§ 8.4 偏导数与全微分

一、偏导数的定义

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义

1° $z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处对x的偏导数:

$$f'_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

2° $z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处对y的偏导数:

$$f'_y(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=z'_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

3° 函数$z=f(x,y)$ 对自变量x, y的偏导函数:

$$f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

$$f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

可推广到二元以上函数

二、偏导数的计算

求多元函数对一个自变量的偏导函数, 将其他自变量看成常数, 用一元函数的求导法则求.

三、 高阶偏导数

函数的$n-1$阶偏导函数的偏导数称为n阶偏导数.

$\begin{cases} \text{纯偏导} \\ \text{混合偏导} \end{cases}$

注1° 偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 是一个总体记号, 不能拆分

注2° 偏导数存在 $\not\rightarrow$ 连续.

连续 $\not\rightarrow$ 偏导数存在.

作业 $P_{294\text{-}5}$ 习题八 (A)

4. 求下列函数的偏导数

(1) $z=e^{xy}+yx^2$　　(10) $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$

5. 计算下列函数在给定点的偏导数

(1) $z=e^{x^2+y^2}$，求 $z'_x\big|_{\substack{x=1\\y=0}}$，$z'_y\big|_{\substack{x=0\\y=1}}$.

(3) $z=(1+xy)^y$，求 $z'_x\big|_{\substack{x=1\\y=1}}$，$z'_y\big|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

6. 求下列函数的偏导数

(4) $z=e^{xyz}$，求 $z=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$

7. 求下列函数的偏导数

(1) 设 $z=\ln(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y})$，且 $n\geq 2$，求证 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{n}$.

4. 求下列函数的偏导数

(1) $z = e^{xy} + yx^2$　　　(10) $z = \arctan\dfrac{x+y}{x-y}$

解 (1) $z'_x = e^{xy}\cdot y + 2xy$.

$z'_y = e^{xy}\cdot x + x^2$.

(10) $$z'_x = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot 1}{(x-y)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$z'_y = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

5. 计算下列函数在给定点的偏导数

(1) $z=e^{x^2+y^2}$，求 $z'_x\big|_{\substack{x=1\\y=0}}, z'_y\big|_{\substack{x=0\\y=1}}$.

解

$$z'_x=e^{x^2+y^2}\cdot 2x$$

$$z'_y=e^{x^2+y^2}\cdot 2y$$

于是

$$z'_x\big|_{\substack{x=1\\y=0}}=2e\,,$$

$$z'_y\big|_{\substack{x=0\\y=1}}=2e\,.$$

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

5. 计算下列函数在给定点的偏导数

(3) $z=(1+xy)^y$，求 $z'_x\big|_{\substack{x=1\\y=1}}, z'_y\big|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

解

$$z'_x\big|_{\substack{x=1\\y=1}} = (1+x)'\big|_{x=1}$$
$$= 1 .$$

$$z'_y\big|_{\substack{x=1\\y=1}} = [(1+y)^y]'\big|_{y=2}$$
$$= [e^{y\ln(1+y)}]'_y\big|_{y=1}$$
$$= e^{y\ln(1+y)}\cdot[1\cdot\ln(1+y)+y\cdot\frac{1}{1+y}]\big|_{y=1}$$
$$= e^{\ln 2}\cdot[\ln 2+\frac{1}{2}]$$
$$= 1+2\ln 2 .$$

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

6. 求下列函数的偏导数

(4) $u = e^{xyz}$，求 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

解

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xyz} \cdot yz$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{xyz} \cdot xz \cdot yz + e^{xyz} \cdot z$$

$$= (xyz^2 + z)\, e^{xyz}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (2xyz + 1)\, e^{xyz} + (xyz^2 + z)\, e^{xyz} \cdot xy$$

$$= (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)\, e^{xyz}.$$

7. 求下列函数的偏导数

(1) 设 $z=\ln(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y})$，且$n\geq 2$，求证 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{n}$.

证
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}}\cdot(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y})'_x=\frac{x^{\frac{1-n}{n}}}{n(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y})},$$

由对称性知
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^{\frac{1-n}{n}}}{n(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y})},$$

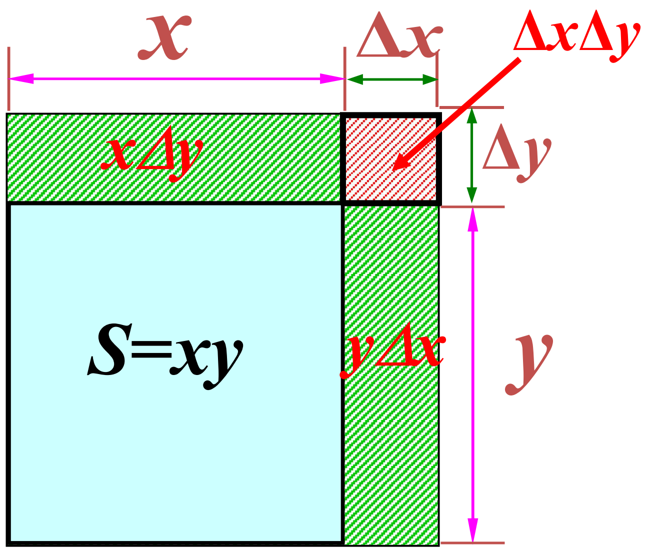
于是有
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\cdot x^{\frac{1-n}{n}}}{n(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y})}+\frac{y\cdot y^{\frac{1-n}{n}}}{n(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y})}=\frac{1}{n}.$$

四、全微分的概念

1. 问题的提出

实例：矩形金属薄片受热后面积的改变量.

设边长分别由x变到 $x+\Delta x$,由y变到 $y+\Delta y$,



矩形面积：$S=xy$,

矩形面积的全增量:

$$\Delta S=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy$$

$$=\underbrace{x\Delta y}_{(1)}+\underbrace{y\Delta x}_{(2)}+\underbrace{\Delta x\Delta y}_{(3)}$$

(1) Δy的线性函数，且为ΔA的主要部分;

(2) Δx的线性函数，且为ΔA的主要部分;

(3) Δx, Δy的高阶无穷小，当$|\Delta x|$, $|\Delta y|$很小时可忽略.

2. 全微分的定义

设函数$z=f(x, y)$ 在点(x, y)的某个邻域内有定义，对于自变量在点(x, y)处的改变量Δx , Δy , 如果函数 z 的改变量可以表示为

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$$

$$= A\cdot\Delta x+ B\cdot\Delta y +o(\rho)\ , \ (\Delta x\to 0, \Delta y\to 0).$$

其中A, B与$\Delta x, \Delta y$ 无关, $o(\rho)$表示一个比ρ更高阶的无穷小量, 则称函数 $z=f(x, y)$ 点(x, y)处可微, 并称$A\Delta x+B\Delta y$为函数$z=f(x, y)$点(x, y)处的全微分, 记为

$$dz =d f(x, y)=A\cdot\Delta x +B\cdot\Delta y\ .$$

A, B为微分系数

若函数在某区域D内各点处处可微分,则称这函数在D内可微分.

结论：如果函数$z=f(x, y)$在点(x, y)处可微, 则函数$z=f(x, y)$在该点连续.

事实上 $\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + o(\rho)$ ， $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z = 0,$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \lim_{\rho\to 0}[f(x,y)+\Delta z]$$

$$=f(x, y)$$

故函数$z=f(x, y)$在点(x, y)处连续.

不连续的函数一定是不可微的.

注: 多元函数的各偏导数存在并不能保证全微分存在.

这是一元函数推广到多元函数出现的又一个原则区别.

一元函数在某点的导数存在 $\Leftrightarrow$ 微分存在.

五. 可微的条件

定理1 (必要条件) 如果函数$z=f(x, y)$在点(x, y)处可微，则$z=f(x, y)$点(x, y)的偏导数$f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$存在，且$z=f(x, y)$点(x, y)的全微分

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy .$$

证　如果函数$z=f(x, y)$在点(x, y)处可微，则在(x, y)的某邻域内有

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + o(\rho),$$

当$\Delta y = 0$时，$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + 0^2} = |\Delta x|$,

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = A\cdot\Delta x + o(|\Delta x|),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = A = f'_x(x, y),$$

同理可得　$f'_y(x, y) = B$.

因此　$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$.

定理2 (充分条件) 设函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的某个邻域内有连续的偏导数$f'_x(x,y), f'_y(x,y)$, 则函数 $z=f(x,y)$点(x,y)处可微, 并且

$$dz = df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy.$$

证 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$$

因$f'_x(x,y), f'_y(x,y)$在点(x,y)的某个邻域内连续,
由拉格朗日中值定理有,

$$\Delta z = f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

$$= [f'_x(x,y)+\alpha]\Delta x + [f'_y(x,y)+\beta]\Delta y$$

其中 $\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha = 0,\quad \lim\limits_{\rho\to 0}\beta = 0,$

$$\Delta z = f'_x(x,y)\Delta x + \alpha\,\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \beta\Delta y$$

因为 $\left|\dfrac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}\right| = \dfrac{|\alpha\Delta x+\beta\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \dfrac{|\alpha\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} + \dfrac{|\beta\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

$$\le |\alpha| + |\beta| = o(\rho),$$

于是 $\Delta z = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + o(\rho)$

故函数 $z=f(x,y)$点(x,y)处可微, 且

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy.$$

全微分的定义可推广到三元及三元以上函数

$$du = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz.$$

六、多元函数连续、可偏导、可微的关系

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

偏导数连续 $\longrightarrow$ 函数可微 $\longrightarrow$ 函数可偏导

函数可微 $\longrightarrow$ 函数连续

注意：与一元函数有很大区别

例6 求函数 $z=e^{xy}$ 的全微分,并计算函数在$x=2, y=1$, $\Delta x=0.15, \Delta y=-0.1$时的全微分.

解

$$z'_x=e^{xy}\cdot(xy)'_x=ye^{xy},$$

$$z'_y=e^{xy}\cdot(xy)'_y=xe^{xy},$$

于是函数的全微分

$$dz=z'_x\cdot dx+z'_y\cdot dy=ye^{xy}dx+xe^{xy}dy.$$

故函数在$x=2, y=1, \Delta x=0.15, \Delta y=-0.1$时的全微分:

$$dz=1\cdot e^{2\cdot 1}\cdot 0.15+2e\cdot e^{2\cdot 1}\cdot(-0.1)$$

$$=-0.05e^2.$$

例7 求函数 $u = xy+yz+zx$ 的全微分.

解 $u'_x = (xy+yz+zx)'_x = y+z$

$u'_y = (xy+yz+zx)'_y = x+z$

$u'_z = (xy+yz+zx)'_z = y+x$

所求全微分

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz$$

$$= (y+z)dx + (x+z)dy + (y+x)dz .$$

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

例6* 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$, 则

$dz|_{(1,0)}=$ __$2e\mathrm{d}x+(e+2)\mathrm{d}y$__.

2005数3

解

$$z'_x=e^{x+y}+xe^{x+y}+\ln(1+y)$$

$$z'_y=xe^{x+y}+\frac{1+x}{1+y},$$

于是 $z'_x(1,0)=2e$,

$$z'_y(1,0)=e+2,$$

故函数在点(1,0)处的全微分为

$$dz|_{(1,0)}=2e\,\mathrm{d}x+(e+2)\mathrm{d}y\ .$$

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

例6* 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $dz|_{(1,0)}=$ __$2e\,dx+(e+2)\,dy$__.

解2 因为 $z'_x(1,0)=(xe^x)'|_{x=1}=(e^x+xe^x)|_{x=1}$

$$=2e,$$

$$z'_y(1,0)=(e^{1+y}+2\ln(1+y))'|_{y=0}$$

$$=(e^{1+y}+\frac{2}{1+y})|_{y=0}$$

$$=e+2,$$

2005数3

所以函数在点(1,0)处的全微分为

$$dz|_{(1,0)}=2e\,dx+(e+2)\,dy.$$

当 y 保持不变时，函数 $dy=\Delta y=0$,

(1) $dz=f'_x(x,y)dx$ 称为函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处对x的偏微分.

(2) $dz=f'_y(x,y)dy$ 称为函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处对y的偏微分.

(3) 全微分在近似计算中的应用

当函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处的偏导数$f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$连续, 且 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 都较小时, 有近似公式

$$\Delta z\approx dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy.$$

即 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy.$

例8 要造一个无盖的圆柱形水槽, 其内半径为2米, 高为4米, 厚度均为0.01米, 求需用材料多少立方米.

解 已知: 圆柱体的半径 $r=2$米, 高$h=4$米, $\Delta r=\Delta h=0.01$米,

因圆柱体体积: $V=\pi r^2 h$,

于是: $V'_r=2\pi rh$, $V'_h=\pi r^2$,

$$\Delta V\approx dV=V'_r\,\Delta r+V'_h\,\Delta h$$

$$=2\pi\times2\times4\times0.01+\pi\times2^2\times0.01$$

$$=0.2\pi\text{(立方米)}.$$

直接计算有 $\Delta V=2\pi(r+\Delta r)^2\times(h+\Delta h)-\pi r^2 h$

$$=2\pi\times2.01^2\times4.01-\pi\times2^2\times4$$

$$=0.200801\pi.$$

七、小结

1 偏导数的定义（偏增量比的极限）

2 偏导数的计算

3 高阶偏导数 $\begin{cases} \text{纯偏导} \\ \text{混合偏导(相等的条件)} \end{cases}$

4 多元函数全微分的概念及其求法

5 多元函数连续、可导、可微的关系：

偏导数连续 → 函数可微 → 函数可偏导

函数可微 → 函数连续

作业 P_{295} 习题八 (A)

8. 求下列函数的全微分

(1) $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

(4) $z=\arctan(xy)$

(5) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$

9 求下列在给定条件下的全微分的值

(2) 函数 $z=e^{xy}$, 当$x=1, y=1, \Delta x=0.15, \Delta y=0.1$时.

练习题

1. 设 $z=(x+e^{y})^{x}$，求 $z'_x\big|_{(1,0)}$，$z'_y\big|_{(1,0)}$ 和 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0)}$.

2. 求函数 $u=\sin(x^2+y^3+z^2)$ 的全微分.

练习题1. 设 $z=(x+e^{y})^{x}$，求 $z'_x|_{(1,0)}$，$z'_y|_{(1,0)}$ 和 $dz|_{(1,0)}$.

解

$$z'_x|_{(1,0)}=[(x+1)^{x}]'|_{x=1}$$

$$=[e^{x\ln(x+1)}]'|_{x=1}$$

$$=[e^{x\ln(x+1)}]\cdot[\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}]\,|_{x=1}$$

$$=2\ln2+1 .$$

$$z'_y|_{(1,0)}=(1+e^{y})'|_{y=0}$$

$$=e^{y}|_{y=0}$$

$$=1 .$$

2009数3

$$dz|_{(1,0)}=(2\ln2+1)dx+dy .$$

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

练习题2. 求函数$u=\sin(x^2+y^2+z^2)$的全微分.

解

$$u'_x=\cos(x^2+y^2+z^2)\cdot 2x\ ,$$

$$u'_y=2y\cdot\cos(x^2+y^2+z^2)\ ,$$

$$u'_z=2z\cdot\cos(x^2+y^2+z^2),$$

因此所求全微分

$$du=u'_x\cdot dx+u'_y\cdot dy+u'_z\cdot dz$$

$$=2\cos(x^2+y^2+z^2)\cdot(xdx+ydy+zdz)$$