第九章 微分方程与差分方程简介

§9.1　微分方程的一般概念

一、问题的提出

例1　求过点(1, 3), 且切线斜率为$2x$的曲线方程.

解　设所求曲线方程为 $y=y(x)$, 则

$$y' = 2x,$$

于是　$y = \int 2x\,dx = x^2 + C$

因曲线过点(1, 3),

即　$3 = 1^2 + C$

得　$C = 2$,

故所求曲线方程为 $y = x^2 + 2$.

例1* 设某产品的边际成本为$C'(x)=x+24$(元/单位), 固定成本为8500元, 求该产品的总成本函数$C(x)$.

解 因为$C'(x)=x+24$ (元/单位), 所以

$$C(x)=\int(x+24)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2+24x+C,$$

又固定成本 $C(0)=8500$元,

由上知 $C=8500$,

因此总成本函数

$$C(x)=\frac{1}{2}x^2+24x+8500(\text{元}).$$

二、微分方程的概念

1. 定义1 含有未知函数的导数或微分的方程称为**微分方程.**

例

$$y' = 2xy,$$

$$y''' + 2xy'' - y' = e^x,$$

$$y^{(7)} + 1 = 0,$$

$$(t^2 + x)dt + xdx = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x + y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

2. 定义2 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

3. 微分方程分类:

(1) 常微分方程, 偏微分方程.

$y' = 2xy,$ 未知函数是一元函数的方程为常微分方程

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = x + y,$ 未知函数是多元函数的方程为偏微分方程

(2) 一阶微分方程, 高阶(n阶) 微分方程

$F(x, y, y')=0,$ $F(x, y, y',\cdots, y^{(n)})=0,$

$y'=f(x, y),$ $y^{(n)}=f(x, y, y',\cdots, y^{(n-1)}),$

已解出最高阶导数的微分方程

注: n阶微分方程$y^{(n)}$必须出现

今后讨论

(3) 线性与非线性微分方程.

$y'+P(x)y=Q(x),$ $y'''+2xy''-y'=e^x,$

$x(y')^2-2yy'+x=0.$

4. 定义3: 代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解.

例如 $y' = y$, 解 $y = Ce^x$,

解的分类:

(1)通解: 微分方程的解中所含任意常数的个数与微分方程的阶数相同的解.

例如 $y' = y$, $y = Ce^x$------ 通解,

$y'' + y = 0$, $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ ------ 通解,

(2)特解: 确定了通解中任意常数以后的解.

用来确定任意常数的条件称为初始条件.

注: 通解和特解是一般和特殊的关系.

解的图象 微分方程的积分曲线.

通解的图象 积分曲线族.

5. 初值问题(柯西问题)

求微分方程满足初始条件的解的问题.

一阶微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

几何意义是过定点的积分曲线;

二阶微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \end{cases}$$

几何意义是过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

例2* 验证函数$y=3e^{2x}$是微分方程$y''-4y=0$的特解.

解 因 $y'=6e^{2x}$,

$y''=12e^{2x}$,

于是

$$y''-4y=12e^{2x}-4\cdot 3^{2x}$$

$$=0,$$

又$y=3e^{2x}$中没含任意常数

故$y=3e^{2x}$故为微分方程$y''-4y=0$的特解.

例3* 下列函数中为微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 特解的是

(A) $y=e^{x}-2e^{2x}$ (B) $y=e^{x}+2e^{2x}$

(C) $y=e^{x}+e^{3x}$ (D) $y=Ce^{3x}-2e^{2x}$ 【 A 】

解 (A) 因 $y'=e^{x}-4e^{2x}$,

$y''=e^{x}-8e^{2x}$,

$$\begin{aligned} &y''-4y'+3y\\ &=e^{x}-8e^{2x}-4(e^{x}-4e^{2x})+3(e^{x}-2e^{2x})\\ &=2e^{2x}, \end{aligned}$$

因此, 选 (A).

例4* 设C_1, C_2为任意常数, 微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的通解是 【 B 】

(A) $y=e^{x}+e^{-2x}$ (B) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$

(C) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ (D) $y=C_1e^{x}+e^{-2x}$

解 由(A) 中解没有任意常数, (D) 中解只含有一个任意常数, 知 (A), (D)中解都不是通解 .

(B) 因 $y'=C_1e^{x}-2C_2e^{-2x}$,

$y''=C_1e^{x}+4C_2e^{-2x}$,

所以

$$y''+y'-2y=C_1e^{x}+4C_2e^{-2x}+(C_1e^{x}-2C_2e^{-2x})-2(C_1e^{x}+C_2e^{-2x})=0,$$

且 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$ 中含有两个任意常数,

因此 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$ 是 $y''+y'-2y=0$ 的通解.

故选 (B).

例5* 验证函数$y=C_1e^x+C_2e^{3x}$ (C_1, C_2为任意常数)是微分方程 $y''-4y'+3y=0$的通解. 且求满足初始条件$y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$ 的特解.

解 因 $y'=C_1e^x+3C_2e^{3x}$, $y''=C_1e^x+9C_2e^{3x}$, 所以

$$y''-4y'+3y=C_1e^x+9C_2e^{3x}-4(C_1e^x+3C_2e^{3x})+3(C_1e^x+C_2e^{3x})=0,$$

而 $y=C_1e^x+3C_2e^{3x}$ 中含有两个任意常数,

所以$y=C_1e^x+C_2e^{3x}$ 是 $y''-4y'+3y=0$ 的通解.

由 $y|_{x=0}=0$ 得 $C_1+C_2=0$

由 $y'|_{x=0}=1$ 得 $C_1+3C_2=1$

$$\left.\begin{array}{l} C_1+C_2=0 \\ C_1+3C_2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow C_2=\frac{1}{2},\ C_1=-\frac{1}{2}.$$

于是满足初始条件$y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$ 的特解为:

$$y=-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{3x}.$$

例6* 求含有两个任意常数C_1, C_2的曲线族

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

满足的微分方程.

解 将 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ 求导得

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x},$$

$$y'' = C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{2x},$$

将y、y'、y''联立消去C_1, C_2得所求的微分方程为

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

求曲线族满足的微分方程, 具体方法是求导数,并消去任意常数.

若曲线族中含有两个任意常数, 则需求到二阶导数.

三、小结

基本概念：微分方程;

微分方程的阶;

微分方程的解;

通解;

特解;　初始条件;

初值问题; 积分曲线 .

习题九 (B)

1. 关于微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=e^x$ 的下列结论:

(1) 该方程是齐次微分方程

(2) 该方程是线性微分方程 √

(3) 该方程是常系数微分方程 √

(4) 该方程是二阶微分方程 √

其中正确的是 【 **D** 】

(A) (1), (2), (3) **(B)** (1), (2), (4)

(C) (1), (3), (4) **(D)** (2), (3), (4)

2. 微分方程 $x\ln x\cdot y'' = y'$ 的通解是 【 **B** 】

(A) $y = C_1 x\ln x + C_2$ (B) $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2$

(C) $y = x\ln x$ (D) $y = C_1 x(\ln x - 1) + 2$

解 (A) $y' = C_1\ln x + C_1$, $y'' = C_1\cdot\dfrac{1}{x}$,

不满足方程,

(B) $y' = C_1(\ln x - 1) + C_1 = C_1\ln x$,

$$y'' = C_1\cdot\frac{1}{x},$$

满足方程 $x\ln x\cdot y'' = y'$

又 $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2$ 中含有两个任意常数,

所以, $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2$ 是 $x\ln x\cdot y'' = y'$ 的通解,

因此选(B).

3. 下列方程中有一个是一阶微分方程, 它是【 C 】

(A) $(y-xy')^2=x^2yy''$

(B) $(y'')^2+5(y')^4-y^5+x^7=0$

(C) $(x^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$

(D) $xy''+y'+y=0$

4. 下列等式中有一个是微分方程, 它是 【 D 】

(A) $u'v+uv'=(uv)'$

(B) $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=(\dfrac{u}{v})'$ $\quad v\neq 0$

(C) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+e^x=\dfrac{\mathrm{d}(y+e^x)}{\mathrm{d}x}$

(D) $y''+3y'+4y=0$

5. 微分方程 $y \cdot y'' - 2(y')^2 = 0$ 的通解是 【 A 】

(A) $y = \dfrac{1}{C_1 - C_2 x}$ (B) $y = \dfrac{1}{C_1 - C_2 x^2}$

(C) $y = \dfrac{1}{C - x}$ (D) $y = \dfrac{1}{1 - Cx}$

解 (A) $y' = \dfrac{C_2}{(C_1 - C_2 x)^2}$, $y'' = \dfrac{2(C_2)^2}{(C_1 - C_2 x)^3}$,

$$y \cdot y'' - 2(y')^2 = \frac{1}{C_1 - C_2 x} \cdot \frac{2(C_2)^2}{(C_1 - C_2 x)^3} - 2\left[\frac{C_2}{(C_1 - C_2 x)^2}\right]^2$$

$$= 0,$$

又 $y = \dfrac{1}{C_1 - C_2 x}$ 中含有两个任意常数,

因此,是方程的通解，故选 (B).