Оглавление

Глава 1

Векторная алгебра

1.1 Геометрические векторы на плоскости и в пространстве, операции над векторами

Определения: Направленный отрезок - отрезок AB, у которого указан порядок концов, т.е. A - начало, B - конец.

Равенство направленных отрезков - направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ равен направленному отрезку $\overrightarrow{CD}$ если они сонаправлены и имеют одинаковые длины.

Не нулевой вектор в пространстве - множество равных между собой направленных отрезков в пространстве.

Операции над векторами Сложение:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} -$ коммутативность
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) -$ дистрибутивность
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Умножение вектора на число:

Произведение $\vec{a}\alpha$ - это такой $\vec{b}$, что:

1. $\vec{b} \mid\mid \vec{a}$
2. $|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|$
3. $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ при $\alpha > 0,\ \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ при $\alpha < 0$

Свойства:

1. $(\alpha \pm \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} \pm \beta\vec{a}$
2. $\alpha(\vec{a} \pm \vec{b}) = \alpha\vec{a} \pm \alpha\vec{b}$
3. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} = \beta(\alpha\vec{a})$
4. $\vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$
5. $\vec{a} \cdot 0 = \vec{0}$

Все операции проводятся над координатами векторов

1.2 Линейная зависимость и независимость геометрических векторов

Система векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда в ней найдется вектор, который линейно выражается через остальные векторы этой системы.

$$\sum \lambda_i \vec{a}_i = 0 \quad \text{не все коэффициенты одновременно равны } 0$$

1.3 Скалярное произведение двух векторов

Пусть заданы два вектора $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда скалярное произведение определено как

$$(\vec{a}, \vec{b}) \equiv \vec{a}\vec{b} \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|cos(\phi) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Отсюда достаточно легко выражается косинус угла между векторами

$$cos(\phi) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Скалярное произведение - произведение длины проекции первого вектора на второй, умноженное на длину второго вектора: Тогда длина проекции $\vec{a}$ на $\vec{b}$ -

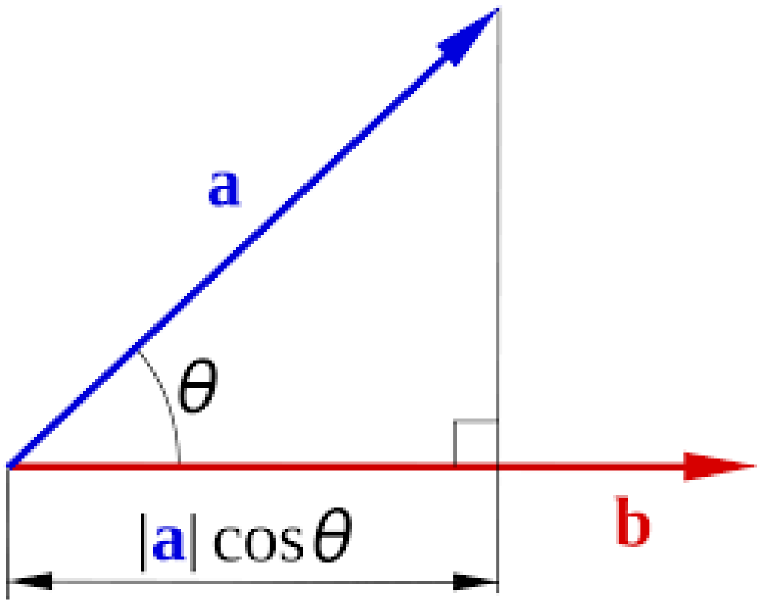


Рис. 1.1: $|a \cos\theta|$ - длина проекции на вектор b

$$\frac{\vec{a}\vec{b}}{|a|\cos\theta} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|a|\cos\theta}$$

1.3.1 Свойства скалярного произведения

1. $(\vec{a} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}|^2$
2. Коммутативность: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
3. Дистрибутивное свойство: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
4. Ассоциативность: $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
5. Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то они перпендикулярны: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

1.4 Векторное и смешанное произведение векторов, их свойства, координатное представление

1.4.1 Векторное произведение

$$\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}.$$

Векторное произведение возвращает вектор, который образует правую тройку векторов с двумя данными и по длине равный площади параллелограмма ($|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\alpha)$), построенного на данных векторах.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Вектор $\vec{c}$ образует правую тройку векторов с двумя данными, если с конца $\vec{c}$ поворот от первого вектора до второго по наименьшему углу против часов стрелки. Если по часовой - левая тройка. Определители соответствующих матриц - координаты.

1.4.2 Свойства векторного произведения

1. Если векторное произведение равно нулю, то данные векторы коллинеарны
2. Антикоммутативность: $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
3. Дистрибутивность по сложению: $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$
4. $[\vec{a}, \vec{a}]$=0

1.5 Смешанное произведение

Смешанное произведение трех векторов возвращает объем параллелепипеда, построенного на данных векторах. Обозначается обычно так: $(a, b, c) = a \cdot (b \times c)$.

$$(a, b, c) = a \cdot (b \times c)$$

Пусть

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$
$$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - ортонормированный правый базис.

Тогда смешанное произведение -

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

1.5.1 Свойства смешанного произведения

1. Кососимметричность.

$$(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b) = -(b, a, c) = -(c, b, a) = -(a, c, b);$$

2. Три вектора компланарны (лежат в одной плоскости), если смешанное произведение равно 0.
3. Если оно больше 0 - правая тройка векторов. Меньше - левая тройка векторов.

Глава 2

Прямая и плоскость

2.1 Прямая на плоскости и её уравнение

Прямую можно задать:

1. по двум точкам
2. по нормальному вектору и точке
3. Общее уравнение прямой (по коллинеарному вектору и точке)

2.1.1 По двум точкам

Если вам даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то уравнение прямой, проходящей через эти точки, будет выглядеть так:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

2.1.2 По нормальному вектору и точке

Пусть дан нормальный вектор $\overrightarrow{n}\{A, B\}$ и точка $M(x_0, y_0)$, тогда уравнение прямой будет записано так:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

2.1.3 Общее уравнение прямой(По коллинеарному вектору и точке)

Пусть дан направляющий вектор $\overrightarrow{p}\{a, b\}$ и точка $M(x_0, y_0)$, тогда уравнение прямой будет записано так:

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

Из параметрического уравнения прямой следует каноническое, поэтому если одна из координат направляющего вектора равна нулю, это не значит, что прямой не существует.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = t$$

2.2 Плоскость в пространстве и её уравнение

Прямую можно задать:

1. двум плоскостям
2. по коллинеарному вектору и точке

2.2.1 Общее уравнение прямой

Пусть заданы две плоскости

$$\rho_1:\ A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$$
$$[2pt]\rho_2:\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$$

в которых коэффициенты при неизвестных непропорциональны. Тогда линия пересечения плоскостей описывается системой уравнений

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + D_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0, \\ A_2 \cdot x + D_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0. \end{cases}$$

И эта прямая будет сонаправлена с векторным произведением их нормалей $\vec{n}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ и $\vec{n}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$.

2.2.2 Параметрическое уравнение прямой

Пусть заданы точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{p} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

Тогда прямую можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t, \\ y = y_0 + b \cdot t, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + c \cdot t, \end{cases}$$

2.2.3 Каноническое уравнение прямой

Выразим параметр t из каждого уравнения системы параметрического уравнения прямой:

$$t = \frac{x - x_0}{a},\ t = \frac{y - y_0}{b},\ t = \frac{z - z_0}{c}$$

А затем исключим этот параметр:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

Коэффициенты a, b, c не равны нулю одновременно, так как это координаты направляющего вектора прямой.

2.3 Взаимное расположение прямых в пространстве и взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть заданы две прямые

$$l_1:\ \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}, \quad l_2:\ \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

где

- $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — точки, принадлежащие прямым l_1 и l_2 соответственно
- $\vec{p}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}, \vec{p}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ — направляющие векторы

Обозначим через $\vec{m} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ вектор, соединяющий заданные точки. Прямые в пространстве могут:

1. Скрещиваться, т.е. не лежат в одной плоскости $\Leftrightarrow$ векторы $\vec{m}$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ не компланарны;
2. Пересекаться, т.е. лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку $\Leftrightarrow$ векторы $\vec{m}$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ компланарны, а векторы $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ не коллинеарны;
3. Быть параллельными, т.е. лежат в одной плоскости и не пересекаются $\Leftrightarrow$ векторы $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ коллинеарны, а векторы $\vec{m}$, $\vec{p}_2$ не коллинеарны;

4. Совпадать $\Leftrightarrow$ векторы $\vec{m}$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ коллинеарны.

$$\langle \vec{m}, \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Равенство 0 этого определителя - условие комланарности векторов. Поэтому:

1. Прямые l_1 и l_2 скрещивающиеся $\Leftrightarrow$ определитель отличен от нуля;
2. Прямые l_1 и l_2 пересекаются $\Leftrightarrow$ определитель равен нулю, а вторая и третья его строки не пропорциональны, т.е.
   $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2\,;$
3. Прямые l_1 и l_2 параллельные $\Leftrightarrow$ вторая и третья строки определителя пропорциональны, т.е.
   $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1\,$, а первые две строки не пропорциональны, т.е.
   $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} = 2\,;$
4. Прямые l_1 и l_2 совпадают $\Leftrightarrow$ все строки определителя пропорциональны, т.е.
   $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$

Взаимное расположение прямой и плоскости:
Для нормального вектора плоскости $\vec{n}$ и направляющего вектора прямой $\vec{p}$ прямая может:

1. быть параллельна плоскости $\Leftrightarrow$ $(\vec{n}, \vec{p}) = 0$ и точка прямой не принадлежит плоскости;
2. принадлежать плоскости $\Leftrightarrow$ $(\vec{n}, \vec{p}) = 0$ и точка прямой принадлежит плоскости;
3. пересекать плоскость $\Leftrightarrow$ $(\vec{n}, \vec{p}) \neq 0$;

Глава 3

Кривые второго порядка

3.1 Общее уравнение кривой второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ разделяют на: эллипс, мнимый эллипс, гиперболу, точку(вырожденный эллипс) и пару пересекающихся прямых.

3.2 Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Это геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фокусов - 2a.

Элементы эллипса:

1. $A_1A_2 = 2a$ - большая ось
2. $B_1B_2 = 2b$ - малая ось
3. $c^2 = a^2 - b^2$
4. $F_1(c; 0), F_2(-c; 0)$ - фокусы $=>$ $F_1F_2 = 2c$
5. $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ - мера его вытянутости
6. $d_1 : x = \frac{a}{\varepsilon}, d_2 : x = \frac{a}{\varepsilon}$ - директрисы

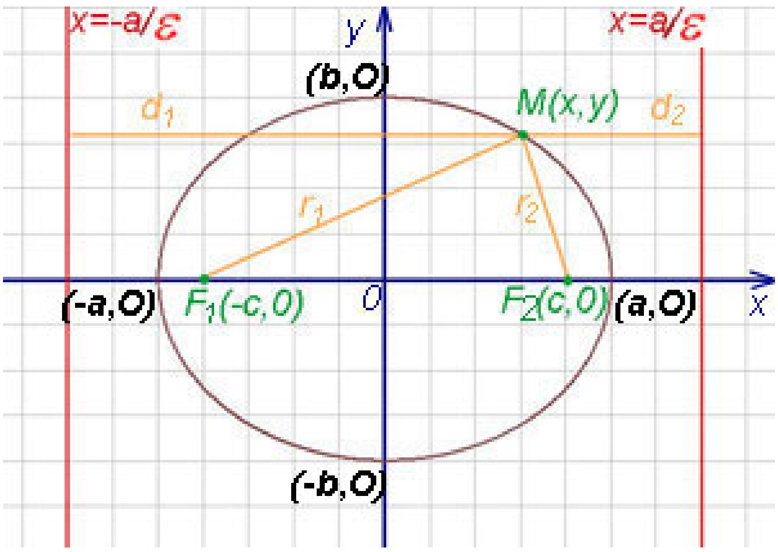


Рис. 3.1: $|a \cos \theta|$ - длина проекции на вектор b

3.2.1 как привести кривую второго порядка к каноническому виду

Пусть дано уравнение такого вида $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, тогда нужно получить вид

$$\frac{(a_x x + g_x)^2}{h_x} + \frac{(a_y y + g_y)^2}{h_y} = 1$$

где a_x, g_x, h_x (и для y) - такие числа, чтобы при раскрытии скобок получилось изначальное уравнение. Дальше нужно вынести a_x, a_y за скобку, чтобы получился вид

$$\frac{(x + k_x)^2}{l_x} + \frac{(y + k_y)^2}{l_y} = 1$$

(k_x, k_y, l_x, l_y - такие числа, чтобы при раскрытии скобок получалось начальное равенство) после чего нужно сделать замену

$$\begin{cases} x' = x + k_x \\ y' = y + k_y \end{cases}$$

и получить каноническое уравнение эллипса в новой системе координат. Это работает для всех кривых второго порядка, просто вместо канонического уравнения эллипса нужно подгонять под нужную кривую.

3.3 Гипербола

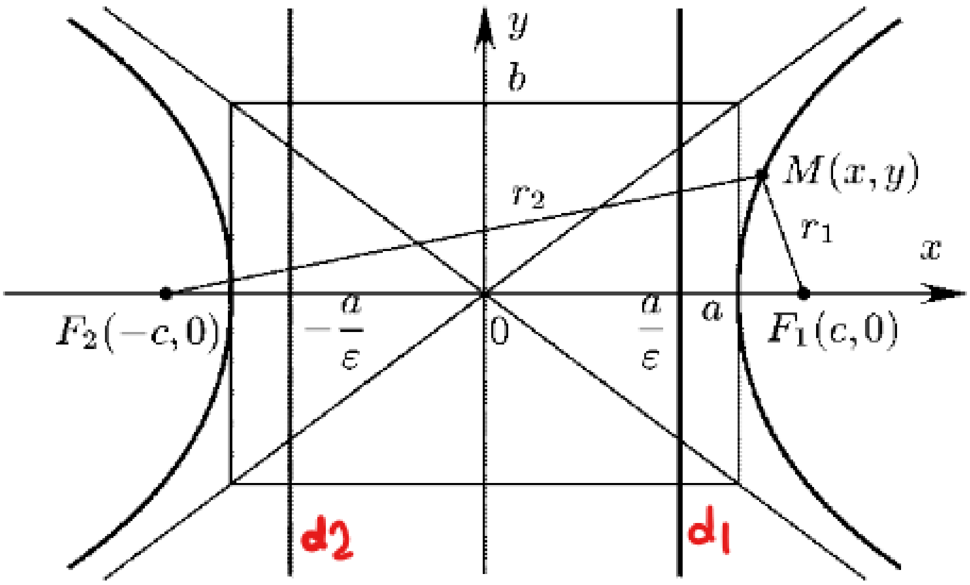


Рис. 3.2: Так выглядит гипербола

$$\text{каноническое уравнение} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Это геометрическое место точек, для которых модуль разности расстояний до фокусов равен 2a

Элементы гиперболы:

1. $A_1A_2 = 2a$ - действительная ось
2. $B_1B_2 = 2b$ - мнимая ось
3. A_1, A_2 - вершины гиперболы
4. $c^2 = a^2 + b^2$
5. $F_1(c; 0), F_2(-c; 0)$ - фокусы

6. $y = \pm\frac{b}{a}x$ - асимптоты

7. $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ - величина раствора угла между асимптотами

$d_1 : x = \frac{a}{\varepsilon}, d_2 : x = -\frac{a}{\varepsilon}$

3.4 Директориальное свойство эллипса и гиперболы

Эллипс является множеством точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до соответствующей директрисы постоянно и равно е. Гипербола - это геометрическое место точек, для которых модуль разности расстояний до фокусов равен 2а.

3.5 Парабола

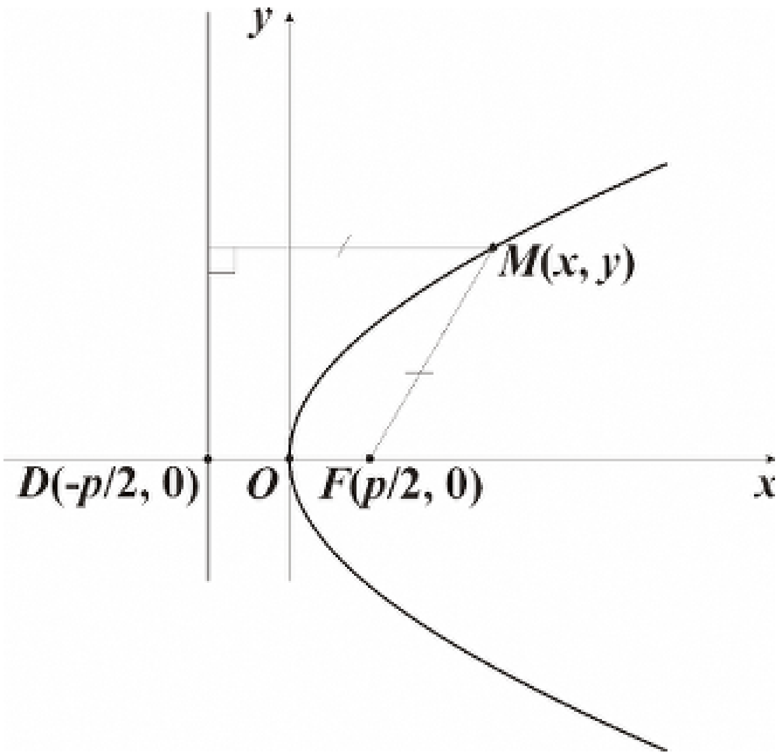


Рис. 3.3: Так выглядит парабола

Каноническое уравнение:

$$x^2 = 2py; y^2 = 2px$$

Это геометрическое место точек, каждая из которых равноудалена от фокуса и директрисы
Элементы параболы

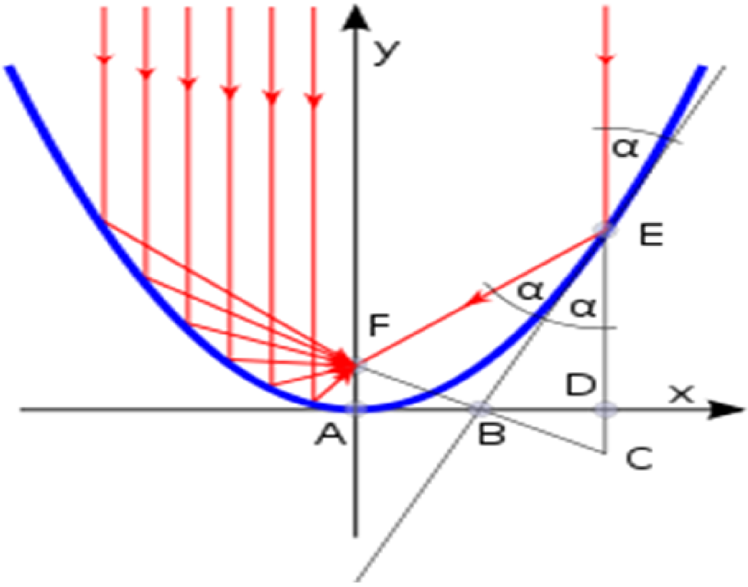
1. $F(\frac{p}{2}; 0)$ - фокус
2. $\varepsilon = 1$ - по идее не нужен, но пусть будет
3. $d : x = -\frac{p}{2}$ - директриса

3.6 Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

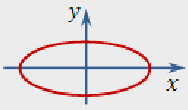
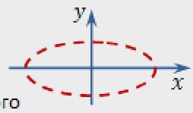
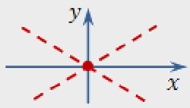
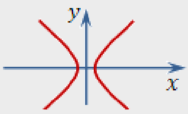
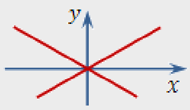
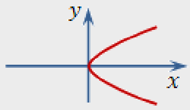
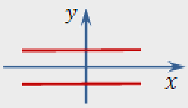
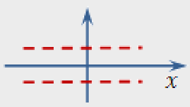
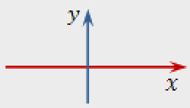
Эллипс - Лучи света, выходящий из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса проходят через другой его фокус

Гипербола - Лучи света, выходящие из одного фокуса гиперболы, после отражения от гиперболы кажутся выходящими из другого её фокуса.

Парабола - Лучи, вышедшие из фокуса параболы, отразившись от неё, пойдут параллельно оси симметрии; лучи, пришедшие параллельно оси симметрии параболы, отразившись от неё, придут в фокус.



3.7 Канонические формы линий второго порядка

1.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$  Уравнение эллипса	2.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$  Уравнение мнимого эллипса	3.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$  Уравнение пары мнимых пересекающихся прямых
4.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$  Уравнение гиперболы	5.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$  Уравнение пары пересекающихся прямых	6.	$y^2=2\cdot p\cdot x$  Уравнение параболы
7.	$y^2-b^2=0$  Уравнение пары параллельных прямых	8.	$y^2+b^2=0$  Уравнение пары мнимых параллельных прямых	9.	$y^2=0$  Уравнение пары совпадающих прямых

3.8 Доказательство основной теоремы классификации

Доказательство производится рассматривание всех случаев поочередного зануления параметров.

Глава 4

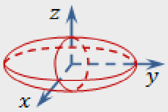
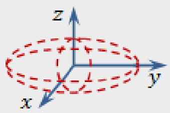
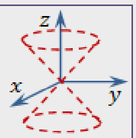
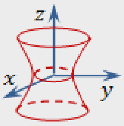
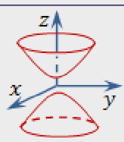
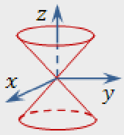
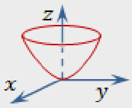
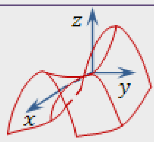
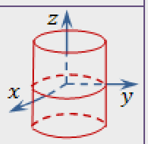
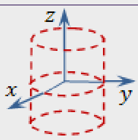
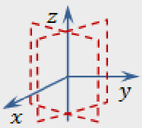
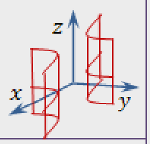
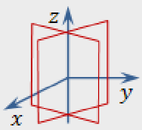
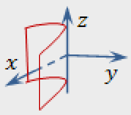
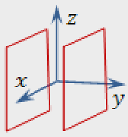
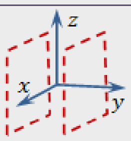
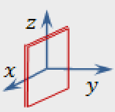
Поверхности второго порядка

4.1 Общее уравнение поверхности второго порядка

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + G = 0$$

при этом $A^2 + B^2 + C^2 > 0$

4.2 Канонические уравнения основных алгебраических поверхностей второго порядка

1.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Уравнение эллипсоида 	2.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ Уравнение мнимого эллипсоида 	3.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ Уравнение мнимого конуса 
4.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Уравнение однополостного гиперболоида 	5.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ Уравнение двуполостного гиперболоида 	6.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ Уравнение конуса 
7.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ Уравнение эллиптического параболоида 	8.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ Уравнение гиперболического параболоида 	9.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Уравнение эллиптического цилиндра 
10.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ Уравнение мнимого эллиптического цилиндра 	11.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ Уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей 	12.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Уравнение гиперболического цилиндра 
13.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ Уравнение пары пересекающихся плоскостей 	14.	$y^2=2px$ Уравнение параболического цилиндра 	15.	$y^2-b^2=0$ Уравнение пары параллельных плоскостей 
16.	$y^2+b^2=0$ Уравнение пары мнимых параллельных плоскостей 	17.	$y^2=0$ Уравнение пары совпадающих плоскостей 	Для всех уравнений $a>0,\ b>0,\ c>0,\ p>0$ Для уравнений 1 и 2 $a \geq b \geq c$ Для уравнений 3,4,5,6,7,9,10 $a \geq b$	

Глава 5

Матрицы и определители

5.1 Операции над матрицами

Большинство операций будет производиться с квадратными матрицами:

$$A_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

5.1.1 Сложение и вычитание матриц

$$A_{n\times n} \pm B_{n\times n} = C_{n\times n}, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

5.1.2 Умножение матрицы на число

$$\lambda \cdot A = A_{n,n} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \lambda a_{n,2} & \cdots & \lambda a_{n,n} \end{pmatrix}$$

5.1.3 Произведение двух матриц

Пусть даны две прямоугольные матрицы A и B размерности $l \times m$ и $m \times n$ соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица C размерностью $l \times n$:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{ln} \end{pmatrix}$$

в которой каждый элемент является суммой попарно умноженных соответствующих элементов строки и столбца - элемент c_{ij} - сумма умноженных элементов i строки на j столбец

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, 2, \ldots, l;\ j = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

5.1.4 Транспонированная матрица

В этом случае столбцы становятся строками, а строки - столбцами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} => A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

5.1.5 Свойства операций над матрицами

1. $A + B = B + A$ - коммутативность сложения
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$- ассоциативность сложения
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ - дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения чисел
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B$ - дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц
5. $A(BC) = (AB)C$
6. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
7. $A \cdot (B + C) = AB + AC; (B + C) \cdot A = BA + CA$
8. $A \cdot E = E \cdot A = A$, E - единичная матрица
9. $A \cdot O = O \cdot A = O$, O - нулевая матрица
10. $(A^T)^T = A$
11. $(A + B)^T + A^T + B^T$
12. $(AB)^T + B^T \cdot A^T$
13. $\alpha A^T = (\alpha A)^T$

5.2 Определители n-ого порядка

Определителем n-ого порядка называется алгебраическая сумма $n!$ слагаемых, каждое из которых есть произведение n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. При этом произведение берётся со знаком «+», если подстановка из индексов входящих в него элементов чётная, и со знаком «-» в противном случае. То же самое в виде формулы. Для квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$ её определитель $\det A$ вычисляется по формуле:

$$\det A = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} \cdot a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$$

где суммирование проводится по всем перестановкам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, а $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ обозначает число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

5.3 Обратная матрица ~~с доказательством~~

Обратную матрицу можно найти как:

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj} A}{|A|}$$

где $\mathrm{adj} A$ - присоединенная матрица

$$C^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Которая состоит из алгебраических дополнений и транспонирована

5.4 Ранг матрицы

Ранг матрицы – количество линейно независимых строк или столбцов.

Метод элементарных преобразований– нужно привести матрицу к верхнетреугольному(ступенчатому виду) - количество не нулевых строк и будет рангом матрицы.

Метод окаймляющих миноров– Пусть в матрице существует ненулевой минор i-того порядка(определитель квадратной матрицы $i \times i$ не равен нулю). Если все окаймляющие миноры(Рассмотреть все матрицы, содержащие прошлую $i \times i$) $i + 1$ порядка равны 0, то ранг матрицы - i.

Глава 6

Системы линейных уравнений

6.1 Основные понятия

Уравнение называется линейным, если оно содержит неизвестные только первой степени и не содержит умножение неизвестных:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0 \quad a_i, b \in \mathbb{R}$$

a_i - коэффициент, b - свободный член. Если $b = 0$, то уравнение однородное, иначе - не однородное. Пусть есть система из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \text{ – основная матрица системы}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right) \text{ – расширенная матрица системы}$$

Система линейных алгебраических дополнений(дальше СЛАУ) называется совместной, если имеет хотя бы одно решение. Если СЛАУ не имеет решений - она несовместная. СЛАУ называется однородной, если все свободные члены равны 0.

6.2 Критерий совместимости системы линейных уравнений

Теорема Кронекера-Капелли — критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений гласит что: Система уравнений $Ax = B$ разрешима тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B)$, где $(A|B)$ — расширенная матрица, полученная из матрицы A приписыванием столбца B

6.3 Правило Крамера ~~(с доказательством)~~

Единственное решение неоднородной СЛАУ $Ax = B$, где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ можно найти по формуле:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

где Δ_i - определитель матрицы A, в которой i-й столбец заменен на столбец свободных членов, а Δ - определитель A.

6.4 Свойства решений системы линейны однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Эта система всегда совместна, так как имеет тривиальное решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ Если ранг матрицы системы равен количеству неизвестных n , то тривиальное решение единственное. Если $rg(A) < n$, то однородная система имеет бесконечно много решений.

6.5 Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений

to be continued...

6.6 Общие свойства решений множества решений системы линейных уравнений

Если вектор x является решением однородной системы $Ax = 0$, то вектор x также является решением этой системы. Здесь — произвольное число.

Если векторы x и y являются решениями однородной системы $Ax = 0$, то вектор $x + y$ также является решением этой системы.

Если вектор x является решением однородной системы $Ax = 0$, а вектор иу— решение неоднородной системы $Ax = b$, то вектор $x + y$ является решением неоднородной системы $Ax = b$.

Если векторы x и y являются решениями неоднородной системы $Ax = b$, то вектор xy является решением однородной системы $Ax = 0$.

Глава 7

Линейный пространства

7.1 Понятие линейного пространства, примеры

Линейным (векторным) пространством называется множество L произвольных элементов, называемых векторами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, т.е. любым двум векторам **u** и **v** поставлен в соответствие вектор $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, любому вектору **v** и любому числу $\lambda \in \mathbb{R}$ поставлен в соответствие вектор $\lambda\mathbf{v}$, так что выполняются следующие условия:

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L : \vec{x} + \vec{y} \in L$
2. Коммутативность : $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
3. $\forall \vec{x} \in L; \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda\vec{x} \in L$
4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in L : (\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$
5. $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$
6. $\exists \vec{0} \in L : \vec{x} + \vec{0} = \vec{0}$
7. $\exists \vec{1} \in L : \vec{x} * \vec{1} = \vec{x}$
8. $\vec{x}(\mu + \lambda) = \mu\vec{x} + \lambda\vec{x}$

Примеры:

1. $L = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$
2. $L = \{(a_{ij})_{m\times n} | a_{ij} \in \mathbb{R}\}$
3. $L = \{p(x) -$ многочлен $|deg(p(x)) <= n\}$
4. $L = \{f(x) | f(x) -$ непрерывная на$[a, b]\}$
5. $L = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)| \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

7.2 Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства

Если линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$, при этом среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ есть хотя бы одно отличное от нуля, то ти вектора линейно зависимы. Иначе они линейно независимы.

7.3 Размерность и базис, ЛП координаты векторов с доказательством.

Система векторов линейного пространства L образует базис в L если эта система векторов упорядочена, линейно независима и любой вектор из L линейно выражается через векторы системы.

То есть линейно независимая упорядоченная система векторов $e_1, \dots, e_n$ образует базис в L если любой вектор x из L может быть представлен в виде:

$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ Размерность пространства - максимальное количество линейно независимых векторов.

7.4 Линейные операции в координатной форме

Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, тогда:

$$\vec{x} \pm \vec{y} = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3)$$

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

7.5 Преобразование координат вектора при преобразовании базиса с доказательством

Это квадратная матрица порядка $[n \times n]$, где по столбцам записаны координаты нового базиса в старом базисе. Пусть есть базис в n-мерном пространстве $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$. Возьмем второй базис $\vec{e_1^{'}}, \vec{e_2^{'}}, \dots, \vec{e_n^{'}}$, тогда каждый из векторов нового базиса h можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса e:

$$\begin{cases} \vec{e_1^{'}} = a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + \dots + a_{n1}\vec{e_n} \\ \vec{e_2^{'}} = a_{12}\vec{e_1} + a_{22}\vec{e_2} + \dots + a_{n2}\vec{e_n} \\ \vdots \\ \vec{e_n^{'}} = a_{1n}\vec{e_1} + a_{2n}\vec{e_2} + \dots + a_{nn}\vec{e_n} \end{cases}$$

Тогда матрица перехода от первого базиса ко второму:

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

В ней i-й столбец равен координатному столбцу $e_i^{'}$ в базисе e.

Пусть дан вектор

$$\vec{b} = b_1\vec{e_1} + \dots + b_n\vec{e_n}$$

$$\vec{b} = b_1^{'}\vec{e_1^{'}} + \dots + b_n^{'}\vec{e_n^{'}}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} b_1^{'} \\ b_2^{'} \\ \vdots \\ b_n^{'} \end{pmatrix}$$

Доказательство: Представим $e^{'}$ в разложении по e:

$$\vec{b} = b_1^{'}(a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + \dots + a_{n1}\vec{e_n}) + \dots + b_n^{'}(a_{1n}\vec{e_1} + a_{2n}\vec{e_2} + \dots + a_{nn}\vec{e_n})$$

Сгуппируем множители перед $e_1, \dots, e_n$:

$$\vec{b} = (a_{11}b_1^{'} + a_{12}b_2^{'} + \dots + a_{1n}b_n^{'})\vec{e_1} + \dots + (a_{n1}b_1^{'} + a_{n2}b_2^{'} + \dots + a_{nn}b_n^{'})\vec{e_n}$$

Так как

$$\begin{cases} \vec{b_1} = a_{11}\vec{b_1'} + a_{12}\vec{b_2'} + \dots + a_{1n}\vec{b_n'} \\ \vec{b_2} = a_{21}\vec{b_1'} + a_{22}\vec{b_2'} + \dots + a_{2n}\vec{b_n'} \\ \vdots \\ \vec{b_n} = a_{n1}\vec{b_1'} + a_{n2}\vec{b_2'} + \dots + a_{nn}\vec{b_n'} \end{cases}$$

Отсюда получается

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_n' \end{pmatrix}$$

Глава 8

Линейные операторы, действующие в произвольном линейном пространстве

8.1 Общее определение оператора

Про оператор $A : X \to Y$говорят, что он действует из множества X во множество Y. Оператор может быть не всюду определён на X; тогда говорят о его области определения $D_A = D(A) \subset X$. Для $x \in X$ результат применения оператора A к x обозначают $A(x)$ или Ax.

8.2 Определение линейного оператора

Пусть L - линейное пространство. Тогда A - линейный оператор, если:

$$\forall x, y \in L, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$1. A(x + y) = A(x) + A(y)$$
$$2. A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

8.3 Матрица линейного оператора с доказательством

to be continued...

Глава 9

Евклидовы пространства

9.1 Понятие о евклидовом пространстве, примеры

Определение: Евклидово пространство(L) - конечномерное пространство, на котором определена функция (скалярное произведение), что для нее выполняются 3 условия:

1. Линейность: $\forall v, u, w \in L, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\lambda v + \mu u, w) = \lambda(v, w) + \mu(u, w)$
2. Симметричность: $\forall v, u \in L(v, u) = (u, v)$
3. Положительная определённость: $(u, u) \geq 0, \text{причем } (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Пример - евклидово трехмерное пространство, где скалярное произведение определено как сумма произведений соответствующих координат

9.2 Ортонормированный базис конечномерного евклидового пространства. Процесс ортогонализации базиса

Ортонормированный базис - если для набора векторов $e_1, \ldots, e_n$ верно, что

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 - \text{при } i \neq j \text{ - любые два вектора перпендикулярны друг другу} \\ 1 - \text{при } i = j \text{ - длина любого вектора(его норма) равна 1} \end{cases}$$

Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта заключается в том, чтобы из векторов поочереди убирать из них их проекции на другие вектора. То есть например у вас есть 3 линейно независимых вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ в трехмерном пространстве и нужно построить по ним ортогоналзированный базис $\vec{h_1}, \vec{h_2}, \vec{h_3}$. Возьмем и оставим первый вектор без изменений: $\vec{h_1} = \vec{e_1}$. Рассмотрим второй вектор $\vec{h_2} = \lambda\vec{e_1} + \vec{e_2}$. Тогда h_2 можно получить если найти λ. При этом по условию скалярное произведение $(\vec{h_1}, \vec{h_2}) = 0$. Значит

$$(\vec{h_1}, \vec{h_2}) = 0 = (\vec{e_1}, \lambda\vec{e_1} + \vec{e_2}) = (\vec{e_1}, \vec{e_2}) + \lambda(\vec{e_1}, \vec{e_1}) \Rightarrow \lambda = -\frac{(\vec{e_1}, \vec{e_2})}{(\vec{e_1}, \vec{e_1})}$$

То есть

$$\vec{h_2} = \vec{e_2} - \frac{(\vec{e_1}, \vec{e_2})}{(\vec{e_1}, \vec{e_1})}\vec{e_1} = \vec{e_2} - \frac{(\vec{h_1}, \vec{e_2})}{(\vec{h_1}, \vec{h_1})}\vec{h_1}$$

Для двух векторов $\vec{a}, \vec{b}$ проекция $\vec{a}$ на $\vec{b}$ записывается как

$$proj_b a = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{b}, \vec{b})}\vec{b}$$

Для третьего с аналогичными рассуждениями получится

$$\vec{h_3} = \vec{e_3} - \frac{(\vec{h_1}, \vec{e_3})}{(\vec{h_1}, \vec{h_1})}\vec{h_1} - \frac{(\vec{h_2}, \vec{e_3})}{(\vec{h_2}, \vec{h_2})}\vec{h_2}$$

То есть из каждого вектора вычитается его проекция на все предыдущие вектора. Отсюда можно написать формулу для n-ного вектора:

$$\vec{h_n} = \vec{e_n} - \frac{(\vec{h_1}, \vec{e_n})}{(\vec{h_1}, \vec{h_1})}\vec{h_1} - \cdots - \frac{(\vec{h}_{n-1}, \vec{e_n})}{(\vec{h}_{n-1}, \vec{h}_{n-1})}\vec{h}_{n-1}$$

Для получения ортонормированного базиса, каждый из векторов $\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_n$ нужно разделить на их длины.

Глава 10

Линейные операторы, действубщие в линейном пространстве

10.1 Линейный операторы в евклидовом пространстве, движения

to be continued...