4.1 Równanie transportu ciepła

Jakub Kędra

2023-01-23

1 Problem

Celem projektu jest rozwiązanie metodą elementów skończonych poniższego równania różniczkowego

$$-k(x)u''(x) = 100x \tag{1}$$

dla warunków brzegowych:

$$\begin{cases} u(2) = 0 \\ u'(0) + u(0) = 20 \end{cases} \tag{2}$$

gdzie:

$$k(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 2x & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases} \tag{3}$$

oraz dla poszukiwanej funkcji u takiej, że:

$$[0, 2] \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{R} \tag{4}$$

2 Sformułowanie wariacyjne

Zacznijmy od sformułowania wariacyjnego. Najpierw przekształćmy warunki brzegowe (2) do wygodnej postaci:

$$\begin{cases} u(2) = 0 \\ u'(0) = 20 - u(0) \end{cases} \tag{5}$$

Ponieważ

$$\forall_{x\,\in\,\Omega}\; k(x) > 0 \tag{6}$$

obie strony równania (1) możemy podzielić przez $k(x)$

$$-u''(x) = \frac{100x}{k(x)} \tag{7}$$

Następnie równanie to musimy przemnożyć przez funkcję sprawdzającą $v(x)$, taką że:

$$v \in V = \left\{ f \in H^1(\Omega) : f(2) = 0 \right\} \tag{8}$$

oraz zcałkować po obszarze $\Omega = (0, 2)$:

$$\int_0^2 -u''(x)v(x)dx = \int_0^2 \frac{100x}{k(x)}v(x)dx \tag{9}$$

Kolejnym krokiem jest rozpisanie funkcji $k(x)$:

$$\int_0^2 -u''(x)v(x)dx = \int_0^1 \frac{100x}{x+1}v(x)dx + \int_1^2 \frac{100x}{2x}v(x)dx \tag{10}$$

Po uproszeczeniu:

$$\int_0^2 -u''(x)v(x)dx = \int_0^1 \frac{100x}{x+1}v(x)dx + 50\int_1^2 v(x)dx \tag{11}$$

Następnie obliczamy całkę pomocniczą:

$$\begin{aligned} \int -u''(x)v(x)dx &= \begin{vmatrix} t = v(x) & t' = v'(x) \\ l' = -u''(x) & l = -u'(x) \end{vmatrix} = \\ &= -v(x)u'(x) + \int v'(x)u'(x) \end{aligned} \tag{12}$$

I podstawiamy ją do równania:

$$-v(x)u'(x)\Big|_0^2 + \int_0^2 v'(x)u'(x)dx = \int_0^1 \frac{100x}{x+1}v(x)dx + 50\int_1^2 v(x)dx \tag{13}$$

$$-\underbrace{v(2)u'(2)}_{0} + v(0)\underbrace{u'(0)}_{20-u(0)} + \int_0^2 v'(x)u'(x)dx = \int_0^1 \frac{100x}{x+1}v(x)dx + 50\int_1^2 v(x)dx \tag{14}$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymujemy równanie:

$$20v(0) - v(0)u(0) + \int_0^2 v'(x)u'(x)dx = \int_0^1 \frac{100x}{x+1}v(x)dx + 50\int_1^2 v(x)dx \quad (15)$$

Po pogrupowaniu elementów, otrzymujemy ostateczne równanie:

$$\underbrace{-v(0)u(0) + \int_0^2 v'(x)u'(x)dx}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 \frac{100x}{x+1}v(x)dx + 50\int_1^2 v(x)dx - 20v(0)}_{L(v)} \quad (16)$$

Na bazie którego konstruujemy funkcje $B(u,v)$ oraz $L(v)$

3 Konstruowanie podprzestrzeni elementów skończonych $V_h \subset V$

3.1 Podprzestrzeń V_h

Skoro po prawej stronie mamy warunek Dirichleta, a po lewej nie, za przestrzeń w której będziemy rozwiązywac ten problem przyjmujemy

$$V_h = \langle e_0, e_1, e_2, ..., e_{n-1} \rangle \quad (17)$$

3.2 Konstruowanie macierzy

Równanie liniowe w postaci macierzowej do którego sprowadza się odnalezienie

$$u = u_0e_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + ... + u_{n-1}e_{n-1} \in V_h \quad (18)$$

spełniającego równanie (16) dla każdego $v \in V_h$ ma zatem postać

$$\begin{bmatrix} B(e_0,e_0) & B(e_0,e_1) & B(e_0,e_2) & \cdots & B(e_0,e_{n-1}) \\ B(e_1,e_0) & B(e_1,e_1) & B(e_1,e_2) & \cdots & B(e_1,e_{n-1}) \\ B(e_2,e_0) & B(e_2,e_1) & B(e_2,e_2) & \cdots & B(e_2,e_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_{n-1},e_0) & B(e_{n-1},e_1) & B(e_{n-1},e_2) & \cdots & B(e_{n-1},e_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_0) \\ L(e_1) \\ L(e_2) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (19)$$

3.3 Funkcje bazowe

W celu rozwiązania problemu wykorzystamy funkcje bazowe, zadane wzorem:

$$e_i = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{dla } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases} \tag{20}$$

Wzór ten możemy uprościć. Obliczmy różnicę pomiędzy poszczególnymi x_i:

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i \tag{21}$$

Niech

$$\Delta x = h = \frac{b-a}{n} \tag{22}$$

Gdzie:

- a, b oznacza początek i koniec obszaru Ω ($\Omega = (0, 2) = (a, b)$)
- n - liczbę elementów skończonych

Z powyższych równań wynika, że:

$$x_{i-1} = x_i - h \tag{23}$$
$$x_{i+1} = x_i + h \tag{24}$$

Po podstawieniu do wzoru (20), otrzymujemy finalny wzór na i-tą funkcję bazową:

$$e_i = \begin{cases} \frac{x}{h} - \frac{x_i}{h} + 1 & \text{dla } x \in (x_i - h, x_i] \\ \frac{-x}{h} + \frac{x_i}{h} + 1 & \text{dla } x \in (x_i, x_i + h) \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases} \tag{25}$$

A także jej różniczkę:

$$e_i = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{dla } x \in (x_i - h, x_i] \\ -\frac{1}{h} & \text{dla } x \in (x_i, x_i + h) \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases} \tag{26}$$