习题七 (B)

1. 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列$\{S_n\}$有界是级数收敛的　　【 A 】

(A) 必要条件但不是充分条件

(B) 充分条件但不是必要条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不是充分条件也不是必要条件

2. 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{q^n}$($a$为常数)级数收敛的充分条件是【 A 】.

(A) $|q|>1$　(B) $q=1$　(C) $|q|<1$　(D) $q<1$

3. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 那么下列级数中发散的是【 B 】.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} 100u_n$　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+100)$

(C) $100+\sum_{n=1}^{\infty} u_n$　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+100}$

4. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$, 则【 D 】.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 任意加括号后所成的级数必发散.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 任意加括号后所成的级数可能收敛.

5. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则下列论述中, 不正确的是【 C 】.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛 $(k\neq 0)$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛　(D) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

6. 设有两个级数(I) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与(II) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 则下列结论中正确是【 C 】.

(A) 若$u_n \leq v_n$, 且(II)收敛, 则(I)一定收敛

(B) 若$u_n \leq v_n$, 且(I)发散, 则(II)一定发散

(C) 若$0 \leq u_n \leq v_n$, 且(II)收敛, 则(I)一定收敛

(D) 若$0 \leq u_n \leq v_n$, 且(II)发散, 则(I)一定发散

7. 下列级数中发散的是 【 D 】.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{2^n}$

解 (A) 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n \sin\frac{1}{3^n}}{(\frac{2}{3})^n}=1$，所以，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$ 收敛.

(B) 由 $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{n})^2}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$，知 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})$ 收敛.

(C) 因 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4}<1$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛.

(D) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{n+1}{n})^n}{2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{e}{2}>1$,

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{2^n}$ 发散. 故选 (D).

8. 对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{na}{n+1})^n$ $(a>0)$,下列结论中正确是【 **D** 】.

(A)当$a>1$时, 级数收敛 (B)当$a<1$时, 级数发散

(C)当$a=1$时, 级数收敛 (D)当$a=1$时, 级数发散

解 因为 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na}{n+1}=a,$$

所以, 当$0<a<1$时, 级数收敛;

当 $a>1$ 时, 级数发散;

当 $a=1$时, 根式判别法失效, 此时

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^n=e^{-1}\neq0,$$

即$a=1$时, 级数发散.

故选 (D).

9. 关于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$收敛性的下列结论中正确是 【 A 】

(A) $0<p\le 1$ 时条件收敛.

(B) $0<p\le 1$时绝对收敛.

(C) $p>1$时条件收敛.

(D) $0<p\le 1$时发散.

10. 下列级数中绝对收敛的是【 C 】.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n!}{3^n}$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{2^n}$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

解 (A) 因 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}$, 所以, 级数发散.

(B) 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=+\infty$, 得级数发散.

(C) 因 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{2n^3}=\frac{1}{2}<1$,

知级数绝对收敛 . 故选 (C).

10. 下列级数中绝对收敛的是【 C 】.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2n-1}$.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\dfrac{n!}{3^n}$.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n^3}{2^n}$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$.

解 (D) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=1$，知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}\right|$发散.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}=0$，　令 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$，则

$f'(x)=\dfrac{100-x}{2\sqrt{x}(x+100)^2}$，当 $x>100$ 时，$f'(x)<0$，

知$f(x)$单调下降，于是，当 $n>100$ 时，$u_n>u_{n+1}$，

由莱布尼茨定理知，原级数条件收敛. 故选 (C).

11. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0)$收敛的充分条件是【 C 】

(A) $u_{n+1}\le u_n,\ (n=1, 2, \cdots)$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

(C) $u_{n+1}\le u_n,\ (n=1, 2, \cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(u_n - u_{n+1})$ 收敛

12. 下列级数中发散的是【 B 】.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{\frac{n}{2}}}$

13. 设$0\le u_n<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$, 则下列级数中必定收敛是【 D 】

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n^2$

解 由设 $0\le u_n<\frac{1}{n}$, 和两边夹定理, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

这是级数收敛的必要条件而非充分条件.

(D) 由 $0\le u_n<\frac{1}{n}$, 知 $0\le u_n^2\le\frac{1}{n^2}$,

所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n^2$ 绝对收敛.

故选 (D).

13. 设$0\le u_n<\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$, 则下列级数中必定收敛是【 D 】

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ (C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$ (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n^2$

解 由设 $0\le u_n<\dfrac{1}{n}$, 和两边夹定理, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

这是级数收敛的必要条件而非充分条件.

(A) 令 $0\le u_n=\dfrac{1}{2n}<\dfrac{1}{n}$, 而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$发散.

(B) 令 $0\le u_n=\dfrac{1}{n+2+(-1)^{n-1}}<\dfrac{1}{n}$,

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=\{-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{5},-\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{7},\cdots,(-1)^n\dfrac{1}{n+2+(-1)^{n-1}},\cdots\}$

发散.

(C) 令$u_n=\dfrac{1}{n^2}$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$ 发散. 故选 (D).

14. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域是【 B 】

(A) $[-1, 1]$ (B) $[-1, 1)$ (C) $(-1, 1)$ (D) $(-1, 1]$

15. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为$R(0<R<+\infty)$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\frac{x}{2})^n$ 的收敛半径为【 A 】.

(A) $2R$ (B) $\frac{R}{2}$ (C) R (D) $\frac{2}{R}$

16. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在$x>0$时发散, 在$x=0$处收敛，则常数$a=$【 B 】.

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2