Оглавление

0.1 Определение предела функции одной переменной при $x \to a$, $x \to \infty$ 2
0.2 Первый замечательный предел (вывод формулы) 2
0.3 Определение производной одной переменной 2
0.4 Вывод производной синуса, косинуса, x^2, x^3 3
0.5 Вывод формулы производной частного 3
0.6 Определение дифференциала функции (привести пример) 3
0.7 Формула Тейлора для произвольной функции одной переменной 4
0.8 Полный дифференциал функции двух переменных (определение + пример) 4
0.9 Необходимое и достаточное условие экстремума функции двух переменных 4

0.1 Определение предела функции одной переменной при $x \to a$, $x \to \infty$

Рассмотрим функцию $f(x)$ при $x \to a$. Вообще есть два определения, но на лекциях рассказывали про Коши, на экзамене видимо тоже будут спрашивать Коши, поэтому рассмотрю именно его.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ \forall x : |x - a| < \delta \Rightarrow |A - f(x)| < \varepsilon$$

Это значит, что какую бы маленькую ε окрестность по значениям мы ни взяли, мы всегда сможем выбрать такую δ окрестность по x, что значения функции от всех x внтури этой окрестности лежат в ε окрестности. Тогда A - предел.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ \forall |x| > N : |f(x) - A| < \varepsilon$$

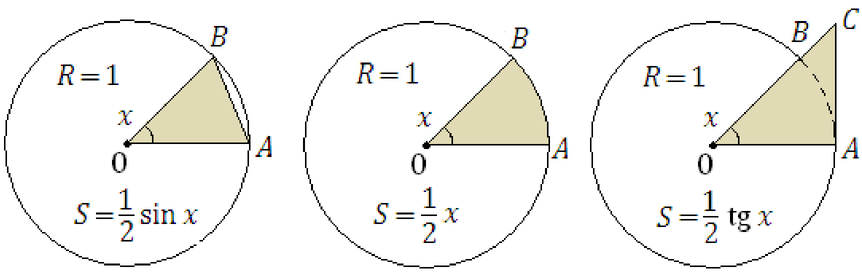
Для любой ε окрестности найдется такое число N, что значения функции от всех x, по модулю превосходящих это число, будут лежать ε.

0.2 Первый замечательный предел (вывод формулы)

Первый замечательныц предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

Так как $sin(x)$ - четная функция, то можно рассмотреть для положительных малых значений.



Пусть x - угол, тогда сравним площади фигур. Для $0 < x < \frac{\pi}{2}$ это верно. Тогда можно записать неравенство:

$$sin(x) < x < tg(x)$$

$$tg(x) = \frac{sin(x)}{\cos(x)}$$

Разделим все на $sin(x)$:

$$1 < \frac{x}{sin(x)} < \frac{1}{cos(x)}$$

Возьмем обратное от каждого:

$$cos(x) < \frac{sin(x)}{x} < 1$$

Так как $cos(x) = 1$ при $x \to 0$, то $\frac{sin(x)}{x}$ оказывается зажат (теорема о двух милиционерах) при $x \to 0$ между 1 и 1, значит

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

0.3 Определение производной одной переменной

Пусть функция определена в некторой окрестности точки x_0, тогда производная функии в точке x_0 - это предел, если он существует:

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

0.4 Вывод производной синуса, косинуса, x^2, x^3

По определению

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$$

Тогда для синуса:

$$sin^{'}(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{sin(x+\Delta) - sin(x)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{sin(x)cos(\Delta) + cos(x)sin(\Delta) - sin(x)}{\Delta}$$

При $\Delta \to 0$: $cos(\Delta) = 1$, $sin(\Delta) = 0$ значит числитель равен:

$$sin(x) + cos(x)sin(\Delta) - sin(x) = cos(x)sin(\Delta)$$

По первому замечательному пределу

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{cos(x)sin(\Delta)}{\Delta} = cos(x)$$

Для косинсуса:

$$cos^{'}(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{cos(x+\Delta) - cos(x)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{cos(x)cos(\Delta) - sin(x)sin(\Delta) - cos(x)}{\Delta}$$

Представим это в виде суммы двух дробей:

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{cos(x)cos(\Delta) - cos(x)}{\Delta} + \frac{-sin(x)sin(\Delta)}{\Delta}$$

При $\Delta \to 0$: $cos(\Delta) = 1, sin(\Delta) = 0$, значит числитель первой дроби равен 0, а вторая дробь по первому замечательному пределу равна $-sin(x)$.

Для x^2

$$(x^2)^{'} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{(x+\Delta)^2 - x^2}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{2x\Delta + \Delta^2}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} 2x + \Delta = 2x$$

Для x^3:

$$(x^3)^{'} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{(x+\Delta)^3 - x^2}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{3x^2\Delta + 3x\Delta^2 + \Delta^3}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} 3x^2 + 3x\Delta + \Delta^2 = 3x^2$$

0.5 Вывод формулы производной частного

$$(\frac{u}{v})^{'} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta)}{v(x+\Delta)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{u(x+\Delta)v(x) - v(x+\Delta)u(x)}{v(x)v(x+\Delta)\Delta}$$

Добавим и вычтем и из знаменателя $u(x)v(x)$, тогда там образуются две производные, а снизу остнется знаменатель в квадрате:

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{u(x+\Delta)v(x) - u(x)v(x) - v(x+\Delta)u(x) + u(x)v(x)}{v(x)v(x+\Delta)\Delta} =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{u(x)\frac{du}{dx} - v(x)\frac{dv}{dx}}{v(x)v(x+\Delta)} = \frac{u^{'}v - uv^{'}}{v^2}$$

0.6 Определение дифференциала функции (привести пример)

Дифференциал функции в некоторой точке x_0 - линейная часть приращения функции. Обозначается:

$$df(x) = f^{'}(x)dx$$

Примеры: Найти дифференциал фунции x^2:

$$d(x^2) = f^{'}(x^2)dx = 2xdx$$

Найти дифференцаил функции $ln(x)$:

$$d(ln(x)) = f^{'}(ln(x))dx = \frac{dx}{x}$$

0.7 Формула Тейлора для произвольной функции одной переменной

Если функция $f(x)$ имеет $n+1$ производную на отрезке, то ее можно записать в виде многочлена $P_n(x)$ степени не выше n, значение которого в точке a равняется значению функции в этой точке.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-x_0)^n), x \to x_0$$

Остаточный член в форме Пеано: $o((x-x_0)^n), x \to x_0$

0.8 Полный дифференциал функции двух переменных (определение + пример)

Полный дифференцал функции:

$$dz = z_x^{'}dx + z_y^{'}dy$$

Найти полный дифференциал функции $z = x^2 + y^3$:

$$dz = z_x^{'}dx + z_y^{'}dy$$

$$z_x^{'} = 2x, z_y^{'} = 3y^2$$

$$dz = 2xdx + 3y^2dy$$

0.9 Необходимое и достаточное условие экстремума функции двух переменных

Теорема о необходимом условии экстремума функции двух переменных

Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума при $x = x_0$, $y = y_0$ то каждая частная производная первого порядка от z или обращается в ноль при этих значениях аргументов, или не существует.

Теорема о достаточном условии экстремума функции двух переменных

Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Пусть, кроме того, точка $M_0(x_0, y_0)$ является критической точкой функции $f(x, y)$, т.е.

$$\begin{cases} f_x^{'}|_{M_0} = 0 \\ f_y^{'}|_{M_0} = 0 \end{cases}$$

Составим такую матрицу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx}^{''} & f_{xy}^{''} \\ f_{xy}^{''} & f_{yy}^{''} \end{vmatrix}$$

Тогда при:

1. $\Delta > 0$ и $f_{xx}^{''} < 0$ имеет максимум
2. $\Delta > 0$ и $f_{xx}^{''} > 0$ имеет минимум
3. $\Delta < 0$ не имеет экстремума
4. Если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть (требуется дополнительное исследование).