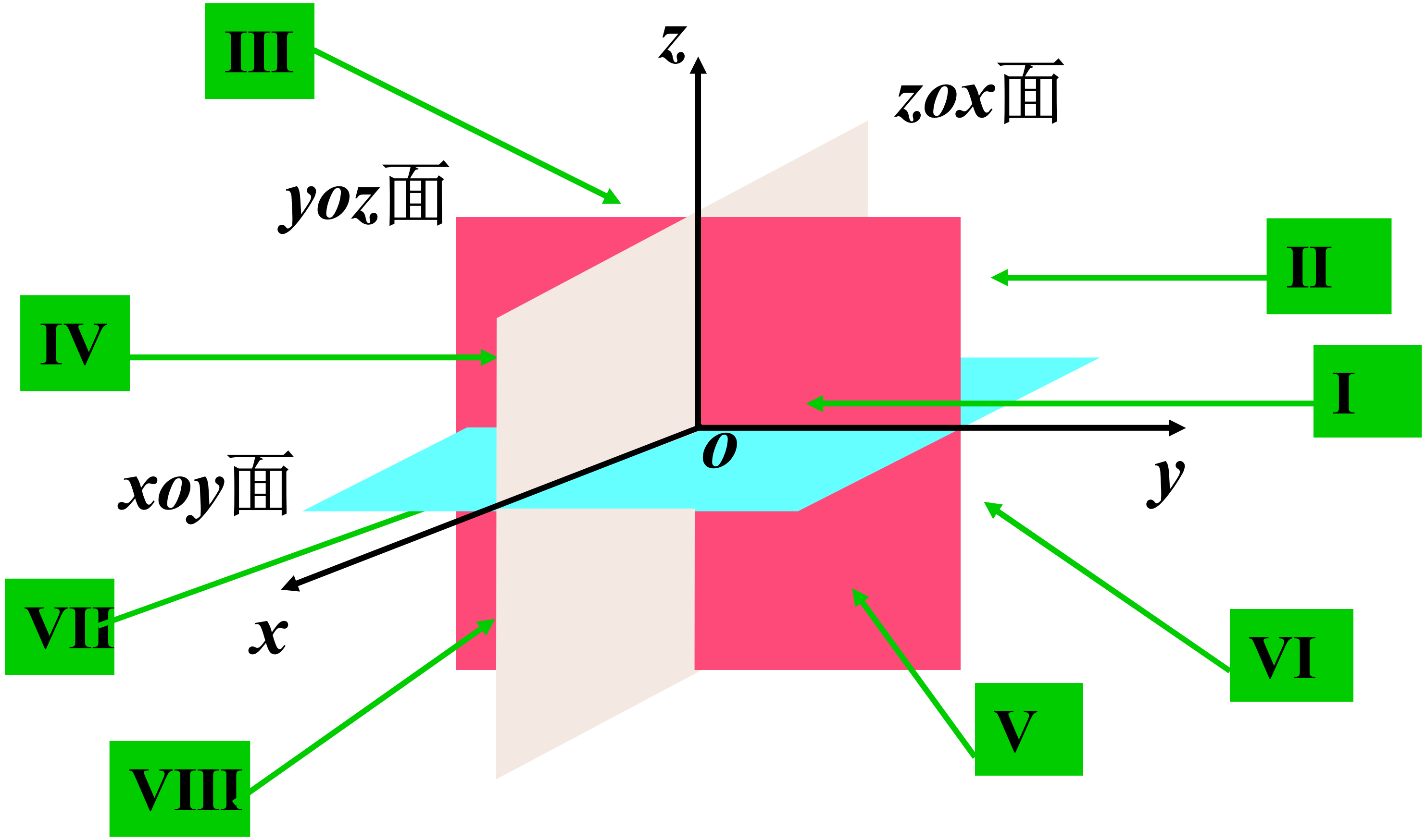
§8.1 空间解析几何简介



- 坐标系
- 坐标面
- 卦限

2、常见空间曲面

(1) 平面

空间平面方程的一般形式为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中A, B, C, D为常数, 且A, B, C,不全为0.

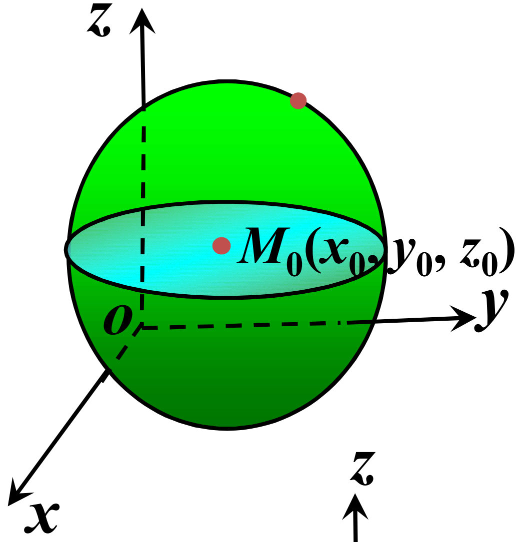
(2) 柱面

定义 平行定直线L并沿定曲线 C 移动的直线所生成的轨迹称为柱面.

在空间直角坐标系中, 二元方程表示柱面

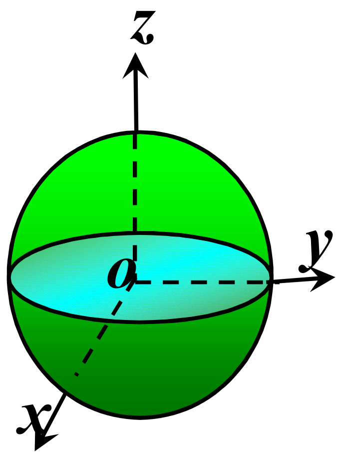
- 圆柱面 $x^2+y^2=R^2$

(3)旋转曲面：一条平面曲线绕其平面上的一条定直线旋转一周所生成的曲面.



2° 球心为点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$,半径为R的球面方程.

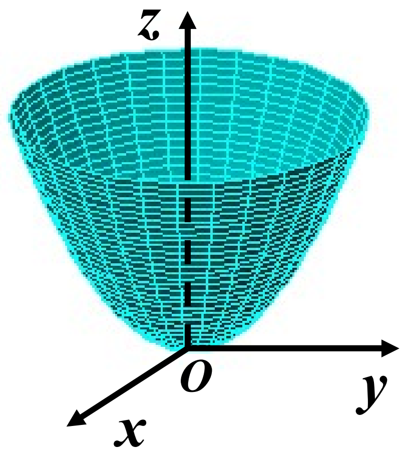
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$



球心在原点的球面方程: $x^2+y^2+z^2 = R^2$

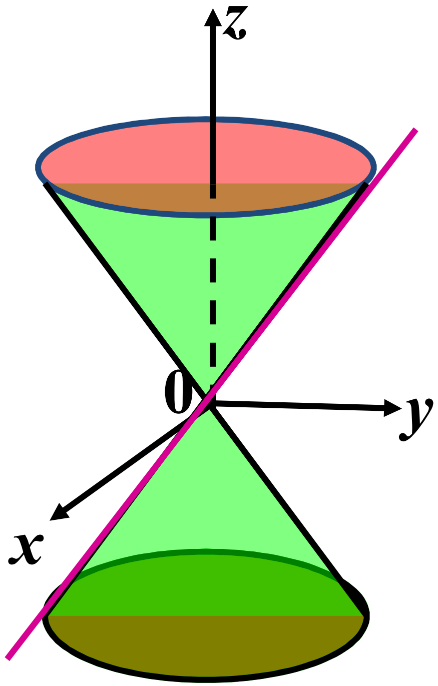
3° 旋转抛物面

$$z= x^2+y^2$$

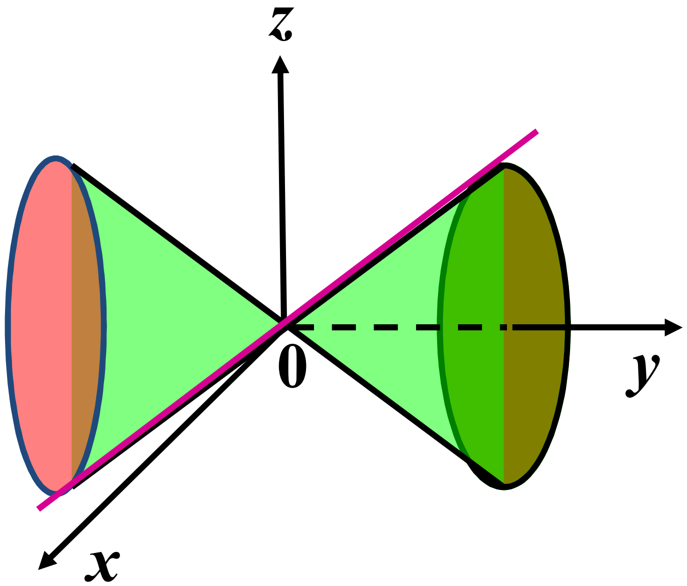


(4) 圆锥面

$$z^2 = x^2 + y^2$$



$$y^2 = x^2 + z^2$$



圆锥面: 平面内的**直线** L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周所生成的旋转曲面称为**圆锥面**.

第二节 多元函数的概念

一、平面区域的概念

二、多元函数的概念

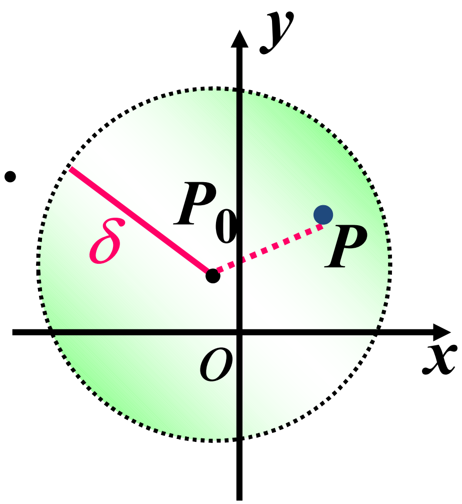
一、平面区域的概念

1 邻域

(1) 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面上的一个点, 且$\delta>0$, 与点 $P_0(x_0, y_0)$距离小于δ的点P的全体构成的集合称为P_0点的δ邻域, 记为 $U(P_0, \delta)$.

$$U(P_0, \delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}=U(P_0)$$

$$=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$



P_0称为邻域的中心,

δ称为邻域的半径 .

(2) 点P_0的去心δ邻域, 记作 $\mathring{U}(P_0, \delta)$.

即 $\mathring{U}(P_0, \delta)=\{P \mid \boxed{0<|PP_0|}<\delta\}$

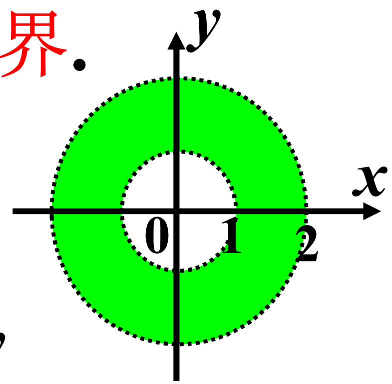
$P\neq P_0$

2 平面区域: 平面或平面上由几条曲线所围成的部分.

围成平面区域的曲线称为该区域的边界.

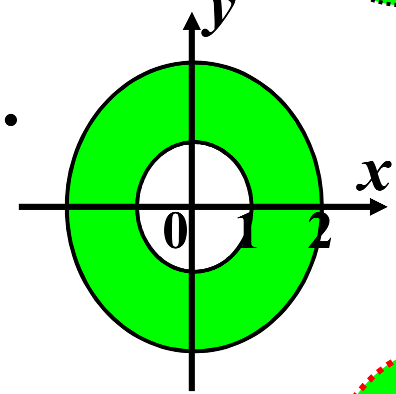
(1) 不包括边界的区域称为开区域.

例如 $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$



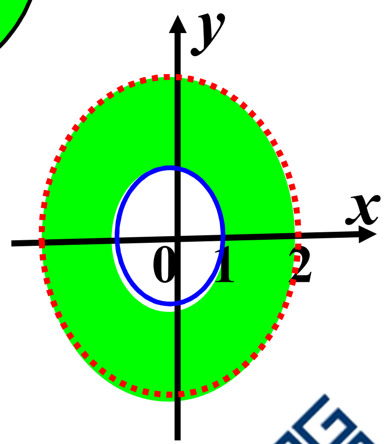
(2) 包括边界的区域称为闭区域.

例如 $\{(x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$



(3) 包含部分边界的区域称为半开区域.

例如 $\{(x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 < 4\}$

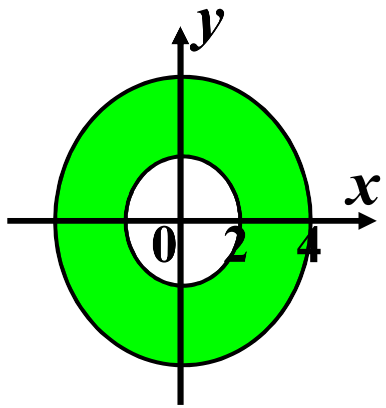


(4) 可以延伸到无穷远处的区域称为无界区域, 否则称为有界区域 .

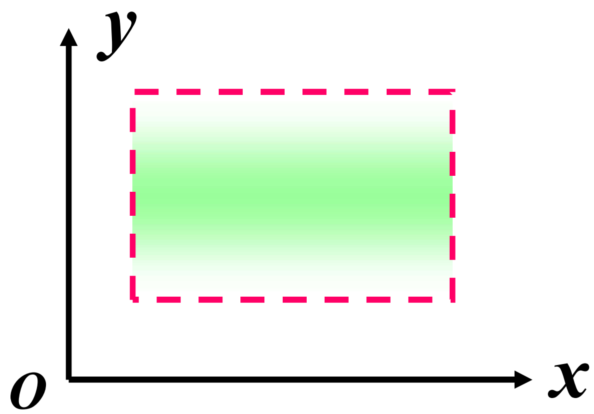
有界区域 总可以被包围在一个以原点为中心、半径适当大的圆内.

即若D是有界区域, 则存在R>0, 使得$D \subset U(0, R)$.

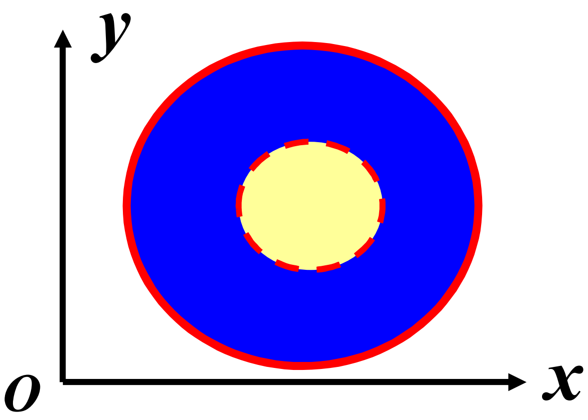
例如



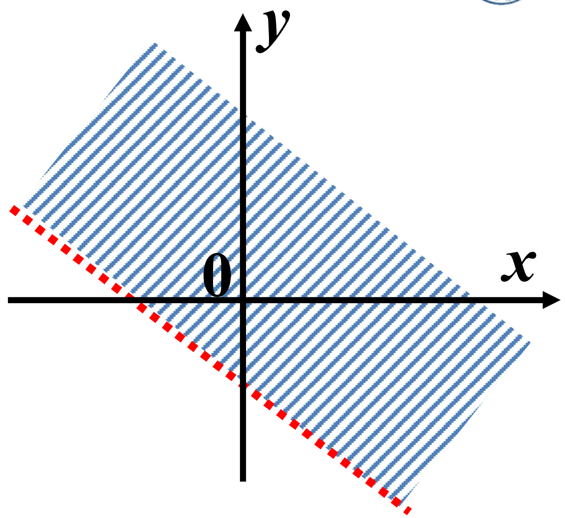
有界闭区域;



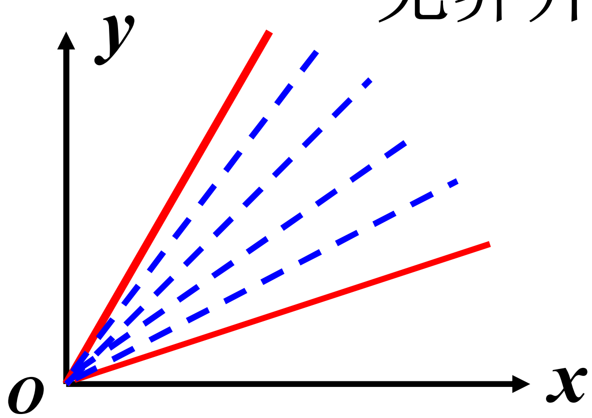
有界开区域



有界半开区域



无界开区域



无界闭区域

二、多元函数的概念

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

1. 二元函数的定义8.2

设D是xoy平面上的非空点集, 如果对于$\forall P(x,y)\in D$, 按照某个对应法则f, 变量z总有唯一确定的值与之对应, 则称z是x, y的二元 函数.

记为: $z=f(x,y)$.

其中x, y 称为自变量, z 称为因变量,

点集D称为函数$z=f(x,y)$的定义域,

函数 $z=f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$处的函数值 记为$f(x_0,y_0)$ 或$f(P_0)$.

全体函数值的集合: $\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}=z(f)$.

称为该函数的值域.

2. n元函数的定义

设 D 为一个非空的 n 元有序数组, 如果对于 $\forall P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$, 按照某个对应法则$f$，都有唯一确定的实数$y$ 与之对应, 则称f 为定义在D上的n元函数.

记为 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$称为自变量， y称为因变量 ,

集合D称为函数$z=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的定义域.

全体函数值的集合

$\{y \mid y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n), (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D\} = z(f)$.

称为 函数的值域.

二元及二元以上的函数统称为多元函数 .

3. 多元函数定义域

实际问题中的函数：定义域为符合实际意义的自变量取值的全体.

纯数学问题的函数：定义域为使运算有意义的自变量取值的全体.

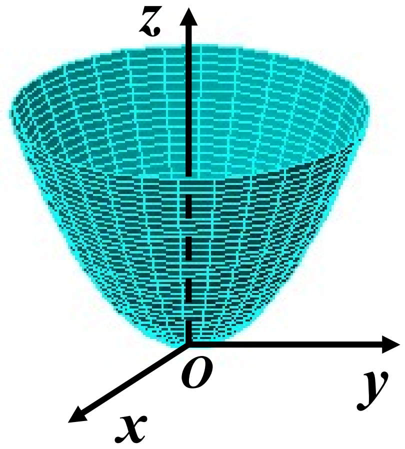
例1 求函数 $z=x^2+y^2$ 的定义域和值域.

解 定义域

$$D=\{(x,y)\mid x,y\in(-\infty,+\infty)\}$$

$$=R^2$$

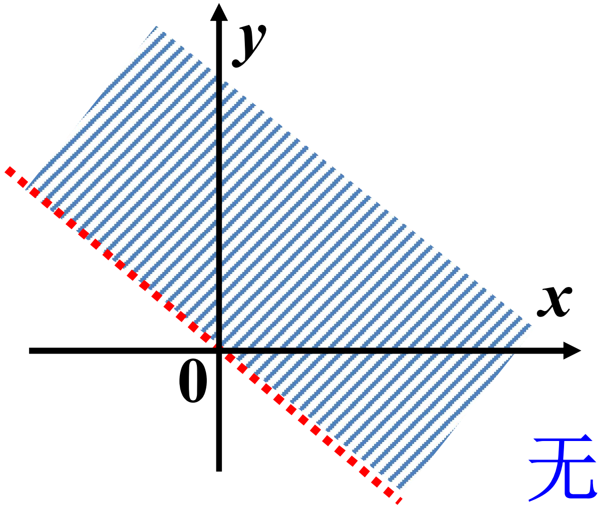
值域 $z(f)=[0,+\infty)$.



P_{263} 例 求函数 $z=\ln(x+y)$的定义域和值域.

解 定义域 $D=\{(x,y)|\ x+y>0\}$

值域 $z(f)=(-\infty,+\infty)=R.$



无界开区域

● 二元函数$z=f(x,y)$的定义域, 在几何上表示一个平面区域.

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

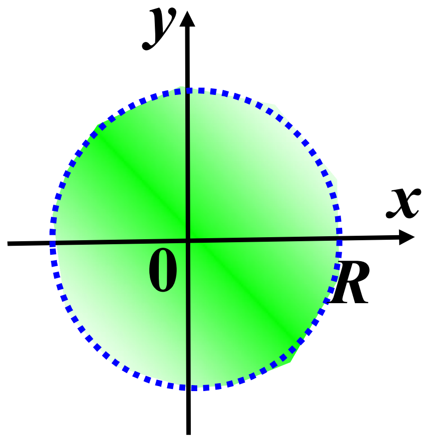
P_{264} 例 求函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ 与 $z=\ln(R^2-x^2-y^2)$ 的定义域.

解 由 $R^2-x^2-y^2>0$ 得

$$x^2+y^2<R^2,$$

所求定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<R^2\}.$$



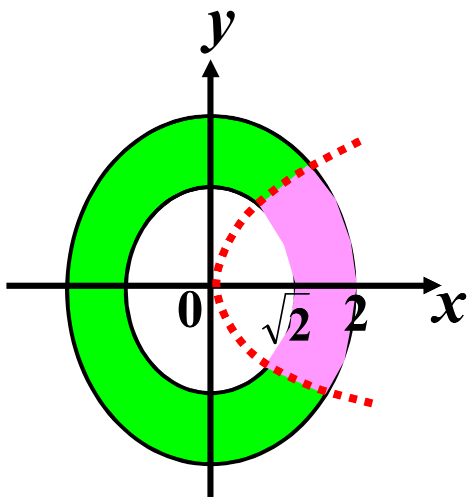
有界开区域

例1* 求函数 $z=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.

解 由 $\begin{cases} |3-x^2-y^2|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$$

所求定义域为



有界半开区域

$$D=\{(x,y)\mid 2\le x^2+y^2\le 4,\ x>y^2\}.$$

例2* 设函数 $f(x+y, x-y) = e^{x^2+y^2}(x^2-y^2)$，求函数 $f(x, y)$和 $f(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 的值.

P_{294} 习题八 (A) -- 2

解 由 $f(x+y, x-y) = e^{x^2+y^2}(x^2-y^2)$

$$= e^{\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}} \cdot (x+y)(x-y)$$

得 $f(x,y) = e^{\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot xy,$

于是 $f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = e^{\frac{2+2}{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$$= 2e^2.$$

4. 二元函数的图形

设二元 函数$z=f(x,y)$的定义域为D, 对$\forall P(x,y)\in D$, 对应函数值 $z=f(x,y)$. 以x为横坐标, y为纵坐标, z为竖坐标在空间确定的点$M(x,y,z)$所构成的集合

$$\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为二元函数$z=f(x,y)$的图形.

5. 二元函数的几何意义

二元函数的图形通常是一张曲面.

其定义域D为该曲面在xoy平面上的投影.