第七章　无穷级数练习题

1 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=3,\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=6$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

2 判定级数 $\frac{3}{5}-\frac{1}{3}+\frac{3}{5^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{3}{5^3}-\frac{1}{3^3}+\cdots$ 的敛散性, 若收敛, 指出是绝对收敛还是条件收敛, 并求其和.

3 求常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$ 的和.

4 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}$ $(a>0)$的收敛性.

5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域.

6 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$ 的收敛域及和函数.

7 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$ 的收敛域及和函数.

8 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

9 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

$$1^\circ \quad \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad x\in(-1,1).$$

$$2^\circ \quad e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$3^\circ \ \ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad x\in(-1,1]$$

$$4^\circ \ \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$5^\circ \ \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$6^\circ \ \arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x\in[-1,1]$$

第七章　无穷级数练习题

练习题1 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n = 3, \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = 6$，求 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

解

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$$

$$= 2\times 6 + 3 = 15\,.$$

练习题2 判定级数 $\frac{3}{5}-\frac{1}{3}+\frac{3}{5^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{3}{5^3}-\frac{1}{3^3}+\cdots$的敛散性，若收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛，并求其和.

解

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\frac{3}{5}+\frac{1}{3}+\frac{3}{5^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{3}{5^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{3}{5^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$$

$$=(\frac{3}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\cdots+\frac{3}{5^n}+\cdots)$$

$$+(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots)$$

$$=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{5}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{5}{4},$$

故原级数绝对收敛.

练习题2 判定级数 $\frac{3}{5}-\frac{1}{3}+\frac{3}{5^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{3}{5^3}-\frac{1}{3^3}+\cdots$ 的敛散性，若收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛，并求其和.

解

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{3}{5}-\frac{1}{3}+\frac{3}{5^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{3}{5^3}-\frac{1}{3^3}+\cdots++\frac{3}{5^n}-\frac{1}{3^n}+\cdots$$

$$=(\frac{3}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\cdots+\frac{3}{5^n}+\cdots)$$

$$-(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots)$$

$$=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{5}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}.$$

所以原级数收敛于 $\frac{1}{4}$，且绝对收敛.

练习题3 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$ 的和.

解

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+e$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+e$$

$$=3e.$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\Rightarrow\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$$

练习题4 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}$ $(a>0)$的收敛性.

解

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\ln(n+2)}}{a+\frac{1}{n}}=\frac{1}{a}$$

所以, 当$a>1$ 时, 级数收敛,

当$0<a<1$时, 级数发散,

当$a=1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(1+\frac{1}{n})^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{(1+\frac{1}{n})^n}=+\infty,$$

所以, 原级数发散.

练习题4 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}$ $(a>0)$的收敛性.

解2 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+3)}{(a+\frac{1}{n+1})^{n+1}}\cdot\frac{(a+\frac{1}{n})^n}{\ln(n+2)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+3)}{\ln(n+2)}\cdot\frac{a^n\cdot(1+\frac{1}{na})^n}{a^{n+1}\cdot[1+\frac{1}{(n+1)a}]^{n+1}}=1\cdot\frac{e^{\frac{1}{a}}}{a\cdot e^{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{a},$$

所以, 当$a>1$ 时, 级数收敛,

当$0<a<1$时, 级数发散,

当$a=1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(1+\frac{1}{n})^n}$,

由 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{(1+\frac{1}{n})^n}=+\infty$, 知原级数发散 .

练习题5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域.

解 $l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}=\frac{1}{3}$,

$R=3$,

当 $|x-3|<3$, 即 $0<x<6$ 时, 级数绝对收敛,

当 $x=0$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛,

当 $x=6$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}(x-3)^n$ 的收敛域为: $[0, 6)$.

练习题6 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$ 的收敛域及和函数.

解 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[(x-1)^{n+1}]'$$

$$=[\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{n+1}]'$$

$$=[\frac{x-1}{1-(x-1)}]'=(\frac{x-1}{2-x})'$$

$$=\frac{1}{(2-x)^2}.$$

$-1<x-1<1$

收敛域为 $0<x<2$.

练习题7 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$ 的收敛域及和函数.

解 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(x^2)^n}{n}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

由 $-1<x^2\le 1$，得收敛域 $x\in[-1,\ 1]$.

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\quad x\in(-1,1]$$

练习题7 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$ 的收敛域及和函数.

解2 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$ 则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}=\frac{-x}{1+x^2}\quad(-1<x<1)$$

上式两边从0到x积分得

$$S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{-t}{1+t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}(1+t^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

当 $x=\pm 1$ 时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ 收敛，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),\ -1\le x\le 1.$$

练习题8 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

解

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot 1}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\qquad x\in(-1,1).$$

对上式从0到x逐项积分得

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

因 $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$, 于是

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

练习题8 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

解 当 $x=-1$ 时, $\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ 级数收敛,

当 $x=1$时, $\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{2n+1}$ 级数收敛,

因函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 在$x=1$处不存在,

所以

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1,1).$$

$x\in[-1,1]$?

练习题9 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

解

$$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+x-1}-\frac{1}{4+x-1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{8}\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{4}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}(x-1)^n \quad x\in(-1,3).$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad x\in(-1,1)$$