§ 7.4 任意项级数 绝对收敛

1° 交错级数 — 正、负项相间的级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{ 或 } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \quad (\text{其中} u_n>0)$$

莱布尼茨定理: 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件:

(1) $u_n \geq u_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$;

(2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数收敛, 且其和 $S\leq u_1$.

2° 任意项级数 — 正项和负项任意出现的级数.

定理1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

定理7.12 如果任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$满足条件 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, 则

(1) 当$l<1$时，级数绝对收敛;

(2) 当$l>1$时, 级数发散;

定理1* 如果任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$满足条件 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时，级数绝对收敛;

(2) 当 $\rho>1$时, 级数发散;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0,\quad \forall x\in R$$

7. 判定下列交错级数的敛散性.

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$

解 $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,

而对 $\forall n\in N$, $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$,

由**Leibniz**定理知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 条件收敛.

7. 判定下列交错级数的敛散性 .

(2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots$

解　级数的通项　$u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$$

$$=0<1$$

所以，级数 $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots$ 绝对收敛 .

7. 判定下列交错级数的敛散性 .

(3) $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\cdots$

解 级数的通项 $u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0,$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$

因此，交错级数 $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\cdots$ 发散.

8. 判定下列级数哪些是绝对收敛, 哪些是条件收敛.

(1) $1-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}-\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{1}{9^2}-\cdots$

解　级数的通项 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)^2}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4},$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,

所以级数 $1-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}-\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{1}{9^2}-\cdots$ 绝对收敛.

8. 判定下列级数哪些是绝对收敛, 哪些是条件收敛.

(2) $$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$$

解 级数的通项 $$u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$$

$$|u_n|=\frac{1}{n\cdot 2^n}\leq\frac{1}{2^n}$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛,

所以, 级数 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$ 绝对收敛.

8. 判定下列级数哪些是绝对收敛, 哪些是条件收敛.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{(n+1)^2}$

解 级数的通项 $u_n=\dfrac{\sin(na)}{(n+1)^2}$

$$|u_n|=\frac{|\sin(na)|}{(n+1)^2}\le\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n^2}$$

$n=1, 2, 3,\cdots$

又 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

所以, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{(n+1)^2}$ 绝对收敛.

§7.5 幂级数

一、幂级数的概念

二、幂级数的收敛性

三、幂级数的性质

一、幂级数的概念

1 定义1: 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的级数称为$(x-x_0)$的幂级数. a_n称为幂级数的系数.

当$x_0=0$时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

2 收敛性:

例如 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

(1) 当$|x|<1$时, 级数绝对收敛; $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$,

(2) 当$|x|\geq 1$时, 级数发散.

(1) 收敛点与收敛域:

定义2　如果当$x_0 \in R$时,幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛,

则称x_0为幂级数的收敛点, 否则称为发散点.

幂级数的全部收敛点构成的集合称为幂级数的收敛域.

全部发散点构成的集合称为幂级数的发散域.

例如　级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

收敛域: $(-1, 1)$.

发散域: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

(2) 和函数:

定义3 在收敛域内幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$的和是$x$的函数$S(x)$, 称$S(x)$为幂级数的和.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

幂级数的部分和 $S_n(x)$, $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$

余项: $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \quad (x\text{在收敛域上})$$

二、幂级数的收敛性

定理1* (阿贝尔(Abel)定理)

阿贝尔(Abel)(挪威) 1802–1829

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$x=x_0(x_0\neq 0)$处收敛, 则它在满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切x处绝对收敛;

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$x=x_0$处发散, 则它在满足不等式 $|x|>|x_0|$的一切x处发散.

证 (1) 因$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 所以 $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$

从而数列$\{a_n x_0^n\}$有界, 即存在常数 $M>0$,

使得 $|a_n x_0^n| \le M, \quad n=1,2,3,\cdots$

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}| = |a_n x_0^n| \cdot |\frac{x}{x_0}|^n \le M \cdot |\frac{x}{x_0}|^n$$

$|x|<|x_0|$, 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M|\frac{x}{x_0}|^n$ 收敛;

于是 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛;

因此 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x|<|x_0|$ 处绝对收敛;

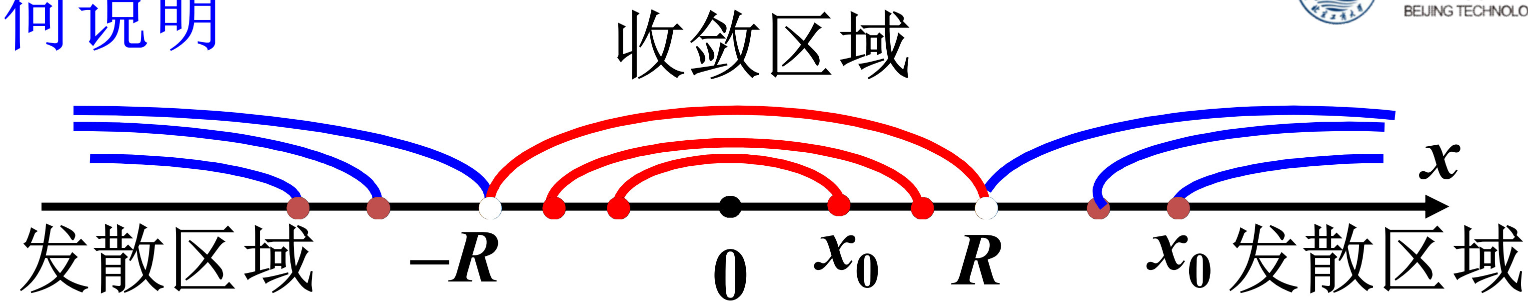
(2) 反证法: 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0$ 处发散,

假设有一点 x_1, $|x_1|>|x_0|$ 处, 级数收敛,

由(1)结论, 级数当 $x=x_0$ 时应收敛;

这与已知矛盾.

几何说明



推论1 如果幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$不是仅在$x=0$一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛,则必有一个完全确定的正数R存在,它具有下列性质:

当$|x|<R$时, 幂级数绝对收敛;

当$|x|>R$时, 幂级数发散;

当$x=R$与$x=-R$时, 幂级数可能收敛也可能发散.

定义4: 正数R 称为幂级数的收敛半径.

开区间 $(-R, R)$ 称为幂级数的收敛区间.

幂级数的收敛域可能为

$$(-R, R), \quad [-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R],$$

规定 (1)幂级数只在$x=0$处收敛, $R=0$,

(2)幂级数对一切 x 都收敛, $R=+\infty$,

收敛区间: $(-\infty, +\infty)$.

定理7.13 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

则 (1)当$0< l <+\infty$时，$R=\dfrac{1}{l}$;

(2)当$l=0$时，$R=+\infty$;

(3)当$l=+\infty$时，$R=0$.

证 对级数$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$应用比值判别法，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = l\,|x|,$$

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \quad (0 < l < +\infty)$存在,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l\,|x|$

由比值判别法,

当$l\,|x| < 1$, 即 $|x| < l^{-1}$时,

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

当$l\,|x| > 1$, 即 $|x| > l^{-1}$时,

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

所以幂级数的收敛半径 $R = \frac{1}{l}$.

(2) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l = 0,$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l\,|x|$$

则对$\forall x\neq 0$, 均有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = 0 < 1,$$

从而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

所以收敛半径 $R = +\infty$.

(3) 如果 $l = +\infty$,

则对$\forall x\neq 0$, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$都发散,

因此收敛半径 $R = 0$. 定理证毕.

例1 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域.

解 因 $l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1,$

所以 $R=1,$

当$x=-1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

当$x=1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛,

$=\ln 2$

故幂级数的收敛域为: $(-1,1]$.

例2 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$ 的收敛半径和收敛域.

解 因 $l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}}\right|=1,$

得收敛半径 $R=1,$

当 $x=-1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}1$ 发散,

当 $x=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散,

故幂级数的收敛域为: $(-1,1)$.

例3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$ 的收敛半径和收敛域.

解　因 $$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\boxed{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n}$$

$$=0\times e^{-1}=0,$$

$$R=+\infty,$$

所以幂级数的收敛域为: $(-\infty,+\infty)$.

P_{237}例 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$ 的收敛半径和收敛域 .

解 因 $l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!}$$

$$= +\infty,$$

于是 $R = 0$,

所以级数只在$x = 0$处收敛.

定理2* 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的系数满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

则 (1)当 $0< l<+\infty$ 时，$R=\dfrac{1}{l}$；

(2)当 $l=0$ 时，$R=+\infty$；

(3)当 $l=+\infty$ 时，$R=0$.

当 $|x-x_0|<R$ 时, 幂级数绝对收敛;

当 $|x-x_0|>R$ 时, 幂级数发散;

当 $x=x_0+R$ 与 $x=x_0-R$ 时, 幂级数可能收敛也可能发散.

收敛区间为 $(x_0-R,\ x_0+R)$.

例1* 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot n}$的收敛半径和收敛域.

解 因 $l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}}{\frac{1}{2^n\cdot n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$,

所以收敛半径 $R=2$,

故当$|x-1|<2$, 即$-1<x<3$时, 级数绝对收敛 ;

当 $x=-1$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛,

当 $x=3$时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

故收敛域为 $[-1, 3)$.

例4 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域.

解1: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(x+\frac{1}{2})^n$,

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2,$$

收敛半径 $R=\frac{1}{2}$,

当 $|x+\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$, 即 $-1<x<0$ 时, 级数绝对收敛;

当$x=-1$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

当$x=0$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}$ 的收敛域为: $[-1, 0)$.

例4 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}$的收敛半径和收敛域.

解2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n} \overset{t=2x+1}{=\!=\!=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

即 $R'=1$,

当$|t|=|2x+1|<1$, 即 $-1<x<0$时, 级数绝对收敛;

当 $x=-1$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛,

当 $x=0$时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}$的收敛域为: $[-1, 0)$,

收敛半径为: $R=\frac{1}{2}$.

例4 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域.

解3 应用比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2x+1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x+1)^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(2x+1)}{n+1}\right|=|2x+1|,$$

当 $|2x+1|<1$, 即 $-1<x<0$ 时, 级数绝对收敛;

当 $|2x+1|>1$, 即 $x<-1$ 或 $x>0$ 时, 级数发散;

当 $x=-1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛,

当 $x=0$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}$ 的收敛域为: $[-1, 0)$,

收敛半径为: $R=\frac{1}{2}$.

例5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n x^{2n}}{n}$ 的收敛半径和收敛域.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n x^{2n}}{n} \overset{t=x^2}{=\!=\!=} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n t^n}{n}$ 缺少奇次幂的项 不满足定理2的条件

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1} = 3, \quad R' = \frac{1}{3},$$

当 $|t|=x^2<\frac{1}{3}$, 即 $|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, 级数绝对收敛,

当 $x^2>\frac{1}{3}$, 即 $|x|>\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, 级数发散,

当 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n x^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛.

所以原级数的收敛域为: $[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$

收敛半径 $R=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

例5 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n x^{2n}}{n}$的收敛半径和收敛域.

解　应用比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}x^{2(n+1)}}{n+1}}{\frac{3^n x^{2n}}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3n x^2}{n+1}=3x^2,$$

当$3x^2<1$, 即 $|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$时, 级数绝对收敛,

当$3x^2>1$, 即 $|x|>\frac{1}{\sqrt{3}}$时, 级数发散,

当 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n x^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, 收敛.

于是原级数的收敛域为:$[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$,

收敛半径: $R=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

例2* 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$的收敛半径和收敛域.

解 应用比值判别法　　缺少偶次幂的项

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right|x^2=x^2,$$

当$x^2<1$，即 $|x|<1$时，级数绝对收敛，

当$x^2>1$，即 $|x|>1$时，级数发散，

当$x=1$时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛,

当$x=-1$时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}$ 收敛,

所以原级数的收敛区域为：$[-1, 1]$,

收敛半径：$R=1$.

9. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)(2n)}$$

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}$$

(10) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^n}+3^n\right]x^n$$

(11) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$$

(14) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}$$

练习题1 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$ 的收敛半径和收敛域.

练习题2 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径和收敛区间.

练习题1 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$ 的收敛半径和收敛域.

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{2^n}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2,$

收敛半径 $R=\frac{1}{2}$,

故当 $|x-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$, 即 $0<x<1$ 时，级数绝对收敛；

当 $x=0$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散

当 $x=1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛

故收敛域为 $(0,1]$.

练习题2 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径和收敛区间.

解 应用比值判别法　　　　缺少奇次幂的项

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{[2(n+1)]!\,x^{2(n+1)}}{[(n+1)!]^2}}{\frac{(2n)!\,x^{2n}}{(n!)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)(2n+1)x^2}{(n+1)^2}\right|$$

$$= 4x^2,$$

当 $4x^2<1$, 即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时, 级数绝对收敛,

当 $4x^2>1$, 即 $|x|>\frac{1}{2}$ 时, 级数发散,

所以原级数的收敛半径: $R=\frac{1}{2}$,

收敛区间为: $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.