习题六 (B)

1. 下列各式正确的是 【 D 】

(A) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)$ (B) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$

(C) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(x)$ (D) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$

解

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

所以选 (D) .

2. 如果 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续函数, 且平均值为2,

则 $\int_{1}^{-1} f(x)\mathrm{d}x =$ 【 C 】

(A) -1 .　(B) 1.　(C) -4.　(D) 4.

解　由已知 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2$, 得

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 4,$$

所以 $\int_{1}^{-1} f(x)\mathrm{d}x = -4,$

故选 (C) .

3. 下列积分能直接使用牛顿-莱布尼茨公式的是【 A 】

(A) $\int_0^5 \frac{x^5}{x^2+1}\mathrm{d}x.$ (B) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

(C) $\int_0^4 \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-5)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$ (D) $\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}.$

解 $0< x=\sqrt[3]{25} <4$

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\mathrm{d}x \neq$【 A 】

(A) 0 (B) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\mathrm{d}x$

(C) $2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin x)\mathrm{d}x$ (D) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$

5. 根据定积分的几何意义, 下列各式中正确的是【 D 】

(A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x dx < \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

(B) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx$

(C) $\int_{0}^{\pi} \sin x dx = 0$

(D) $\int_{0}^{2\pi} \sin x dx = 0$

6. 使积分 $\int_0^2 kx(1+x^2)^{-2}\mathrm{d}x = 32$ 的常数 $k =$【 C 】

(A) 40　(B) − 40　(C) 80　(D) − 80

解 $$\int_0^2 kx(1+x^2)^{-2}\mathrm{d}x = \frac{k}{2}\int_0^2 (1+x^2)^{-2}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$= -\frac{k}{2(1+x^2)}\bigg|_0^2$$

$$= \frac{2k}{5} = 32,$$

得 $k = 80$,

故选 (C) .

7 设 $f(x)=\begin{cases}2^x+1, & -1\le x<0,\\ \sqrt{1-x}, & 0\le x\le 1,\end{cases}$ 则 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=$【 **B** 】

(A) $\dfrac{1}{2\ln 2}+\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2\ln 2}+\dfrac{5}{3}$

(C) $\dfrac{1}{2\ln 2}-\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{2\ln 2}-\dfrac{5}{3}$

解 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^{0}(2^x+1)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{-1}^{0}+1-\int_{0}^{1}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}(1-x)$$

$$=\frac{1}{2\ln 2}+1-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{2\ln 2}+\frac{5}{3}.$$

故选 (B).

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{1}{2}-\sin x\right|dx=$【 C 】

(A) $\frac{\pi}{4}-1$　　(B) $-\frac{\pi}{4}$　　(C) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{12}-1$　　(D) 0

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{1}{2}-\sin x\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\frac{1}{2}-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\frac{1}{2})dx$

$$=\frac{\pi}{12}+\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\cos x\,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})$$

$$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{12}-1.$$

因此选 (C) .

9. 设函数$\varphi''(x)$在$[a, b]$上连续, 且$\varphi'(b)= a$, $\varphi'(a)=b$,

则$\int_a^b \varphi'(x)\varphi''(x)\mathrm{d}x =$【 D 】

(A) $a-b$. (B) $\dfrac{a-b}{2}$. (C) a^2-b^2. (D)$\dfrac{a^2-b^2}{2}$.

解 $\int_a^b \varphi'(x)\varphi''(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi'(x)\,\mathrm{d}[\varphi'(x)]$

$= \dfrac{1}{2}[\varphi'(x)]^2 \Big|_a^b$

$= \dfrac{a^2-b^2}{2}.$

故选 (D) .

10. $f(x)$在$[-a,a]$上连续, 则下列各式正确的是【 C 】

(A) $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$

(B) $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$

(C) $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$

(D) $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}x$

解 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x,$

$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x,$

因此 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$

所以选 (C) .

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

11. $\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}x =$ 【 C 】

(A) $f(a) - f(b)$ (B) $f(2b) - f(2a)$

(C) $\frac{1}{2}[f(2b) - f(2a)]$ (D) $2[f(2b) - f(2a)]$

解 $\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}(2x)$

$$= \frac{1}{2} f(2x)\Big|_a^b$$

$$= \frac{f(2b) - f(2a)}{2}.$$

故选 (C).

12. 设$f(x)$是连续函数, a, b是常数, 则下列说法中不正确的是 【 D 】

(A) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是常数

(B) $\int_a^b xf(t)\mathrm{d}t$ 是 x 的函数

(C) $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 x 的函数

(D) $\int_0^{\frac{b}{x}} xf(t\,x)\mathrm{d}t$ 是x和t的函数

12. 设$f(x)$是连续函数, a, b是常数, 则下列说法中不正确的是 【 **D** 】

(A) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是常数

(B) $\int_a^b xf(t)\mathrm{d}t$ 是 x 的函数

(C) $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 x 的函数

(D) $\int_0^{\frac{b}{x}} xf(t\,x)\mathrm{d}t$ 是x和t的函数

解 $$\int_0^{\frac{b}{x}} x\,f(tx)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{b}{x}} f(tx)\mathrm{d}tx \overset{u=tx}{=\!=\!=\!=} \int_0^{b} f(u)\mathrm{d}u$$

是常数 .

所以选 (D) .

13. $y=\int_0^x (t-1)^2(t+2)\mathrm{d}t$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=$ 【 B 】

(A) -2.　(B) 2.　(C) -1.　(D) 1.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x (t-1)^2(t+2)\mathrm{d}t\Big|_{x=0}$

$=(x-1)^2(x+2)\Big|_{x=0}$

$=2.$

故选 (B).

14. 已知$F(x)$是$f(x)$的原函数, 则 $\int_a^x f(t+a)\mathrm{d}t =$

【 D 】

(A) $F(x) - F(a)$　　(B) $F(t) - F(a)$

(C) $F(x+a) - F(x-a)$　　(D) $F(x+a) - F(2a)$

解 $$\int_a^x f(t+a)\mathrm{d}t = \int_a^x f(t+a)\mathrm{d}(t+a)$$

$$= F(t+a)\Big|_a^x$$

$$= F(x+a) - F(2a).$$

故选 (D).

15. 函数 $f(x)=\int_0^x \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}t$ 在[–1, 1]上有 【 C 】

(A) 驻点 (B) 极大值 (C) 极小值 (D) 拐点

解 $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $f'(x)\neq 0$, 因此 $f(x)$无驻点,

因 $x=0$时, $f'(x)$不存在, 且 $x<0$时, $f'(x)<0$,

$x>0$时, $f'(x)>0$,

所以, $f(x)$在点$x=0$处有极小值.

故选 (C) .

16. 设函数 $y=\int_0^x (t-1)\mathrm{d}t$，则 y 有 【 **B** 】

(A)极小值 $\frac{1}{2}$ (B) 极小值 $-\frac{1}{2}$

(C)极大值 $\frac{1}{2}$ (D) 极大值 $-\frac{1}{2}$

解 $y'=x-1$, 令 $y'=0$, 得 $x=1$,

又 $y''=1>0$,

因 $\int_0^1 (t-1)\mathrm{d}t=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1-1=-\frac{1}{2}$

所以, y在点$x=1$有极小值 $-\frac{1}{2}$.

故选 (B).

17. 设 $f(x)=\int_a^x 12t^2\mathrm{d}t$ 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，则 $a=$ 【 A 】

(A) 0.　　(B) -1.　　(C) 1.　　(D) 2.

解

$$f(x)=\int_a^x 12t^2\mathrm{d}t=4t^3\Big|_a^x$$

$$=4(x^3-a^3),$$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 4(x^3-a^3)\mathrm{d}x$$

$$=x^4\Big|_0^1-4a^3$$

$$=1-4a^3$$

$$=1$$

所以 $a=0$，　故选 (A).

18. 设 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{e^{-x}} f(t)\mathrm{d}t = e^{x}$，则 $f(x) =$【 **B** 】

(A) x^2　　(B) $-x^{-2}$　　(C) e^{2x}　　(D) $-e^{-2x}$

解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{e^{-x}} f(t)\mathrm{d}t = f(e^{-x})\cdot(e^{-x})'$$

$$= -f(e^{-x})\,e^{-x}$$

$$= e^{x},$$

于是，$f(e^{-x}) = -e^{2x} = -(e^{-x})^{-2}$

所以，$f(x) = -x^{-2}$.

故选 (B) .

19. 设$f(x)$为连续函数，$F(x)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$ $(h>0)$，则 $\dfrac{\mathrm{dF}(x)}{\mathrm{d}x}=$【 C 】

(A) $\dfrac{1}{h}f(x+h)$ (B) $-\dfrac{1}{h}f(x-h)$

(C) $\dfrac{1}{h}[f(x+h)-f(x-h)]$ (D) $\dfrac{1}{h}[f(x+h)+f(x-h)]$

解

$$\frac{\mathrm{dF}(x)}{\mathrm{d}x}=[\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t]'$$

$$=\frac{1}{h}[f(x+h)\cdot 1-f(x-h)\cdot 1]$$

所以选 (C)．

20. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2 \mathrm{d}t$，$g(x)=x^3+x^4$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 【 B 】

(A) 等价无穷小量　　(B) 同阶但非价无穷小量

(C) 高阶无穷小量　　(D) 低阶无穷小量

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin[(\sin x)^2]\cdot\cos x}{3x^2+4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{3x^2+4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2+4x^3}=\frac{1}{3}.$$

所以，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶但非价无穷小量，故选 (B)．

21. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g(x)f(t)\mathrm{d}t$ = 【 D 】

(A) $g(x)f(x)$　　(B) $g'(x)f'(x)$

(C) $g'(x)f(x)+g(x)f'(x)$　(D) $g(x)f(x)+g'(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

解 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g(x)f(t)\mathrm{d}t = \left[g(x)\cdot\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \right]'$

$= g'(x)\cdot\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + g(x)\cdot f(x)$

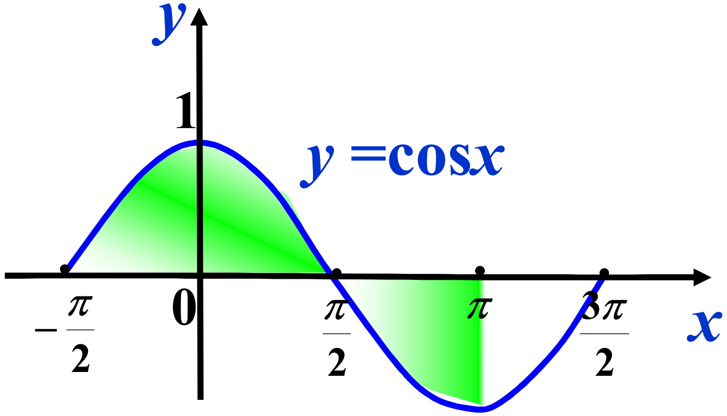
故选 (D) .

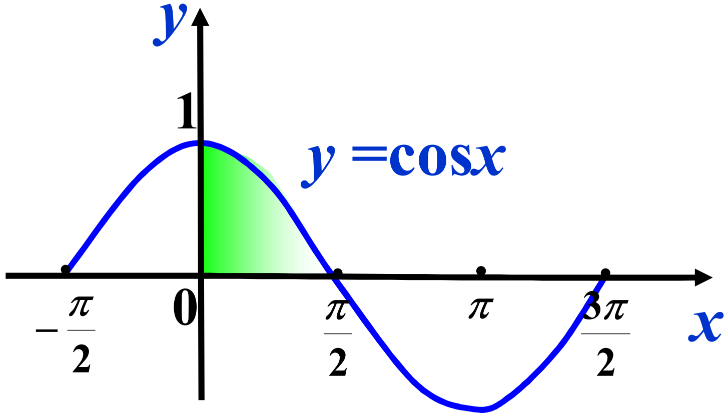
22. 设曲线 $y=f(x)$在$[a, b]$上连续, 则曲线 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$及x轴所围成的图形的面积 $S=$【 C 】

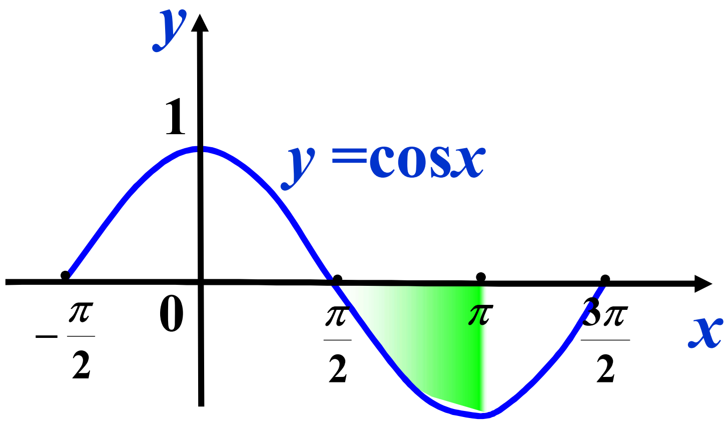
(A) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　　(B) $-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

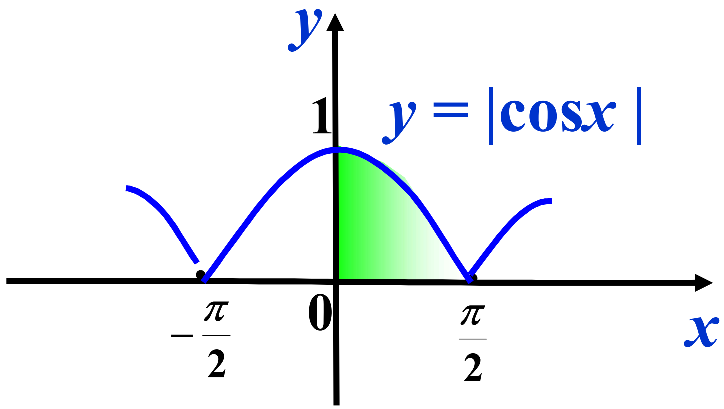
(C) $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$　　(D) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$

23. 下列图形中阴影部分的面积不等于定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx$的是　　【　A　】

(A)


(B)


(C)


(D)


24. 下列积分中**不是广义积分**的是 【 **B** 】

(A) $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

(B) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

(C) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-e^x}$

(D) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$

25. 下列广义积分发散的是 【 A 】

(A) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$　　(B) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

(C) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$　　(D) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} (a > 0, p > 0) \begin{cases} \text{收敛, 当 } p > 1 \text{ 时} \\ \text{发散, 当 } p \le 1 \text{ 时} \end{cases}$$

26. 下列广义积分收敛的是 【 B 】

(A) $\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^1 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

$$\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^p}\,(b>0,\,p>0)\begin{cases}\text{收敛, 当 } p<1 \text{ 时}\\ \text{发散, 当 } p\geq 1 \text{ 时}\end{cases}$$

27. 已知广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+kx^2}$ 收敛于1 $(k>0)$, 则 $k=$【 D 】

(A) $\frac{\pi}{2}$　(B) $\frac{\pi^2}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　(D) $\frac{\pi^2}{4}$

解

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+kx^2}=\frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(\sqrt{k}x)^2}\mathrm{d}(\sqrt{k}x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k}}\arctan(\sqrt{k}\,x)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\pi}{2}=1$$

得 $k=\frac{\pi^2}{4}$,

故选 (D) .

北京工商大學 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

28. 已知 $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sqrt{x}, & 0\le x\le 1, \\ 0, & x>1 \end{cases}$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} kf(x)\mathrm{d}x=1$,

则 $k=$【 **B** 】

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty} kf(x)\mathrm{d}x = k\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2k}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$=\frac{2k}{3}=1$$

得 $k=\frac{3}{2}$,

故选 (B).