

Оглавление

0.1	Определение предела функции одной переменной при $x \rightarrow a$, $x \rightarrow \infty$	2
0.2	Первый замечательный предел (вывод формулы)	2
0.3	Определение производной одной переменной	2
0.4	Вывод производной синуса, косинуса, x^2, x^3	3
0.5	Вывод формулы производной частного	3
0.6	Определение дифференциала функции (привести пример)	3
0.7	Формула Тейлора для произвольной функции одной переменной	4
0.8	Полный дифференциал функции двух переменных (определение + пример)	4
0.9	Необходимое и достаточное условие экстремума функции двух переменных	4

0.1 Определение предела функции одной переменной при $x \rightarrow a$, $x \rightarrow \infty$

Рассмотрим функцию $f(x)$ при $x \rightarrow a$. Вообще есть два определения, но на лекциях рассказывали про Коши, на экзамене видимо тоже будут спрашивать Коши, поэтому рассмотрю именно его.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x : |x - a| < \delta \Rightarrow |A - f(x)| < \varepsilon$$

Это значит, что какую бы маленькую ε окрестность по значениям мы ни взяли, мы всегда сможем выбрать такую δ окрестность по x , что значения функции от всех x внутри этой окрестности лежат в ε окрестности. Тогда A - предел.

Рассмотрим функцию при $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall |x| > N : |f(x) - A| < \varepsilon$$

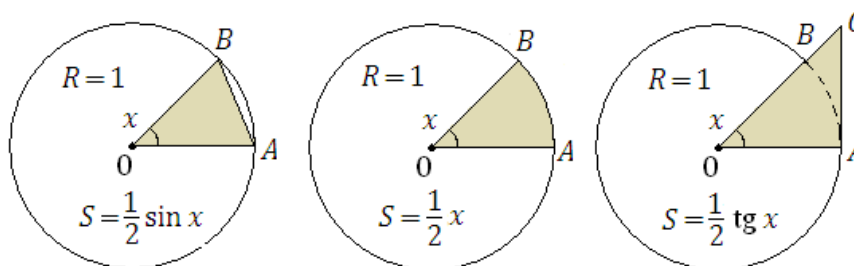
Для любой ε окрестности найдется такое число N , что значения функции от всех x , по модулю превосходящих это число, будут лежать в ε .

0.2 Первый замечательный предел (вывод формулы)

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Так как $\sin(x)$ - четная функция, то можно рассмотреть для положительных малых значений.



Пусть x - угол, тогда сравним площади фигур. Для $0 < x < \frac{\pi}{2}$ это верно. Тогда можно записать неравенство:

$$\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x)$$

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Разделим все на $\sin(x)$:

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

Возьмем обратное от каждого:

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$$

Так как $\cos(x) = 1$ при $x \rightarrow 0$, то $\frac{\sin(x)}{x}$ оказывается зажат (теорема о двух милиционерах) при $x \rightarrow 0$ между 1 и 1, значит

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

0.3 Определение производной одной переменной

Пусть функция определена в некоторой окрестности точки x_0 , тогда производная функции в точке x_0 - это предел, если он существует:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

0.4 Вывод производной синуса, косинуса, x^2, x^3

По определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}$$

Тогда для синуса:

$$\sin'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta) - \sin(x)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(\Delta) + \cos(x)\sin(\Delta) - \sin(x)}{\Delta}$$

При $\Delta \rightarrow 0$: $\cos(\Delta) = 1$, $\sin(\Delta) = 0$ значит числитель равен:

$$\sin(x) + \cos(x)\sin(\Delta) - \sin(x) = \cos(x)\sin(\Delta)$$

По первому замечательному пределу

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\sin(\Delta)}{\Delta} = \cos(x)$$

Для косинуса:

$$\cos'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta) - \cos(x)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(\Delta) - \sin(x)\sin(\Delta) - \cos(x)}{\Delta}$$

Представим это в виде суммы двух дробей:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(\Delta) - \cos(x)}{\Delta} + \frac{-\sin(x)\sin(\Delta)}{\Delta}$$

При $\Delta \rightarrow 0$: $\cos(\Delta) = 1$, $\sin(\Delta) = 0$, значит числитель первой дроби равен 0, а вторая дробь по первому замечательному пределу равна $-\sin(x)$.

Для x^2

$$(x^2)' = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta)^2 - x^2}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{2x\Delta + \Delta^2}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2x + \Delta = 2x$$

Для x^3 :

$$(x^3)' = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta)^3 - x^3}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta + 3x\Delta^2 + \Delta^3}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} 3x^2 + 3x\Delta + \Delta^2 = 3x^2$$

0.5 Вывод формулы производной частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+\Delta)}{v(x+\Delta)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta)v(x) - v(x + \Delta)u(x)}{v(x)v(x + \Delta)\Delta}$$

Добавим и вычтем из знаменателя $u(x)v(x)$, тогда там образуются две производные, а снизу останется знаменатель в квадрате:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta)v(x) - u(x)v(x) - v(x + \Delta)u(x) + u(x)v(x)}{v(x)v(x + \Delta)\Delta} = \\ = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{u(x)\frac{dv}{dx} - v(x)\frac{du}{dx}}{v(x)v(x + \Delta)} = \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

0.6 Определение дифференциала функции (привести пример)

Дифференциал функции в некоторой точке x_0 - линейная часть приращения функции. Обозначается:

$$df(x) = f'(x)dx$$

Примеры: Найти дифференциал функции x^2 :

$$d(x^2) = f'(x^2)dx = 2x dx$$

Найти дифференциал функции $\ln(x)$:

$$d(\ln(x)) = f'(\ln(x))dx = \frac{dx}{x}$$

0.7 Формула Тейлора для произвольной функции одной переменной

Если функция $f(x)$ имеет $n + 1$ производную на отрезке, то ее можно записать в виде многочлена $P_n(x)$ степени не выше n , значение которого в точке x_0 равняется значению функции в этой точке.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n$$

Остаточный член в форме Пеано:

$$R_n = o((x - x_0)^n)$$

Остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \text{ где } 0 < \theta < 1$$

0.8 Полный дифференциал функции двух переменных (определение + пример)

Полный дифференциал функции:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

Найти полный дифференциал функции $z = x^2 + y^3$:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

$$z'_x = 2x, z'_y = 3y^2$$

$$dz = 2x dx + 3y^2 dy$$

0.9 Необходимое и достаточное условие экстремума функции двух переменных

Теорема о необходимом условии экстремума функции двух переменных

Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума при $x = x_0, y = y_0$ то каждая частная производная первого порядка от z или обращается в ноль при этих значениях аргументов, или не существует.

Теорема о достаточном условии экстремума функции двух переменных

Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Пусть, кроме того, точка $M_0(x_0, y_0)$ является критической точкой функции $f(x, y)$, т.е.

$$\begin{cases} f'_x|_{M_0} = 0 \\ f'_y|_{M_0} = 0 \end{cases}$$

Составим такую матрицу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

Тогда при:

1. $\Delta > 0$ и $f''_{xx} < 0$ имеет максимум
2. $\Delta > 0$ и $f''_{xx} > 0$ имеет минимум
3. $\Delta < 0$ не имеет экстремума
4. Если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть (требуется дополнительное исследование).