Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Jakub Kędra

Gr. nr 4

Spis treści

Informacje techniczne 3
Zadanie 3
Funkcja 3
  Węzły równoodległe 3
  Oznaczenia 3
Aproksymacja 4
  Aproksymacja średniokwadratowa 4
  Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi 4
  Założenia w przeprowadzonych aproksymacjach 6
  Wykresy aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi 7
Błędy 0
  Błąd maksymalny punktów 1
  Błąd sumy kwadratów punktów 0
  Efekt Rungego 1
Bibliografia 1

Spis tabel

Tabela 1. Informacje techniczne 3
Tabela 2. Znaczenie symboli w sprawozdaniu 3
Tabela 3. Błąd maksymalny punktów 1
Tabela 4. Błąd sumy kwadratów punktów 0

Spis wykresów

Wykres 1. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n=8, m=5 7
Wykres 2. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n=14, m=8 7
Wykres 3. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 40, m = 10 7
Wykres 4. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 65, m = 10 7
Wykres 5. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 100, m = 10 0
Wykres 6, Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 100, m = 15 0
Wykres 7. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi z najmniejszym błędem maksymalnym punktów (n = 65, m = 40) 0
Wykres 8. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi z największym błędem maksymalnym punktów (n = 30, m = 25) 0
Wykres 9. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 50, m = 50 1
Wykres 10. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 10, m = 10 1
Wykres 11. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 12, m = 12 1
Wykres 12. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 30, m = 15 1

Spis równań

Równanie 1. Podstawowa interpolowana funkcja 3
Równanie 2. Miejsca zerowe interpolowanej funkcji 3
Równanie 3. Wzór ogólny na aproksymację średniokwadratową 4
Równanie 4. Warunek współczynników a_j 4
Równanie 5. Wzór na interpolację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi 4
Równanie 6. Funkcja spod funkcji minimum warunku współczynnika a_j 5
Równanie 7. Różniczka z równania 6. przyrównana do 0 5
Równanie 8. Przekształcone równanie 7. 5
Równanie 9. Wzór na k-ty wiersz układu równań 5
Równanie 10. Wzory na poszczególne komórki macierzy G oraz B 5
Równanie 11. Uproszczony wzór na k-ty wiersz układu równań 5
Równanie 12. Układ równań w postaci macierzowej 5
Równanie 13. Ostateczny układ równań 6
Równanie 14. Przyjmowane wartości przez n oraz m 6
Równanie 15. Definicje zbiorów N oraz M 6
Równanie 16. Funkcja wagi 6

Informacje techniczne

Poniższa tabela zawiera informacje sprzętowe

System operacyjny	Windows 10 Home (64bit, kompilacja 19045)
Procesor	i7 9750h
Język programowania	Python
Kompilator	Python 3.8.10

Tabela 1. Informacje techniczne

Zadanie

Celem zadania było wyznaczenie, przeprowadzenie oraz przeanalizowanie zagadnienia aproksymacji średniokwadratowej z wykorzystaniem wielomianów algebraicznych.

Funkcja

Aproksymowana funkcja prezentuje się następująco:

$$F(x) = e^{-sin(2x)} + sin(2x) - 1$$

Równanie 1. Podstawowa interpolowana funkcja

Z miejscami zerowymi dla

$$x = \left\{\pi n,\ \ \pi n + \frac{\pi}{2}\right\}, n \in Z$$

Równanie 2. Miejsca zerowe interpolowanej funkcji

Węzły równoodległe

Interpolacje zostały przeprowadzone dla węzłów równoodległych – rozmieszczonych równolegle na całej dziedzinie interpolowanej funkcji.

Oznaczenia

Na potrzeby sprawozdania, przyjmujemy następujące oznaczenia:

Symbol	Znaczenie
n	Liczba węzłów aproksymacyjnych
m	Liczba funkcji bazowych
$F(x)$	Funkcja aproksymowana
$f(x)$	Funkcja aproksymująca
F_i	Wartość funkcji aproksymowanej w x_i $(F_i := F(x_i))$

Tabela 2. Znaczenie symboli w sprawozdaniu

Aproksymacja

Aproksymacją nazywamy przybliżanie funkcji zwanej aproksymowaną inną funkcją zwaną funkcją aproksymującą.

Aproksymacja jest wykorzystywana, gdy:

- gdy funkcja aproksymowana jest przedstawiona w postaci tablicy wartości i poszukujemy dla niej odpowiedniej funkcji ciągłej
- gdy funkcję o dosyć skomplikowanym zapisie analitycznym chcemy przedstawić w prostszej postaci.

Aproksymacja średniokwadratowa

Do aproksymacji średniokwadratowej będziemy potrzebowali następujących danych:

- n+1 węzłów w postaci: $(x_i, y_i = F(x_i)),\ \ i = 0,1,\dots,n$
- układ funkcji bazowych: $\varphi_j(x),\qquad\qquad j = 0,1,\dots,m$

wykorzystywać następujący wzór:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j\,\varphi_j(x)$$

Równanie 3. Wzór ogólny na aproksymację średniokwadratową

Gdzie $\{a_j\}_{j=0}^{m}$ oznacza współczynniki, dla których:

$$min\left|\left|F(x) - f(x)\right|\right| = min\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\,\varphi_j(x_i)\right]^2$$

Równanie 4. Warunek współczynników a_j

Dla $w(x_i)$ oznaczającego wagę danego węzła.

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

W przypadku interpolacji wielomianami algebraicznymi, za funkcje bazowe przyjmujemy ciąg jednomianów, w postaci:

$$\varphi_j(x) = x^j, j = 0,1,\dots,m$$

Zatem wzór na funkcję aproksymowaną prezentuje się następująco:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j\,x^j$$

Równanie 5. Wzór na interpolację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi

Aby móc skorzystać z tego wzoru, potrzebujemy wyznaczyć poszczególne współczynniki a_j, spełniających równanie 4. Aby to zrobić, musimy korzystając z warunku z równania 4. wyznaczyć układ równań. Zacznijmy od funkcji spod funkcji minimum:

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\,\varphi_j(x_i)\right]^2 = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\,x^j\right]^2$$

Równanie 6. Funkcja spod funkcji minimum warunku współczynnika a_j

Dla każdego k-tego współczynnika a_k zróżniczkujmy ją i przyrównajmy do zera:

$$-2\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[F(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\,x_i^j\right] x_i^k \; = \; 0$$

Równanie 7. Różniczka z równania 6. przyrównana do 0

Gdzie $k \; = \; 0, 1, 2, \dots, m$. Pozbywamy się nawiasu przy sumie oraz -2:

$$\sum_{i=0}^{n} w(x_i)x_i^k \sum_{j=0}^{m} a_j\,x_i^j \; = \; \sum_{i=0}^{n} w(x_i)F(x_i)\,x_i^k$$

Równanie 8. Przekształcone równanie 7.

Po uporządkowaniu otrzymujemy:

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n} w(x_i)x_i^{j+k}\right)a_j \; = \; \sum_{i=0}^{n} w(x_i)F(x_i)\,x_i^k$$

Równanie 9. Wzór na k-ty wiersz układu równań

Niech

$$g_{k,j} = \left(\sum_{i=0}^{n} w(x_i)x_i^{j+k}\right)$$

$$b_k = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)F(x_i)\,x_i^k$$

Równanie 10. Wzory na poszczególne komórki macierzy G oraz B

Otrzymujemy wówczas:

$$\sum_{j=0}^{m} g_{k,j}a_j = b_k$$

Równanie 11. Uproszczony wzór na k-ty wiersz układu równań

Z którego możemy utworzyć układ równań w postaci:

$$\begin{bmatrix} g_{0,0} & g_{0,0} & g_{0,0} & \cdots & g_{0,\mathrm{m}} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,\mathrm{m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{\mathrm{m},0} & g_{\mathrm{m},1} & g_{\mathrm{m},2} & \cdots & g_{\mathrm{m},\mathrm{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{\mathrm{m}} \end{bmatrix}$$

$$G \cdot A \; = \; B$$

Równanie 12. Układ równań w postaci macierzowej

Po podstawieniu wzorów z równania 10. Otrzymujemy układ równań w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \cdots & \sum w_i x_i^{\mathrm{m}} \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \cdots & \sum w_i x_i^{\mathrm{m+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum w_i x_i^{\mathrm{m}} & \sum w_i x_i^{\mathrm{m+1}} & \sum w_i x_i^{\mathrm{m+2}} & \cdots & \sum w_i x_i^{\mathrm{2m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum w_i F_i \\ \sum w_i F_i \, x_i \\ \vdots \\ \sum w_i F_i \, x_i^m \end{bmatrix}$$

Równanie 13. Ostateczny układ równań

Z którego, po rozwiązaniu, otrzymamy wartości poszczególnych współczynników a_j.

Dodatkowo, jeżeli:

- $x_0, x_1, \dots, x_n$ – są różne
- $m \le n$

To $det\ G \neq 0 \ \rightarrow$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

W praktyce wykorzystuje się najczęściej wykorzystuje się poniższe zależności:

- $m \ll n$ (korzystamy z dużej liczby informacji)
- m – wysoki – by dobrze przybliżyć funkcję*
- m – niski – by dobrze wygładzić funkcję
- $m \le 6$, chociaż zależy to od aproksymowanej funkcji

* trzeba zaznaczyć, że ze względu na złe uwarunkowanie tej aproksymacji, zbyt wysoka wartość m może działać na niekorzyść przybliżenia.

Założenia w przeprowadzonych aproksymacjach

Aproksymację przeprowadziliśmy dla takich wartości n oraz m, że:

$$(n, m) \in N \times M$$

Równanie 14. Przyjmowane wartości przez n oraz m

Gdzie:

$$N = \{4,6,8,10,12,14,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80,85\}$$

$$M = \{3,4,5,8,10,12,20,25,30,40,50\}$$

Równanie 15. Definicje zbiorów N oraz M

Dodatkowo, jako funkcję wagi $w(x)$ przyjmujemy:

$$\forall_{i=0,1,\dots,n} w(x_i) = 1$$

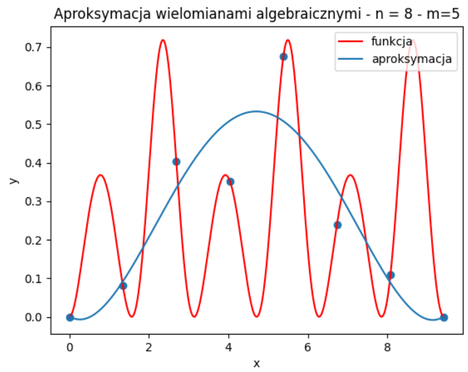
Równanie 16. Funkcja wagi

Do rozwiązywania układów równań wykorzystana została funkcja ***numpy.linalg.solve*** z biblioteki ***numpy***.

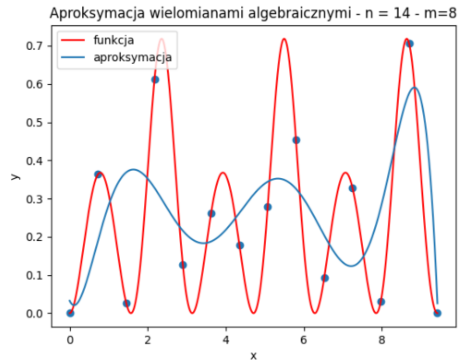
Wykresy aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi

Poniżej znajdują się przykładowe wykresy aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi. Wartości na 5 poniższych wykresach zostały dobrane tak, aby z każdym kolejnym wykresem różnica pomiędzy liczbą węzłów n, a liczbą funkcji interpolujących m zwiększała się.

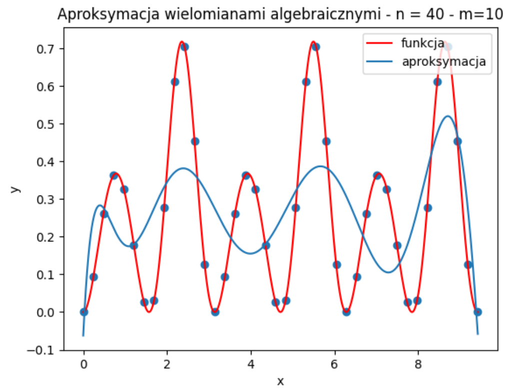
Wykres 1. oraz 2. przedstawiają wynik aproksymacji dla mniejszych wartości n (odpowiednio 8 oraz 14), przy różnicy $n - m$ wynoszącej blisko połowy wartości n. Kolejne trzy wykresy (3., 4. oraz 5.) pokazują wpływ liczby węzłów n na wynik funkcji aproksymacji. Możemy zauważyć, że wszystkie 3 wykresy są wręcz identyczne. Wykres 6. Wraz z wykresem 5. pokazuje nam natomiast wpływ liczby funkcji bazowych m na wynik aproksymacji, przy tej samej liczbie węzłów n.



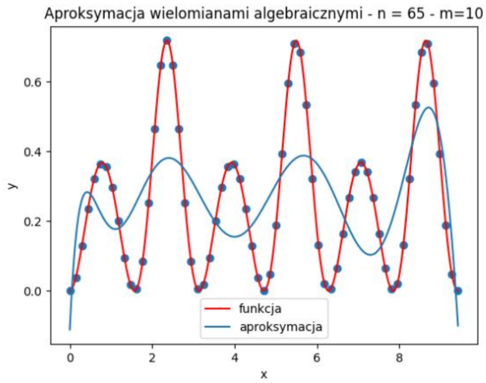
Wykres 1. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n=8, m=5



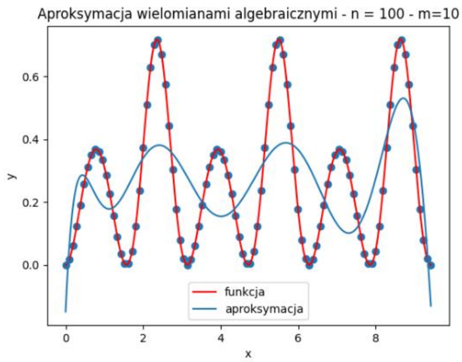
Wykres 2. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n=14, m=8



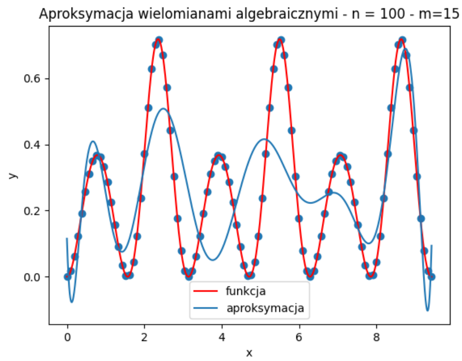
Wykres 3. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 40, m = 10



Wykres 4. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 65, m = 10



Wykres 5. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 100, m = 10



Wykres 6, Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 100, m = 15

W powyższych wykresach możemy zauważyć, że funkcje aproksymujące są bardziej gładkie od funkcji aproksymowanych. Im mniejsze m, tym funkcja staje się gładsza. Natomiast im większa wartość m, tym funkcja aproksymująca bardziej przypomina funkcję aproksymowaną.

Błędy

Do wyliczenia stosownych błędów skorzystałem z poniższych wzorów:

- Wzór na błąd maksymalny punktów:

$$\max_{\mathrm{i}=0,\ldots,p} |\mathrm{f}(\mathrm{x_i}) - F(\mathrm{x_i})|$$

- Wzór na błąd sumy kwadratów punktów:

$$\frac{1}{p}\sqrt{\sum_{\mathrm{i}=0}^{p}\left(\mathrm{f}(\mathrm{x_i}) - F(\mathrm{x_i})\right)^2}$$

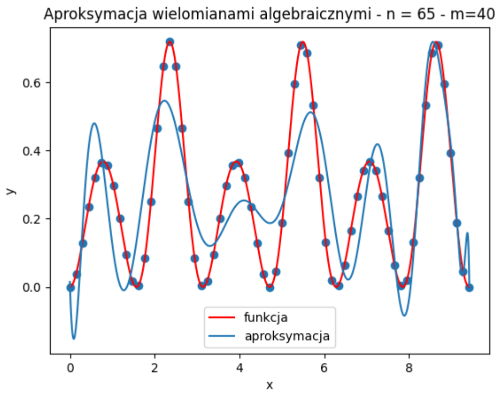
Gdzie p oznacza liczbę węzłów, w naszym przypadku $p = 500$

Błąd maksymalny punktów

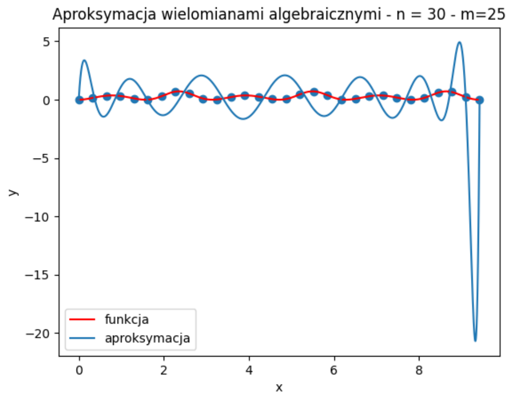
Tabela 3. Błąd maksymalny punktów

n\m	3	4	5	8	10	12	20	25	30	40	50
4	7,18282E-01	7,18282E-01									
6	6,01029E-01	5,92096E-01	6,92368E-01								
8	6,22141E-01	6,22324E-01	7,02482E-01	9,32703E-01							
10	5,16477E-01	5,17212E-01	5,00818E-01	4,26138E-01	1,00465E+00	1,06089E+00					
12	4,83259E-01	4,83575E-01	4,91348E-01	4,37271E-01	6,09155E-01	3,55295E+00					
14	4,79806E-01	4,79211E-01	4,87633E-01	4,21326E-01	4,29788E-01	1,21215E+00					
25	4,70059E-01	4,58679E-01	4,77822E-01	4,25669E-01	3,37275E-01	3,32249E-01	4,59489E-01	9,40362E-01			
30	4,69997E-01	4,52453E-01	4,77491E-01	4,24585E-01	3,37412E-01	3,36153E-01	3,29331E-01	2,06602E+01	2,78782E+00		
35	4,69938E-01	4,47740E-01	4,77279E-01	4,23669E-01	3,37518E-01	3,37167E-01	3,67661E-01	3,22618E-01	1,24513E+00		
40	4,69884E-01	4,47060E-01	4,77121E-01	4,22886E-01	3,37589E-01	3,37425E-01	3,38980E-01	3,59336E-01	8,44716E-01	7,74272E-01	
45	4,69836E-01	4,48124E-01	4,76994E-01	4,22210E-01	3,37626E-01	3,37514E-01	3,37573E-01	3,10805E-01	1,61146E+00	1,08456E+00	
50	4,69793E-01	4,48989E-01	4,76889E-01	4,21622E-01	3,37626E-01	3,37566E-01	3,85614E-01	5,10280E-01	4,17847E-01	1,00455E+00	2,94928E-01
55	4,69754E-01	4,49708E-01	4,76798E-01	4,21105E-01	3,37622E-01	3,37243E-01	3,47734E-01	3,13660E-01	3,45873E-01	5,10197E-01	4,73922E-01
60	4,69720E-01	4,50313E-01	4,76719E-01	4,20649E-01	3,37608E-01	3,36770E-01	3,35029E-01	3,22614E-01	3,30082E-01	2,76858E-01	3,00489E-01
65	4,69690E-01	4,50830E-01	4,76649E-01	4,20244E-01	3,37679E-01	3,36486E-01	3,80964E-01	3,58210E-01	2,92044E-01	2,55103E-01	4,15669E-01
70	4,69662E-01	4,51278E-01	4,76587E-01	4,19881E-01	3,37766E-01	3,35874E-01	3,34350E-01	4,81282E-01	3,20643E-01	3,16196E-01	3,95419E-01
75	4,69638E-01	4,51668E-01	4,76532E-01	4,19556E-01	3,37838E-01	3,35553E-01	3,41831E-01	3,17884E-01	3,11722E-01	2,93201E-01	4,93209E-01
80	4,69615E-01	4,52012E-01	4,76482E-01	4,19262E-01	3,37910E-01	3,35401E-01	3,42267E-01	2,21170E+00	2,97473E-01	2,86692E-01	4,06141E-01
85	4,69595E-01	4,52317E-01	4,76436E-01	4,18995E-01	3,37957E-01	3,35118E-01	3,40251E-01	3,04712E-01	3,43878E-01	3,14919E-01	4,02790E-01

Z powyższych danych wynika, że na dokładność aproksymacji ma wpływ zarówno liczba węzłów n, jak i liczba funkcji bazowych m. Natomiast większą istotność na wynik aproksymacji posiada jednak wartość m. Jak możemy zauważyć, różnice w dokładności pomiędzy wierszami są o wiele mniejsze od różnic w dokładności pomiędzy kolumnami. Wraz z wzrostem liczby funkcji bazowych m, rośnie także dokładność aproksymacji. Zależność tą możemy również zauważyć pomiędzy wspomnianymi wcześniej wykresami 5. oraz 6. Możemy również zauważyć, że od pewnej wartości m (w naszym przypadku $m = 20$) zależność ta zaczyna zanikać, dokładność zaczyna zachowywać się losowo – raz jest dokładniejsza, raz mniej. Wynika to z złego uwarunkowania obliczeniowego tej aproksymacji. Poniżej prezentują się wyniki aproksymacji z najmniejszym oraz z największym błędem maksymalnym punktów:



Wykres 7. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi z najmniejszym błędem maksymalnym punktów (n = 65, m = 40)



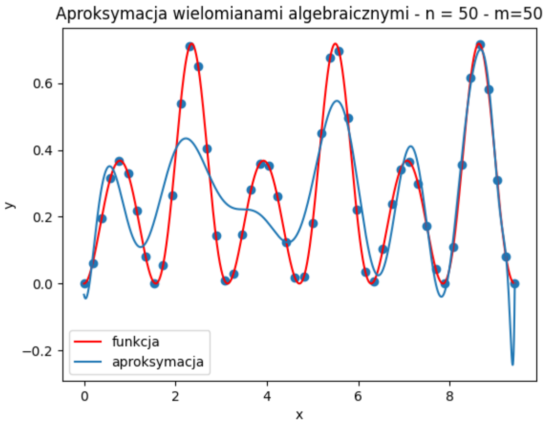
Wykres 8. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi z największym błędem maksymalnym punktów (n = 30, m = 25)

Błąd sumy kwadratów punktów

Tabela 4. Błąd sumy kwadratów punktów

n\m	3	4	5	8	10	12	20	25	30	40	50
4	1,53059E-02	1,53059E-02									
6	1,14155E-02	1,14850E-02	1,31750E-02								
8	1,16130E-02	1,16116E-02	1,30215E-02	1,54627E-02							
10	9,86406E-03	9,84433E-03	9,82711E-03	9,51155E-03	1,77678E-02	1,79909E-02					
12	9,73477E-03	9,68675E-03	9,61077E-03	9,15094E-03	1,04543E-02	3,57475E-02					
14	9,69494E-03	9,64426E-03	9,56290E-03	8,92895E-03	8,87920E-03	1,57733E-02					
25	9,63419E-03	9,57382E-03	9,50526E-03	8,72238E-03	8,08675E-03	8,07597E-03	7,86865E-03	9,37200E-03			
30	9,62199E-03	9,55895E-03	9,49532E-03	8,70876E-03	8,06706E-03	8,05254E-03	7,34066E-03	1,33605E-01	1,68918E-02		
35	9,61422E-03	9,54938E-03	9,48839E-03	8,69850E-03	8,05250E-03	8,04059E-03	7,42852E-03	6,92039E-03	9,75978E-03		
40	9,60898E-03	9,54288E-03	9,48337E-03	8,69058E-03	8,04081E-03	8,03089E-03	7,17994E-03	7,86933E-03	8,32542E-03	6,83623E-03	
45	9,60530E-03	9,53828E-03	9,47962E-03	8,68437E-03	8,03128E-03	8,02258E-03	7,20251E-03	6,69670E-03	1,96782E-02	7,99448E-03	
50	9,60261E-03	9,53491E-03	9,47675E-03	8,67945E-03	8,02346E-03	8,01545E-03	7,73692E-03	8,53872E-03	8,17372E-03	8,01586E-03	5,27080E-03
55	9,60059E-03	9,53238E-03	9,47452E-03	8,67550E-03	8,01702E-03	8,00920E-03	7,18703E-03	6,80591E-03	6,76919E-03	7,13290E-03	7,93583E-03
60	9,59904E-03	9,53043E-03	9,47274E-03	8,67229E-03	8,01167E-03	8,00379E-03	7,20032E-03	6,56628E-03	7,03547E-03	5,84218E-03	5,86955E-03
65	9,59783E-03	9,52890E-03	9,47131E-03	8,66966E-03	8,00721E-03	7,99892E-03	7,98967E-03	7,56695E-03	6,49875E-03	5,54220E-03	6,43407E-03
70	9,59687E-03	9,52768E-03	9,47015E-03	8,66747E-03	8,00345E-03	7,99473E-03	7,18192E-03	1,02145E-02	7,04881E-03	6,83526E-03	6,43220E-03
75	9,59609E-03	9,52669E-03	9,46919E-03	8,66564E-03	8,00028E-03	7,99100E-03	7,17403E-03	6,79752E-03	6,65870E-03	5,91244E-03	8,64827E-03
80	9,59545E-03	9,52588E-03	9,46838E-03	8,66410E-03	7,99757E-03	7,98778E-03	7,22267E-03	2,88726E-02	6,09274E-03	6,09703E-03	6,76578E-03
85	9,59492E-03	9,52522E-03	9,46771E-03	8,66279E-03	7,99526E-03	7,98510E-03	7,15633E-03	6,63240E-03	7,08902E-03	6,70205E-03	7,33790E-03

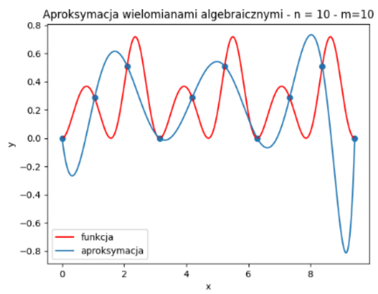
Podobnie i w tym przypadku, na dokładność aproksymacji miała wpływ liczba węzłów n oraz liczba funkcji bazowych m, z szczególnym wpływem drugiej zmiennej. W przypadku błędu sumy kwadratów punktów możemy również zauważyć, że od pewnej wartości m (tu $m = 25$), wzrost liczby funkcji bazowych nie powoduje jednoznacznego zwiększenia dokładności. Aproksymacja z wykresu 7. ponownie okazała się posiadać najmniejszą dokładność z zestawionych danych. Natomiast poniżej znajduje się wykres najdokładniejszej z aproksymacji dla $n = m = 50$. W tym przypadku funkcja aproksymująca powinna być interpolacją, przechodzącą przez każdy z n węzłów, natomiast przez złe uwarunkowanie tej aproksymacji, możemy zauważyć, że tak nie jest:



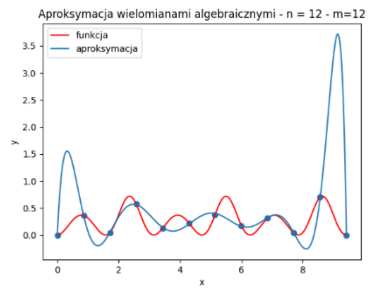
Wykres 9. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 50, m = 50

Efekt Rungego

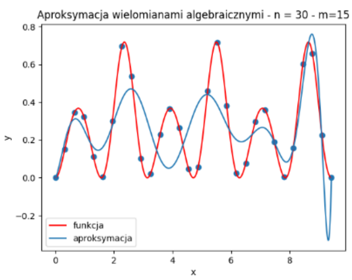
Efekt Rungego polega na występowaniu zmniejszenia dokładności wraz ze zwiększaniem liczby węzłów. Dodatkowo, zachodzi on tylko w przypadku gdy równocześnie interpolujemy lub aproksymujemy wielomianami oraz gdy węzły interpolacyjne są równoodległe. W przypadku aproksymacji średniokwadratowej efekt ten również zachodzi. Wraz z wzrostem liczby węzłów oraz stopnia wielomianu, wartości funkcji przy jej krańcach zaczynają znacząco odbiegać. Możemy to zaobserwować na poniższych wykresach. Na wykresie 10. oraz 11. Efekt ten jest najbardziej widoczny, m.in. ze względu na to, że przez $n = m$ w obu przypadkach aproksymacje stały się interpolacjami. Natomiast w przypadku wykresu 12. efekt ten widoczny jest głównie przy prawym krańcu wykresu. Należy jednak pamiętać, że zazwyczaj w przypadku aproksymacji $m \ll n$.



Wykres 10. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 10, m = 10



Wykres 11. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 12, m = 12



Wykres 12. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi dla n = 30, m = 15

Bibliografia

- Metody obliczeniowe w nauce i technice – wykłady AGH 2022/23
- Aproksymacja wielomianowa – Wikipedia – [https://pl.wikipedia.org/wiki/Aproksymacja_wielomianowa]
- Polynomial regression – Wikipedia – [https://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_regression]