

# Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami iteracyjnymi

Jakub Kędra

Gr. nr 4

## Spis treści

Spis tabel .....	2
Spis wykresów .....	3
Spis równań .....	3
Informacje techniczne .....	4
Poniższa tabela zawiera informacje sprzętowe.....	4
Zadanie .....	4
Macierze i układ równań .....	4
Wektor $x$ .....	4
Wektor $b$ .....	5
Macierz $A$ .....	5
Macierz 2. ....	5
Wykorzystywane wartości:.....	5
Wektory początkowe.....	5
Wektor pierwszy: wektor zerowy.....	5
Wektor drugi: wektor, którego współczynniki stanowią połowę wektora $x$ .....	5
Wstęp teoretyczny .....	6
Norma.....	6
Wskaźnik uwarunkowania układu równań .....	6
Pierwszy warunek stopu (przyrostowy) .....	6
Drugi warunek stopu (rezydualny) .....	6
Awaryjny warunek stopu.....	6
Metoda Jacobiego .....	7
Promień spektralny .....	8
Pierwszy warunek stopu.....	8
Pierwszy wektor początkowy .....	8
Drugi wektor początkowy.....	1
Drugi warunek stopu .....	1
Pierwszy wektor początkowy .....	1
Drugi wektor początkowy.....	3
Porównanie wyników .....	2
Porównanie wykorzystanych warunków.....	2
Porównanie wykorzystanych wektorów początkowych .....	2
Wykresy .....	3
Oznaczenia: .....	3

Wykresy otrzymanych błędów .....	3
Wykresy liczby iteracji .....	4
Wykresy czasu wykonania w sekundach .....	5
Wnioski .....	6
Bibliografia.....	6

## Spis tabel

Tabela 1. Informacje techniczne .....	4
Tabela 2. Promień spektralny dla poszczególnych .....	8
Tabela 3. Błędy w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla pierwszego warunku stopu z wykorzystaniem pierwszego wektora początkowego .....	8
Tabela 4. Liczby iteracji w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla pierwszego warunku stopu z wykorzystaniem pierwszego wektora początkowego .....	1
Tabela 5. Zmierzony czas działania algorytmu w sekundach w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla pierwszego warunku stopu z wykorzystaniem pierwszego wektora początkowego .....	1
Tabela 6. Błędy w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla pierwszego warunku stopu z wykorzystaniem drugiego wektora początkowego .....	1
Tabela 7. Liczby iteracji w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla pierwszego warunku stopu z wykorzystaniem drugiego wektora początkowego .....	1
Tabela 8. Zmierzony czas działania algorytmu w sekundach w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla pierwszego warunku stopu z wykorzystaniem drugiego wektora początkowego .....	2
Tabela 9. Błędy w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla drugiego warunku stopu z wykorzystaniem pierwszego wektora początkowego .....	1
Tabela 10. Liczby iteracji w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla drugiego warunku stopu z wykorzystaniem pierwszego wektora początkowego .....	1
Tabela 11. Zmierzony czas działania algorytmu w sekundach w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla drugiego warunku stopu z wykorzystaniem pierwszego wektora początkowego .....	2
Tabela 12. Błędy w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla drugiego warunku stopu z wykorzystaniem drugiego wektora początkowego .....	3
Tabela 13. Liczby iteracji w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla drugiego warunku stopu z wykorzystaniem drugiego wektora początkowego .....	3
Tabela 14. Zmierzony czas działania algorytmu w sekundach w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla drugiego warunku stopu z wykorzystaniem drugiego wektora początkowego ..	1
Tabela 15. Zestawienie liczb gorszych wyników ze względu na przyjęty warunek stopu dla pierwszego wektora początkowego oraz ich procent w całości.....	2
Tabela 16. Zestawienie liczb gorszych wyników ze względu na przyjęty warunek stopu dla drugiego wektora początkowego oraz ich procent w całości.....	2
Tabela 17. Zestawienie liczb gorszych wyników ze względu na przyjęty wektor początkowy dla rezydualnego warunku stopu oraz ich procent w całości .....	2
Tabela 18. Zestawienie liczb gorszych wyników ze względu na przyjęty wektor początkowy dla przyrostowego warunku stopu oraz ich procent w całości.....	3

## Spis wykresów

Wykres 1. Otrzymane błędy (dla $\rho = 10 - 13$ ) .....	3
Wykres 2. Otrzymane błędy (dla $\rho = 10 - 8$ ) .....	4
Wykres 3. Liczba iteracji (dla $\rho = 10 - 13$ ) .....	4
Wykres 4. Liczba iteracji (dla $\rho = 10 - 8$ ) .....	5
Wykres 5. Czas wykonania w sekundach (dla $\rho = 10 - 13$ ) .....	5
Wykres 6. Czas wykonania w sekundach (dla $\rho = 10 - 8$ ) .....	6

## Spis równań

Równanie 1. Ogólny wzór układu równań .....	4
Równanie 2. Wzór na $i$ -ty element wektora współczynników $x$ .....	4
Równanie 3. Wektor współczynników $x$ .....	4
Równanie 4. Wzór macierzy 1. z parametrami .....	5
Równanie 5. Wartości przyjmowane przez $n$ .....	5
Równanie 6. Wartości przyjmowane przez $\rho$ .....	5
Równanie 7. Wektor początkowy pierwszy, zerowy .....	5
Równanie 8. Wektor początkowy drugi, którego współczynniki stanowią połowę współczynników wektora $x$ .....	5
Równanie 9. Wzór na przyjętą normę macierzy (Frobeniusa) .....	6
Równanie 10. Wzór na błędy wyliczane w tabelkach .....	6
Równanie 11. Wzór na uwarunkowanie macierzy .....	6
Równanie 12. Wzór na promień spektralny .....	6
Równanie 13. Pierwszy warunek stopu .....	6
Równanie 14. Drugi warunek stopu .....	6
Równanie 15. Awaryjny warunek stopu .....	6
Równanie 16. Dekompozycja macierzy $A$ na sumę macierzy $D$ , $L$ oraz $U$ .....	7
Równanie 17. Definicja macierzy $D$ .....	7
Równanie 18. Definicja sumy macierzy trójkątnych $L + U$ .....	7
Równanie 19. Wzór iteracyjny metody Jacobiego, wykorzystujący zapis macierzowy .....	7
Równanie 20. Wzór iteracyjny metody Jacobiego, wykorzystujący zapis poszczególnych współczynników .....	7
Równanie 21. Oznaczenia na wykresach .....	3

## Informacje techniczne

Poniższa tabela zawiera informacje sprzętowe

<b>System operacyjny</b>	Windows 10 Home (64bit, kompilacja 19045)
<b>Procesor</b>	i7 9750h
<b>Język programowania</b>	Python
<b>Kompilator</b>	Python 3.8.10

Tabela 1. Informacje techniczne

## Zadanie

Celem zadania było zbadanie algorytmu rozwiązywania układów równań liniowych metodą iteracyjną – Jacobiego, a także zbadanie promienia spektralnego macierzy iteracji oraz jego wpływu na otrzymane wyniki.

## Macierze i układ równań

W niniejszym sprawozdaniu będziemy próbowali rozwiązać następujący układ równań:

$$Ax = b$$

Równanie 1. Ogólny wzór układu równań

Gdzie:

$A$  – macierz  $n \times n$  współczynników przy  $x$ , pod nią będziemy podstawiali macierz 1., 2. oraz 3.

$x$  – wektor niewiadomych  $x$ , będąca  $n$ -elementową permutacją ze zbioru  $\{1, -1\}$

$b$  – wektor

Dodatkowo, dokładność przybliżenia w tym sprawozdaniu będziemy oznaczać za pomocą  $\rho$  (w równaniach) lub też  $r$  (w tabelach)

## Wektor $x$

Wektor będący  $n$ -elementową permutacją ze zbioru  $\{1, -1\}$ . To właśnie jego wartości będziemy w tym sprawozdaniu szukali. Aby sprawdzić dokładność wyników, na potrzeby sprawozdania, przyjmujemy, że:

$$x_i = (-1)^i$$

Równanie 2. Wzór na  $i$ -ty element wektora współczynników  $x$

Czyli

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \end{bmatrix}$$

Równanie 3. Wektor współczynników  $x$

## Wektor $b$

Wektor  $b$ , będący  $n$ -elementową prawą stroną równania. Jego wartości otrzymujemy podstawiając pod wzór ogólny układu równań (1.) zdefiniowanego w poprzedniej sekcji wektora niewiadomych  $x$  oraz macierzy  $A$

## Macierz $A$

Macierz współczynników  $A$  o wymiarach  $n \times n$ . W tym sprawozdaniu będzie ona przyjmowała 3

## Macierz 2.

Gdzie

Na tej macierzy będziemy przeprowadzać dokładnie te same testy co na macierzy 1. Następnie porównamy zebrane wyniki

$$a_{ii} = 8$$

$$a_{ij} = \frac{1}{|i - j| + 4} \quad \text{dla } j \neq i$$

*Równanie 4. Wzór macierzy 1. z parametrami*

## Wykorzystywane wartości:

Na cele sprawozdania będziemy korzystali z następujących wymiarów macierzy i wektorów  $n$ :

$$n = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 30, 50, 70, 100, 200, 300, 500, 700\}$$

*Równanie 5. Wartości przyjmowane przez  $n$*

Badania będą przeprowadzane również dla tylko jednego typu danych zmiennoprzecinkowych – *float64*

Natomiast za przyjmowane wartości dokładności będziemy przyjmowali

$$\rho = \{10^{-x} : x \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}\}$$

*Równanie 6. Wartości przyjmowane przez  $\rho$*

## Wektory początkowe

Jako wektory początkowe przyjmujemy dwa wektory:

Wektor pierwszy: wektor zerowy

$$x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Równanie 7. Wektor początkowy pierwszy, zerowy*

Wektor drugi: wektor, którego współczynniki stanowią połowę wektora  $x$

$$x^0 = \frac{1}{2}x = 0,5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ \vdots \\ 0,5 \cdot (-1)^{n-1} \end{bmatrix}$$

Równanie 8. Wektor początkowy drugi, którego współczynniki stanowią połowę współczynników wektora  $x$

## Wstęp teoretyczny

### Norma

W sprawozdaniu w celu obliczenia normy macierzy wykorzystamy normę Frobeniusa, zadaną wzorem:

$$\|A\| := \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |a_{i,j}|^2}$$

*Równanie 9. Wzór na przyjętą normę macierzy (Frobeniusa)*

Natomiast aby sprawdzić dokładność wykorzystanych algorytmów będziemy liczyli różnicę pomiędzy obliczonymi niewiadomymi  $x$ , a zadanymi.

$$error(x_{obliczone}) = \|x_{zadane} - x_{obliczone}\|$$

*Równanie 10. Wzór na błędy wyliczane w tabelkach*

### Wskaźnik uwarunkowania układu równań

Wskaźnik ten mówi nam jak bardzo czułe na zaburzenia jest nasz układ równań. Obliczamy go za pomocą wzoru

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

*Równanie 11. Wzór na uwarunkowanie macierzy*

### Promień spektralny

Promień spektralny obliczamy ze wzoru:

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

*Równanie 12. Wzór na promień spektralny*

### Pierwszy warunek stopu (przyrostowy)

Za pierwszy warunek stopu przyjęliśmy kryterium, zadane wzorem:

$$\|x^{i+1} - x^i\| < \rho$$

*Równanie 13. Pierwszy warunek stopu*

### Drugi warunek stopu (rezydualny)

Za drugi warunek stopu przyjęliśmy warunek, zadany wzorem:

$$\|Ax^i - b\| < \rho$$

*Równanie 14. Drugi warunek stopu*

### Awaryjny warunek stopu

Dodatkowo, do każdego z dwóch powyższych warunków stopu dodamy warunek na maksymalną liczbę iteracji  $max\_iter$ .

$$i < max\_iter$$

*Równanie 15. Awaryjny warunek stopu*

Gdzie:

- $max\_iter$  – maksymalna liczba iteracji, przyjmujemy, że wynosi ona 1000
- $i$  – liczba iteracji

### Metoda Jacobiego

Do tej metody będziemy potrzebowali zdekomponować macierz  $A$  i przedstawić ją za pomocą poniższej sumy:

$$A = D + L + U$$

*Równanie 16. Dekompozycja macierzy  $A$  na sumę macierzy  $D$ ,  $L$  oraz  $U$*

Gdzie  $D$  oznacza macierz diagonalną taką, że:

$$D = \begin{bmatrix} a_{0,0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

*Równanie 17. Definicja macierzy  $D$*

Natomiast  $L$  oraz  $U$  oznacza odpowiednio macierz trójkątną dolną oraz macierz trójkątną górną, których sumę definiujemy jako:

$$L + U = \begin{bmatrix} 0 & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{1,0} & 0 & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

*Równanie 18. Definicja sumy macierzy trójkątnych  $L + U$*

Na podstawie powyższych oznaczeń, nasze rozwiązanie otrzymujemy za pomocą wzoru iteracyjnego:

$$x^{k+1} = D^{-1}(b - (L + U)x^k)$$

*Równanie 19. Wzór iteracyjny metody Jacobiego, wykorzystujący zapis macierzowy*

Wzór ten możemy również przedstawić bez korzystania z macierzy, lecz wykorzystując jej elementy:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} \left( b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^k \right)$$

*Równanie 20. Wzór iteracyjny metody Jacobiego, wykorzystujący zapis poszczególnych współczynników*

Gdzie:

- $i$  –  $i$ -ty wiersz macierzy,  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$
- $b_i$  –  $i$ -ty współczynnik macierzy  $b$
- $a_{ij}$  – współczynnik macierzy  $A$  o indeksach  $i$  oraz  $j$
- $k$  –  $k$ -ta iteracja



## Promień spektralny

n	Promień spek
3	4,72746E-02
4	6,74008E-02
5	8,57857E-02
6	1,02727E-01
7	1,18448E-01
8	1,33124E-01
9	1,46892E-01
10	1,59865E-01
11	1,72134E-01
12	1,83774E-01
13	1,94851E-01
14	2,05418E-01
15	2,15522E-01
20	2,60349E-01
30	3,30454E-01
50	4,28794E-01
70	4,98604E-01
100	5,76093E-01
200	7,34332E-01
300	8,30204E-01
500	9,53263E-01
700	1,03530E+00

Tabela 2. Promień spektralny dla poszczególnych

Promień spektralny w prawie każdym przypadku nie przekraczał wartości 1. Wraz z zwiększeniem rozmiaru macierzy n, promień spektralny również rósł. Tylko dla n=700 promień ten przekroczył tą wartość.

## Pierwszy warunek stopu

Pierwszy wektor początkowy

n\r	1E-08	1E-09	1E-10	1E-11	1E-12	1E-13
3	2,81989E-10	1,33180E-11	6,29397E-13	2,97453E-14	2,97453E-14	1,53837E-15
4	1,92008E-11	1,92008E-11	5,16986E-13	1,40477E-14	1,40477E-14	4,96507E-16
5	9,94266E-11	8,52937E-12	7,31657E-13	7,31657E-13	6,27326E-14	5,42648E-15
6	2,53362E-11	2,53362E-11	6,87852E-13	1,88529E-14	1,88529E-14	6,56817E-16
7	1,75480E-10	2,07851E-11	2,46199E-12	2,91566E-13	3,46053E-14	4,08978E-15
8	3,02997E-11	8,25216E-13	8,25216E-13	2,23574E-14	2,23574E-14	5,43896E-16
9	1,90279E-10	2,79506E-11	4,10582E-12	6,03055E-13	8,87089E-14	1,89390E-15
10	3,45588E-11	9,43036E-13	9,43036E-13	2,56589E-14	2,56589E-14	6,28037E-16
11	9,62123E-10	2,85078E-11	4,90720E-12	8,44626E-13	1,45451E-13	4,19688E-15
12	3,88035E-11	1,06174E-12	1,06174E-12	2,87443E-14	5,76889E-16	5,76889E-16
13	6,60827E-10	1,28763E-10	4,88865E-12	9,52611E-13	3,61708E-14	7,06193E-15
14	6,56950E-11	2,34799E-12	2,34799E-12	8,86035E-14	3,41292E-15	3,41292E-15
15	4,36763E-10	9,41317E-11	4,37241E-12	9,42350E-13	4,38230E-14	9,44930E-15
20	1,57641E-10	1,13140E-11	8,12008E-13	5,83463E-14	5,83463E-14	4,28983E-15
30	7,13054E-10	8,36176E-11	9,80568E-12	1,34921E-13	1,58603E-14	2,01070E-15
50	1,35451E-09	4,86020E-11	9,20644E-12	3,30373E-13	6,26996E-14	1,20366E-14
70	1,11216E-09	6,68990E-11	1,64077E-11	9,86873E-13	5,93679E-14	1,49658E-14
100	1,82603E-09	1,76263E-10	1,70144E-11	1,64230E-12	1,58694E-13	1,64054E-14
200	2,77539E-09	2,57092E-10	2,38152E-11	2,20598E-12	2,04688E-13	2,26458E-14
300	2,39778E-09	2,07023E-10	3,29744E-11	2,84707E-12	2,46452E-13	2,85511E-14
500	3,56857E-09	2,94193E-10	3,67631E-11	3,03090E-12	3,79892E-13	4,36058E-14
700	3,18057E-09	3,83927E-10	3,42619E-11	4,13587E-12	3,71709E-13	5,43878E-14

Tabela 3. Błędy w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla pierwszego warunku stopu z wykorzystaniem pierwszego wektora początkowego

n\r	1E-08	1E-09	1E-10	1E-11	1E-12	1E-13
3	7	8	9	10	10	11
4	7	7	8	9	9	10
5	9	10	11	11	12	13
6	7	7	8	9	9	10
7	10	11	12	13	14	15
8	7	8	8	9	9	10
9	11	12	13	14	15	17
10	7	8	8	9	9	10
11	11	13	14	15	16	18
12	7	8	8	9	10	10
13	12	13	15	16	18	19
14	7	8	8	9	10	10
15	13	14	16	17	19	20
20	8	9	10	11	11	12
30	9	10	11	13	14	15
50	11	13	14	16	17	18
70	13	15	16	18	20	21
100	15	17	19	21	23	25
200	21	24	27	30	33	36
300	27	31	34	38	42	46
500	38	44	49	55	60	66
700	52	59	67	74	82	90

Tabela 4. Liczby iteracji w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla pierwszego warunku stopu stopu z wykorzystaniem pierwszego wektora początkowego

n\r	1E-08	1E-09	1E-10	1E-11	1E-12	1E-13
3	1,68900E-04	1,52300E-04	1,73500E-04	1,88400E-04	1,88500E-04	2,06000E-04
4	1,77700E-04	1,79200E-04	2,03100E-04	2,27000E-04	2,26300E-04	2,53200E-04
5	2,92300E-04	3,24600E-04	3,84100E-04	3,66000E-04	4,04900E-04	4,30100E-04
6	2,95200E-04	2,95300E-04	3,36900E-04	3,82600E-04	3,77400E-04	4,50400E-04
7	5,50600E-04	6,07500E-04	6,62400E-04	7,14500E-04	7,69400E-04	8,33300E-04
8	4,95000E-04	5,50100E-04	5,95700E-04	6,24200E-04	6,19000E-04	6,88500E-04
9	8,98300E-04	9,78800E-04	1,06040E-03	1,14120E-03	1,22200E-03	1,45120E-03
10	6,82300E-04	7,66800E-04	7,69800E-04	9,26400E-04	9,22800E-04	1,20920E-03
11	1,31630E-03	1,54800E-03	1,67490E-03	1,80240E-03	1,91290E-03	2,15080E-03
12	9,62300E-04	1,10120E-03	1,16010E-03	1,27670E-03	1,41060E-03	1,41030E-03
13	1,91880E-03	2,09010E-03	2,27280E-03	2,47760E-03	3,30880E-03	3,05780E-03
14	1,24670E-03	1,41930E-03	1,41330E-03	1,63750E-03	1,83890E-03	1,86010E-03
15	2,48690E-03	2,69000E-03	3,11570E-03	3,52850E-03	4,03040E-03	4,00270E-03
20	2,35640E-03	2,74330E-03	3,13840E-03	3,30910E-03	3,23040E-03	3,65980E-03
30	5,75390E-03	6,41440E-03	7,33000E-03	8,80640E-03	9,61950E-03	1,03186E-02
50	1,99564E-02	2,20575E-02	2,44271E-02	2,91147E-02	2,91020E-02	3,15871E-02
70	4,27009E-02	5,07451E-02	5,44468E-02	6,02301E-02	6,99355E-02	7,47437E-02
100	1,02331E-01	1,15192E-01	1,26049E-01	1,35013E-01	1,54329E-01	1,70480E-01
200	5,44021E-01	6,50195E-01	7,11260E-01	7,97012E-01	8,71774E-01	9,60657E-01
300	1,57706E+00	1,86126E+00	2,00312E+00	2,28777E+00	2,52797E+00	2,68990E+00
500	6,22594E+00	7,31133E+00	7,99163E+00	9,01867E+00	9,75604E+00	1,06769E+01
700	1,65296E+01	1,87264E+01	2,19607E+01	2,32599E+01	2,54771E+01	2,82258E+01

Tabela 5. Zmierzony czas działania algorytmu w sekundach w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla pierwszego warunku stopu stopu z wykorzystaniem pierwszego wektora początkowego

Powyżej znajdują się wyniki dla pierwszego warunku stopu oraz dla pierwszego wektora początkowego (zerowego). Dla każdego z badanych rozmiarów udało się obliczyć układ równań z błędem nie przekraczającym  $10^{-8}$ . Największe różnice w dokładności pomiędzy różnymi rozmiarami macierzy  $n$  można zauważyć dla najmniejszej dokładności ( $\rho = 10^{-8}$ ). Dodatkowo, dla każdego rozmiaru udało się otrzymać wynik, bez przekraczania maksymalnego limitu liczby iteracji (1000).

Możemy dodatkowo zauważyć, że dla parzystych rozmiarów macierzy algorytm wykonywał mniej iteracji. Spowodowane jest to przyjętym wektorem  $X$  oraz jego sekwencyjnej, nielosowej postaci. Rozmiar macierzy oraz wykorzystany warunek stopu również miał wpływ na czas wykonania algorytmu, który w większości przypadków nie przekraczał nawet 1s. Dopiero od  $n = 300$  czas przekroczył 1s. W najgorszym przypadku algorytm wykonywał się ok. 28s.

Drugi wektor początkowy

n\r	1E-08	1E-09	1E-10	1E-11	1E-12	1E-13
3	1,40994E-10	6,65899E-12	3,14823E-13	3,14823E-13	1,47438E-14	7,69185E-16
4	9,60048E-12	9,60048E-12	2,58493E-13	2,58493E-13	7,09501E-15	3,51083E-16
5	5,79506E-10	4,97132E-11	4,26466E-12	3,65812E-13	3,13158E-14	2,74878E-15
6	1,26682E-11	1,26682E-11	3,44030E-13	9,47795E-15	9,47795E-15	4,00297E-16
7	7,40748E-10	8,77400E-11	1,03926E-11	1,45726E-13	1,72771E-14	2,07407E-15
8	1,51498E-11	1,51498E-11	4,12520E-13	1,10689E-14	1,10689E-14	2,48253E-16
9	6,47681E-10	9,51396E-11	2,05292E-12	3,01470E-13	4,42612E-14	6,53430E-15
10	1,72793E-11	1,72793E-11	4,71421E-13	1,27796E-14	1,27796E-14	3,51083E-16
11	4,81061E-10	8,28069E-11	1,42540E-11	4,22294E-13	7,25759E-14	1,24899E-14
12	1,94017E-11	1,94017E-11	5,30736E-13	1,42645E-14	1,42645E-14	2,22045E-16
13	3,30414E-10	6,43812E-11	1,25448E-11	4,76370E-13	9,27572E-14	3,54924E-15
14	3,28474E-11	3,28474E-11	1,17390E-12	4,42223E-14	1,63169E-15	1,63169E-15
15	1,01327E-09	4,70659E-11	1,01438E-11	4,71162E-13	1,01571E-13	4,73117E-15
20	7,88206E-11	5,65691E-12	5,65691E-12	4,05919E-13	2,90416E-14	2,05916E-15
30	3,56527E-10	4,18087E-11	4,90276E-12	5,74868E-13	6,73825E-14	7,92547E-15
50	6,77255E-10	1,28289E-10	4,60320E-12	8,71884E-13	3,13057E-14	6,17348E-15
70	5,56082E-10	1,36384E-10	8,20379E-12	4,93404E-13	1,21083E-13	8,11147E-15
100	9,13016E-10	8,81315E-11	8,50714E-12	8,21264E-13	7,94429E-14	9,68188E-15
200	3,06694E-09	2,84100E-10	2,63169E-11	2,43779E-12	2,26137E-13	2,43314E-14
300	2,21171E-09	1,90958E-10	3,04155E-11	2,62619E-12	2,27558E-13	2,75917E-14
500	2,70463E-09	3,37979E-10	2,78630E-11	3,48194E-12	2,88699E-13	4,69843E-14
700	3,93562E-09	3,51218E-10	4,23956E-11	3,78370E-12	3,40335E-13	5,93251E-14

Tabela 6. Błędy w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla pierwszego warunku stopu z wykorzystaniem drugiego wektora początkowego

n\r	1E-08	1E-09	1E-10	1E-11	1E-12	1E-13
3	7	8	9	9	10	11
4	7	7	8	8	9	10
5	8	9	10	11	12	13
6	7	7	8	9	9	10
7	9	10	11	13	14	15
8	7	7	8	9	9	10
9	10	11	13	14	15	16
10	7	7	8	9	9	10
11	11	12	13	15	16	17
12	7	7	8	9	9	10
13	12	13	14	16	17	19
14	7	7	8	9	10	10
15	12	14	15	17	18	20
20	8	9	9	10	11	12
30	9	10	11	12	13	14
50	11	12	14	15	17	18
70	13	14	16	18	19	21
100	15	17	19	21	23	25
200	20	23	26	29	32	35
300	26	30	33	37	41	45
500	37	42	48	53	59	64
700	49	57	64	72	80	87

Tabela 7. Liczby iteracji w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla pierwszego warunku stopu z wykorzystaniem drugiego wektora początkowego

n\r	1E-08	1E-09	1E-10	1E-11	1E-12	1E-13
3	2,20200E-04	1,94200E-04	2,20700E-04	2,15800E-04	2,38900E-04	2,58600E-04
4	3,50700E-04	2,90500E-04	2,61700E-04	3,48400E-04	2,91800E-04	3,49200E-04
5	3,76500E-04	3,91900E-04	4,30500E-04	4,65100E-04	5,57400E-04	6,12200E-04
6	3,67100E-04	4,27400E-04	4,29000E-04	5,15600E-04	6,58600E-04	5,24600E-04
7	7,96900E-04	6,41800E-04	7,25400E-04	8,37700E-04	9,01200E-04	9,68500E-04
8	5,95200E-04	5,83100E-04	6,44500E-04	7,46300E-04	7,66500E-04	8,49200E-04
9	1,01900E-03	1,10580E-03	1,31200E-03	1,60410E-03	1,53400E-03	1,63560E-03
10	8,43300E-04	8,37500E-04	9,89800E-04	1,15090E-03	1,10580E-03	1,25520E-03
11	1,58220E-03	1,70960E-03	2,05260E-03	2,38990E-03	2,32460E-03	2,63060E-03
12	1,18900E-03	1,30100E-03	1,48190E-03	2,17630E-03	1,59100E-03	1,73400E-03
13	2,49730E-03	2,73270E-03	2,91450E-03	4,41080E-03	3,03940E-03	3,25680E-03
14	1,37120E-03	2,36680E-03	1,96600E-03	2,05340E-03	2,16780E-03	2,25860E-03
15	3,63520E-03	4,80830E-03	4,55960E-03	4,31910E-03	4,42020E-03	5,10180E-03
20	3,49480E-03	3,91600E-03	3,32450E-03	3,58800E-03	4,99630E-03	5,08510E-03
30	7,43520E-03	8,60370E-03	9,50020E-03	1,04519E-02	1,03966E-02	1,02130E-02
50	2,01194E-02	2,61689E-02	3,13421E-02	3,26585E-02	3,56272E-02	3,66880E-02
70	4,73556E-02	4,59465E-02	5,26836E-02	6,18846E-02	7,16358E-02	7,71773E-02
100	1,06415E-01	1,14110E-01	1,36610E-01	1,42853E-01	1,71240E-01	1,72516E-01
200	5,66144E-01	6,64986E-01	8,10187E-01	8,25312E-01	8,67754E-01	9,60452E-01
300	1,82586E+00	1,90299E+00	2,08484E+00	2,32712E+00	2,59753E+00	2,88778E+00
500	6,51292E+00	7,41641E+00	8,36135E+00	9,25406E+00	1,03850E+01	1,10356E+01
700	1,67253E+01	1,95243E+01	2,57039E+01	2,55657E+01	2,74354E+01	2,90174E+01

Tabela 8. Zmierzony czas działania algorytmu w sekundach w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla pierwszego warunku stopu z wykorzystaniem drugiego wektora początkowego

Powyżej znajdują się obliczone wyniki dla drugiego wektora początkowego oraz pierwszego warunku stopu (przyrostowego). Udało się otrzymać zbliżone wartości błędów jak w przypadku wykorzystania pierwszego wektora początkowego (zerowego). Różnice w błędach nie pozwalają na jednoznaczne zdecydowanie, który wektor był dokładniejszy, ponieważ różnica w błędzie czasami jest na korzyść pierwszego wektora, a czasami na korzyść drugiego wektora. Różnice na plus natomiast można zauważyć w przypadku liczby iteracji – od wartości  $n=200$  możemy zauważyć, że użycie drugiego wektora początkowego powoduje zmniejszenie liczby iteracji (najczęściej o 1). Czasy wykonania również są zbliżone jak w przypadku wykorzystania pierwszego wektora początkowego.

## Drugi warunek stopu

Pierwszy wektor początkowy

n\r	1E-08	1E-09	1E-10	1E-11	1E-12	1E-13
3	1,33180E-11	6,29397E-13	2,97453E-14	2,97453E-14	1,53837E-15	0,00000E+00
4	1,92008E-11	5,16986E-13	1,40477E-14	1,40477E-14	4,96507E-16	1,57009E-16
5	8,52937E-12	8,52937E-12	7,31657E-13	6,27326E-14	5,42648E-15	5,08768E-16
6	2,53362E-11	6,87852E-13	1,88529E-14	1,88529E-14	6,56817E-16	2,48253E-16
7	2,07851E-11	2,46199E-12	2,91566E-13	3,46053E-14	4,08978E-15	5,97873E-16
8	3,02997E-11	8,25216E-13	2,23574E-14	2,23574E-14	5,43896E-16	0,00000E+00
9	2,79506E-11	4,10582E-12	6,03055E-13	8,87089E-14	1,29535E-14	4,00297E-16
10	3,45588E-11	9,43036E-13	2,56589E-14	2,56589E-14	6,28037E-16	1,11022E-16
11	1,65614E-10	4,90720E-12	8,44626E-13	1,45451E-13	4,19688E-15	7,10890E-16
12	1,06174E-12	1,06174E-12	2,87443E-14	2,87443E-14	5,76889E-16	4,44089E-16
13	1,28763E-10	4,88865E-12	9,52611E-13	1,85608E-13	7,06193E-15	1,45181E-15
14	2,34799E-12	2,34799E-12	8,86035E-14	3,41292E-15	3,41292E-15	5,20741E-16
15	9,41317E-11	2,02874E-11	9,42350E-13	2,03193E-13	9,44930E-15	2,01682E-15
20	1,13140E-11	8,12008E-13	8,12008E-13	5,83463E-14	4,28983E-15	6,18146E-16
30	8,36176E-11	9,80568E-12	1,14988E-12	1,58603E-14	2,01070E-15	7,44760E-16
50	4,86020E-11	9,20644E-12	1,74397E-12	6,26996E-14	1,20366E-14	1,81412E-15
70	6,68990E-11	1,64077E-11	9,86873E-13	2,42007E-13	1,49658E-14	3,60951E-15
100	1,76263E-10	1,70144E-11	1,64230E-12	1,58694E-13	1,64054E-14	6,07486E-15
200	2,57092E-10	2,38152E-11	2,20598E-12	2,04688E-13	2,26458E-14	1,27521E-14
300	3,81915E-10	3,29744E-11	2,84707E-12	2,46452E-13	4,35905E-14	1,93338E-14
500	4,45939E-10	3,67631E-11	4,59391E-12	3,79892E-13	5,64997E-14	3,06747E-14
700	5,19311E-10	4,63437E-11	4,13587E-12	5,01190E-13	6,21802E-14	2,74850E-01

Tabela 9. Błędy w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla drugiego warunku stopu z wykorzystaniem pierwszego wektora początkowego

n\r	1E-08	1E-09	1E-10	1E-11	1E-12	1E-13
3	8	9	10	10	11	12
4	7	8	9	9	10	11
5	10	10	11	12	13	14
6	7	8	9	9	10	11
7	11	12	13	14	15	16
8	7	8	9	9	10	11
9	12	13	14	15	16	18
10	7	8	9	9	10	11
11	12	14	15	16	18	19
12	8	8	9	9	10	11
13	13	15	16	17	19	20
14	8	8	9	10	10	11
15	14	15	17	18	20	21
20	9	10	10	11	12	13
30	10	11	12	14	15	16
50	13	14	15	17	18	20
70	15	16	18	19	21	23
100	17	19	21	23	25	27
200	24	27	30	33	36	39
300	30	34	38	42	45	1000
500	43	49	54	60	65	1000
700	58	66	74	81	89	1000

Tabela 10. Liczby iteracji w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla drugiego warunku stopu z wykorzystaniem pierwszego wektora początkowego

n\r	1E-08	1E-09	1E-10	1E-11	1E-12	1E-13
3	2,14500E-04	2,27400E-04	2,40400E-04	2,40100E-04	2,64600E-04	2,93100E-04
4	2,20800E-04	2,49900E-04	2,86300E-04	2,82000E-04	3,12000E-04	3,46600E-04
5	3,95900E-04	4,00700E-04	4,36200E-04	4,88600E-04	5,16400E-04	5,56800E-04
6	3,46900E-04	3,99000E-04	4,43500E-04	4,47300E-04	4,91900E-04	6,22000E-04
7	6,64600E-04	7,15400E-04	7,77800E-04	8,39000E-04	8,97900E-04	9,55600E-04
8	5,08700E-04	5,75300E-04	6,49100E-04	6,48000E-04	7,20000E-04	7,92500E-04
9	1,04150E-03	1,09390E-03	1,30500E-03	1,27200E-03	1,46960E-03	1,52160E-03
10	6,95300E-04	7,93500E-04	8,88900E-04	8,95500E-04	9,89100E-04	1,08590E-03
11	1,37180E-03	1,59610E-03	1,72440E-03	1,94520E-03	2,01420E-03	1,95690E-03
12	9,59400E-04	9,58300E-04	1,08080E-03	1,11190E-03	1,23370E-03	1,35140E-03
13	1,86970E-03	2,17020E-03	2,31070E-03	2,46620E-03	2,86360E-03	2,95380E-03
14	1,42950E-03	1,34930E-03	1,51150E-03	1,70640E-03	1,73080E-03	1,90980E-03
15	2,72190E-03	3,02860E-03	3,33460E-03	3,48360E-03	3,87390E-03	4,21510E-03
20	2,87640E-03	3,16240E-03	3,24570E-03	3,61150E-03	3,80740E-03	4,18460E-03
30	6,78330E-03	7,64660E-03	8,42710E-03	9,93750E-03	1,07111E-02	1,02866E-02
50	2,25563E-02	2,56524E-02	2,69543E-02	3,05124E-02	3,00157E-02	3,46556E-02
70	5,04405E-02	5,31938E-02	6,22980E-02	5,95723E-02	6,61072E-02	7,32063E-02
100	1,10175E-01	1,28084E-01	1,42568E-01	1,54202E-01	1,70423E-01	1,81852E-01
200	6,20992E-01	6,84646E-01	7,67237E-01	8,51483E-01	9,29508E-01	1,02099E+00
300	1,69594E+00	1,94200E+00	2,19240E+00	2,48488E+00	2,56010E+00	5,80314E+01
500	7,14251E+00	7,66472E+00	8,36801E+00	9,26805E+00	9,95518E+00	1,47228E+02
700	1,63235E+01	1,90003E+01	2,06739E+01	2,25081E+01	2,47441E+01	2,71644E+02

Tabela 11. Zmierzony czas działania algorytmu w sekundach w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla drugiego warunku stopu z wykorzystaniem pierwszego wektora początkowego

Powyżej prezentują się obliczone wyniki dla drugiego warunku stopu (rezydualnego) oraz dla pierwszego wektora początkowego (zerowego). Względem pierwszego warunku stopu, warunek ten lepiej sobie radził dla mniejszych dokładności  $p$ . Dodatkowo, w większości przypadków warunek ten wymaga większej liczby iteracji (różnica ta najczęściej wynosi 1) niż warunek przyrostowy. Dla dużych rozmiarów macierzy ( $n > 300$ ), warunek ten osiągnął maksymalny limit iteracji. Pomimo przekroczenia maksymalnego limitu iteracji, dla  $n = 300$  oraz dla  $n = 500$  udało się wyznaczyć pierwiastki równania z bardzo dobrą dokładnością – otrzymany błąd był rzędu  $10^{-14}$ . Dla  $n = 700$  wynik ten okazał się być aż o 13 zer większy. Dzieje się tak, ponieważ promień spektralny dla  $n = 700$  jako jedyny przekroczył wartość 1, powodując brak jednoznacznej pewności co do względnej poprawności otrzymanych wyników. Przez zwiększoną w większości przypadków liczbę iteracji algorytm wymagał dodatkowo większej ilości czasu na wykonanie.

## Drugi wektor początkowy

n\r	1E-08	1E-09	1E-10	1E-11	1E-12	1E-13
3	6,65899E-12	3,14823E-13	3,14823E-13	1,47438E-14	7,69185E-16	0,00000E+00
4	9,60048E-12	2,58493E-13	2,58493E-13	7,09501E-15	3,51083E-16	3,51083E-16
5	4,97132E-11	4,26466E-12	3,65812E-13	3,13158E-14	2,74878E-15	2,71948E-16
6	1,26682E-11	3,44030E-13	3,44030E-13	9,47795E-15	4,00297E-16	4,00297E-16
7	8,77400E-11	1,03926E-11	1,23098E-12	1,72771E-14	2,07407E-15	2,93737E-16
8	1,51498E-11	4,12520E-13	1,10689E-14	1,10689E-14	2,48253E-16	2,48253E-16
9	9,51396E-11	1,39753E-11	3,01470E-13	4,42612E-14	6,53430E-15	1,04738E-15
10	1,72793E-11	4,71421E-13	1,27796E-14	1,27796E-14	3,51083E-16	1,11022E-16
11	8,28069E-11	1,42540E-11	4,22294E-13	7,25759E-14	1,24899E-14	5,20741E-16
12	1,94017E-11	5,30736E-13	1,42645E-14	1,42645E-14	2,22045E-16	4,44089E-16
13	6,43812E-11	1,25448E-11	4,76370E-13	9,27572E-14	1,81490E-14	8,81212E-16
14	3,28474E-11	1,17390E-12	4,42223E-14	4,42223E-14	1,63169E-15	5,97873E-16
15	2,18381E-10	1,01438E-11	2,18626E-12	1,01571E-13	2,18550E-14	1,07640E-15
20	7,88206E-11	5,65691E-12	4,05919E-13	2,90416E-14	2,05916E-15	5,97873E-16
30	4,18087E-11	4,90276E-12	5,74868E-13	6,73825E-14	7,92547E-15	1,13764E-15
50	1,28289E-10	4,60320E-12	8,71884E-13	1,65226E-13	6,17348E-15	2,05616E-15
70	1,36384E-10	8,20379E-12	2,01209E-12	1,21083E-13	8,11147E-15	4,08677E-15
100	2,83664E-10	2,73815E-11	2,64300E-12	2,55159E-13	2,51940E-14	6,23408E-15
200	2,84100E-10	2,63169E-11	2,43779E-12	2,26137E-13	2,43314E-14	1,25637E-14
300	3,52277E-10	3,04155E-11	2,62619E-12	4,18659E-13	4,09016E-14	1,93504E-14
500	3,37979E-10	4,22348E-11	3,48194E-12	4,36169E-13	4,69843E-14	3,06747E-14
700	4,75069E-10	4,23956E-11	5,11783E-12	4,58821E-13	5,93251E-14	3,32026E-01

Tabela 12. Błędy w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla drugiego warunku stopu z wykorzystaniem drugiego wektora początkowego

n\r	1E-08	1E-09	1E-10	1E-11	1E-12	1E-13
3	8	9	9	10	11	12
4	7	8	8	9	10	10
5	9	10	11	12	13	14
6	7	8	8	9	10	10
7	10	11	12	14	15	16
8	7	8	9	9	10	10
9	11	12	14	15	16	17
10	7	8	9	9	10	11
11	12	13	15	16	17	19
12	7	8	9	9	10	11
13	13	14	16	17	18	20
14	7	8	9	9	10	11
15	13	15	16	18	19	21
20	8	9	10	11	12	13
30	10	11	12	13	14	15
50	12	14	15	16	18	19
70	14	16	17	19	21	22
100	16	18	20	22	24	26
200	23	26	29	32	35	38
300	29	33	37	40	44	1000
500	42	47	53	58	64	1000
700	56	64	71	79	87	1000

Tabela 13. Liczby iteracji w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla drugiego warunku stopu z wykorzystaniem drugiego wektora początkowego



n\r	1E-08	1E-09	1E-10	1E-11	1E-12	1E-13
3	2,40900E-04	2,08200E-04	2,29500E-04	2,34200E-04	2,56600E-04	2,82500E-04
4	2,18600E-04	2,46900E-04	2,47000E-04	2,94400E-04	3,13600E-04	3,13000E-04
5	3,90100E-04	4,10500E-04	4,63100E-04	4,74300E-04	5,44500E-04	5,68400E-04
6	3,66800E-04	3,96700E-04	4,12500E-04	4,46100E-04	5,30700E-04	5,24900E-04
7	6,39900E-04	7,02700E-04	7,65400E-04	8,89400E-04	1,06810E-03	1,06770E-03
8	5,75200E-04	6,18000E-04	6,88400E-04	6,93800E-04	7,91800E-04	7,92600E-04
9	1,03610E-03	1,11560E-03	1,36310E-03	1,38570E-03	1,51000E-03	1,63310E-03
10	8,45800E-04	9,08500E-04	1,02130E-03	1,02430E-03	1,13160E-03	1,22110E-03
11	1,57320E-03	1,68430E-03	1,93970E-03	2,23980E-03	2,31990E-03	2,55840E-03
12	1,07140E-03	1,22730E-03	1,39040E-03	1,39340E-03	1,56180E-03	1,77950E-03
13	2,44700E-03	2,39390E-03	2,67070E-03	2,73200E-03	2,81140E-03	3,27880E-03
14	1,25910E-03	1,37690E-03	1,47630E-03	1,54020E-03	1,71360E-03	1,83430E-03
15	2,47050E-03	2,85060E-03	3,06870E-03	3,46830E-03	3,64350E-03	4,25800E-03
20	2,49990E-03	2,81240E-03	3,12590E-03	3,56530E-03	3,73850E-03	4,03060E-03
30	6,52680E-03	7,10750E-03	7,90200E-03	8,39760E-03	9,25000E-03	1,04307E-02
50	2,14850E-02	2,37556E-02	2,56717E-02	2,84817E-02	3,23147E-02	3,33890E-02
70	4,92114E-02	5,26910E-02	5,49508E-02	6,27767E-02	7,23400E-02	7,94996E-02
100	1,11314E-01	1,28512E-01	1,40223E-01	1,55524E-01	1,60503E-01	1,81551E-01
200	7,50028E-01	7,09909E-01	8,85062E-01	1,05404E+00	9,63980E-01	1,02709E+00
300	1,85085E+00	2,10333E+00	2,45262E+00	2,64719E+00	2,77271E+00	6,34704E+01
500	7,18558E+00	8,12078E+00	8,95715E+00	9,97345E+00	1,05664E+01	1,63614E+02
700	1,78585E+01	2,02158E+01	2,25183E+01	2,52631E+01	2,88688E+01	3,24888E+02

Tabela 14. Zmierzony czas działania algorytmu w sekundach w zależności od wybranej dokładności i rozmiaru macierzy dla drugiego warunku stopu z wykorzystaniem drugiego wektora początkowego

Powyżej znajdują się obliczone wyniki dla drugiego warunku stopu (rezydualnego) oraz dla drugiego wektora początkowego. Podobnie jak w przypadku wykorzystania warunku pierwszego, również tutaj możemy zaobserwować lepszą dokładność wyników dla mniejszych wartości parametru dokładności  $\rho$ . Możemy i w tym przypadku zaobserwować zwiększoną liczbę iteracji (najczęściej o 1) względem wykorzystania warunku przyrostowego. Dokładnie tak samo dla dużych rozmiarów macierzy algorytm przekroczył maksymalną liczbę iteracji, wynoszącą 1000, wciąż zachowując te same własności dla  $n = 300$  oraz  $n = 500$ . Dla  $n = 700$  oraz dla dokładności  $\rho = 10^{-13}$  otrzymany błąd okazał się być największy w całym sprawozdaniu, lecz pomimo tego, w większości przypadków warunek rezydualny okazał się być dokładniejszym warunkiem od warunku przyrostowego. Podobnie jest z wykorzystaniem drugiego warunku początkowego – dla większości przypadków okazał się być bardziej dokładniejszym. Pomimo zwiększonej liczby iteracji, algorytm nie wymagał w większości przypadków większej ilości czasu na wykonanie



## Porównanie wyników

### Porównanie wykorzystanych warunków

Poniżej znajdują się skondensowane wyniki analizy poprzednich tabel. Na tabelach z zestawieniami wyników ze względu na przyjęty warunek stopu możemy jasno zauważyć, że warunek rezydualny w zdecydowanej większości przypadków zwracał nam bardziej dokładny wynik, kosztem zwiększonej liczby iteracji. Natomiast, co ciekawe, w przypadku wykorzystania drugiego wektora początkowego, pomimo znaczącej różnicy w liczbie iteracji na korzyść warunku przyrostowego, warunek rezydualny wykonywał się w większości przypadków krócej, choć przewaga ta jest bardzo niewielka (różnią się tylko 4 przypadkami). Dla pierwszego wektora początkowego warunek przyrostowy okazał się jednak szybszy.

warunek\liczba wyników	przyrostowy	rezydualny	remis	przyrostowy	rezydualny	remis
błąd	111	1	20	84%	1%	15%
iteracje	0	112	20	0%	85%	15%
czasy	25	107	0	19%	81%	0%

Tabela 15. Zestawienie liczb gorszych wyników ze względu na przyjęty warunek stopu dla pierwszego wektora początkowego oraz ich procent w całości

warunek\liczba wyników	przyrostowy	rezydualny	remis	przyrostowy	rezydualny	remis
błąd	110	2	20	83%	2%	15%
iteracje	0	112	20	0%	85%	15%
czasy	68	64	0	52%	48%	0%

Tabela 16. Zestawienie liczb gorszych wyników ze względu na przyjęty warunek stopu dla drugiego wektora początkowego oraz ich procent w całości

### Porównanie wykorzystanych wektorów początkowych

Analizując wyniki zestawienia ze względu na przyjęty wektor początkowy, możemy zauważyć, że w większości przypadków wykorzystanie pierwszego wektora początkowego powodowało otrzymanie gorszych wyników. Dodatkowo, otrzymane wyniki były niejako niezależne od liczby iteracji. Większa liczba iteracji w przypadku dużej części otrzymanych wyników z wykorzystaniem wektora pierwszego nie przyczyniła się do dokładności otrzymanych wyników. Natomiast na uwagę zasługują również czasy wykonania algorytmów. Dla obu warunków stopu czas wykonania algorytmu okazał się być większy dla drugiego wektora początkowego, pomimo zwiększonej liczby iteracji

warunek\liczba wyników	pierwszy	drugi	remis	przyrostowy	rezydualny	remis
błąd	87	45	0	66%	34%	0%
iteracje	57	0	75	43%	0%	57%
czasy	7	125	0	5%	95%	0%

Tabela 17. Zestawienie liczb gorszych wyników ze względu na przyjęty wektor początkowy dla rezydualnego warunku stopu oraz ich procent w całości

warunek\liczba wyników	pierwszy	drugi	remis	przyrostowy	rezydualny	remis
błąd	76	52	4	58%	39%	3%
iteracje	61	0	71	46%	0%	54%
czasy	52	80	0	39%	61%	0%

Tabela 18. Zestawienie liczb gorszych wyników ze względu na przyjęty wektor początkowy dla przyrostowego warunku stopu oraz ich procent w całości

## Wykresy

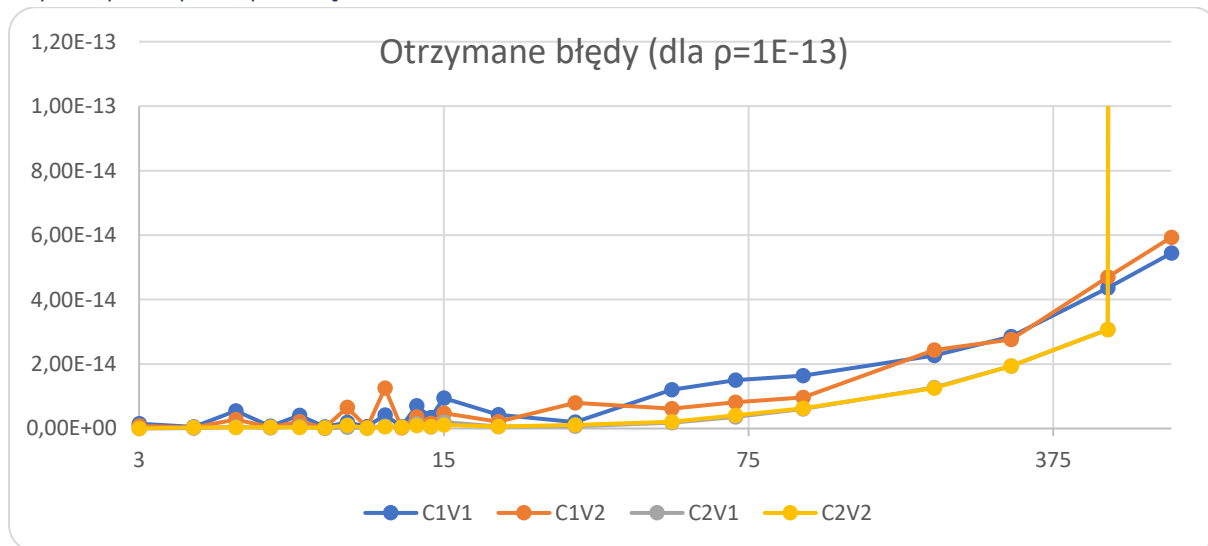
Poniżej znajdują się wykresy, demonstrujące jak zmieniały się wartości kolejno: błędów, liczby iteracji oraz czasu wykonania dla dwóch skrajnych dokładności:  $\rho = 10^{-13}$  oraz  $\rho = 10^{-8}$ . Ze względu za przyjęte rozmiary układów równań  $n$ , dla lepszego przedstawienia wyników wykorzystujemy na osi poziomej skalę logarymiczną. Dodatkowo, górny zakres osi pionowej został ograniczony, ze względu na dużą różnicę, względem wartości maksymalnej i minimalnej wynikającej z przekroczenia maksymalnej liczby iteracji w przypadku warunku rezydualnego. Dzięki takiemu zabiegowi udało się pokazać interesujący nas trend dla większej części badanych danych. Wykres 1. oraz 2. pokazuje nam jak wyglądały fluktuacje w otrzymanych wynikach błędu dla dwóch różnych precyzji. Można zauważyć, że krzywe szybciej rosną (pomijając przypadek dla  $n = 700$ ) w przypadku mniejszej z dokładności.

Oznaczenia:

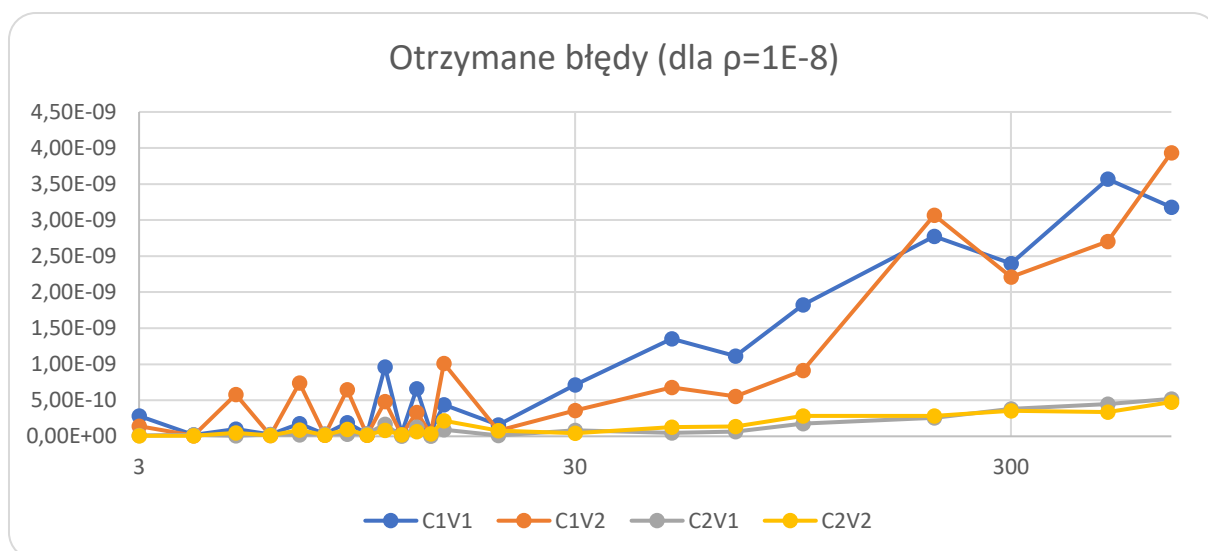
$CiVj$  -  $i$ -ty warunek stopu oraz  $j$ -ty wektor początkowy

Równanie 21 Oznaczenia na wykresach.

Wykresy otrzymanych błędów



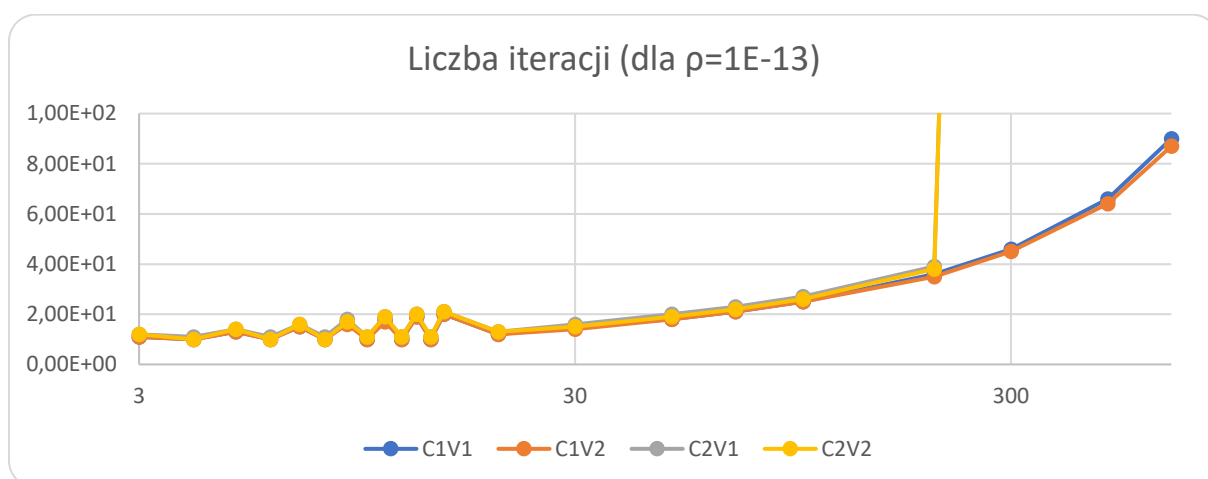
Wykres 1. Otrzymane błędy (dla  $\rho = 10^{-13}$ )



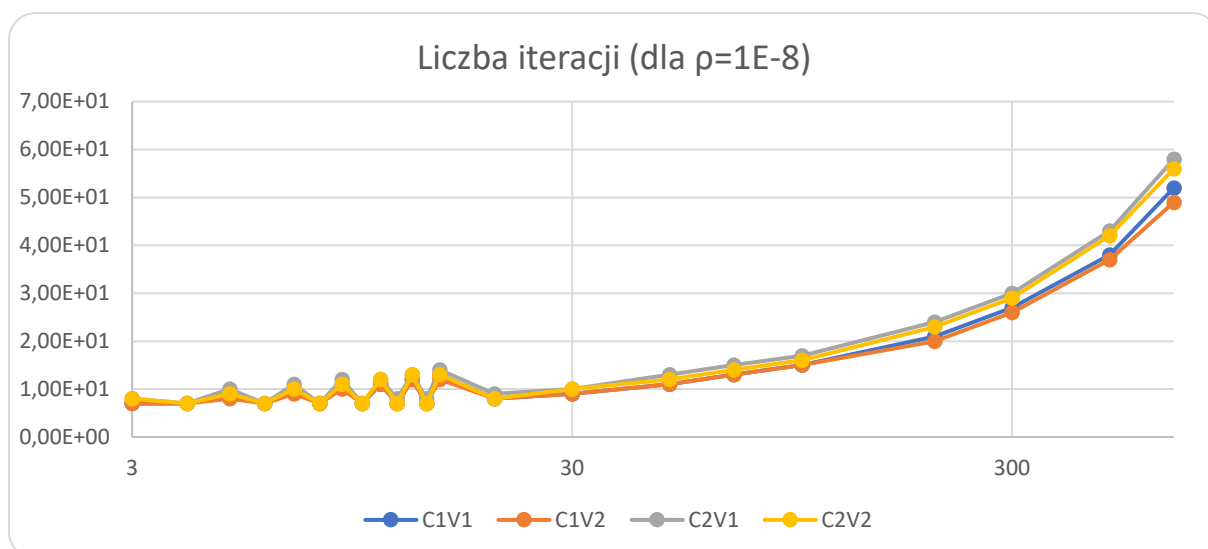
Wykres 2. Otrzymane błędy (dla  $\rho = 10^{-8}$ )

### Wykresy liczby iteracji

Na poniższych wykresach możemy zauważyć, że każdy z badanych przypadków dał dość zbliżone rezultaty (pomijając przypadki od  $n = 300$  w górę)



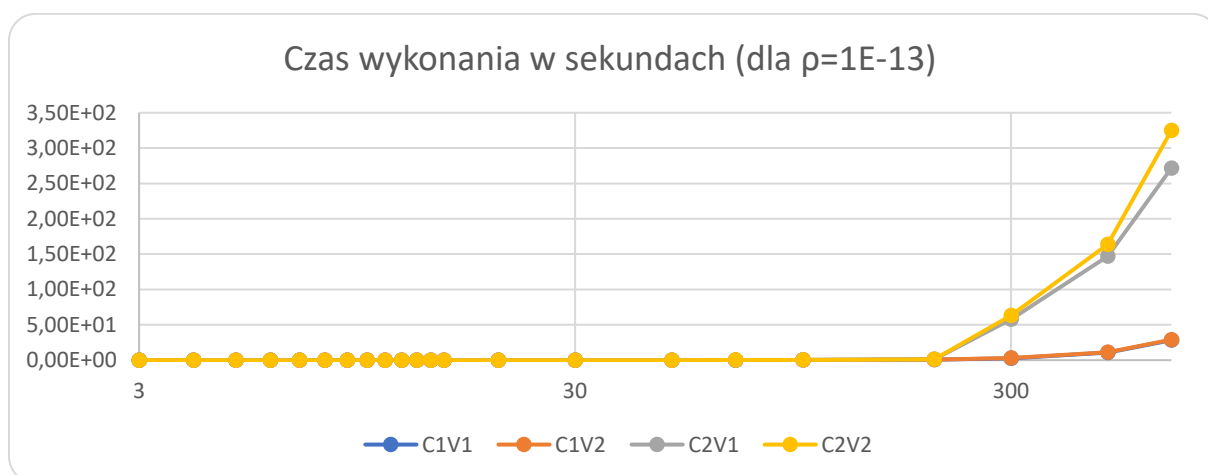
Wykres 3. Liczba iteracji (dla  $\rho = 10^{-13}$ )



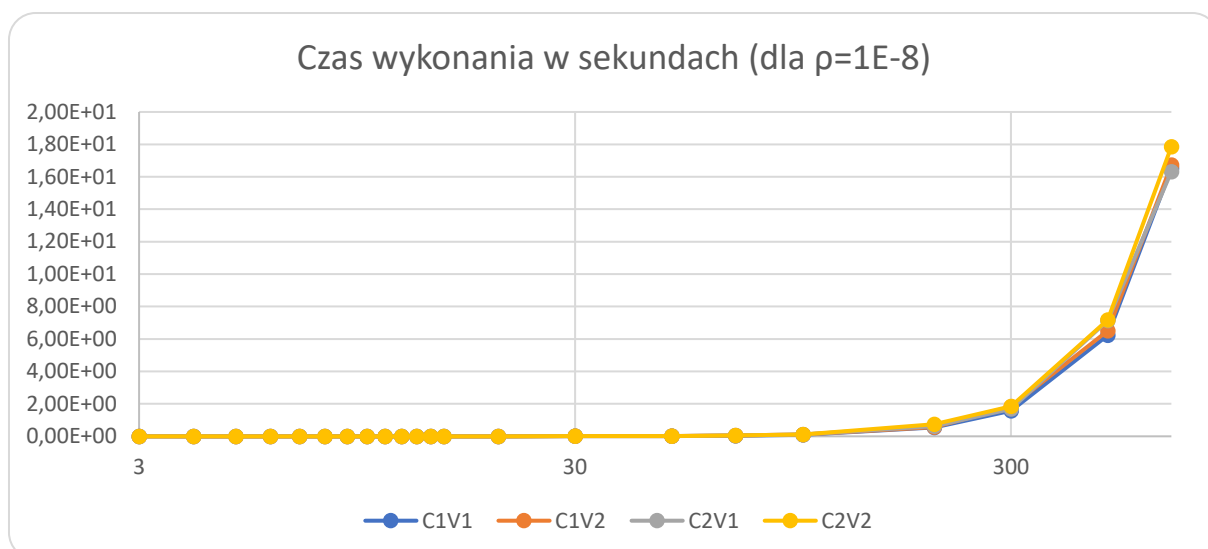
Wykres 4. Liczba iteracji (dla  $p = 10^{-8}$ )

Wykresy czasu wykonania w sekundach

Czas wykonania okazał się być najbardziej stałym z wszystkich badanych wartości. Największe różnice w badanych przypadkach możemy dostrzec głównie od większych wartości  $n = 300$



Wykres 5. Czas wykonania w sekundach (dla  $p = 10^{-13}$ )



Wykres 6. Czas wykonania w sekundach (dla  $\rho = 10^{-8}$ )

## Wnioski i podsumowanie

Na dokładność iteracyjnych metod rozwiązywania równań ma wpływ wiele czynników. Mogą nimi być m.in. promień spektralny, wybrany wektor początkowy oraz wykorzystany warunek stopu. Promień spektralny ma wpływ na liczbę iteracji. Im większy promień spektralny, tym większa liczba iteracji.

Wykorzystany warunek stopu również ma duże znaczenie. Warunek przyrostowy wymagał mniejszej liczby iteracji, jednocześnie otrzymywaliśmy nieco gorsze wyniki dla mniejszych dokładności  $\rho$ . Natomiast warunek rezydualny wymagał większej liczby iteracji lecz jednocześnie lepiej radził sobie dla mniejszych dokładności  $\rho$ .

Wykorzystany wektor początkowy również miał wpływ na otrzymane rezultaty. Pomimo małej różnicy między wartościami badanych wektorów początkowych, można było dostrzec różnicę. Wektor początkowy, stanowiący połowę wektora  $x$ , wymagał mniejszej liczby iteracji niż wektor początkowy, będący wektorem zerowym.

## Bibliografia

- Metody obliczeniowe w nauce i technice – wykłady AGH 2022/23
- Odwracanie macierzy – algorytm – [<https://www.quantstart.com/articles/matrix-inversion-linear-algebra-for-deep-learning-part-3/>]
- Jacobi Method – Wikipedia – [[https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi_method)]