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_1^x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 (x^3 - x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]\Big|_1^2$$

$$= \frac{9}{8}.$$