

# Оглавление

0.1	Номер 1 . . . . .	1
0.2	Номер 2 . . . . .	1
0.3	Номер 3 . . . . .	2
0.4	Номер 4 . . . . .	3
0.5	Номер 5 . . . . .	4
0.6	Номер 6 . . . . .	4
0.7	Номер 7 . . . . .	5
0.8	Номер 8 . . . . .	5
0.9	Номер 9 . . . . .	5

## 0.1 Номер 1

Найдите предел функции, не пользуясь правилом Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{x}}{3x^2 + 4x - 7}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{x}}{3x^2 + 4x - 7}$$

Домножим и разделим на выражение  $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(2-x)}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$ , чтобы в числителе получилась разность кубов. Тогда дробь после домножения будет выглядеть так:

$$\frac{2 - x - x}{(3x^2 + 4x - 7)(\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(2-x)}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}$$

В числителе остается  $2 * (1 - x)$ , а в знаменателе множитель  $(3x^2 + 4x - 7)$  можно разложить на скобки  $(1 - x)(-3x - 7)$  Значит дробь можно сократить

$$\frac{2}{(-3x - 7)(\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(2-x)}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}$$

Теперь, если подставить  $x = 1$ , то неопределенности не будет:

$$\frac{2}{(-3 \cdot 1 - 7)(\sqrt[3]{(2-1)^2} + \sqrt[3]{(2-1)}\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1^2})} = -\frac{1}{15}$$

## 0.2 Номер 2

Исследуйте на экстремум функцию двух переменных:

$$f(x; y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 7.$$

Найдем критические точки - первая производная по x и первая производная по y равны 0.

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ f'_y = 6xy - 12 = 0 \end{cases} \implies xy = 2 \implies x = \frac{2}{y} \implies \frac{12}{y^2} + 3y^2 - 15 = 0 \implies$$

$$y = \{-2, -1, 1, 2\}, x = \{-1, -2, 2, 1\}$$

Получились 4 точки  $P_1(-2, -1), P_2(-1, -2), P_3(1, 2), P_4(2, 1)$ , для которых нужно проверить условие экстремума. Найдем вторые производные и составим матрицу:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

$$f''_{xx} = 6x, f''_{xy} = 6y, f''_{yy} = 6x$$

Для точки  $P_1(-2, -1)$   $f''_{xx} = -12, f''_{xy} = -6, f''_{yy} = -12$

$$\begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} > 0 \implies \text{эта точка является точкой экстремума, } f''_{xx} = -12 < 0 \implies \text{это точка минимума}$$

Для точки  $P_2(-1, -2)$   $f''_{xx} = -6, f''_{xy} = -12, f''_{yy} = -6$

$$\begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} < 0 \implies \text{эта точка не является точкой экстремума}$$

Для точки  $P_3(1, 2)$   $f''_{xx} = 6, f''_{xy} = 12, f''_{yy} = 6$

$$\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} < 0 \implies \text{эта точка не является точкой экстремума}$$

Для точки  $P_4(2, 1)$   $f''_{xx} = 12, f''_{xy} = 6, f''_{yy} = 12$

$$\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} > 0 \implies \text{эта точка является точкой экстремума, } f''_{xx} = 12 > 0 \implies \text{это точка максимума}$$

### 0.3 Номер 3

Исследуйте функцию и постройте её график:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ .

Шаг 1: Область определения.

Функция определена при  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

Шаг 2: Нули функции.

$$f(x) = 0 \implies x = 0$$

Шаг 3: Чётность.

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt[3]{(-x)^2-1}} = \frac{-x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = -f(x)$$

Значит это нечётная функция.

Шаг 4: Промежутки знакопеременности.

При  $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \rightarrow f(x) < 0$ ,  $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty) \rightarrow f(x) > 0$

Шаг 5: Возрастание/убывание.

Посчитаем производную:

$$f'(x) = \frac{-3+x^2}{\sqrt[3]{3(-1+x^2)^4}}$$

Нули производной:  $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$  функция возрастает при  $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ , убывает при  $x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

Шаг 6: Выпуклость/вогнутость.

Найдем вторую производную:

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 - 9)}{\sqrt[3]{9(-1 + x^2)^7}}$$

Найдём нули второй производной:

$$f''(x) = 0 \rightarrow x \in \{-3, 0, 3\}$$

Рассмотрим значения второй производной в окрестностях этих точек.

При  $x < -3$   $f''(x) > 0$ , при  $x > -3$   $f''(x) < 0$ , значит -3 - точка перегиба.

При  $x < 0$   $f''(x) > 0$ , при  $x > 0$   $f''(x) < 0$ , значит 0 - точка перегиба.

При  $x < 3$   $f''(x) < 0$ , при  $x > 3$   $f''(x) > 0$ , значит 3 - точка перегиба.

$x \in (-\infty, -3) \cup (0, 1) \cup (1, 3)$  — функция выпукла

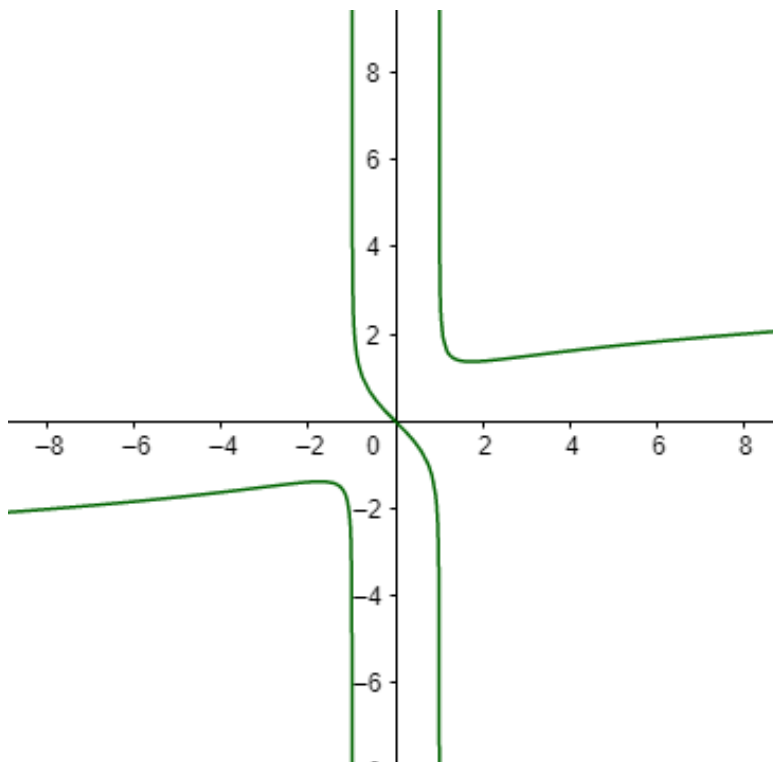
$x \in (-3, -1) \cup (-1, 0) \cup (3, \infty)$  — функция вогнута

Шаг 7: Асимптоты.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1} \cdot x} = 0$$

Наклонных асимптот не будет, будут только вертикальные в точках разрыва:  $x = -1, x = 1$

График функции:



## 0.4 Номер 4

Касается ли прямая, заданная параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases},$$

сферы  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$ ? Ответ обосновать.

Подставим  $x$ ,  $y$  и  $z$ , выраженные через  $t$  в уравнение сферы и посмотрим, сколько корней получится у квадратного уравнения. Эти корни и будут давать общие точки прямой и сферы, если подставить в параметрическое уравнение прямой.

$$(2t + 2 - 1)^2 + (-t + 1 - 1)^2 + (t + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow 6t^2 + 6t - 2 = 0 \rightarrow D = 36 + 48 = 84, \sqrt{D} = 6 * \sqrt{\frac{7}{3}} \rightarrow$$

$$t_{1,2} = \frac{-6 \pm 6 * \sqrt{\frac{7}{3}}}{12} \Rightarrow t_1 = -\frac{1 - \sqrt{\frac{7}{3}}}{2}, t_2 = \frac{\sqrt{\frac{7}{3}} - 1}{2}$$

Поскольку две общие точки, то это не касательная.

## 0.5 Номер 5

Решите матричное уравнение  $C \cdot X \cdot C^2 = B$ , где  $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  
 $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Выполните проверку, подставив  $X$  в исходное уравнение.

---

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Домножим на обратные матрицы с нужных сторон:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Дальше умножение и сложение чисел много раз.

## 0.6 Номер 6

Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора  $A(\vec{x}) = A(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_3; 4x_2; x_1 + x_3)$ .

Составим матрицу линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(4 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 + 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0, 2, 4$$

Подставим поочередно значения и найдем собственные векторы:

$$\lambda = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Первая и третья строчка линейно зависимы. Получается  $4x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0, x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -x_3$ . Подставим  $x_3 = 1$ , тогда собственный вектор  $(-1, 0, 1)$

$$\lambda = 2, \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Первая и третья строчка линейно зависимы. Получается  $2x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0, -x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_1 = x_3$ . Подставим  $x_3 = 1$ , тогда собственный вектор  $(1, 0, 1)$

$$\lambda = 4, \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Для любого  $x_2$  система имеет решение, значит для удобства возьмем 1.  $x_1 = x_3 = 0$ , тогда собственный вектор  $(0, 1, 0)$

## 0.7 Номер 7

**Выведите табличное значение производной функции  $f(x) = \sin x$ .**

По определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}$$

Тогда

$$f'(\sin(x)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta) - \sin(x)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(\Delta) + \cos(x)\sin(\Delta) - \sin(x)}{\Delta}$$

При  $\Delta \rightarrow 0$ :  $\cos(\Delta) = 1, \sin(\Delta) = 0$ , значит числитель равен  $\sin(x) + \cos(x)\sin(\Delta) - \sin(x) = \cos(x)\sin(\Delta)$ .

По первому замечательному пределу

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\sin(\Delta)}{\Delta} = \cos(x)$$

## 0.8 Номер 8

**Приведите пример линейного оператора, действующего на линейном пространстве**

$$L = \{\vec{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

**и имеющего ровно два собственных значения 2 и 4. Ответ обосновать.**

Два собственных значения, значит в действительных числах уравнение, полученное после вычитания единичной матрицы, умноженной на  $\lambda$ , должно иметь только эти два корня. Тогда можно сделать матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Уравнение получится  $(2 - \lambda)^2(4 - \lambda)^2 = 0$ . Оно как раз имеет два корня, удовлетворяющих условию.

## 0.9 Номер 9

**Укажите все свойства смешанного произведения векторов.**

Пусть

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - ортонормированный правый базис. Тогда смешанное произведение -

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Свойства:

-Кососимметричность.

$$(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b) = -(b, a, c) = -(c, b, a) = -(a, c, b);$$

-Три вектора компланарны (лежат в одной плоскости), если смешанное произведение равно 0.

-Если оно больше 0 - правая тройка векторов. Меньше - левая тройка векторов.