第七章　无穷级数

习题课

一、主要内容

二、典型例题

一、主要内容

(一) 概念

1° (常数项)无穷级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$ 无穷级数

2° 正项级数 — 每项都大于或等于0的级数.

3° 交错级数 — 正、负项相间的级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{ 或 } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \quad (\text{其中} u_n>0)$$

4° 任意项级数 — 正项和负项任意出现的级数.

5° 幂级数 — $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

6° 泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

7° 级数的收敛与发散

(1) 当$n\to\infty$时，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{S_n\}$的极限存在，即$\lim_{n\to\infty}S_n=S$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，记为$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

如果$\{S_n\}$没有极限，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

(2) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为绝对收敛.

若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为条件收敛.

(3) 阿贝尔(Abel)定理

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$x=x_0(x_0\neq 0)$处收敛, 则它在满足不等式$|x|<|x_0|$的一切x处绝对收敛;

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=x_0$处发散, 则它在满足不等式$|x|>|x_0|$的一切$x$处发散.

(二) 数项级数敛散性的判别法

1° 用定义: 部分和数列$S_n \to S$, 级数收敛.

2° 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则级数发散.

3° 按基本性质.

性质1: 级数的每一项同乘一个不为零的常数, 敛散性不变.

性质2: 收敛级数可以逐项相加与逐项相减.

性质3: 在级数前面加上或减去有限项级数的敛散性不变.

性质4: 收敛级数加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和.

4° 正项级数收敛$\Leftrightarrow$它的部分和数列$\{S_n\}$有界.

5° 比较判别法 如果两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足关系式 $u_n \le c\, v_n$ ($n \ge k$, $n, k \in N^+$, c为大于0的常数), 则

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

推论: (比较判别法的极限形式)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时, 两级数有相同的敛散性;

(2) 当 $l=0$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l=+\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

6° 比值判别法 [达朗贝尔(D′Alembert)判别法]

如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ ，则

(1) 当 $l<1$ 时，级数收敛；

(2) 当 $l>1$ 时，级数发散；

(3) 当 $l=1$ 时，级数敛散性不能确定；

7° 根式判别法 [柯西(Cauchy)判别法]

如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ ，则

(1) 当 $\rho<1$ 时，级数收敛；

(2) 当 $\rho>1$ 时，级数发散；

(3) 当 $\rho=1$ 时，级数敛散性不能确定.

8° 莱布尼茨定理: 如果交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 或$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$ 满足条件:

$$(1)\quad u_n \geq u_{n+1}\quad (n=1, 2, \cdots)\,;$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

则级数收敛, 且其余项的绝对值 $|R_n| \leq u_{n+1}$.

9° 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛.

10° 如果任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$满足条件 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, 则

(1) 当$l<1$时, 级数绝对收敛;

(2) 当$l>1$时, 级数发散;

(3) 当$l=1$时, 级数敛散性不能确定.

10° 如果任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$ ，则

(1) 当 $l<1$ 时，级数绝对收敛；

(2) 当 $l>1$ 时，级数发散；

(3) 当 $l=1$ 时，级数敛散性不能确定.

11° 如果任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$，则

(1) 当 $\rho<1$ 时，级数绝对收敛；

(2) 当 $\rho>1$ 时，级数发散；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0,\quad \forall x\in R$$

12° 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的系数满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

则 (1)当$0< l <+\infty$时，$R=\frac{1}{l}$；

(2)当$l=0$时，$R=+\infty$；

(3)当$l=+\infty$时，$R=0$.

当 $|x|<R$ 时，幂级数绝对收敛；

当 $|x|>R$ 时，幂级数发散；

当$x=R$ 与 $x=-R$ 时，幂级数可能收敛也可能发散.

收敛区间为 $(-R, +R)$.

13° 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的系数满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

则 (1) 当$0< l<+\infty$时，$R=\frac{1}{l}$;

(2) 当$l=0$时，$R=+\infty$;

(3) 当$l=+\infty$时，$R=0$.

当 $|x-x_0|<R$ 时, 幂级数绝对收敛;

当 $|x-x_0|>R$ 时, 幂级数发散;

当$x=x_0+R$ 与 $x=x_0-R$ 时, 幂级数可能收敛也可能发散.

收敛区间为 $(x_0-R,\ x_0+R)$.

4、重要参考级数:

1° 等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots \quad (a\neq 0)$$

当$|q|<1$时, 收敛,

当$|q|\geq 1$时, 发散.

2° 调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

3° P–级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$

当 $p>1$ 时, 收敛,

当$0<p\leq 1$时, 发散.

(三) 幂级数的运算和性质

设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为

$R_1>0$和$R_2>0$.

1 四则运算

1° 加法 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = f(x)+g(x)$

收敛半径 $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

2° 减法 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n = f(x)-g(x)$

收敛半径 $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

3° 柯西(Cauchy)乘法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0)x^n + \cdots$$

$$= f(x)\cdot g(x)$$

收敛半径 $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

2 和函数的运算性质

性质1 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数$S(x)$在收敛区间$(-R, R)$内可导, 并可以逐项求导, 且求导后级数的收敛半径不变.

即 $$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$x \in (-R, R)$$

注1：逐项求导后所得幂级数的收敛域不会变大.

性质2　幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$内可积, 并可逐项求积分, 且积分后级数的收敛半径不变.

即 $$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t$$

$$x \in (-R, R) .$$

注2: 逐项求积分后所得幂级数的收敛域不会变小.

注3: 如果逐项求导或逐项求积分后的幂级数当 $x= -R$或$x= R$时收敛, 则在$x= -R$或$x= R$时, 性质1和性质2中的等式仍然成立.

(四) 函数的幂级数展开式

1. 泰勒级数

定义：如果函数$f(x)$在x_0的某邻域内是存在任意阶导数，则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

称为函数$f(x)$在x_0处的泰勒级数.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为函数$f(x)$的麦克劳林级数.

定理 $f(x)$在x_0点的泰勒级数在$U_R(x_0)$内收敛于$f(x)$

$\Leftrightarrow$ 在$U_R(x_0)$ 内，$R_n(x)\to 0$.

泰勒级数的拉格朗日(Lagrange) 余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \ (\xi \text{在} x_0 \text{与} x \text{之间})$$

麦克劳林(Maclaurin)级数的拉格朗日(Lagrange)余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (\xi \text{在} 0 \text{与} x \text{之间})$$

或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

(四) 函数的幂级数展开式

1. 直接法(泰勒级数法)

利用泰勒级数或麦克劳林级数将$f(x)$展开为幂级数

步骤: 1° 求 $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,\cdots$

2° 计算 $a_n=f^{(n)}(x_0)$, $n=0,1,2,\cdots$

3° 写出幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

并求出其收敛域.

4° 讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)\overset{?}{=}0$

若为0, 则幂级数在此收敛域内等于函数$f(x)$;

若不为0, 则幂级数虽然收敛, 但它的和不是$f(x)$.

2. 间接展开法

根据唯一性, 利用常见展开式、等比级数的和及幂级数的性质等, 通过变量代换, 四则运算, 恒等变形, 逐项求导, 逐项积分等方法, 求展开式.

3. 常用已知和函数的幂级数

1° 几何级数

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad x\in(-1,1).$$

2° $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

3° $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$x\in(-1,1]$$

$$4^\circ \ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$5^\circ \ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$6^\circ \ \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in [-1, 1]$$

$$7^\circ \ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

$$x \in (-1, 1)$$

二、典型例题

例1 填空题

1 级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 3}{2^n}$的和为 $\underline{\dfrac{2}{2-\ln 3}}$.

2 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径为$R$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n+1}$的收敛半径为 $\underline{\sqrt{R}}$.

3 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$在$x$=0处收敛，在$x$= – 4处发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-3)^n$的收敛域为 $\underline{(1, 5\,]}$.

解 由$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$在$x$=0处收敛，在$x$= – 4 处发散, 知收敛半径：$R$=2,

由 $-2<x-3\le 2$, 得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-3)^n$的收敛域为: $1<x\le 5$,

所以应填 (1, 5].

4 已知数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$，则数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$

$=$ <u>$2S-u_1$</u>.

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1$$

$$= 2S - u_1.$$

例2 选择题

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛区域是【 C 】

(A) (0, 2)　(B) [0, 2)　(C) (0, 2]　(D) [0, 2]

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收 敛, 记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, 则有

(A) $\lim_{n\to\infty}S_n=0$.　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

(C) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.　(D) $\{S_n\}$不一定有界. 【 C 】

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在$x=-1$处发散, 则它在$x=-2$处一定

(A) 发散.　(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.　(D) 敛散性不确定.　【 A 】

4. 下列级数中，发散的是　　【 C 】

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{n})$.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

解 (A) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\dfrac{1}{3}<1$, 级数收敛.

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=1$, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 知原级数收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}=\underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}}_{\text{条件收敛}}+\overbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}}^{\text{发散}}$ 故原级数发散.

因此应选 (C).

例3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$ 的收敛半径和收敛域.

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{2^n}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2,$

收敛半径 $R=\frac{1}{2},$

故当 $|x-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$, 即0<$x$<1时，级数绝对收敛；

当 $x=0$时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散

当 $x=1$时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛

故收敛域为 (0,1].

例4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{3^n-1}$ 的收敛半径和收敛域.

缺少奇次幂的项

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2(n+1)}}{3^{n+1}-1}}{\frac{x^{2n}}{3^n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^{n+1}-1}x^2 = \frac{x^2}{3}$,

所以，当 $\left|\frac{x^2}{3}\right|<1$ 时，即 $|x|<\sqrt{3}$ 时，级数绝对收敛，

当 $\left|\frac{x^2}{3}\right|>1$ 时，即 $|x|>\sqrt{3}$ 时，级数发散，

当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{3^n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{3^n-1}$,

由 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n-1}=1\neq 0$，知级数发散，

故原级数的收敛域为：$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$. 收敛半径：$R=\sqrt{3}$.

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

例5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的和函数.

解 设所求和函数为$S(x)$, 则当 $x\neq 0$ 时, 有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(-\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right),$$

由 $1<-\frac{x}{2}\leq 1,\ x\neq 0$ 得 $x\in[-2,0)\cup(0,2)$,

又 $S(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}x+\frac{1}{3\cdot 2^3}x^2+\cdots$, 知 $S(0)=\frac{1}{2}$,

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & x\in[-2,0)\cup(0,2),\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,1]$$

P_{254}习题七(A) 10–(4)

例6 §7.7 初等函数的幂级数展开式

作业 P_{254} 习题七 (A)

12. 利用已知展开式把下列函数展开为x的幂级数,并确定收敛域.

(2) $f(x)=\cos^2 x$

(6) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x-3}$

13. 利用已知展开式把下列函数展开为 $x-2$ 的幂级数, 并确定收敛域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$

(4) $f(x)=\ln\dfrac{1}{5-4x+x^2}$

12. 利用已知展开式把下列函数展开为x的幂级数, 并确定收敛域.　　(2) $f(x)=\cos^2 x$

解 因为 $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

又 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty).$

所以 $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right]$$

$$=1-\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!}+\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}+\cdots$$

$$=1-x^2+\frac{2^3}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

12. 利用已知展开式把下列函数展开为x的幂级数, 并确定收敛域.

(6) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x-3}$

解 $\dfrac{x}{x^2-2x-3}=\dfrac{x}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{3}{x-3}\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left[(-1)^n-\frac{1}{3^n}\right]x^n$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad x\in(-1,1)}$$

收敛域为: $x\in(-1,1)$.

13. 利用已知展开式把下列函数展开为 $x-2$ 的幂级数, 并确定收敛域.

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

(1) $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$

解

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2-(x-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$x\in(-1,1)$

由 $\dfrac{|x-2|}{2}<1$ 得收敛域为: $x\in(0,4)$.

13. 利用已知展开式把下列函数展开为 $x-2$ 的幂级数, 并确定收敛域.

(4) $f(x)=\ln\dfrac{1}{5-4x+x^2}$

解 $$f(x)=\ln\frac{1}{5-4x+x^2}$$

$$=-\ln[1+(x-2)^2]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^{2n}}{n}$$

由 $-1<(x-1)^2\le 1$， 得收敛区域为: $x\in[1,3]$.

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\quad x\in(-1,1]$$

例7 把函数 $f(x)=\ln(1-x-2x^2)$ 展开成 x的幂级数.

解 $f(x)=\ln(1-x-2x^2)$

$$=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n}$$

$-1<x\le 1$ $\qquad$ $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$$

当 $x=\frac{1}{2}$时, $f(x)$无定义,

所以收敛域为: $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

例8 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成$(x-1)$ 的幂级数.

解 $$\frac{1}{x^2-3x-4}=\frac{1}{(x-4)(x+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{-3+x-1}-\frac{1}{2+x-1}\right)$$

$$=-\frac{1}{15}\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}-\frac{1}{10}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5}\left[(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right](x-1)^n$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad x\in(-1,1)}$$

$x\in(-1,3)$.

例9 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ 的和 .

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$=2e\,.$$

例10 求 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}$ 的和.

解 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1+1}{(2n+1)!}$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\frac{\cos 1+\sin 1}{2}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$