# §8.3 二元函数的极限与连续

- 二元函数极限的概念及求法
- 二元函数的连续性及其性质

对于一元函数$y=f(x)$的极限

"$\varepsilon-\delta$" 定义

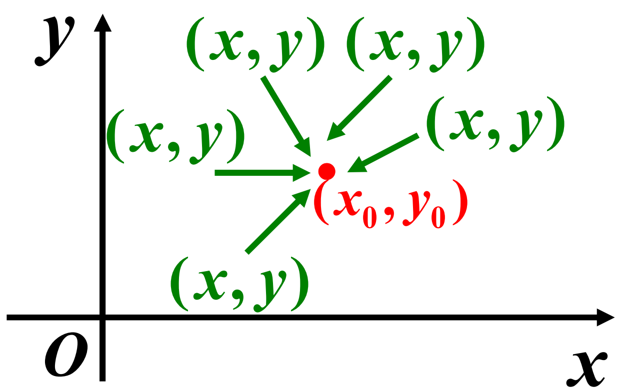
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists\ \delta>0, \text{使当} 0<|x-x_0|<\delta \text{时},$$

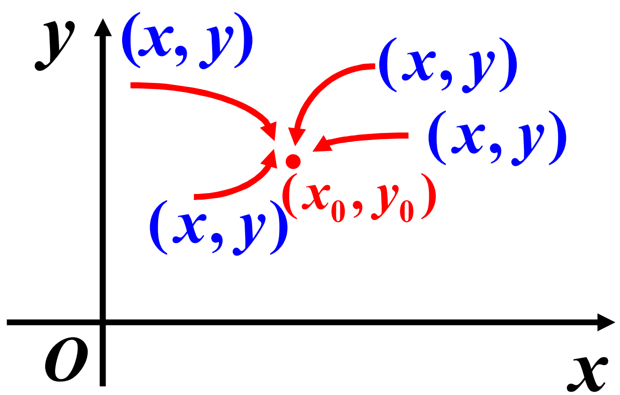
$$\text{恒有}\quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$

问题：对于二元函数$z=f(x, y)$

如果当$P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$时，相应的函数值$z=f(x, y)$无限接近于某一常数 $A$. 那么$A$称为函数$z=f(x, y)$当$P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$时的极限.

注: (1) $P(x, y)$趋向于$P_0(x_0, y_0)$的方向有任意多个, 路径又是多种多样的.




(2) 变点$P(x,y)$与定点$P_0(x_0,y_0)$之间的距离记为$\rho$

$$\rho = |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

不论$P(x,y)$趋向于$P_0(x_0,y_0)$的过程多复杂, 总可以用$\rho\to 0$来表示极限过程:

$$P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$$

# 一、二元函数的极限

## 1. 定义8.3

设$A$为常数, 如果对于任意给定的正数$\varepsilon$(不论它多么小), 总存在正数$\delta$, 使得当

$$0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta,$$

时, $|f(x,y)-A| < \varepsilon$ 恒成立, 则称当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时, 函数$f(x,y)$以$A$为极限 .

记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)=A$

或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{\rho\to 0} f(x,y)=A$

**例1** 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(3x+y)=5.$

**证** $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$, 则

当 $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$ 时, 有

$$|f(x,y)-A|=|(3x+y)-5|=|3x-3+y-2|$$

$$\le 3|x-1|+|y-2|$$

$$\le 3\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

$$<4\delta=\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(3x+y)=5.$

**2** 二元函数的极限运算法则与一元函数类似.
常按一元函数极限的求法求之.

例1* 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

例2* 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$.

解 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0$,

且 $\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le 1$,

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

例3* 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

解 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}}$$

$$= 0 .$$

例4* 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

当$(x, y)\to(0, 0)$时的极限.

解 考察$(x, y)$沿直线在$y=kx$趋于$(0,0)$, 有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

$\dfrac{k}{1+k^2}$的值随$k$的不同而变化，

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

## 3、确定极限不存在的方法:

(1) 令$P(x, y)$沿直线$y= kx$ 趋于$P_0(x_0, y_0)$, 若极限值与$k$有关, 可断言$f(x, y)$在$(x_0, y_0)$处极限不存在.

(2) 找两种不同的方式, 使 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在,

但不相等, 则$f(x, y)$在$(x_0, y_0)$处极限不存在.

(3) 找一种趋近方式, 使 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在

问题: 若$(x, y)$沿着无数多条平面曲线趋于$(x_0, y_0)$时, 函数$z=f(x, y)$都趋于$A$, 能否断定

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A?$$

不能.

例5* 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限.

解　取 $y=kx$，则

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{kx}{x^2+k^2}=0,\quad k\neq0\,,$$

若取 $y=x^2$，则

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=x^2}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y=x^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$$

故 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=0\,?$$

## 二、二元函数的连续性

**1 定义8.4** 设二元函数 $f(x,y)$满足条件:

(1) 在$(x_0, y_0)$的某邻域内有定义;

(2) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

则称函数$f(x,y)$在点$(x_0, y_0)$处连续, 否则称 $(x_0, y_0)$是函数$f(x,y)$的间断点 .

如果函数$f(x,y)$在平面区域$D$内的每一点都连续, 则称$f(x,y)$在区域$D$内连续.

## 2 连续函数的性质

**(1)** 二元连续函数经过有限次的四则运算和复合运算后仍为二元连续函数.

**(2)** 闭区域上连续函数的性质

### 1° 最大值和最小值定理

有界闭区域$D$上的二元连续函数, 必在$D$上取得最大值和最小值.

### 2° 介值定理

有界闭区域$D$上的二元连续函数，在$D$上必定取得最大值和最小值的任何值.

- 关于二元函数的极限、连续及其性质可相应地推广到$n$元函数上去.

例6* 讨论函数
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$
在(0,0)的连续性.

解　取$y=kx$, 则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

其值随$k$的不同而变化，所以极限不存在.

故函数在(0,0)处不连续.

即(0,0)点是该函数的间断点.

## 三、小结

二元函数极限的概念

(注意趋近方式的任意性)

二元函数连续的概念

闭区域上连续函数的性质

# 作业 $P_{294}$ 习题八 (A)

**1.** 求下列函数函数的定义域.

**(2)** $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$

**(4)** $z=\ln(-x-y)$

**(6)** $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}$ $\quad (R>r)$

**1*** 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\sin xy}{x}$