北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

# 第七章　无穷级数

## 习题课

一、主要内容

二、典型例题

# 一、主要内容

## (一) 概念

1° (常数项)无穷级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$ 无穷级数

2° 正项级数 — 每项都大于或等于0的级数.

3° 交错级数 — 正、负项相间的级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{ 或 } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \quad (\text{其中} u_n > 0)$$

4° 任意项级数 — 正项和负项任意出现的级数.

5° 幂级数 — $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

6° 泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

## 7° 级数的收敛与发散

(1) 当$n\to\infty$时，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{S_n\}$的极限存在，即$\lim_{n\to\infty}S_n=S$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，记为$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

如果$\{S_n\}$没有极限，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

(2) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为绝对收敛.

若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为条件收敛.

## (3) 阿贝尔(Abel)定理

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$x=x_0(x_0\neq 0)$处收敛, 则它在满足不等式$|x|<|x_0|$的一切$x$处绝对收敛;

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=x_0$处发散, 则它在满足不等式$|x|>|x_0|$的一切$x$处发散.

## (二) 数项级数敛散性的判别法

1° 用定义: 部分和数列$S_n \to S$, 级数收敛.

2° 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则级数发散.

3° 按基本性质.

**性质1**: 级数的每一项同乘一个不为零的常数, 敛散性不变.

**性质2**: 收敛级数可以逐项相加与逐项相减.

**性质3**: 在级数前面加上或减去有限项级数的敛散性不变.

**性质4**: 收敛级数加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和.

4° 正项级数收敛$\Leftrightarrow$它的部分和数列$\{S_n\}$有界.

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

5° 比较判别法 如果两个正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$满足关系式$u_n \le c\,v_n$ ($n \ge k$, $n, k \in N^+$, $c$为大于0的常数), 则

(1) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

(2) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也发散.

推论: (比较判别法的极限形式)

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数, 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$，则

(1) 当$0<l<+\infty$时, 两级数有相同的敛散性;

(2) 当$l=0$时, 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛;

(3) 当$l=+\infty$时, 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散.

6° 比值判别法 [达朗贝尔(D′Alembert )判别法]

如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ ，则

(1) 当 $l<1$ 时，级数收敛；

(2) 当 $l>1$ 时，级数发散；

(3) 当 $l=1$ 时，级数敛散性不能确定；

7° 根式判别法 [柯西(Cauchy)判别法]

如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$ ，则

(1) 当 $\rho<1$ 时，级数收敛；

(2) 当 $\rho>1$ 时，级数发散；

(3) 当 $\rho=1$ 时，级数敛散性不能确定.

**8° 莱布尼茨定理:** 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$ 满足条件:

(1) $u_n \geq u_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$ ;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数收敛，且其余项的绝对值 $|R_n| \leq u_{n+1}$.

**9°** 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

**10°** 如果任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, 则

(1) 当 $l<1$ 时，级数绝对收敛;

(2) 当 $l>1$ 时, 级数发散;

(3) 当 $l=1$ 时, 级数敛散性不能确定.

**定理7.12** 如果任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$满足条件 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$，则

(1) 当$l<1$时，级数绝对收敛；

(2) 当$l>1$时，级数发散；

**定理1*** 如果任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$满足条件 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$，则

(1) 当 $\rho<1$ 时，级数绝对收敛；

(2) 当 $\rho>1$时，级数发散；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0,\quad \forall x\in R$$

11° 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的系数满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

则 (1)当$0< l <+\infty$时，$R=\dfrac{1}{l}$;

(2)当$l=0$时，$R=+\infty$ ;

(3)当$l=+\infty$时，$R=0$.

当 $|x|<R$ 时, 幂级数绝对收敛;

当 $|x|>R$ 时, 幂级数发散;

当$x=R$ 与 $x=-R$ 时, 幂级数可能收敛也可能发散.

收敛区间为 $(x_0-R, \ x_0+R)$ .

**12°** 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 的系数满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

则 (1) 当 $0 < l < +\infty$ 时，$R = \dfrac{1}{l}$;

(2) 当 $l = 0$ 时，$R = +\infty$ ;

(3) 当 $l = +\infty$ 时，$R = 0$.

当 $|x - x_0| < R$ 时, 幂级数绝对收敛;

当 $|x - x_0| > R$ 时, 幂级数发散;

当 $x = x_0 + R$ 与 $x = x_0 - R$ 时, 幂级数可能收敛也可能发散.

收敛区间为 $(x_0 - R,\ x_0 + R)$.

## 4、重要参考级数:

1° 等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots \quad (a\neq 0)$$

当$|q|<1$时，收敛，

当$|q|\geq 1$时，发散.

2° 调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

3° $P$–级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$

当 $p>1$ 时，收敛，

当$0<p\leq 1$时，发散.

# (三) 幂级数的运算和性质



设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $R_1>0$和$R_2>0$ .

## 1 四则运算

1° 加法 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = f(x)+g(x)$

收敛半径 $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ .

2° 减法 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n = f(x)-g(x)$

收敛半径 $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ .

3° 柯西(Cauchy)乘法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = a_0b_0 + (a_0b_1+a_1b_0)x + (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2 + \cdots + (a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots$$

$$= f(x)\cdot g(x)$$

收敛半径 $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

## 2 和函数的运算性质

**性质1** 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$在收敛区间$(-R, R)$内可导, 并可以逐项求导, 且求导后级数的收敛半径不变.

即 $$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$x \in (-R, R)$$

**注1:** 逐项求导后所得幂级数的收敛域不会变大.

性质2　幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$在收敛区间$(-R, R)$内可积，并可逐项求积分，且积分后级数的收敛半径不变.

即 $$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t$$

$$x \in (-R, R) .$$

注2：逐项求积分后所得幂级数的收敛域不会变小.

注3：如果逐项求导或逐项求积分后的幂级数当$x=-R$或$x=R$时收敛，则在$x=-R$或$x=R$时，性质1和性质2中的等式仍然成立.

# (四) 函数的幂级数展开式



## 1. 泰勒级数

定义：如果函数$f(x)$在$x_0$的某邻域内是存在任意阶导数，则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

称为函数$f(x)$在$x_0$处的泰勒级数.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为函数$f(x)$的麦克劳林级数.

定理 $f(x)$在$x_0$点的泰勒级数在$U_R(x_0)$内收敛于$f(x)$

$\Leftrightarrow$ 在$U_R(x_0)$ 内，$R_n(x)\to 0$.

## 泰勒级数的拉格朗日(Lagrange) 余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间})$$

## 麦克劳林(Maclaurin)级数的拉格朗日(Lagrange)余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (\xi\text{在}0\text{与}x\text{之间})$$

或

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

## (四) 函数的幂级数展开式

### 1. 直接法(泰勒级数法)

利用泰勒级数或麦克劳林级数将$f(x)$展开为幂级数

步骤：$1°$ 求 $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,\cdots$

$2°$ 计算 $a_n = f^{(n)}(x_0)$, $n=0,1,2,\cdots$

$3°$ 写出幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

并求出其收敛域.

$4°$ 讨论 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) \overset{?}{=} 0$

若为0, 则幂级数在此收敛域内等于函数$f(x)$；

若不为0, 则幂级数虽然收敛, 但它的和不是$f(x)$.

## 2. 间接展开法

根据唯一性, 利用常见展开式、等比级数的和及幂级数的性质等, 通过变量代换, 四则运算, 恒等变形, 逐项求导, 逐项积分等方法, 求展开式.

## 3. 常用已知和函数的幂级数

1° 几何级数

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad x\in(-1,1).$$

$$2^\circ \quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$3^\circ \ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$x\in(-1,1]$$

$$4^\circ\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$5^\circ\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$6^\circ\ \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in [-1, 1]$$

$$7^\circ\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

$$x \in (-1, 1)$$

## 二、典型例题

**例1** 填空题

1 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 3}{2^n}$ 的和为 $\underline{\dfrac{2}{2-\ln 3}}$ .

2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 $R$ , 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n+1}$ 的收敛半径为 $\underline{\sqrt{R}}$ .

3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛 , 在 $x=-4$ 处发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 $\underline{(1, 5\,]}$ .

解 由 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛 , 在 $x=-4$ 处发散, 知收敛半径: $R=2$,

由 $-2<x-3\le 2$, 得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为: $1<x\le 5$ ,

所以应填 (1, 5].

**4** 已知数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$，则数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$

$= \underline{\quad 2S-u_1 \quad}$.

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1$$

$$= 2S - u_1.$$

例2 选择题

1. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛区域是【 C 】

(A) (0, 2)  (B) [0, 2)  (C) (0, 2]  (D) [0, 2]

2. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收 敛，记$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，则有

(A) $\lim_{n\to\infty}S_n=0.$  (B) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛.

(C) $\lim_{n\to\infty}a_n=0.$  (D) $\{S_n\}$不一定有界.【 C 】

3. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处发散，则它在$x=-2$处一定

(A) 发散.  (B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.  (D) 敛散性不确定.  【 A 】

**4.** 下列级数中, 发散的是 【 C 】

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{n})$.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

解 (A) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\dfrac{1}{3}<1$, 级数收敛.

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=1$, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 知原级数收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}=\underbrace{\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}}}_{\text{条件收敛}}+\overbrace{\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}}}^{\text{发散}}$ 故原级数发散.

因此应选 (C) .

例3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$ 的收敛半径和收敛域.

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{2^n}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2,$

收敛半径 $R=\frac{1}{2}$,

故当 $|x-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$, 即 $0<x<1$ 时，级数绝对收敛；

当 $x=0$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散

当 $x=1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛

故收敛域为 $(0,1]$.

例4 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{3^n-1}$的收敛半径和收敛域.

缺少奇次幂的项

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2(n+1)}}{3^{n+1}-1}}{\frac{x^{2n}}{3^n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^{n+1}-1}x^2=\frac{x^2}{3}$,

所以, 当 $\left|\frac{x^2}{3}\right|<1$ 时, 即 $|x|<\sqrt{3}$ 时, 级数绝对收敛,

当 $\left|\frac{x^2}{3}\right|>1$ 时, 即 $|x|>\sqrt{3}$ 时, 级数发散,

当$x=\pm\sqrt{3}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{3^n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{3^n-1}$,

由 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n-1}=1\neq 0$, 知级数发散,

故原级数的收敛域为: $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$. 收敛半径: $R=\sqrt{3}$.

例5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的和函数.

解 设所求和函数为$S(x)$, 则当 $x\neq 0$ 时, 有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(-\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right),$$

由 $1<-\frac{x}{2}\leq 1,\ x\neq 0$ 得 $x\in[-2,0)\cup(0,2)$,

又 $S(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}x+\frac{1}{3\cdot 2^3}x^2+\cdots$, 知 $S(0)=\frac{1}{2}$,

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & x\in[-2,0)\cup(0,2),\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,1]$$

$P_{254}$习题七(A) 10–(4)

例6 §7.7 初等函数的幂级数展开式

作业 $P_{254}$ 习题七 (A)



**12.** 利用已知展开式把下列函数展开为$x$的幂级数, 并确定收敛域.

(2) $f(x)=\cos^2 x$

(6) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x-3}$

**13.** 利用已知展开式把下列函数展开为 $x-2$ 的幂级数, 并确定收敛域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$

(4) $f(x)=\ln\dfrac{1}{5-4x+x^2}$

**12.** 利用已知展开式把下列函数展开为$x$的幂级数, 并确定收敛域. **(2)** $f(x)=\cos^2 x$

**解** 因为 $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

又 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty).$

所以 $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right]$$

$$=1-\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!}+\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}+\cdots$$

$$=1-x^2+\frac{2^3}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

12. 利用已知展开式把下列函数展开为$x$的幂级数, 并确定收敛域.

(6) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x-3}$

解 $$\frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{x}{(x+1)(x-3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{3}{x-3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left[(-1)^n-\frac{1}{3^n}\right]x^n$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad x\in(-1,1)}$$

收敛域为: $x\in(-1,1)$.

**13.** 利用已知展开式把下列函数展开为 $x-2$ 的幂级数, 并确定收敛域.

$$(1)\quad f(x)=\frac{1}{4-x}$$

解

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2-(x-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad x\in(-1,1)$$

由 $\frac{|x-2|}{2}<1$ 得收敛域为: $x\in(0,4)$.

**13.** 利用已知展开式把下列函数展开为 $x-2$ 的幂级数, 并确定收敛域.

(4) $f(x)=\ln\dfrac{1}{5-4x+x^2}$

解

$$f(x)=\ln\frac{1}{5-4x+x^2}$$

$$=-\ln[1+(x-2)^2]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^{2n}}{n}$$

由 $-1<(x-1)^2\le 1$， 得收敛区域为: $x\in[1,3]$.

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\quad x\in(-1,1]$$

例7 把函数 $f(x)=\ln(1-x-2x^2)$ 展开成 $x$的幂级数.

解 $f(x)=\ln(1-x-2x^2)$

$$= \ln(1+x)+\ln(1-2x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n}$$

$-1 < x \le 1$

$-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$$

当 $x=\frac{1}{2}$时, $f(x)$无定义,

所以收敛域为: $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

例8 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成$(x-1)$ 的幂级数.

解 $$\frac{1}{x^2-3x-4}=\frac{1}{(x-4)(x+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{-3+x-1}-\frac{1}{2+x-1}\right)$$

$$=-\frac{1}{15}\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}-\frac{1}{10}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5}\left[(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right](x-1)^n$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad x\in(-1,1)$$

$x\in(-1,3)$.

例9 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ 的和 .

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$=2e\,.$$

例10 求 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}$ 的和.

解 $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1+1}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\frac{\cos 1+\sin 1}{2}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$