P91 定理

07117117 陈兴嵘

2020 年 6 月 2 日

目录

定理叙述

定理叙述

定理
在 $C[0,1]$ 中处处不可微的函数集合 E 是非空的，更确切地，E 的余集是第一纲集 *[1]*

定理背景

定理背景

Weierstrass 构造出了一个处处连续却处处不可微的函数

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \tag{1}$$

其中 $0 < a < 1$，b 为正奇数，且:

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi \tag{2}$$

连续性

证明.
函数列 $a^n \cos(b^n \pi x)$ 满足：

$$|a^n \cos(b^n \pi x)| \leq a^n \tag{3}$$

且根据 a 的定义，正项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ 是收敛的，由 Weierstrass 判别法知，这个函数项级数一致收敛，且每一个函数项都是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，则 $W(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续 □

不可导性

思路：

证明.
对于任意点 $x \in \mathbb{R}$ 都能找出趋于 x 的两个不同数列 $\{x_n\}$ 和 $\{x_n'\}$ 使得:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{W(x_n) - W(x)}{x_n - x} > \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{W(x_n') - W(x)}{x_n' - x} \tag{4}$$

与函数可导的定义矛盾。 □

证明思路

证明思路

- 设全空间 $\mathcal{X}$ 为 $C[0,1]$

证明思路

- 设全空间 $\mathcal{X}$ 为 $C[0,1]$
- 利用可导的性质来定义集合 A_n 找到和处处不可微函数集 E 的关系

证明思路

- 设全空间 $\mathcal{X}$ 为 $C[0,1]$
- 利用可导的性质来定义集合 A_n 找到和处处不可微函数集 E 的关系
- 证明 A_n 是闭集

证明思路

- 设全空间 $\mathcal{X}$ 为 $C[0,1]$
- 利用可导的性质来定义集合 A_n 找到和处处不可微函数集 E 的关系
- 证明 A_n 是闭集
- 证明 A_n 没有内点得到每个 A_n 是疏集

证明思路

- 设全空间 $\mathcal{X}$ 为 $C[0,1]$
- 利用可导的性质来定义集合 A_n 找到和处处不可微函数集 E 的关系
- 证明 A_n 是闭集
- 证明 A_n 没有内点得到每个 A_n 是疏集
- 由 Baire 定理推出 $\mathcal{X}$ 是第二纲集，从而 E 也是第二纲集

证明思路

- 设全空间 $\mathcal{X}$ 为 $C[0,1]$
- 利用可导的性质来定义集合 A_n 找到和处处不可微函数集 E 的关系
- 证明 A_n 是闭集
- 证明 A_n 没有内点得到每个 A_n 是疏集
- 由 Baire 定理推出 $\mathcal{X}$ 是第二纲集，从而 E 也是第二纲集
-

证明过程

Step1

证明

取 $\mathcal{X} = C[0,1]$，设 A_n 表示 $\mathcal{X}$ 中这样一些元素 f 之集。对 $f, \exists s \in [0,1]$，使对适合的 $0 \leq s + h \leq 1$ 与 $|h| \leq 1/n$ 的任何 h 下成立

$$|\frac{f(s+h) - f(s)}{h}| \leq n \tag{5}$$

若 f 在某个点 s 处可微，则必有正整数 n，使得 $f \in A_n$

$$\mathcal{X} \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{6}$$

Step2

证明 A_n 是闭的，若 $f \in \mathcal{X} \setminus A_n$，则 $\forall s \in [0,1], \exists h_s$,（任意给定的 s）使得

$$|h_s| \leq \frac{1}{n} \quad \text{且} \quad |f(s+h_s) - f(s)| > n|h_s| \tag{7}$$

由 f 的连续性，$\exists \epsilon_s > 0$，以及 s 的某个适当的邻域 J_s，对 $\forall \sigma \in J_s$ 有

$$|f(\sigma + h_s) - f(\sigma)| > n|h_s| + 2\epsilon_s \tag{8}$$

Step2

证明 A_n 是闭的，若 $f \in \mathcal{X} \setminus A_n$，则 $\forall s \in [0,1], \exists h_s$, (任意给定的 s) 使得

$$|h_s| \leq \frac{1}{n} \quad \text{且} \quad |f(s+h_s) - f(s)| > n|h_s| \tag{7}$$

由 f 的连续性，$\exists \epsilon_s > 0$，以及 s 的某个适当的邻域 J_s，对 $\forall \sigma \in J_s$ 有

$$|f(\sigma + h_s) - f(\sigma)| > n|h_s| + 2\epsilon_s \tag{8}$$

因为

$$\begin{aligned} &|f(\sigma + h_s) - f(\sigma)| \\ =&|f(\sigma + h_s) - f(s+h_s) + f(s+h_s) - f(s) + f(s) - f(\sigma)| \end{aligned} \tag{9}$$

由(7)知，当 $f(s+h_s) - f(s) > 0$ 时，找到邻域 J_s 满足

$$f(\sigma + h_s) - f(s+h_s) + f(s) - f(\sigma) > 2\epsilon_s > 0 \tag{10}$$

从而对 ϵ_s 满足(8)式，当 $f(s+h_s) - f(s) < 0$ 时（(7)式说明没有等于零的情形)，同理可以找到合适的邻域 J_s 对 ϵ_s 满足(8)

Step2

对于 $\forall s \in [0,1]$ 都满足(8)，那么 J_{s_i} 一定可以覆盖区间 $[0,1]$ 根据有限覆盖定理，可设 $J_{s_1}...J_{s_m}$ 覆盖了 $[0,1]$，设

$$\epsilon = \min\{\epsilon_{s_1}, \epsilon_{s_2}, ..., \epsilon_{s_m}\} \tag{11}$$

Step2

对于 $\forall s \in [0,1]$ 都满足(8)，那么 J_{s_i} 一定可以覆盖区间 $[0,1]$ 根据有限覆盖定理，可设 $J_{s_1}...J_{s_m}$ 覆盖了 $[0,1]$，设

$$\epsilon = \min\{\epsilon_{s_1}, \epsilon_{s_2}, ..., \epsilon_{s_m}\} \tag{11}$$

若 $g \in \mathcal{X}$ 适合 $||g-f|| < \epsilon$，则由(8)式，对 $\forall \sigma \in J_{s_k}(k=1,...m)$ 有

$$\begin{aligned}
&|g(\sigma+h_{s_k})-g(\sigma)| \\
=&|g(\sigma+h_{s_k})-f(\sigma+h_{s_k})+f(\sigma+h_{s_k})-f(\sigma)+f(\sigma)-g(\sigma)| \\
\geq&\Big||f(\sigma+h_{s_k})-f(\sigma)|-|f(\sigma)-g(\sigma)|-|g(\sigma+h_{s_k})-f(\sigma+h_{s_k})|\Big| \\
\geq&\Big||f(\sigma+h_{s_k})-f(\sigma)|-2||g-f||\Big| \\
\geq&\Big||f(\sigma+h_{s_k})-f(\sigma)|-2\epsilon\Big| > n|h_{s_k}|
\end{aligned} \tag{12}$$

Step2

对于 $\forall s \in [0,1]$ 都满足(8)，那么 J_{s_i} 一定可以覆盖区间 $[0,1]$ 根据有限覆盖定理，可设 $J_{s_1}...J_{s_m}$ 覆盖了 $[0,1]$，设

$$\epsilon = \min\{\epsilon_{s_1}, \epsilon_{s_2}, ..., \epsilon_{s_m}\} \tag{11}$$

若 $g \in \mathcal{X}$ 适合 $||g-f|| < \epsilon$，则由(8)式，对 $\forall \sigma \in J_{s_k}(k=1,...m)$ 有

$$\begin{aligned}
&|g(\sigma+h_{s_k}) - g(\sigma)| \\
=&|g(\sigma+h_{s_k}) - f(\sigma+h_{s_k}) + f(\sigma+h_{s_k}) - f(\sigma) + f(\sigma) - g(\sigma)| \\
\geq&\left||f(\sigma+h_{s_k}) - f(\sigma)| - |f(\sigma) - g(\sigma)| - |g(\sigma+h_{s_k}) - f(\sigma+h_{s_k})|\right| \\
\geq&\left||f(\sigma+h_{s_k}) - f(\sigma)| - 2||g-f||\right| \\
\geq&\left||f(\sigma+h_{s_k}) - f(\sigma)| - 2\epsilon\right| > n|h_{s_k}|
\end{aligned} \tag{12}$$

根据(7)的定义 $g \in \mathcal{X} \setminus A_n$, 从而 f 是 $\mathcal{X} \setminus A_n$ 的内点, 由 f 的任意性可得，$\mathcal{X} \setminus A_n$ 是开集，从而 A_n 是闭集

A_n 是闭集，因此 $A_n = \overline{A_n}$，下面证明 A_n 没有内点，$\forall f \in A_n$，$\forall \epsilon > 0$，由 Weierstrass 逼近定理，存在多项式 p，使得

$$||f - p|| < \frac{\epsilon}{2} \tag{13}$$

Step3

A_n 是闭集，因此 $A_n = \overline{A_n}$，下面证明 A_n 没有内点，$\forall f \in A_n$，$\forall \epsilon > 0$，由 Weierstrass 逼近定理，存在多项式 p，使得

$$||f - p|| < \frac{\epsilon}{2} \tag{13}$$

（Weierstrass 逼近定理：闭区间上的连续函数可用多项式级数一致逼近）

Step3

A_n 是闭集，因此 $A_n = \overline{A_n}$，下面证明 A_n 没有内点，$\forall f \in A_n$，$\forall \epsilon > 0$，由 Weierstrass 逼近定理，存在多项式 p，使得

$$||f - p|| < \frac{\epsilon}{2} \tag{13}$$

（Weierstrass 逼近定理：闭区间上的连续函数可用多项式级数一致逼近）由闭区间连续函数的性质，可以得到 p 的导数在 $[0, 1]$ 上有界，因此根据中值定理 $\exists M > 0$ 使得 $\forall s \in [0, 1]$ 及 $|h| < 1/n$ 有

$$|p(s + h) - p(s)| \leq M|h| \tag{14}$$

Step3

A_n 是闭集，因此 $A_n = \overline{A_n}$，下面证明 A_n 没有内点，$\forall f \in A_n$，$\forall \epsilon > 0$，由 Weierstrass 逼近定理，存在多项式 p，使得

$$||f - p|| < \frac{\epsilon}{2} \tag{13}$$

（Weierstrass 逼近定理：闭区间上的连续函数可用多项式级数一致逼近）由闭区间连续函数的性质，可以得到 p 的导数在 $[0, 1]$ 上有界，因此根据中值定理 $\exists M > 0$ 使得 $\forall s \in [0, 1]$ 及 $|h| < 1/n$ 有

$$|p(s + h) - p(s)| \leq M|h| \tag{14}$$

设 $g(s) \in C[0, 1]$ 是一个分段线性函数，满足 $||g|| < \epsilon/2$，并且各段的斜率的绝对值大于 $M + n$，从而由(7)可得

$$p + g \in B(f, \epsilon), \quad \text{且} \quad p + g \notin A_n \tag{15}$$

由 ϵ 的任意性，可得 A_n 没有内点，是疏集，从而 $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是第一纲集，$\mathcal{X}$ 完备，由 Baire 定理，$\mathcal{X}$ 是第二纲集，根据(6)得，E 也是第二纲集

感谢聆听

张恭庆，林源渠.
泛函分析讲义.
北京大学出版社, pages 91–92.