第八章　多元函数

一、空间解析几何简介

二、多元函数的概念

三、二元函数的极限、连续

四、偏导数与全微分

五、复合函数的微分法与隐函数的微分法

六、二元函数的极值

七、二重积分

§8.1 空间解析几何简介

一、空间直角坐标系

二、空间两点间的距离

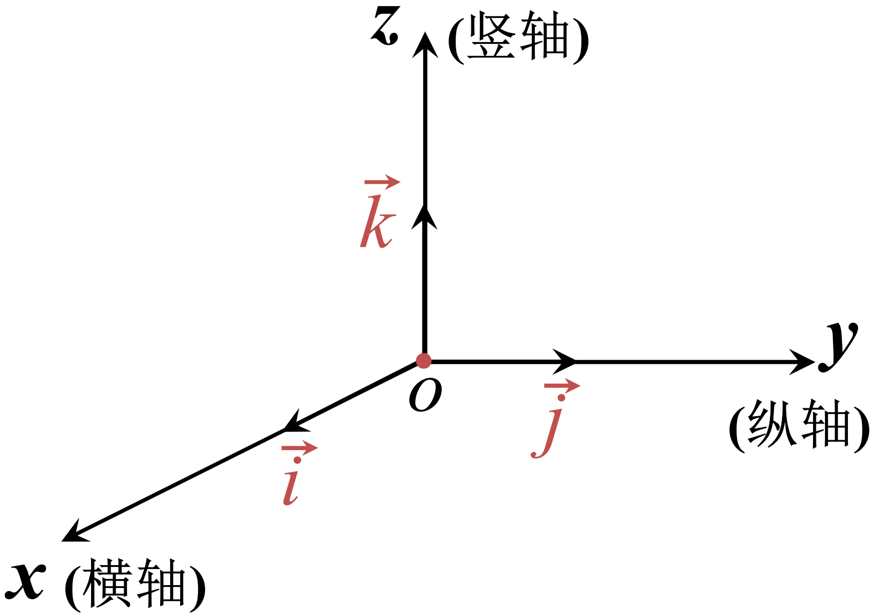
三、曲面与方程

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的基本概念

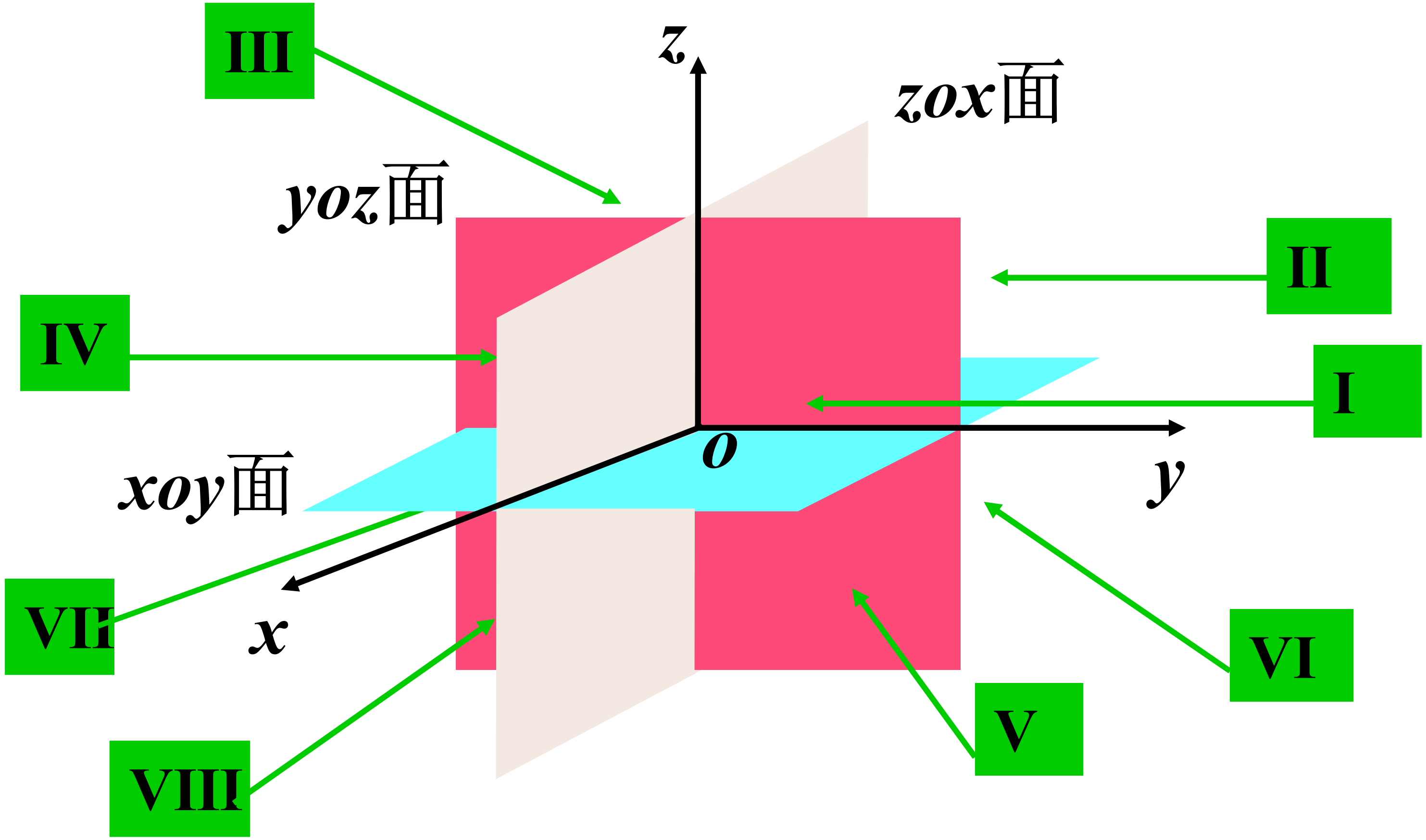
- 坐标原点
- 坐标轴

以右手握住z轴，当右手的4个手指从x轴以90°角转向y轴时，大拇指的指向就是z轴的正向.



空间直角坐标系

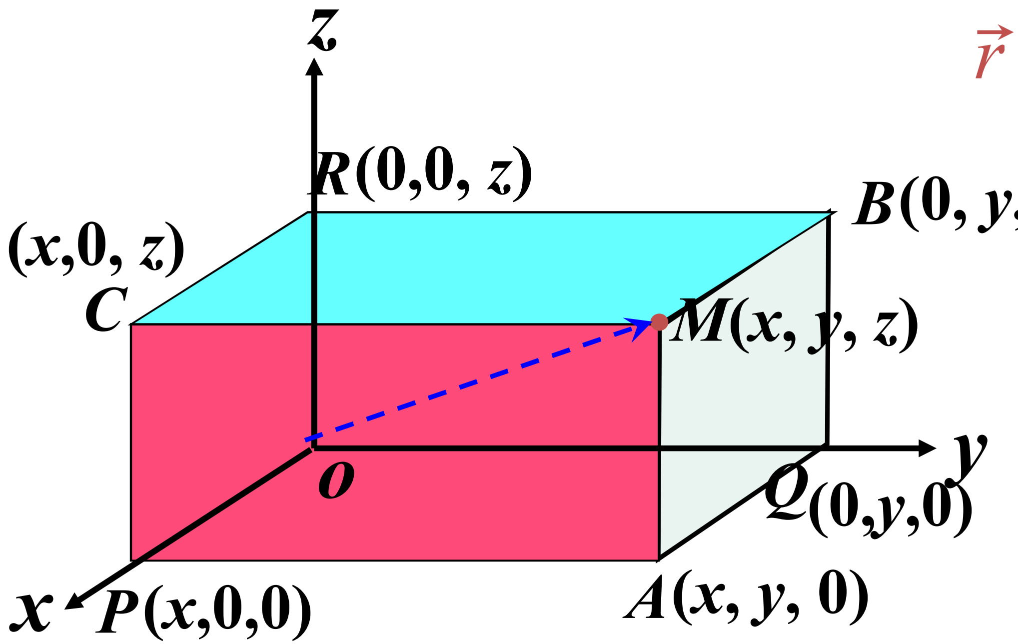
- 坐标面
- 卦限



空间直角坐标系共有八个卦限

空间的点$M \xleftrightarrow{1--1}$有序数组$(x, y, z) \xleftrightarrow{1--1}$向量 $\vec{r}$

$$\vec{r} = (x\,, y\,, z)$$



特殊点的表示：$O(0, 0, 0)$

坐标轴上的点 P, Q, R

坐标面上的点 A, B, C

有序数组(x, y, z)既称为点M的坐标，也称为向量r的坐标.

例1* 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在哪个卦限?

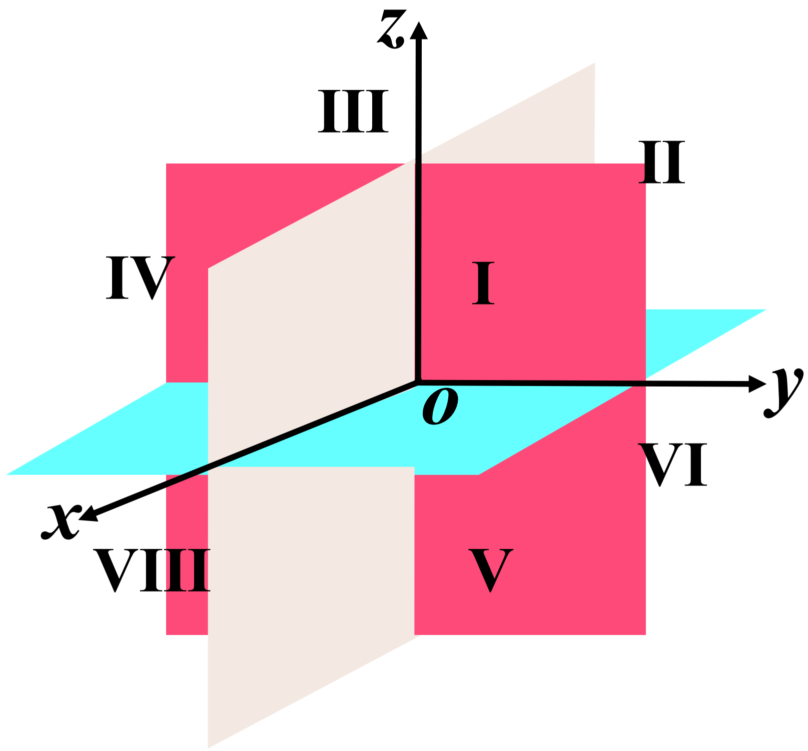
$A(1, -2, 3)$, $B(2, 3, -4)$, $C(2, -3, -4)$, $D(-2, -3, 1)$.

解 $A(1, -2, 3)$ 在IV ,

$B(2, 3, -4)$ 在V,

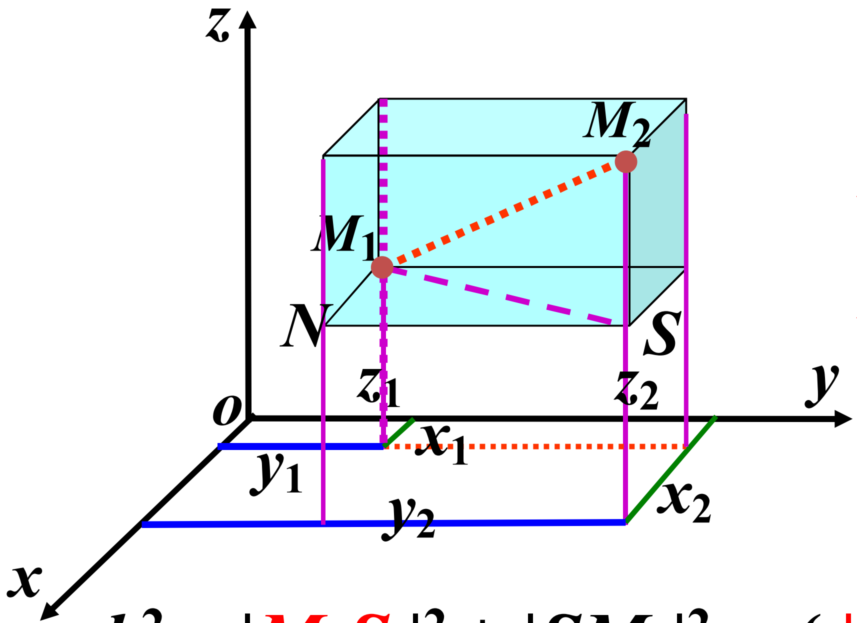
$C(2, -3, -4)$ 在VIII ,

$D(-2, -3, 1)$ 在III .



二、空间两点间的距离

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间两点



$d = |M_1M_2| = ?$

$\Delta M_1S M_2$为直角三角形

ΔM_1NS为直角三角形

$$d^2 = |M_1S|^2 + |SM_2|^2 = (|M_1N|^2 + |NS|^2) + |SM_2|^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

空间两点间距离公式

例2* 证明以$M_1\,(4\,,3,1)$、$M_2\,(7,1,2)$、$M_3\,(5,2,3)$为顶点的三角形是等腰三角形.

解

$$|M_1M_2|^2=(4-7)^2+(3-1)^2+(1-2)^2=14,$$

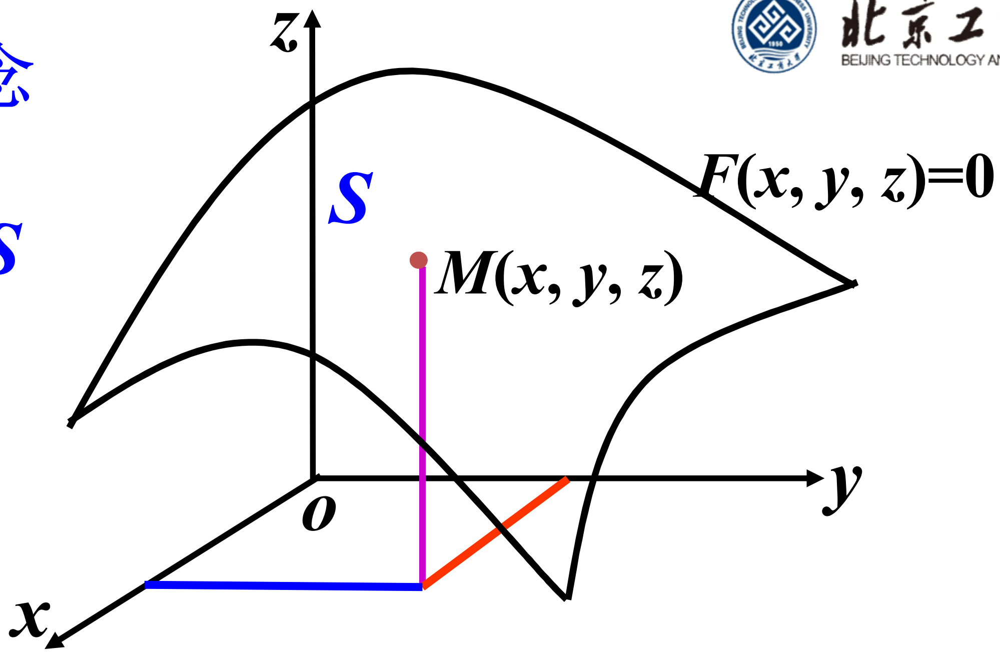
$$|M_1M_3|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

$$|M_2M_3|^2=(7-5)^2+(1-2)^2+(2-3)^2=6,$$

由上知 $\Delta M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

由$|M_1M_3|=|M_2M_3|$知

三、曲面方程的概念



1 定义: 如果曲面 S 与三元方程

$$F(x, y, z)=0$$

有以下关系:

(1) 曲面S上任一点的坐标都满足此方程;

(2)不在曲面 S 上的点的坐标都不满足此方程,

那么$F(x, y, z)=0$称为曲面S的方程, 而 S 称为方程 $F(x, y, z)=0$的图形(曲面).

两个基本问题: (1) 已知曲面, 求方程;

(2) 已知方程, 研究图形.

例1 一动点$M(x, y, z)$与二定点$M_1(1, -1,0)$, $M_2(2,0,-2)$的距离相等, 求此动点的轨迹方程.

解 由 $|MM_1| = |MM_2|$，有 $|MM_1|^2=|MM_2|^2$

$$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=(x-2)^2+y^2+(z+2)^2$$

化简得M点的轨迹方程为:

$$x+y-2z-3=0$$

M_1M_2的垂直平分面

曲面在空间解析几何中被看成是点的几何轨迹.

2、常见空间曲面

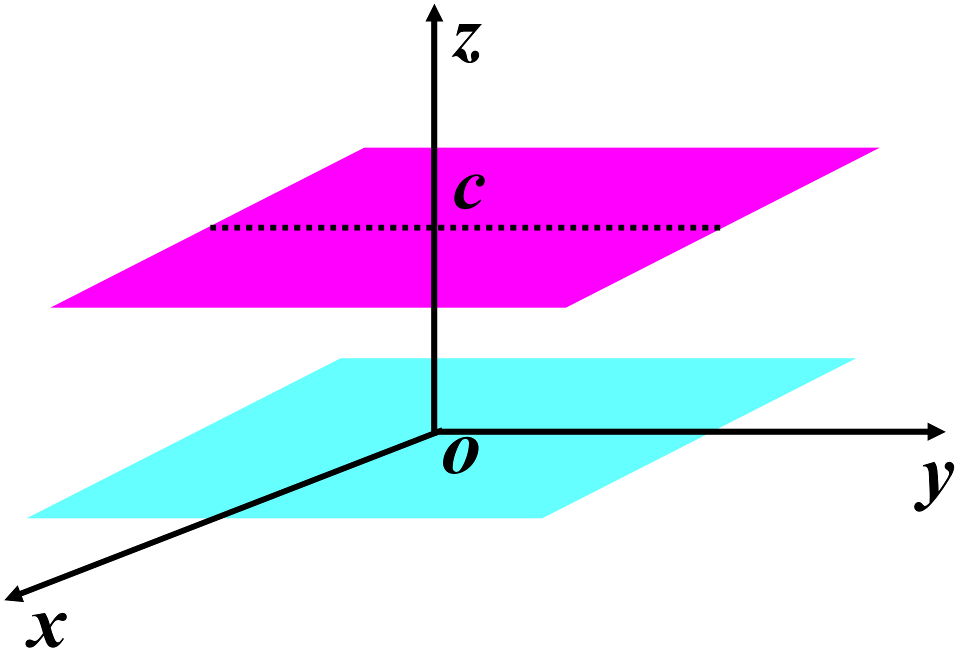
(1) 平面

空间平面方程的一般形式为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中A, B, C, D为常数, 且$A, B, C,$不全为0.

$z=c$ 表示平行于 xoy面的平面.

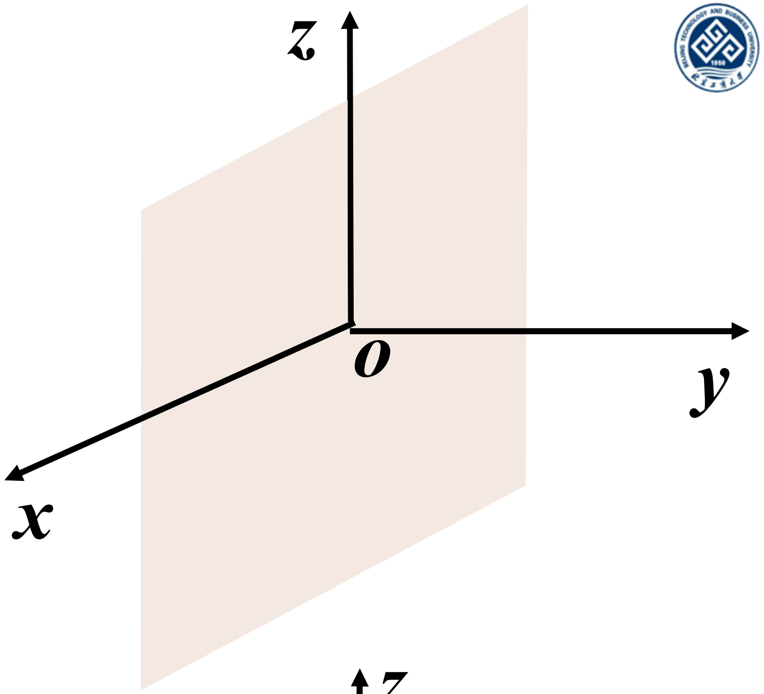


xoy面的方程为:

$$z=0$$

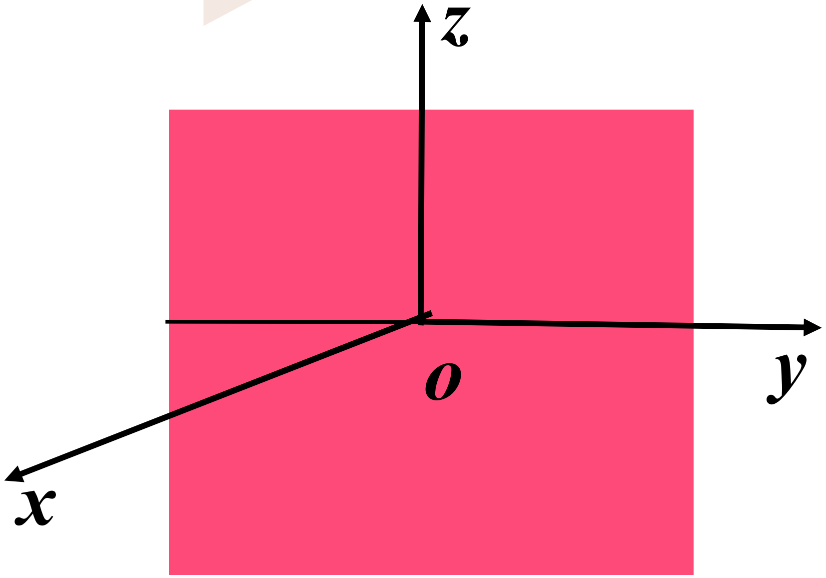
xoz面的方程为:

$y=0$



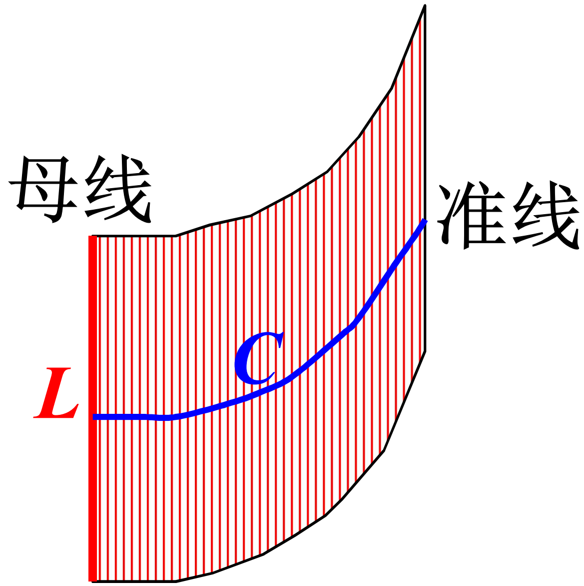
yoz面的方程为:

$x=0$



(2) 柱面

定义　平行定直线L并沿定曲线 C 移动的直线所生成的轨迹称为柱面.



定曲线 C 称为柱面的 准线,

直线 L 称为柱面的母线.

1° 圆柱面 $x^2+y^2=R^2$

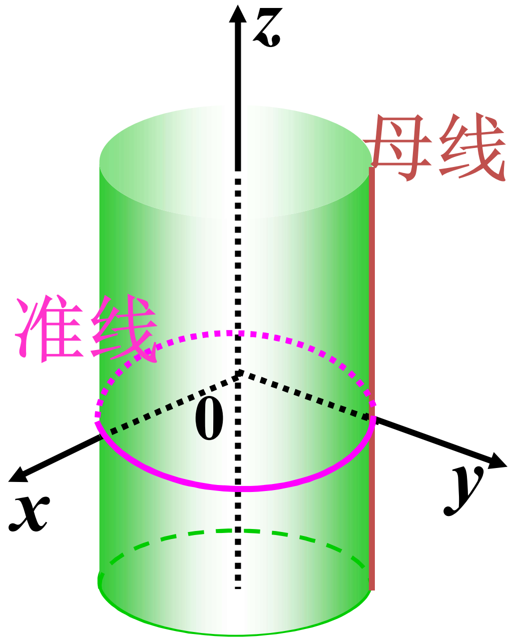
P_{320} 例7

它的母线平行于 z 轴.

- 与 xoy 面的交线为圆 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$

是它的一条准线 .

与平面 $z=c$ 的交线为中心在 z 轴上的圆: $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=c \end{cases}$

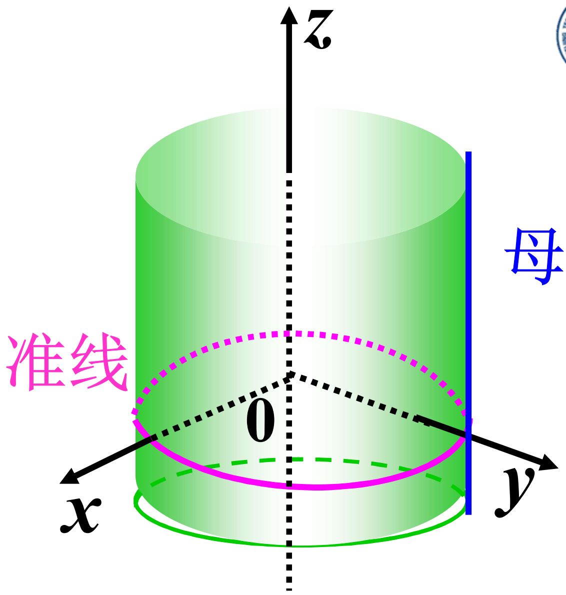


- 与 xoz, yoz 面的交线为两平行直线

与平面 $y=c$、$x=c$ ($|c|<R$)的交线为两条平行直线.

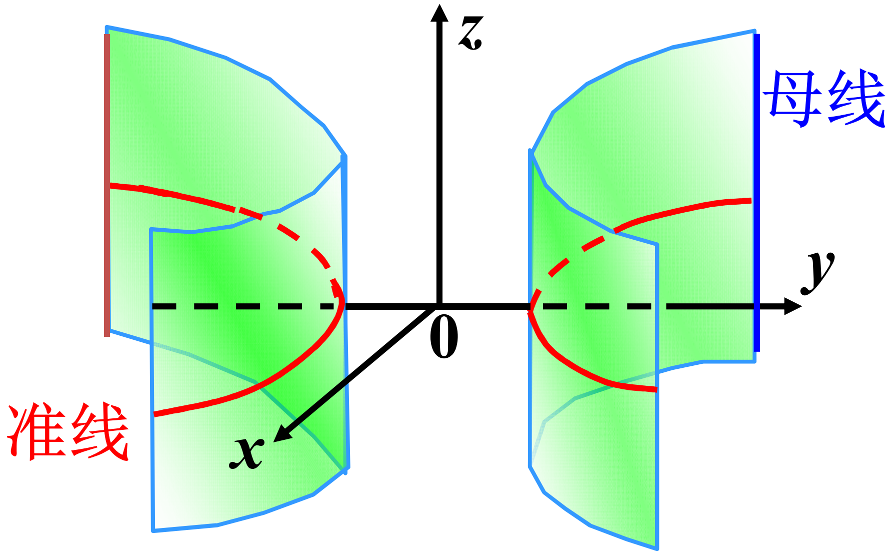
2° 椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



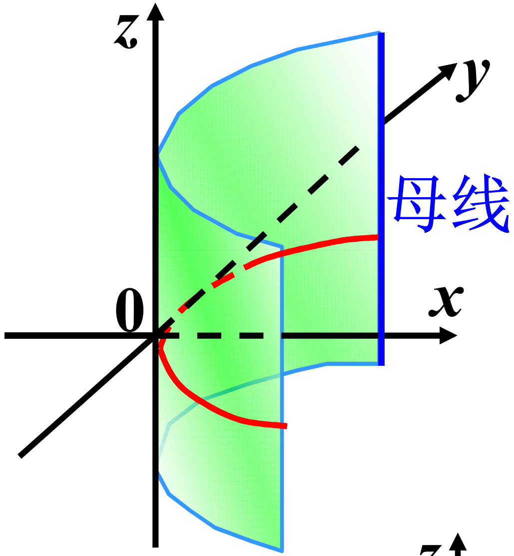
3° 双曲柱面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

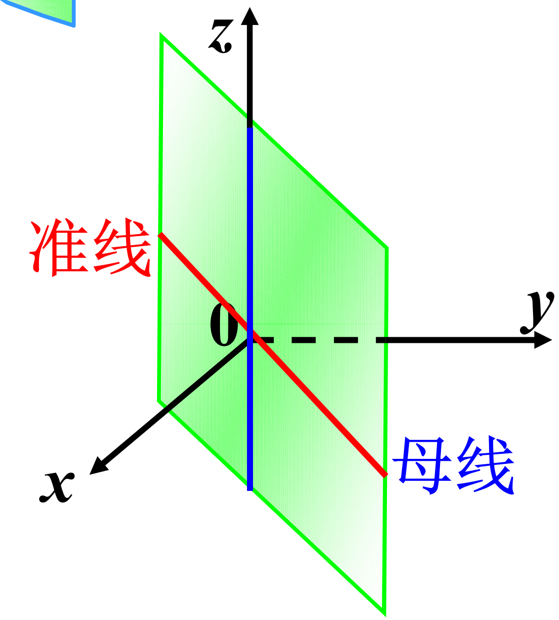


4° 抛物柱面

$y^2=2px \quad (p>0)$

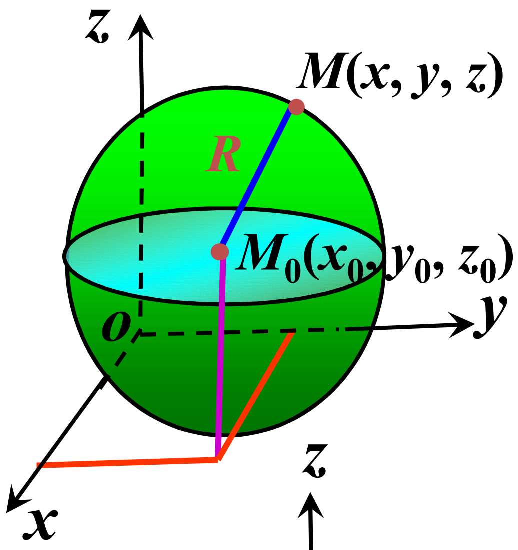


5° 平面 $y=x$



一般地，在空间直角坐标系中，二元方程表示柱面

例4 建立球心为点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$,半径为R的球面方程.



解 设 $M(x, y, z)$是球面上任意一点,

根据题意有 $|MM_0|=R$,

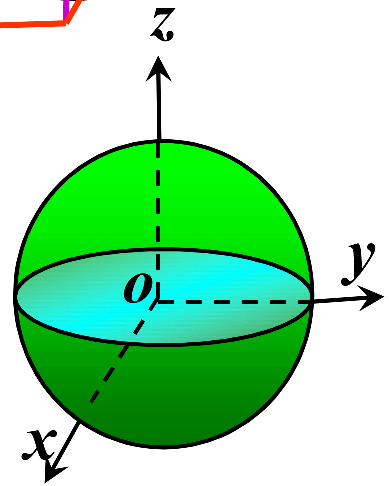
$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

即所求方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

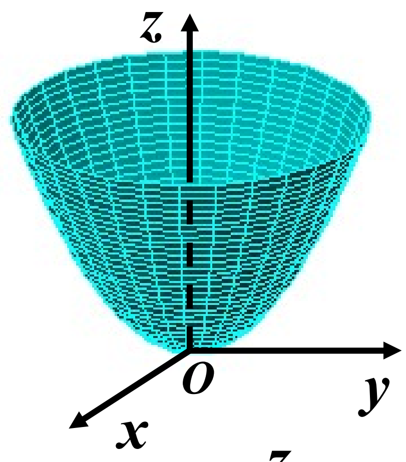
球心在原点的球面方程:

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

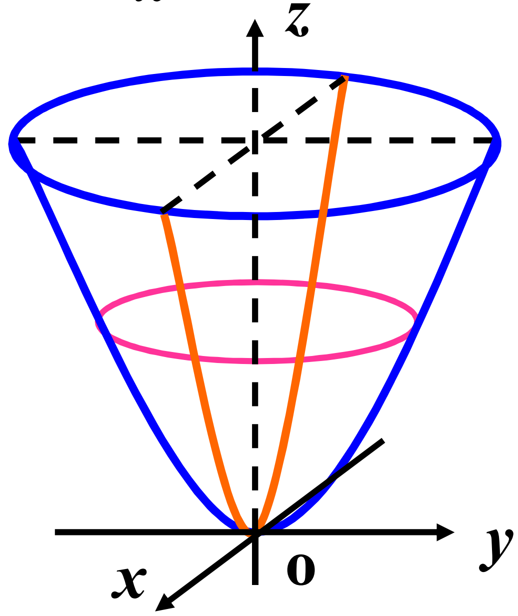


- 一条平面曲线绕其平面上的一条定直线旋转一周所生成的曲面称为旋转曲面.

(3) 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$



- 与xoy面的相截得一点：(0,0,0)
  原点也叫旋转抛物面的顶点.
- 与平面$z=c$ $(c>0)$的交线为中心在z轴上的圆 $\begin{cases} x^2+y^2=c \\ z=c \end{cases}$

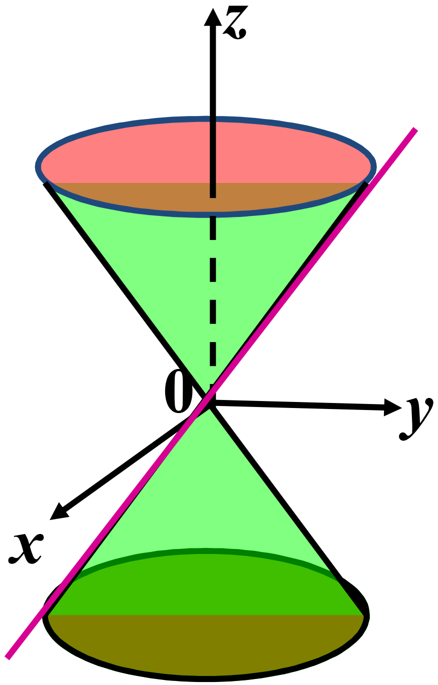


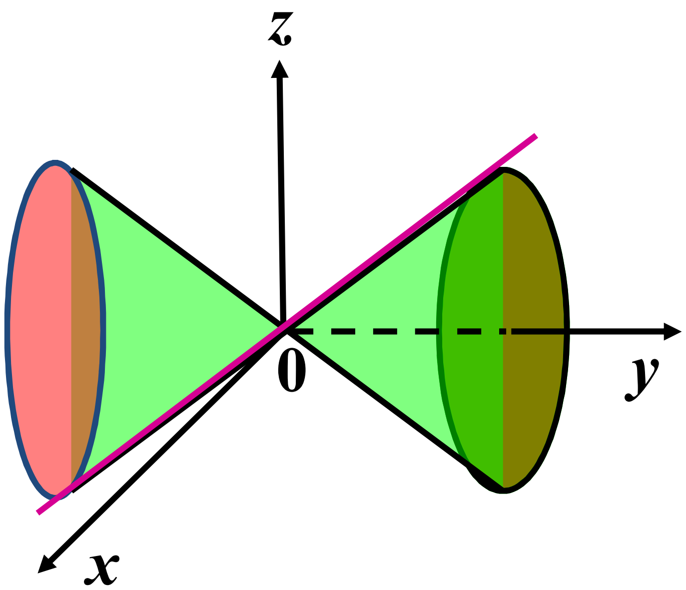
- 与xoz面的交线为抛物线 $\begin{cases} z=x^2 \\ y=0 \end{cases}$
- 与yoz面的交线为抛物线 $\begin{cases} z=y^2 \\ x=0 \end{cases}$

P_{320} 例6

(4) 圆锥面

$z^2 = x^2 + y^2$ $\qquad\qquad$ $y^2 = x^2 + z^2$



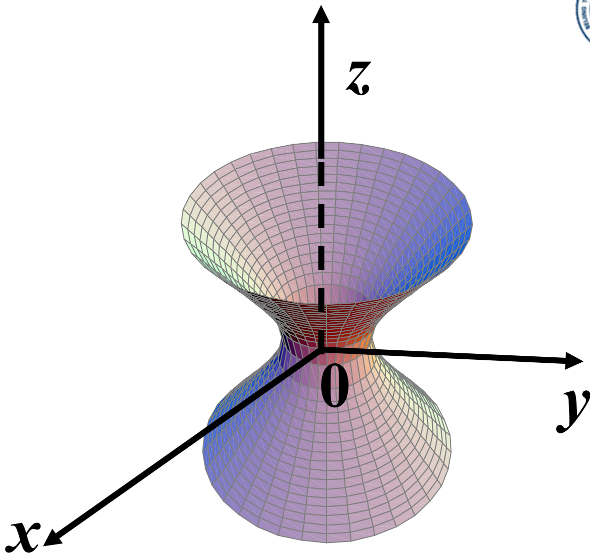


圆锥面: 平面内的直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周所生成的旋转曲面称为圆锥面.

(5) 双曲面

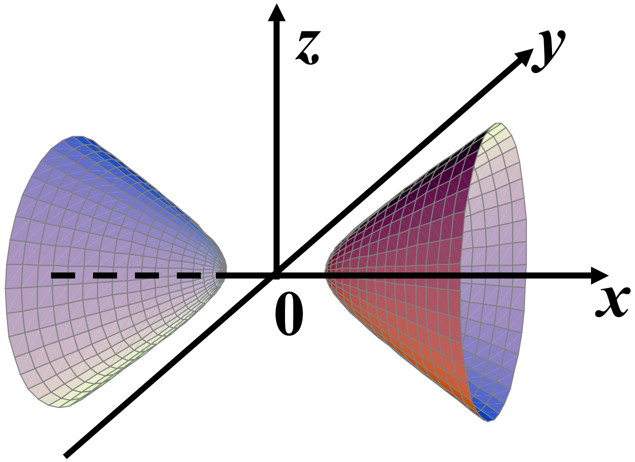
1° 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



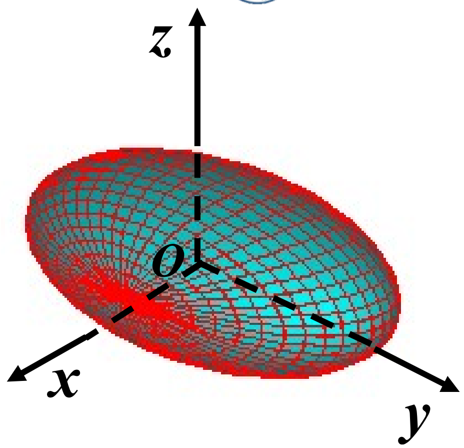
2° 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



(6) 椭球面

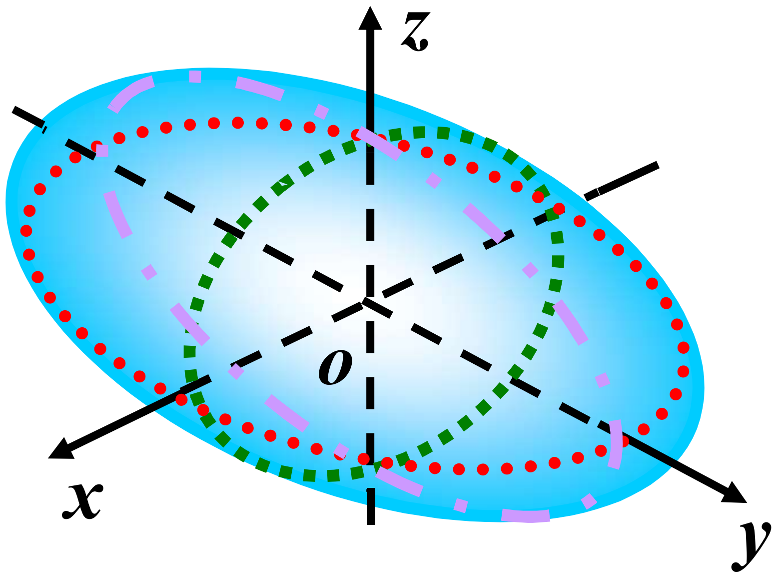
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



- 椭球面与三个坐标面的交线:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

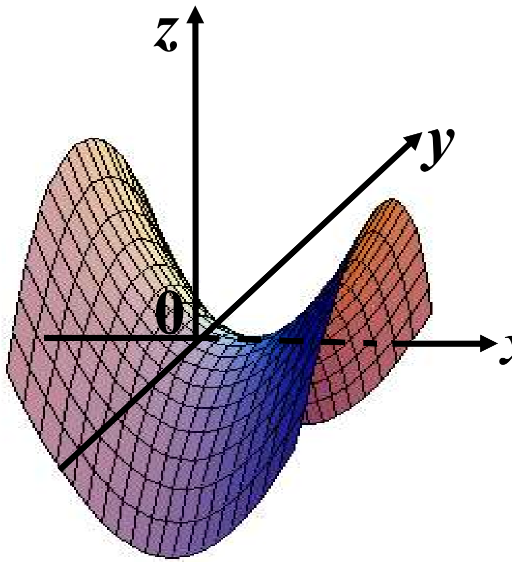


- $a=b=c$时, 方程可写为

球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$

(7) 双曲抛物面(马鞍面)

$$z = y^2 - x^2$$

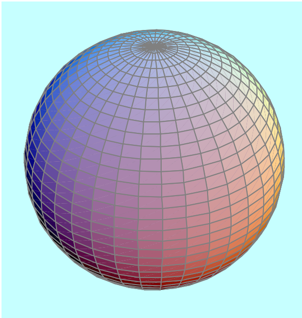


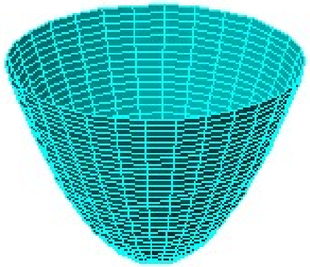
一般地

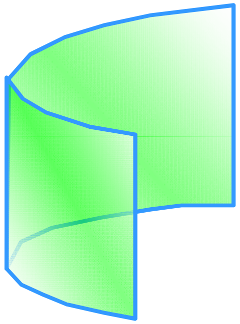
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

1 有向曲面:

决定了侧的曲面称为有向曲面.

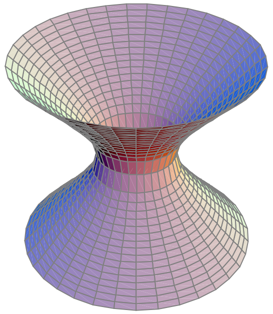




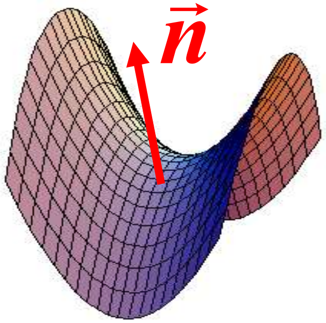


曲面分左侧和右侧

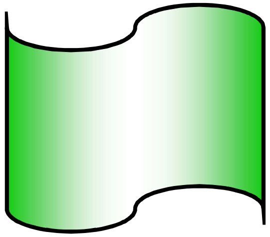
莫比乌斯带



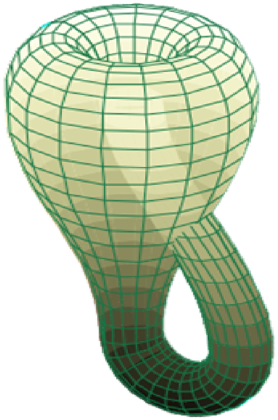
曲面分内侧和外侧



曲面分上侧和下侧



曲面分前侧和后侧



克莱因瓶

单侧曲面

没有“内部”和“外部”之分,是一种无定向性的曲面

2 曲面分类

$$\begin{cases}\text{双侧曲面 --- 有两侧的曲面.}\\ \text{单侧曲面}\end{cases}$$

例3* 指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形?

(1) $x=2$;　　(2) $x^2+y^2=4$;　　(3) $y=x+1$.

解

方程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x=2$	平行于y轴的直线	平行于yoz面的平面
$x^2+y^2=4$	圆心为(0, 0), 半径为2的圆	以z轴为中心轴 的圆柱体
$y=x+1$	斜率为1的直线	平行于z轴的平面

四、小结

空间直角坐标系　轴、面、卦限

(注意它与平面直角坐标系的区别)

空间两点间距离公式

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$