第九章 微分方程与差分方程简介

一、微分方程的一般概念

二、一阶微分方程

三、几种二阶微分方程

四、二阶常系数线性微分方程

五、差分方程的一般概念

六、一阶和二阶常系数线性差分方程

§9.1 微分方程的一般概念

一、问题的提出

例1 求过点(1, 3), 且切线斜率为$2x$的曲线方程.

解 设所求曲线方程为 $y=y(x)$, 则

$$y' = 2x,$$

于是 $$y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$$

因曲线过点(1, 3),

即 $3 = 1^2 + C$

得 $C = 2$,

故所求曲线方程为 $y = x^2 + 2$.

例1* 设某产品的边际成本为$C'(x)=x+24$(元/单位), 固定成本为8500元, 求该产品的总成本函数$C(x)$.

解 因为$C'(x)=x+24$ (元/单位), 所以

$$C(x)=\int(x+24)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2+24x+C,$$

又固定成本 $C(0)=8500$元,

由上知 $C=8500$,

因此总成本函数

$$C(x)=\frac{1}{2}x^2+24x+8500(\text{元}).$$

二、微分方程的概念

1. 定义1 含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程.

例

$$y' = 2xy,$$

$$y''' + 2xy'' - y' = e^x,$$

$$y^{(7)} + 1 = 0,$$

$$(t^2 + x)\mathrm{d}t + x\mathrm{d}x = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x + y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

2. 定义2 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

3. 微分方程分类:

(1) 常微分方程, 偏微分方程.

$$y' = 2xy,$$ 未知函数是一元函数的方程为常微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x + y,$$ 未知函数是多元函数的方程为偏微分方程

(2) 一阶微分方程, 高阶(n阶) 微分方程

$F(x, y, y')=0,$ $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0,$

$y'=f(x, y),$ $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}),$

已解出最高阶导数的微分方程

今后讨论

注: n阶微分方程$y^{(n)}$必须出现

(3) 线性与非线性微分方程.

$y' + P(x)y = Q(x),$ $y''' + 2xy'' - y' = e^x,$

$x(y')^2 - 2y y' + x = 0.$

4. 定义3: 代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解.

例如 $y'=y$, 解 $y=Ce^x$,

解的分类:

(1)通解: 微分方程的解中所含任意常数的个数与微分方程的阶数相同的解.

例如 $y'=y$, $y=Ce^x$------ 通解,

$y''+y=0$, $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ ------ 通解,

(2)特解: 确定了通解中任意常数以后的解.

用来确定任意常数的条件称为初始条件.

注: 通解和特解是一般和特殊的关系.

解的图象 微分方程的积分曲线.

通解的图象 积分曲线族.

5. 初值问题(柯西问题)

求微分方程满足初始条件的解的问题.

一阶微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$$

几何意义是过定点的积分曲线;

二阶微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y|_{x=x_0}=y_0, \quad y'|_{x=x_0}=y'_0, \end{cases}$$

几何意义是过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

例2* 验证函数$y=3e^{2x}$是微分方程$y''-4y=0$的特解.

解 因 $y'=6e^{2x}$,

$$y''=12e^{2x},$$

于是

$$y''-4y=12e^{2x}-4\cdot 3^{2x}$$

$$=0,$$

又$y=3e^{2x}$中没含任意常数

故$y=3e^{2x}$故为微分方程$y''-4y=0$的特解.

例3* 下列函数中为微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 特解的是

(A) $y=e^x-2e^{2x}$ (B) $y=e^x+2e^{2x}$

(C) $y=e^x+e^{3x}$ (D) $y=Ce^{3x}-2e^{2x}$ 【 A 】

解 (A) 因 $y'=e^x-4e^{2x}$,

$y''=e^x-8e^{2x}$,

$$
\begin{aligned}
& y''-4y'+3y \\
&= e^x-8e^{2x}-4(e^x-4e^{2x})+3(e^x-2e^{2x}) \\
&= 2e^{2x},
\end{aligned}
$$

因此，选 (A).

例4* 设C_1, C_2为任意常数, 微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的通解是 【 B 】

(A) $y=e^{x}+e^{-2x}$ (B) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$

(C) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ (D) $y=C_1e^{x}+e^{-2x}$

解 由(A) 中解没有任意常数, (D) 中解只含有一个任意常数, 知 (A), (D)中解都不是通解 .

(B) 因 $y'=C_1e^{x}-2C_2e^{-2x}$,

$y''=C_1e^{x}+4C_2e^{-2x}$,

所以

$$y''+y'-2y=C_1e^{x}+4C_2e^{-2x}+(C_1e^{x}-2C_2e^{-2x})-2(C_1e^{x}+C_2e^{-2x})=0,$$

且 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$ 中含有两个任意常数,

因此 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$ 是 $y''+y'-2y=0$ 的通解.

故选 (B).

例5* 验证函数$y=C_1e^x+C_2e^{3x}$ (C_1, C_2为任意常数)是微分方程 $y''-4y'+3y=0$的通解. 且求满足初始条件$y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$ 的特解.

解 因 $y'=C_1e^x+3C_2e^{3x}$, $y''=C_1e^x+9C_2e^{3x}$, 所以

$$y''-4y'+3y=C_1e^x+9C_2e^{3x}-4(C_1e^x+3C_2e^{3x})+3(C_1e^x+C_2e^{3x})=0,$$

而 $y=C_1e^x+3C_2e^{3x}$ 中含有两个任意常数,

所以$y=C_1e^x+C_2e^{3x}$ 是 $y''-4y'+3y=0$ 的通解.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{由 } y|_{x=0}=0 \text{ 得} & C_1+C_2=0\\ \text{由 } y'|_{x=0}=1 \text{ 得} & C_1+3C_2=1\end{array}\right\}\Rightarrow C_2=\frac{1}{2},\ C_1=-\frac{1}{2}.$$

于是满足初始条件$y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$ 的特解为:

$$y=-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{3x}.$$

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

例6* 求含有两个任意常数C_1, C_2 的曲线族

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

满足的微分方程.

解 将 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ 求导得

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x},$$

$$y'' = C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{2x},$$

将y、y'、y'' 联立消去 C_1, C_2 得所求的微分方程为

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

求曲线族满足的微分方程, 具体方法是求导数,并消去任意常数.

若曲线族中含有两个任意常数, 则需求到二阶导数.

三、小结

基本概念：微分方程;

微分方程的阶;

微分方程的解;

通解;

特解;　初始条件;

初值问题;积分曲线 .

习题九 (B)

1. 关于微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=e^x$ 的下列结论:

(1) 该方程是齐次微分方程

(2) 该方程是线性微分方程 √

(3) 该方程是常系数微分方程 √

(4) 该方程是二阶微分方程 √

其中正确的是 【 D 】

(A) (1), (2), (3)　　(B) (1), (2), (4)

(C) (1), (3), (4)　　(D) (2), (3), (4)

2. 微分方程 $x\ln x\cdot y''=y'$ 的通解是 【 **B** 】

(A) $y=C_1x\ln x+C_2$ (B) $y=C_1x(\ln x-1)+C_2$

(C) $y=x\ln x$ (D) $y=C_1x(\ln x-1)+2$

解 (A) $y'=C_1\ln x+C_1$, $y''=C_1\cdot\dfrac{1}{x}$,

不满足方程,

(B) $y'=C_1(\ln x-1)+C_1=C_1\ln x$,

$y''=C_1\cdot\dfrac{1}{x}$,

满足方程 $x\ln x\cdot y''=y'$

又 $y=C_1x(\ln x-1)+C_2$ 中含有两个任意常数,

所以, $y=C_1x(\ln x-1)+C_2$ 是 $x\ln x\cdot y''=y'$ 的通解,

因此选(B).

3. 下列方程中有一个是一阶微分方程, 它是【 C 】

(A) $(y-xy')^2=x^2yy''$

(B) $(y'')^2+5(y')^4-y^5+x^7=0$

(C) $(x^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$

(D) $xy''+y'+y=0$

4. 下列等式中有一个是微分方程, 它是 【 D 】

(A) $u'v+uv'=(uv)'$

(B) $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\left(\dfrac{u}{v}\right)'$ $\quad v\neq 0$

(C) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+e^x=\dfrac{\mathrm{d}(y+e^x)}{\mathrm{d}x}$

(D) $y''+3y'+4y=0$

5. 微分方程 $y \cdot y'' - 2(y')^2 = 0$ 的通解是 【 A 】

(A) $y = \dfrac{1}{C_1 - C_2 x}$　(B) $y = \dfrac{1}{C_1 - C_2 x^2}$

(C) $y = \dfrac{1}{C - x}$　(D) $y = \dfrac{1}{1 - Cx}$

解 (A) $y' = \dfrac{C_2}{(C_1 - C_2 x)^2}$,　$y'' = \dfrac{2(C_2)^2}{(C_1 - C_2 x)^3}$,

$$y \cdot y'' - 2(y')^2 = \frac{1}{C_1 - C_2 x} \cdot \frac{2(C_2)^2}{(C_1 - C_2 x)^3} - 2\left[\frac{C_2}{(C_1 - C_2 x)^2}\right]^2$$

$$= 0,$$

又 $y = \dfrac{1}{C_1 - C_2 x}$ 中含有两个任意常数,

因此,是方程的通解，故选 (A).

§9.2　一阶微分方程

一、可分离变量的一阶微分方程

二、齐次微分方程

三、一阶线性微分方程

一、一阶微分方程

一般形式: $F(x, y, y')=0$

已解出 y' 的形式: $y'=f(x, y)$

对称形式: $P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y=0$

方程 $P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y=0$ 中变量x与y对称,

1°当$Q(x, y)\neq 0$时, 可看作x为自变量, y为因变量的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

2°当$P(x, y)\neq 0$时, 可看作y为自变量, x为因变量的方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

二、可分离变量的一阶微分方程

1 定义: 形如

$$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$$

特点 等式的每一端仅是一个变量的函数与这个变量的微分之积

的一阶微分方程, 称为可分离变量的微分方程.

例如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x^2y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}}\mathrm{d}y = 2x^2\mathrm{d}x,$

2 解法: 两边同时积分, 设函数$g(y)$和$f(x)$是连续的,

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$ 分离变量法

设函数$G(y)$和$F(x)$ 分别是 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的原函数, 则

$G(y)=F(x)+C$ 为微分方程的通解.

两端积分可得通解.

例2 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$ 的通解 .

解 分离变量 $y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$,

两端积分 $\int y\mathrm{d}y=-\int x\mathrm{d}x,$

$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

隐式通解

因此微分方程 的通解为: $x^2+y^2=2C_1=C.$

C为任意常数 .

微分方程的初等解法: 积分法

求解微分方程 $\Longrightarrow$ 求积分

例1* 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解　分离变量　$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x,$

两端积分　$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x,$

得　$\ln|y|=x^2+C_1$

$$|y|=e^{x^2+C_1}$$

$$y=\pm e^{C_1}e^{x^2}$$

故所求通解为:　$y=Ce^{x^2}$, C为任意常数 .

例1 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}$ 的通解.

解 分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$,

两端积分 $\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$,

得 $\ln y=-\ln x+\ln C$

$xy=C$ 隐式通解

故所求通解为: $xy=C$, C为任意常数 .

- 微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件$y(1)=2$ 的特解为____$xy=2$____.

2005, 2008数1, 3

例2* 求方程 $(xy^2+x)\mathrm{d}x+(y-x^2y)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 原方程可变为 $x(y^2+1)\mathrm{d}x+y(1-x^2)\,\mathrm{d}y=0$

分离变量 $$\frac{y}{y^2+1}\mathrm{d}y=\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x,$$

两端积分得 $$\int\frac{y}{y^2+1}\mathrm{d}y=\int\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

$$\ln(y^2+1)=\ln(x^2-1)+\ln C$$

故所求通解为:

$y^2+1=C(x^2-1)$， C为任意常数 .

P_{334} 习题九(A)–2: (4)

例3* 求微分方程 $\cos x\sin y\,\mathrm{d}y=\cos y\sin x\,\mathrm{d}x$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$ 的特解.

解 分离变量 $$\frac{\sin y}{\cos y}\mathrm{d}y=\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x,$$

两端积分得

$$-\ln\cos y=-\ln\cos x-\ln C$$

故方程通解为: $\cos y=C\cos x$

由 $\cos\dfrac{\pi}{4}=C\cos 0$ 得 $C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

故所求特解为: $\sqrt{2}\cos y=\cos x.$

三、齐次微分方程

1 定义 形如 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$ 的微分方程称为齐次微分方程.

2 解法 作变量代换 $v=\frac{y}{x}$，即 $y=xv$, $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{x}$

代入原式得 $v+x\frac{dv}{dx}=f(v)$,

即 $$\frac{dv}{dx}=\frac{f(v)-v}{x}.$$ 可分离变量的方程

当$f(v)-v\neq 0$时, 得

$$\int\frac{dv}{f(v)-v}=\int\frac{dx}{x}=\ln x-\ln C=\ln\frac{x}{C}$$

因此 $$x=Ce^{\int\frac{dv}{f(v)-v}},$$

将 $v=\frac{y}{x}$ 代换还原, 得原方程的通解.

例4 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解.

解 右边分子分母同时除以x^2的得： $\frac{dy}{dx}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}-1}$,

令 $v=\frac{y}{x}$, 则 $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$,

代入原式化简得 $x\frac{dv}{dx}=\frac{v}{v-1}$,

分离变量得 $\frac{(v-1)dv}{v}=\frac{dx}{x}$,

两边积分得 $v-\ln v=\ln x-\ln C$

于是 $\ln x+\ln v=v+\ln C$ 即 $xv=Ce^v$,

回代得微分方程的通解为

$$y=Ce^{\frac{y}{x}}, \quad C\text{为任意常数}.$$

例4* 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$ 的初始条件 $y|_{x=1}=\dfrac{\pi}{4}$ 的特解.

P_{335} 习题九 (A)–3: (7)

解 令 $v=\dfrac{y}{x}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=v+x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$,

代入原式分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\tan v}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$,

两边积分得 $\ln\sin v=\ln x+\ln C$

$$\sin v=Cx$$

微分方程的通解为: $\sin\dfrac{y}{x}=Cx,\quad C\in R$.

将初始条件 $y|_{x=1}=\dfrac{\pi}{4}$ 代入上式得: $C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

故所求特解为: $\sin\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sqrt{2}\,x}{2}$.

例5* 求方程$(xy-y^2)\mathrm{d}x-(x^2-2xy)\,\mathrm{d}y=0$的通解.

解 原方程可以写成 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=\frac{\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2}{1-2\cdot\frac{y}{x}},$$

令 $v=\frac{y}{x}$, 代入上式化简得

$$(\frac{1}{v^2}-\frac{2}{v})\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

P_{307} 题

两边积分得 $-\frac{1}{v}-2\ln v=\ln x-\ln C$

$\Rightarrow\quad \ln x+2\ln v=\ln C-\frac{1}{v}$ 即 $xv^2=Ce^{-\frac{1}{v}}$,

回代得微分方程的通解为

$y^2=Cxe^{-\frac{x}{y}}$, C为任意常数.

例5 求微分方程 $(xe^{\frac{y}{x}}+y)\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=1}=0$ 下的特解.

解 方程两边同时除以 x 得: $(e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x})\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$

令 $v=\frac{y}{x}$, 则 $\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}x$

代入上式化简得 $\frac{\mathrm{d}v}{e^v}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分得 $-e^{-v}=\ln x + C \Rightarrow v = -\ln(-\ln x - C)$

微分方程的通解为: $y = -x\ln(-\ln x - C)$

由 $y|_{x=1}=0$ 知, $0=-\ln(-C)$,

得 $C=-1$,

故所求特解为: $y=-x\ln(1-\ln x)$.

例6* 求方程 $(1+e^{-\frac{x}{y}})y\mathrm{d}x=(x-y)\mathrm{d}y$的通解.

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

解 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{1+e^{-\frac{x}{y}}}\left(\frac{x}{y}-1\right)$$

将x为看作y的函数, 求解较方便

齐次方程

令 $v=\frac{x}{y}$, 则方程变为 $$v+y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{1+e^{-v}}(v-1)$$

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v-1}{1+e^{-v}}-v=-\frac{1+ve^{-v}}{1+e^{-v}}=-\frac{v+e^{v}}{1+e^{v}}$$

分离变量 $$\frac{1+e^{v}}{v+e^{v}}\mathrm{d}v=-\frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

两边积分得 $\ln(v+e^{v})=-\ln y+\ln C$

即 $y(v+e^{v})=C$,

回代得通解: $x+ye^{\frac{x}{y}}=C$, C为任意常数.

求解微分方程时,通常不计较哪个是自变量哪个是因变量，视方便而定,关键在于找到两个变量间的关系

例6* 求方程 $(1+e^{-\frac{x}{y}})y\mathrm{d}x=(x-y)\mathrm{d}y$ 的通解.

解
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{1+e^{-\frac{x}{y}}}\left(\frac{x}{y}-1\right)$$

将x为看作y的函数，求解较方便

齐次方程

令 $v=\dfrac{x}{y}$，则方程变为

$$v+y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{1+e^{-v}}(v-1)$$

分离变量
$$\frac{1+e^{v}}{v+e^{v}}\mathrm{d}v=-\frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

两边积分得 $\ln(v+e^{v})=-\ln y+\ln C$

即 $y(v+e^{v})=C$，

回代得通解：$x+ye^{\frac{x}{y}}=C$，C为任意常数.

求解微分方程时，通常不计较哪个是自变量哪个是因变量，视方便而定，关键在于找到两个变量间的关系

练习题1 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2}(\frac{y}{x})^3$ 满足初始条件初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

2007数 3

解 令 $v=\frac{y}{x}$, 则 $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$,

代入原方程化简得 $\frac{dv}{v^3}=-\frac{dx}{2x}$

两边积分得 $-\frac{1}{2v^2}=-\frac{\ln x}{2}-\frac{\ln C}{2}$

微分方程的通解为: $\frac{x^2}{y^2}=\ln x+\ln C,\quad C\in R$.

将 x=1, y=1代入上式得 $C=e$,

故所求特解为: $x^2=y^2(\ln x+1)$.