Оглавление

Глава 1

Операции над векторами

Глава 2

Задча 1

Найдите предел функции, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{x}}{3x^2+4x-7}.$$

$$lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{x}}{3x^2+4x-7}$$

Домножим и разделим на выражение, чтобы в числителе получилась разность кубов: $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(2-x)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$ Тогда дробь после домнодения будет выглядеть так:

$$\frac{2-x-x}{(3x^2+4x-7)(\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(2-x)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

В числителе остается $2*(1-x)$, а в знаменателе множитель $(3x^2+4x-7)$ можно разложить на скобки $(1-x)(-3x-7)$ Значит дробь можно сократить

$$\frac{2}{(-3x-7)(\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(2-x)}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

Теперь, если подставить x = 1, то неопределенности не будет:

$$\frac{2}{(-3\cdot 1-7)(\sqrt[3]{(2-1)^2}+\sqrt[3]{(2-1)}\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1^2})}=-\frac{1}{15}$$

Глава 3

2

Исследуйте на экстремум функцию двух переменных:

$$f(x;y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 7.$$

Шаг 1: Найдем критические точки - первая производная по x и первая производная по y равны 0

$$\begin{cases} f'_x{=}3x^2{+}3y^2{-}15{=}0 \\ f'_y{=}6xy{-}12{=}0 \end{cases} \implies xy = 2 \implies x = \frac{2}{y} \implies \frac{12}{y^2} + 3y^2 - 15 = 0 \implies y = -2, -1, 1, 2, x = -1, -2, 2, 1$$

Получились 4 точки $P_1(-2,-1), P_2(-1,-2), P_3(1,2), P_4(2,1)$, для которых нужно проверить условие экстремума Найдем вторые производные и составим матрицу:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}a & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

$f''_{xx} = 6x$ $f''_{xy} = 6y$ $f''_{yy} = 6x$ Дла точки $P_1(-2,-1)$ $f''_{xx} = -12, f''_{xy} = -6, f''_{yy} = -12$

$$\begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} > 0 \implies \text{эта точка является точкой экстремума}, f''_{xx} = -12 < 0 \implies \text{это точка минимума(infinum)}$$

Дла точки $P_2(-1,-2)$ $f''_{xx} = -6, f''_{xy} = -12, f''_{yy} = -6$

$$\begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} < 0 \implies \text{эта точка не является точкой экстремума}$$

Дла точки $P_3(1,2)$ $f''_{xx} = 6, f''_{xy} = 12, f''_{yy} = 6$

$$\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} < 0 \implies \text{эта точка не является точкой экстремума}$$

Дла точки $P_4(2,1)$ $f''_{xx} = 12, f''_{xy} = 6, f''_{yy} = 12$

$$\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} > 0 \implies \text{эта точка является точкой экстремума}, f''_{xx} = 12 > 0 \implies \text{это точка максимума(supremum)}$$

Глава 4

4

Касается ли прямая, заданная параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases},$$

сферы $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$? Ответ обосновать.

Подставим x, y и z, выраженные через t в уравенение сферы и посмотрим, сколько корней получится у квадратного уравнения. Эти корни и будут давать точки, если подставить в параметрическое уравнение прямой.

$$(2t+2-1)^2+(-t+1-1)^2+(t+1)^2 = 4 \Leftrightarrow 6t^2+6t-2 = 0 \to D = 36+48 = 84, \sqrt{D} = 6*\sqrt{\frac{7}{3}} \to t_{1,2} = \frac{-6 \pm 6*\sqrt{\frac{7}{3}}}{12} \implies t_1 = -$$

Посольку две общие точки, то это не касательная.

Глава 5

5

Решите матричное уравнение $C \cdot X \cdot C^2 = B$, где $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Выполните проверку, подставив X в исходное уравнение.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Домножим на обратные матрицы с нужных сторон:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Глава 6

6

Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора $A(\vec{x}) = A(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_3; 4x_2; x_1 + x_3)$.

Составим матрицу линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значния:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow (1-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) - 4 + 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0, 2, 4$$

Подставим поочереди значения и найдем собственные векторы:

$\lambda = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ первая и третья строчка линейно зависимы. Получается $4x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0, x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -x_3$. По

$\lambda = 2, \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ первая и третья строчка линейно зависимы. Получается $2x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0, -x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_1 = x_3$

$\lambda = 4, \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ Для любого x_2 система имеет решениеб значит для удобства возьмем 1. $x_1 = x_3 = 0$, тогда собстве

Глава 7

7

Выведите табличное значение производной функции $f(x) = sinx$.

По определению $f^{'}(x) = lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}$ Тогда $f^{'}(sin(x)) = lim_{\Delta \to 0} \frac{sin(x+\Delta)-sin(x)}{\Delta} = lim_{\Delta \to 0} \frac{sin(x)cos(\Delta)+cos(x)sin(}{\Delta}$
При $\Delta \to 0$ $cos(\Delta = 1, sin(\Delta) = 0$, значит числитель равен $sin(x) + cos(x)sin(\Delta) - sin(x) = cos(x)sin(\Delta)$.
По первому замечательному пределу $lim_{\Delta \to 0} \frac{cos(x)sin(\Delta)}{\Delta} = cos(\Delta)$

Глава 8

8

Приведите пример линейного оператора, действующего на линейном пространстве

$$L = \{\vec{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

и имеющего ровно два собственных значения 2 и 4. Ответ обосновать.

Два собственных значения, значит в действительных числах уравнение, полученное после вычитания единичной матрицы, умноженной на λ должно иметь только эти два корня. Тогда можно сделать матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Уравнение получится $(2-\lambda)^2(4-\lambda)^2 = 0$. Оно как раз имеет два корня, удовлетворяющих условию

Глава 9

9

Укажите все свойства смешанного произведения векторов.

Пусть

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}, \vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - ортонормированный правый базис(так будет почти всегда). Тогда смешанное определение -

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \rangle = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Кососимметричность. Три вектора комплонарны(лежат в одной плоскости), если смешанное произведение равно 0. Если оно больше 0 - правая тройка векторов. Меньше - левая тройка векторов.