§9.2　一阶微分方程

一、可分离变量的一阶微分方程

二、齐次微分方程

三、一阶线性微分方程

一、一阶微分方程

一般形式: $F(x, y, y')=0$

已解出 y' 的形式: $y'=f(x, y)$

对称形式: $P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y=0$

方程 $P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y=0$ 中变量x与y对称,

1°当$Q(x, y)\neq 0$时, 可看作x为自变量, y为因变量的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

2°当$P(x, y)\neq 0$时, 可看作y为自变量, x为因变量的方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

二、可分离变量的一阶微分方程

1 定义: 形如

$$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$$

特点 等式的每一端仅是一个变量的函数与这个变量的微分之积

的一阶微分方程, 称为可分离变量的微分方程.

例如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}}\mathrm{d}y = 2x^2\mathrm{d}x,$

2 解法: 两边同时积分, 设函数$g(y)$和$f(x)$是连续的,

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

分离变量法

设函数$G(y)$和$F(x)$ 分别是 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的原函数, 则

$G(y)=F(x)+C$ 为微分方程的通解.

两端积分可得通解.

例2 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ 的通解.

解 分离变量 $y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$,

两端积分 $\int y\mathrm{d}y=-\int x\mathrm{d}x$,

$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

隐式通解

因此微分方程 的通解为: $x^2+y^2=2C_1=C$.

C为任意常数.

微分方程的初等解法: 积分法

求解微分方程 $\Longrightarrow$ 求积分

例1* 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解　分离变量　　$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x,$

两端积分　　$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x,$

得　　$\ln|y|=x^2+C_1$

$$|y|=e^{x^2+C_1}$$

$$y=\pm e^{C_1}e^{x^2}$$

故所求通解为: $y=Ce^{x^2}$, C为任意常数.

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

例4 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解.

解 右边分子分母同时除以x^2的得: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}-1}$,

令 $v=\dfrac{y}{x}$, 则 $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$,

代入原式化简得 $x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v}{v-1}$,

分离变量得 $\dfrac{(v-1)dv}{v}=\dfrac{dx}{x}$,

两边积分得 $v-\ln v=\ln x-\ln C$

于是 $\ln x+\ln v=v+\ln C$ 即 $xv=Ce^{v}$,

回代得微分方程的通解为

$$y=Ce^{\frac{y}{x}},\ C\text{为任意常数}.$$

例1 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}$ 的通解.

解 分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$,

两端积分 $\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$,

得 $\ln y=-\ln x+\ln C$

$xy=C$ 隐式通解

故所求通解为: $xy=C$, C为任意常数 .

- 微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件$y(1)=2$ 的特解为 $\underline{\quad xy=2 \quad}$.

2005, 2008数1, 3

例2* 求方程 $(xy^2+x)\mathrm{d}x+(y-x^2y)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 原方程可变为 $x(y^2+1)\mathrm{d}x+y(1-x^2)\,\mathrm{d}y=0$

分离变量 $$\frac{y}{y^2+1}\mathrm{d}y=\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x,$$

两端积分得 $$\int\frac{y}{y^2+1}\mathrm{d}y=\int\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

$$\ln(y^2+1)=\ln(x^2-1)+\ln C$$

故所求通解为:

$y^2+1=C(x^2-1)$， C为任意常数.

P_{334} 习题九(A)–2: (4)

例3* 求微分方程 $\cos x \sin y \, dy = \cos y \sin x \, dx$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$ 的特解.

解　分离变量

$$\frac{\sin y}{\cos y} dy = \frac{\sin x}{\cos x} dx,$$

两端积分得

$$-\ln\cos y = -\ln\cos x - \ln C$$

故方程通解为: $\cos y = C \cos x$

由 $\cos\frac{\pi}{4} = C\cos 0$ 得 $C = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

故所求特解为: $\sqrt{2}\cos y = \cos x.$

三、齐次微分方程

1 定义 形如 $\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$ 的微分方程称为齐次微分方程.

2 解法 作变量代换 $v=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xv$, $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{x}$

代入原式得 $v+x\dfrac{dv}{dx}=f(v)$,

即 $$\frac{dv}{dx}=\frac{f(v)-v}{x}.$$

可分离变量的方程

当$f(v)-v\neq 0$时, 得

$$\int\frac{dv}{f(v)-v}=\int\frac{dx}{x}=\ln x-\ln C=\ln\frac{x}{C}$$

因此 $$x=Ce^{\int\frac{dv}{f(v)-v}},$$

将 $v=\dfrac{y}{x}$ 代换还原, 得原方程的通解.

例4* 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ 的初始条件 $y|_{x=1}=\frac{\pi}{4}$ 的特解.

P_{335} 习题九 (A)–3: (7)

解 令 $v=\frac{y}{x}$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=v+x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$,

代入原式分离变量得 $\frac{\mathrm{d}v}{\tan v}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$,

两边积分得 $\ln\sin v=\ln x+\ln C$

$$\sin v=Cx$$

微分方程的通解为: $\sin\frac{y}{x}=Cx,\quad C\in R.$

将初始条件 $y|_{x=1}=\frac{\pi}{4}$ 代入上式得: $C=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故所求特解为: $\sin\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}\,x}{2}.$

例5* 求方程$(xy-y^2)\mathrm{d}x-(x^2-2xy)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 原方程可以写成 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=\frac{\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2}{1-2\cdot\frac{y}{x}},$$

令 $v=\frac{y}{x}$, 代入上式化简得

$$(\frac{1}{v^2}-\frac{2}{v})\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

P_{307} 题

两边积分得 $-\frac{1}{v}-2\ln v=\ln x-\ln C$

$\Rightarrow \quad \ln x+2\ln v=\ln C-\frac{1}{v}$ 即 $xv^2=Ce^{-\frac{1}{v}},$

回代得微分方程的通解为

$$y^2=Cxe^{-\frac{x}{y}},\ C\text{为任意常数.}$$

例5 求微分方程 $(xe^{\frac{y}{x}} + y)\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 下的特解.

解 方程两边同时除以 x 得: $(e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x})\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$

令 $v = \frac{y}{x}$, 则 $\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}x$

代入上式化简得 $\frac{\mathrm{d}v}{e^v} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分得 $-e^{-v} = \ln x + C \Rightarrow v = -\ln(-\ln x - C)$

微分方程的通解为: $y = -x\ln(-\ln x - C)$

由 $y|_{x=1} = 0$ 知, $0 = -\ln(-C)$,

得 $C = -1$,

故所求特解为: $y = -x\ln(1 - \ln x)$.

例6* 求方程 $(1+e^{-\frac{x}{y}})y\mathrm{d}x=(x-y)\mathrm{d}y$的通解.

解 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{1+e^{-\frac{x}{y}}}\left(\frac{x}{y}-1\right)$$

将x为看作y的函数, 求解较方便

齐次方程

令 $v=\frac{x}{y}$, 则方程变为 $$v+y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{1+e^{-v}}(v-1)$$

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v-1}{1+e^{-v}}-v=-\frac{1+ve^{-v}}{1+e^{-v}}=-\frac{v+e^{v}}{1+e^{v}}$$

求解微分方程时, 通常不计较哪个是自变量哪个是因变量, 视方便而定, 关键在于找到两个变量间的关系

分离变量 $$\frac{1+e^{v}}{v+e^{v}}\mathrm{d}v=-\frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

两边积分得 $\ln(v+e^{v})=-\ln y+\ln C$

即 $y(v+e^{v})=C$,

回代得通解: $x+ye^{\frac{x}{y}}=C$, C为任意常数.

例6* 求方程 $(1+e^{-\frac{x}{y}})y\mathrm{d}x=(x-y)\mathrm{d}y$ 的通解.

解 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{1+e^{-\frac{x}{y}}}\left(\frac{x}{y}-1\right)$$

齐次方程

将x为看作y的函数，求解较方便

令 $v=\dfrac{x}{y}$，则方程变为

$$v+y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{1+e^{-v}}(v-1)$$

分离变量 $$\frac{1+e^{v}}{v+e^{v}}\mathrm{d}v=-\frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

两边积分得 $\ln(v+e^{v})=-\ln y+\ln C$

即 $y(v+e^{v})=C$,

回代得通解: $x+ye^{\frac{x}{y}}=C$, C为任意常数.

求解微分方程时，通常不计较哪个是自变量哪个是因变量，视方便而定，关键在于找到两个变量间的关系

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

练习题1 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2}(\frac{y}{x})^3$ 满足初始条件初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解 .

2007数 3

解 令 $v=\frac{y}{x}$, 则 $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$,

代入原方程化简得 $\frac{dv}{v^3}=-\frac{dx}{2x}$

两边积分得 $-\frac{1}{2v^2}=-\frac{\ln x}{2}-\frac{\ln C}{2}$

微分方程的通解为: $\frac{x^2}{y^2}=\ln x+\ln C,\quad C\in R$.

将 x=1, y=1代入上式得 $C=e$,

故所求特解为: $x^2=y^2(\ln x+1)$.