Оглавление

0.1 Номер 1

Найдите предел функции, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{x}}{3x^2+4x-7}.$$

$$lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{x}}{3x^2+4x-7}$$

Домножим и разделим на выражение $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(2-x)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$, чтобы в числителе получилась разность кубов. Тогда дробь после домножения будет выглядеть так:

$$\frac{2-x-x}{(3x^2+4x-7)(\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(2-x)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

В числителе остается $2*(1-x)$, а в знаменателе множитель $(3x^2+4x-7)$ можно разложить на скобки $(1-x)(-3x-7)$ Значит дробь можно сократить

$$\frac{2}{(-3x-7)(\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(2-x)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

Теперь, если подставить x = 1, то неопределенности не будет:

$$\frac{2}{(-3\cdot 1-7)(\sqrt[3]{(2-1)^2}+\sqrt[3]{(2-1)}\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1^2})}=-\frac{1}{15}$$

0.2 Номер 2

Исследуйте на экстремум функцию двух переменных:

$$f(x;y)=x^3+3xy^2-15x-12y+7.$$

Найдем критические точки - первая производная по x и первая производная по y равны 0.

$$\begin{cases} f_x^{'} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ f_y^{'} = 6xy - 12 = 0 \end{cases} \implies xy = 2 \implies x = \frac{2}{y} \implies \frac{12}{y^2} + 3y^2 - 15 = 0 \implies$$

$$y = \{-2, -1, 1, 2\}, x = \{-1, -2, 2, 1\}$$

Получились 4 точки $P_1(-2,-1), P_2(-1,-2), P_3(1,2), P_4(2,1)$, для которых нужно проверить условие экстремума. Найдем вторые производные и составим матрицу:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}^{''} & f_{xy}^{''} \\ f_{xy}^{''} & f_{yy}^{''} \end{vmatrix}$$

$$f_{xx}^{''} = 6x, f_{xy}^{''} = 6y, f_{yy}^{''} = 6x$$

Для точки $P_1(-2,-1)$ $f_{xx}^{''} = -12, f_{xy}^{''} = -6, f_{yy}^{''} = -12$

$\begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} > 0 \implies$ эта точка является точкой экстремума, $f_{xx}^{''} = -12 < 0 \implies$ это точка минимума

Дла точки $P_2(-1,-2)$ $f_{xx}^{''} = -6, f_{xy}^{''} = -12, f_{yy}^{''} = -6$

$$\begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} < 0 \implies \text{эта точка не является точкой экстремума}$$

Дла точки $P_3(1,2)$ $f_{xx}^{''} = 6, f_{xy}^{''} = 12, f_{yy}^{''} = 6$

$$\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} < 0 \implies \text{эта точка не является точкой экстремума}$$

Дла точки $P_4(2,1)$ $f_{xx}^{''} = 12, f_{xy}^{''} = 6, f_{yy}^{"} = 12$

$\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} > 0 \implies$ эта точка является точкой экстремума, $f_{xx}^{''} = 12 > 0 \implies$ это точка максимума

0.3 Номер 3

Исследуйте функцию и постройте её график: $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

Шаг 1: Область определения.
Функция определена при $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$.
Шаг 2: Нули функции.
$f(x) = 0 \implies x = 0$
Шаг 3: Чётность.

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt[3]{(-x)^2 - 1}} = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x)^2 - 1}} = -f(x)$$

Значит это нечётная функция.
Шаг 4: Промежутки знакопеременности.
При $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \to f(x) < 0$, $x \in (-1, 0) \cup 1, \infty) \to f(x) > 0$
Шаг 5: Возрастание/убывание.
Посчитаем производную:

$$f^{'}(x) = \frac{-3 + x^2}{\sqrt[3]{3(-1 + x^2)^4}}$$

Нули производной: $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$ функция возрастает при $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, убывает при $x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$
Шаг 6: Выпуклость/вогнутость.

Найдем вторую производную:

$$f^{''}(x) = \frac{-2x(x^2-9)}{\sqrt[3]{9(-1+x^2)^7}}$$

Найдём нули второй проиводной:

$$f^{''}(x) = 0 \to x \in \{-3, 0, 3\}$$

Рассмотрим значения второй производной в окрестностях этих точек.

При $x < -3$ $f^{''}(x) > 0$, при $x > -3$ $f^{''}(x) < 0$, значит -3 - точка перегиба.
При $x < 0$ $f^{''}(x) > 0$, при $x > 0$ $f^{''}(x) < 0$, значит 0 - точка перегиба.
При $x < 3$ $f^{''}(x) < 0$, при $x > 3$ $f^{''}(x) > 0$, значит 3 - точка перегиба.

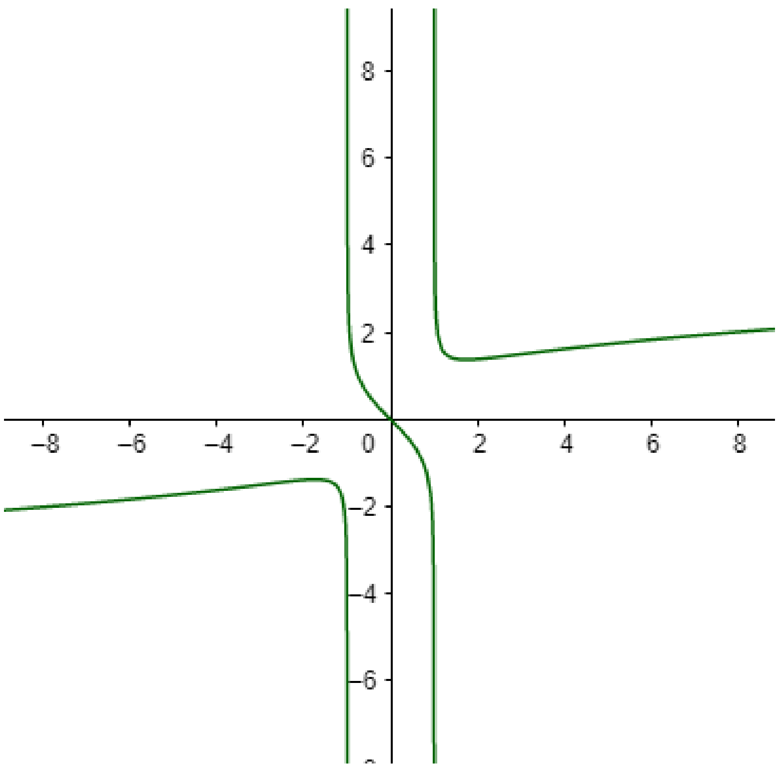
$$x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (1, 3) \quad - \text{функция выпукла}$$

$$x \in (-3, -1) \cup (0, 1) \cup (3, \infty) \quad - \text{функция вогнута}$$

Шаг 7: Асимптоты.

$$lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1} \cdot x} = 0$$

Наклонных асимптот не будет, будут только вертикальные в точках разрыва: $x = -1, x = 1$
График функции:



0.4 Номер 4

Касается ли прямая, заданная параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases},$$

сферы $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$? Ответ обосновать.

Подставим x, y и z, выраженные через t в уравенение сферы и посмотрим, сколько корней получится у квадратного уравнения. Эти корни и будут давать общие точки прямой и сферы, если подставить в параметрическое уравнение прямой.

$$(2t+2-1)^2+(-t+1-1)^2+(t+1)^2=4 \Leftrightarrow 6t^2+6t-2=0 \rightarrow D=36+48=84, \sqrt{D}=6*\sqrt{\frac{7}{3}} \rightarrow$$

$$t_{1,2}=\frac{-6\pm 6*\sqrt{\frac{7}{3}}}{12} \implies t_1=-\frac{1-\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}, t_1=\frac{\sqrt{\frac{7}{3}}-1}{2}$$

Поскольку две общие точки, то это не касательная.

0.5 Номер 5

Решите матричное уравнение $C \cdot X \cdot C^2 = B$, где $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Выполните проверку, подставив X в исходное уравнение.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Домножим на обратные матрицы с нужных сторон:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Дальше умножение и сложение чисел много раз.

0.6 Номер 6

Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора $A(\vec{x}) = A(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_3; 4x_2; x_1 + x_3)$.

Составим матрицу линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значния:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow (1-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) - 4 + 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0, 2, 4$$

Подставим поочереди значения и найдем собственные векторы:

$$\lambda = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Первая и третья строчка линейно зависимы. Получается $4x_2 = 0 \to x_2 = 0, x_1 + x_3 = 0 \to x_1 = -x_3$. Подставим $x_3 = 1$, тогда собственный вектор (-1, 0, 1)

$$\lambda = 2, \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Первая и третья строчка линейно зависимы. Получается $2x_2 = 0 \to x_2 = 0, -x_1 + x_3 = 0 \to x_1 = x_3$. Подставим $x_3 = 1$, тогда собственный вектор (1, 0, 1)

$$\lambda = 4, \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Для любого x_2 система имеет решение, значит для удобства возьмем 1. $x_1 = x_3 = 0$, тогда собственный вектор (0, 1, 0)

0.7 Номер 7

Выведите табличное значение производной функции $f(x) = sinx$.

По определению

$$f^{'}(x) = lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$$

Тогда

$$f^{'}(sin(x)) = lim_{\Delta \to 0} \frac{sin(x+\Delta) - sin(x)}{\Delta} = lim_{\Delta \to 0} \frac{sin(x)cos(\Delta) + cos(x)sin(\Delta) - sin(x)}{\Delta}$$

При $\Delta \to 0$: $cos(\Delta) = 1, sin(\Delta) = 0$, значит числитель равен $sin(x) + cos(x)sin(\Delta) - sin(x) = cos(x)sin(\Delta)$.

По первому замечательному пределу

$$lim_{\Delta \to 0} \frac{cos(x)sin(\Delta)}{\Delta} = cos(x)$$

0.8 Номер 8

Приведите пример линейного оператора, действующего на линейном пространстве

$$L = \{\vec{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

и имеющего ровно два собственных значения 2 и 4. Ответ обосновать.

Два собственных значения, значит в действительных числах уравнение, полученное после вычитания единичной матрицы, умноженной на λ, должно иметь только эти два корня. Тогда можно сделать матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Уравнение получится $(2-\lambda)^2(4-\lambda)^2 = 0$. Оно как раз имеет два корня, удовлетворяющих условию.

0.9 Номер 9

Укажите все свойства смешанного произведения векторов.

Пусть

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}, \vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - ортонормированный правый базис. Тогда смешанное произведение -

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Свойства:

-Кососимметричность.

$$(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b) = -(b, a, c) = -(c, b, a) = -(a, c, b);$$

-Три вектора комплонарны (лежат в одной плоскости), если смешанное произведение равно 0.

-Если оно больше 0 - правая тройка векторов. Меньше - левая тройка векторов.