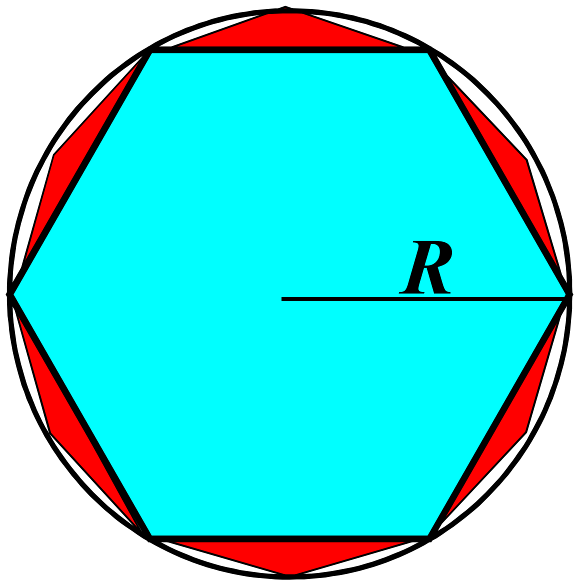
第七章 无穷级数

一、无穷级数的概念
二、无穷级数的基本性质
三、正项级数
四、任意项级数, 绝对收敛
五、幂级数
六、泰勒公式与泰勒级数
七、某些初等函数的幂级数展开式
八、幂级数的应用*

§ 7.1 无穷级数的概念

一、问题的提出

1. 计算圆的面积



正六边形的面积：　a_1

正十二边形的面积：$a_1 + a_2$

……

正 3×2^n 边形的面积：$a_1+a_2+\cdots+a_n$

即　$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$

2. 用分数表示循环小数

(1) 循环小数用分数表示

$$1^\circ \quad 0.333\cdots=\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

$$2^\circ \quad 0.454545\cdots=\frac{45}{99}=\frac{45}{100}+\frac{45}{10000}+\cdots+\frac{45}{100^n}+\cdots$$

(2) 无限不循环小数用分数表示

$$e=2.7182818284\ 5904523536\ 0287471352\cdots$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

$$\pi=3.1415926535\ 8979323846\ 2643383279\cdots$$
$$=4\cdot[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots]$$

二、 级数的概念

1. 定义 形如 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

一般项

的表达式称为(常数项)无穷级数(简称级数).

(1) 级数的部分和___级数前n项的和S_n

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$$

$$S_1=u_1$$

$$S_2=u_1+u_2$$

$$S_3=u_1+u_2+u_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

$$\cdots\cdots$$

(2) 部分和数列___部分和构成的数列 $\{S_n\}$

2. 级数的收敛与发散

当$n\to\infty$时，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列$\{S_n\}$的极限存在，即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ （S是有限常数），

则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，这时S叫做级数的和，并记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果 $\{S_n\}$没有极限，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，

1° 常数项级数收敛(发散)$\Leftrightarrow$它的部分和数列极限存在(不存在).

对给定级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$可唯一确定部分和数列$\{S_n\}$,

反之, 对给定数列 $\{S_n\}$, 令

$$u_1 = S_1$$
$$u_2 = S_2 - S_1$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_n = S_n - S_{n-1}$$
$$\cdots\cdots$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为数列$\{S_n\}$,

2° 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与其部分和数列$\{S_n\}$同时收敛(发散).

且在收敛时有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i$

(3) 当级数收敛时，其和与部分和的差称为级数的余项或余和.

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i}$$

显然有 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$

当n充分大时，$S_n \approx S$， 误差为$|R_n|$.

例1 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots \quad (a\neq 0)$$

的收敛性.

解　如果 $q\neq 1$, 则

$$S_n = a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}$$

$$=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

当$|q|<1$时, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$ 收敛

当$|q|>1$时, $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ 发散

如果 $|q|=1$，则

当 $q=1$时， $S_n = na \to \infty$，级数发散

当 $q=-1$时，

级数变为： $a-a+a-a+a-a+\cdots+a-a+\cdots$

$$S_{2n}=0, \qquad S_{2n+1}=a,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}=0, \qquad \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=a,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，级数发散

综上所述得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{当} |q|<1 \text{时，收敛到} \dfrac{a}{1-q}, \\ \text{当} |q|\geq 1 \text{时，发散.} \end{cases}$

(重要结论)

例1* 讨论下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}=1+3+9+27+\cdots+3^{n}+\cdots$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}3\ln^{n}a=3+3\ln a+3\ln^{2}a+\cdots+3\ln^{n}a+\cdots\quad(a>0)$

解 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ 是公比 $q=-\frac{1}{2}$ 的等比级数, 因

$|q|=\frac{1}{2}<1$, 所以级数收敛, 其和为 $\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}$ 是公比 $q=3$ 的等比级数, $|q|=3>1$,

所以级数发散.

例1* 讨论下列级数的敛散性

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\ln^n a = 3 + 3\ln a + 3\ln^2 a + \cdots + 3\ln^n a + \cdots$ $(a>0)$

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} 3\ln^n a$ 是以ln$a$为公比的等比级数,

故 当 $e^{-1}<a<e$ 时,

$|\ln a|<1$, 级数收敛.

当 $0< a \le e^{-1}$ 或 $a \ge e$ 时,

$|\ln a| \ge 1$, 级数发散.

例2 判定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

的敛散性, 若级数收敛, 求此级数的和.

解 因 $$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

于是 $$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$=1-\frac{1}{n+1},$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$$

故级数收敛, 其和为1.

例3 判定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} + \cdots$$

$$= \ln(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}) = \ln(n+1)$$

的收敛性.

解 $S_n = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n}$

$= \ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \cdots$

$+ [\ln n - \ln(n-1)] + [\ln(n+1) - \ln n]$

$= \ln(n+1),$

因此 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty,$

所以级数发散.

三、小结

常数项级数的基本概念

等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} 当|q|<1时, 收敛, \\ 当|q|\geq 1时, 发散. \end{cases}$$

例3* 判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$$

的收敛性.

解 由 $u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$, 得

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}),$$

于是 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}$,

所以级数收敛, 其和为 $\frac{1}{2}$.