

# Interpolacja Lagrange'a oraz Newtona

Jakub Kędra

Gr. 4

## Spis treści

Informacje techniczne .....	3
Zadanie .....	3
Funkcja .....	3
Węzły równoodległe oraz wielomiany Czebyszewa .....	3
Interpolacja Lagrange'a .....	4
Wzór .....	4
Węzły równoodległe .....	4
Węzły rozmieszczone zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa .....	0
Interpolacja Newtona .....	0
Wzór .....	0
Węzły równoodległe .....	0
Węzły rozmieszczone zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa .....	0
Błędy .....	0
Błędy w interpolacji Lagrange'a .....	1
Błędy w interpolacji Newtona .....	1
Efekt Rungego .....	1
Wnioski .....	0

## Spis tabel

Tabela 1. Informacje techniczne .....	3
Tabela 2. Błędy obliczeniowe interpolacji Lagrange'a .....	1
Tabela 3. Błędy obliczeniowe interpolacji Newtona .....	1

## Spis wykresów

Wykres 1. Lagrange - równomierny - $n=3$ .....	4
Wykres 2. Lagrange - równomierny - $n=3$ bez f. interpolowanej .....	4
Wykres 3. Lagrange - równomierny - $n=4$ .....	4
Wykres 4. Lagrange - równomierny - $n=4$ bez f. interpolowanej .....	4
Wykres 5. Lagrange - równomierny - $n=7$ .....	0
Wykres 6. Lagrange - równomierny - $n=7$ bez f. interpolowanej .....	0
Wykres 7. Lagrange - równomierny - $n=5$ .....	0
Wykres 8. Lagrange - równomierny - $n=8$ .....	0
Wykres 9. Lagrange - równomierny - $n=9$ .....	0
Wykres 10. Lagrange - równomierny - $n=10$ .....	0
Wykres 11. Lagrange - równomierny - $n=15$ .....	0
Wykres 12. Lagrange - równomierny - $n=20$ .....	0
Wykres 13. Lagrange - wielomiany Czebyszewa - $n=8$ .....	0

Wykres 14. Lagrange - wielomiany Czebyszewa - $n=9$ .....	0
Wykres 15. Lagrange - wielomiany Czebyszewa - $n=10$ .....	0
Wykres 16. Lagrange - wielomiany Czebyszewa - $n=15$ .....	0
Wykres 17. Lagrange - wielomiany Czebyszewa - $n=20$ .....	0
Wykres 18. Lagrange - wielomiany Czebyszewa - $n=100$ .....	0
Wykres 19. Newton - równomierny - $n=4$ .....	0
Wykres 20. Newton - równomierny - $n=3$ .....	0
Wykres 21. Newton - równomierny - $n=7$ .....	0
Wykres 22. Newton - równomierny - $n=8$ .....	0
Wykres 23. Newton - równomierny - $n=9$ .....	0
Wykres 24. Newton - równomierny - $n=10$ .....	0
Wykres 25. Newton - wielomiany Chebyschewa - $n=9$ .....	0
Wykres 26. Newton - wielomiany Chebyschewa - $n=10$ .....	0
Wykres 27. Newton - wielomiany Chebyschewa - $n=15$ .....	0
Wykres 28. Newton - wielomiany Chebyschewa - $n=20$ .....	0
Wykres 29. Lagrange - równomierny - $n=10$ .....	0
Wykres 30. Lagrange - równomierny - $n=11$ .....	0
Wykres 31. Lagrange - równomierny - $n=12$ .....	0
Wykres 32. Newton - równomierny - $n=10$ .....	<b>Błąd! Nie zdefiniowano zakładki.</b>
Wykres 33. Newton - równomierny - $n=11$ .....	<b>Błąd! Nie zdefiniowano zakładki.</b>
Wykres 34. Newton - równomierny - $n=12$ .....	<b>Błąd! Nie zdefiniowano zakładki.</b>

## Informacje techniczne

Poniższa tabela zawiera informacje sprzętowe

System operacyjny	Windows 10 Home (64bit, kompilacja 19045)
Procesor	i7 9750h
Język programowania	Python
Kompilator	Python 3.8.10

Tabela 1. Informacje techniczne

## Zadanie

Celem zadania było wyznaczenie, przeprowadzenie oraz zbadanie wielomianu interpolującego w postaci Lagrange'a oraz Newtona dla dwóch różnych rozmieszczeń węzłów.

## Funkcja

Interpolowana funkcja prezentuje się następująco:

$$f(x) = e^{-k\sin(mx)} + k\sin(mx) - 1$$

Dla:

- $k = 1$
- $m = 2$
- $x \in [0, 3\pi]$

Podstawiając parametry do wzoru otrzymujemy:

$$f(x) = e^{-\sin(2x)} + \sin(2x) - 1$$

## Węzły równoodległe oraz wielomiany Czebyszewa

Obie interpolacje zostały przeprowadzone dla dwóch rodzajów rozmieszczeń węzłów:

- Równoodległych – rozmieszczonych równolegle na całej dziedzinie interpolowanej funkcji
- Zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa, zadanych wzorem:

$$x_k = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a)\cos\left(\frac{2k - 1}{2n}\pi\right)$$

Dla  $k = 1, \dots, n$  oraz dla  $[a, b] = [0, 3\pi]$

## Interpolacja Lagrange'a

### Wzór

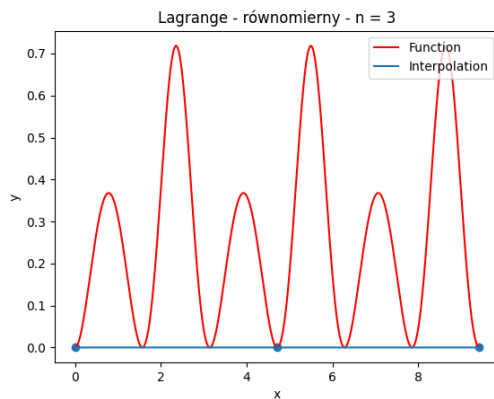
Do interpolacji Lagrange'a został wykorzystany następujący wzór:

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i},$$

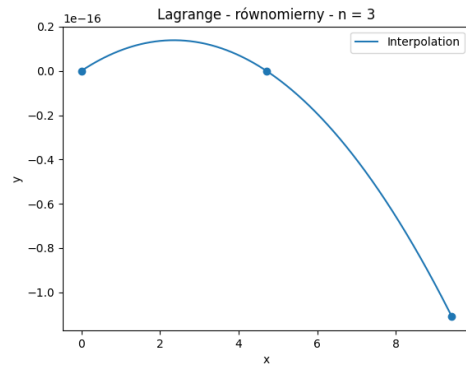
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \underbrace{f(x_k)}_{\text{współczynniki}} \underbrace{L_k(x)}_{\text{baza Lagrange'a}}$$

### Węzły równoodległe

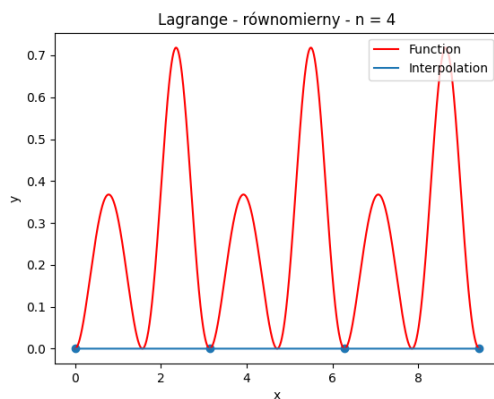
Dla  $n \in \{3, 4, 7\}$  możemy zaobserwować nieco specyficzne zjawisko



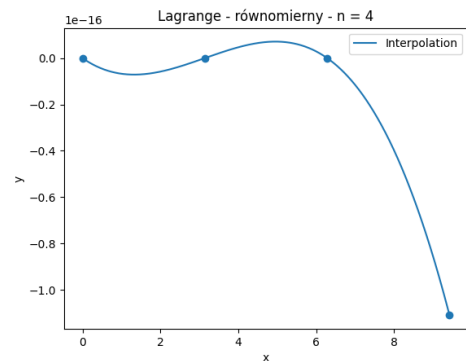
Wykres 1. Lagrange - równomierny -  $n=3$



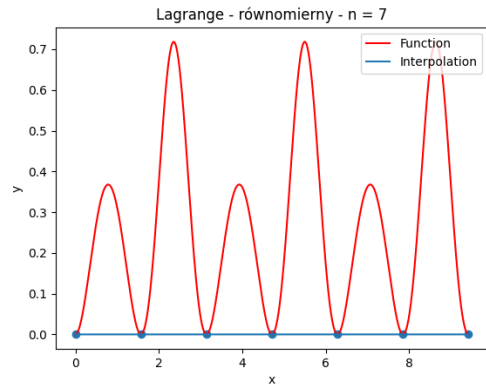
Wykres 2. Lagrange - równomierny -  $n=3$  bez  $f$ . interpolowanej



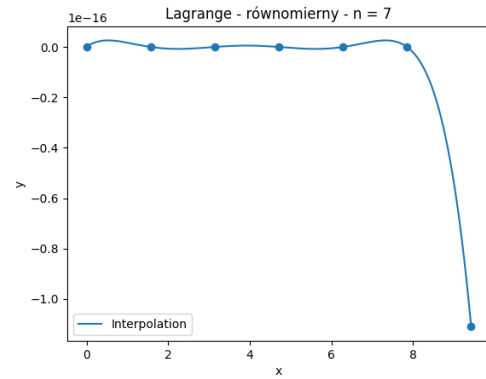
Wykres 3. Lagrange - równomierny -  $n=4$



Wykres 4. Lagrange - równomierny -  $n=4$  bez  $f$ . interpolowanej



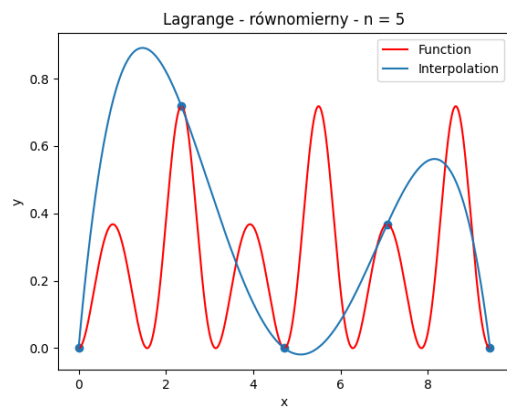
Wykres 5. Lagrange - równomierny -  $n=7$



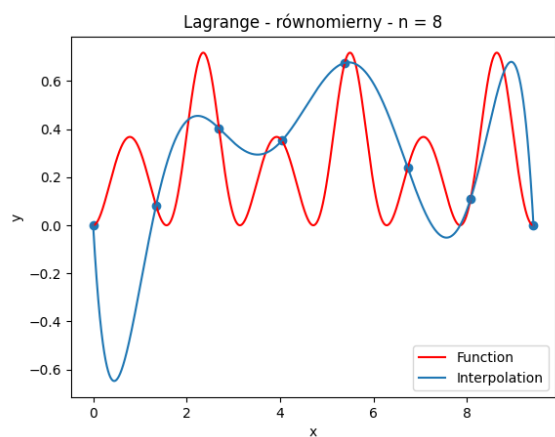
Wykres 6. Lagrange - równomierny -  $n=7$  bez  $f.$  interpolowanej

Interpolowana funkcja wydaje się być prostą, lecz w rzeczywistości wielomiany te tak naprawdę mają bardzo małe amplitudy (rzędu  $10^{-16}$ ), przez co w porównaniu z funkcją interpolowaną wygląda dla nas jak zwykła prosta zadana wzorem  $y = 0$ .

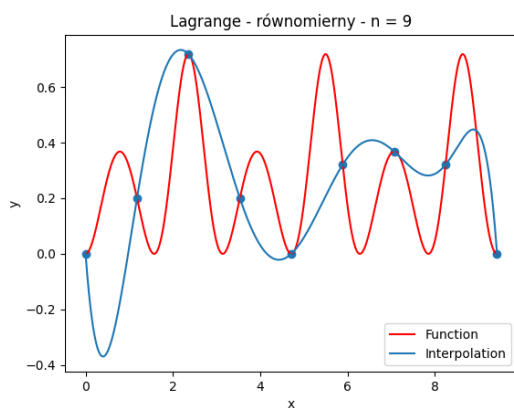
Dla pozostałych przypadków



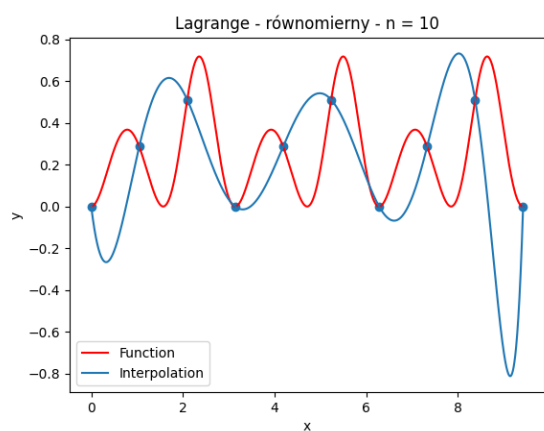
Wykres 7. Lagrange - równomierny -  $n=5$



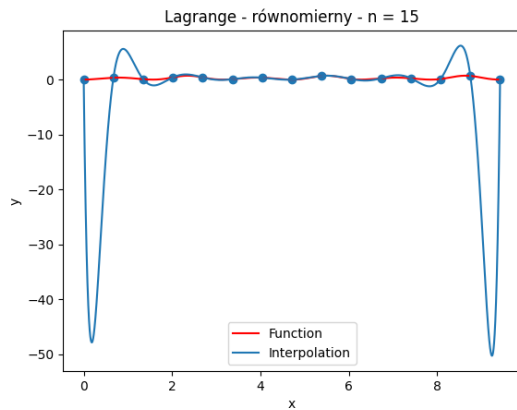
Wykres 8. Lagrange - równomierny -  $n=8$



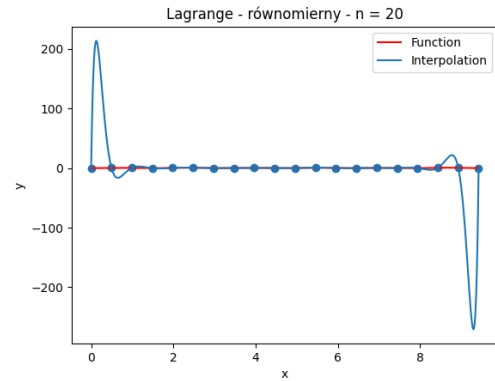
Wykres 9. Lagrange - równomierny -  $n=9$



Wykres 10. Lagrange - równomierny -  $n=10$



Wykres 11. Lagrange - równomierny - n=15

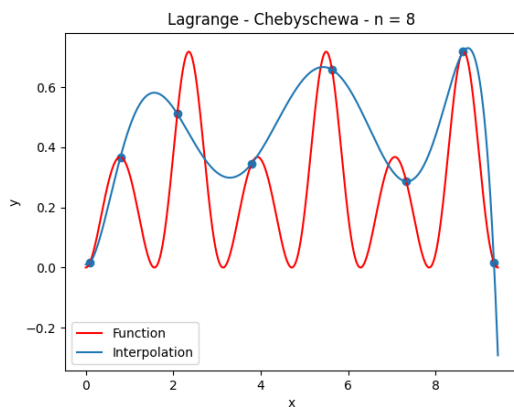


Wykres 12. Lagrange - równomierny - n=20

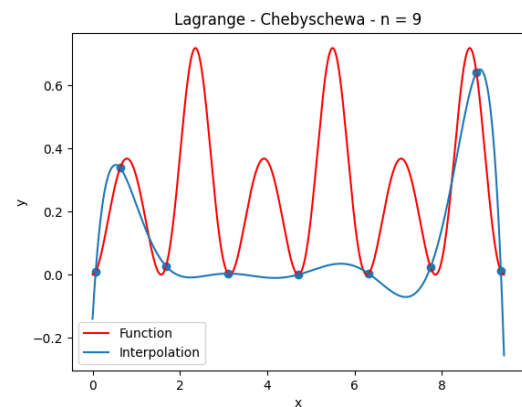
Jak możemy zauważyć, interpolowanie za pomocą węzłów równoodległych niezbyt dokładnie interpoluje naszą funkcję. Dodatkowo, dla  $n = \{ 15, 20 \}$  możemy zauważyć efekt Runge'go

Węzły rozmieszczone zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa

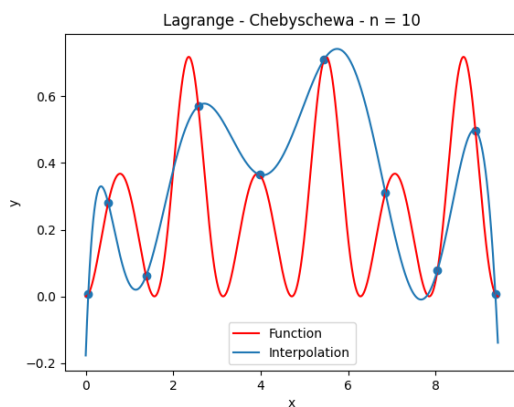
Interpolacja za pomocą wielomianów Czebyszewa daje nam lepsze efekty.



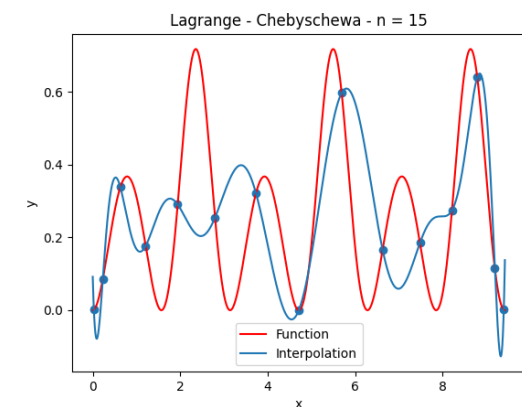
Wykres 13. Lagrange - wielomiany Czebyszewa - n=8



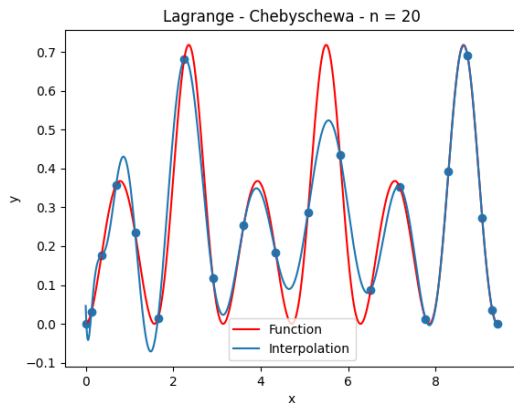
Wykres 14. Lagrange - wielomiany Czebyszewa - n=9



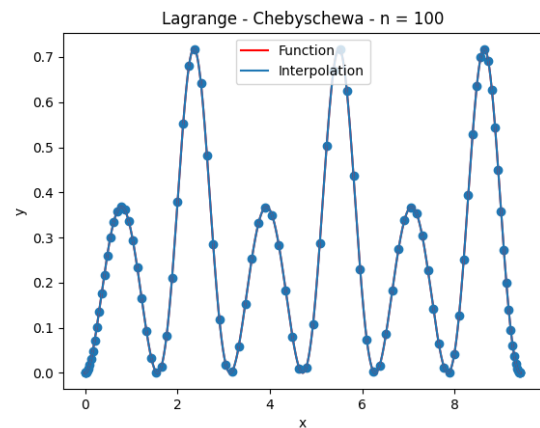
Wykres 15. Lagrange - wielomiany Czebyszewa - n=10



Wykres 16. Lagrange - wielomiany Czebyszewa - n=15



Wykres 17. Lagrange - wielomiany Czebyszewa - n=20



Wykres 18. Lagrange - wielomiany Czebyszewa - n=100

Jak możemy zauważyć, wraz z zwiększającą się liczbą węzłów, interpolowany wykres staje się coraz dokładniejszy. Dla  $n = 100$ , wykres interpolowanej funkcji oraz samej interpolacji jest niemalże identyczny.

W powyższych danych wynika, że rozmieszczenie

## Interpolacja Newtona

### Wzór

Do interpolacji Newtona (metody ilorazów różnicowych) został wykorzystany następujący wzór z ilorazami różnicowymi:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n \left( f[x_0, x_1, \dots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right)$$

Gdzie iloraz różnicowy definiujemy za pomocą wzoru:

- 0-wy iloraz różnicowy:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

- 1-szy:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

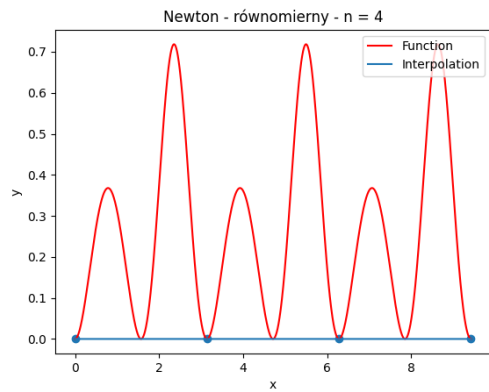
- oraz k-ty:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

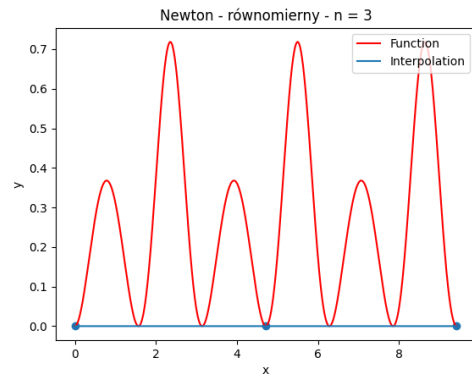
### Węzły równoodległe

Podobne zjawisko co w przypadku interpolacji Lagrange'a dla  $n = \{3, 4, 7\}$  otrzymujemy również tutaj

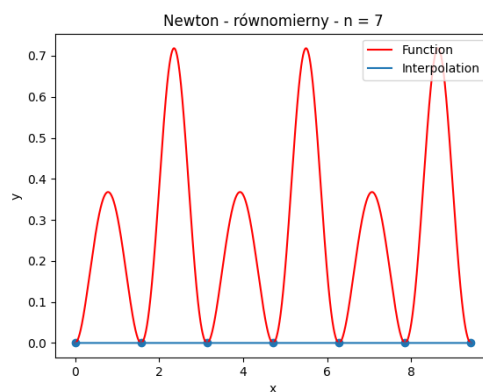




Wykres 19. Newton - równomierny -  $n=4$

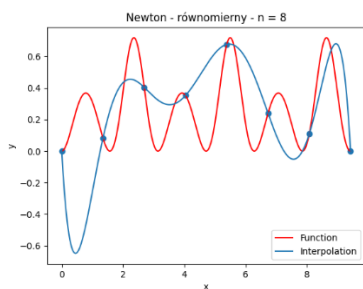


Wykres 20. Newton - równomierny -  $n=3$

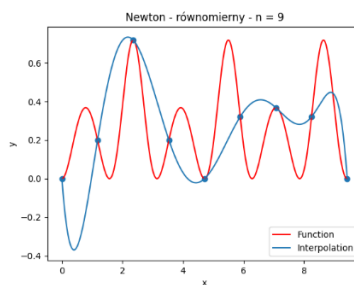


Wykres 21. Newton - równomierny -  $n=7$

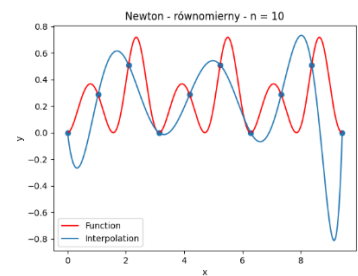
Natomiast dla  $n = \{8, 9, 10\}$  wykresy w tym przypadku również wydają się być mniej dokładne:



Wykres 22. Newton - równomierny -  $n=8$



Wykres 23. Newton - równomierny -  $n=9$

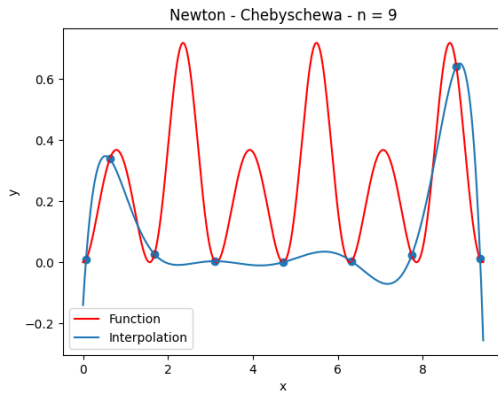


Wykres 24. Newton - równomierny -  $n=10$

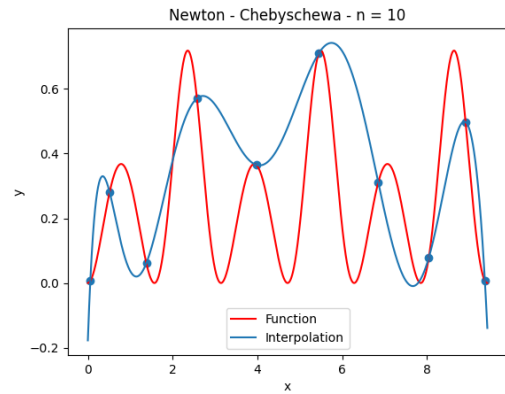
Na ostatnim wykresie możemy dodatkowo zauważyć efekt Rungego. Tutaj również interpolowanie funkcji za pomocą węzłów rozmieszczonych równoodlegle nie dało dobrych rezultatów.

[Węzły rozmieszczone zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa](#)

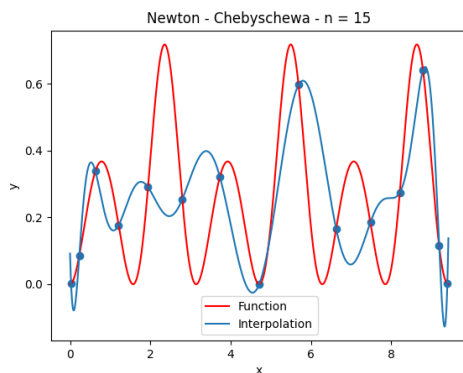
Interpolacja zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa również w tym przypadku dała nam lepsze efekty



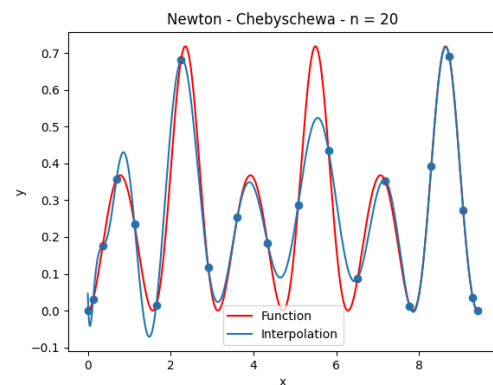
Wykres 25. Newton - wielomiany Chebyschewa - n=9



Wykres 26. Newton - wielomiany Chebyschewa - n=10



Wykres 27. Newton - wielomiany Chebyschewa - n=15



Wykres 28. Newton - wielomiany Chebyschewa - n=20

W tym wypadku rozmieszczenie węzłów zgodnie z zerami wielomianu Czebyschewa również dała nam lepsze rezultaty. Nie występuje tu efekt Rungego. Wraz ze wzrostem liczby węzłów interpolacja staje się coraz dokładniejsza, lecz niestety tylko do pewnego momentu. W poniższych tabelach błędów możemy to zauważyć.

## Błędy

Do wyliczenia stosownych błędów skorzystałem z poniższych wzorów:

- Wzór na błąd maksymalny punktów:

$$\max_{i=0,\dots,500} |f(x_i) - w(x_i)|$$

- Wzór na błąd sumy kwadratów punktów:

$$\frac{1}{500} \sqrt{\sum_{i=0}^{500} (f(x_i) - w(x_i))^2}$$

Poniżej prezentują się skumulowane w tabelach wyniki obliczeń błędów

## Błędy w interpolacji Lagrange'a

n	równ. max	Chebyshev max	równ. sqrt.	Chebyshev sqrt.
3	7,182818E-01	8,268171E-01	1,530590E-02	1,380562E-02
4	7,182818E-01	6,454683E-01	1,530590E-02	1,148537E-02
5	8,884817E-01	7,149856E-01	1,635087E-02	1,167527E-02
7	7,182818E-01	7,375997E-01	1,530590E-02	1,215384E-02
10	1,061030E+00	6,456120E-01	1,799151E-02	1,196513E-02
15	5,034675E+01	5,085590E-01	5,412534E-01	9,601586E-03
20	2,704070E+02	2,008314E-01	2,245595E+00	2,866430E-03
30	3,181205E+03	1,367768E-02	1,636396E+01	2,677995E-04
40	8,339425E+04	2,310018E-03	4,634250E+02	3,265318E-05
50	1,960445E+06	1,096139E-04	8,588042E+03	2,078242E-06
60	8,660515E+06	1,209909E-05	3,263885E+04	1,767496E-07
70	1,719685E+08	4,297278E-07	7,643414E+05	8,385890E-09
80	1,954200E+09	3,442846E-08	6,049577E+06	5,295138E-10
90	7,760551E+09	9,441598E-10	2,020576E+07	1,940952E-11
100	6,818021E+10	6,229639E-11	2,098535E+08	9,920853E-13

Tabela 2. Błędy obliczeniowe interpolacji Lagrange'a

Z powyższej tabeli wynika, że najmniejszy błąd interpolacji możemy uzyskać poprzez rozmieszczenie węzłów zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa. W takim przypadku zwiększanie liczby węzłów pozwala nam na zwiększenie dokładności interpolacji.

## Błędy w interpolacji Newtona

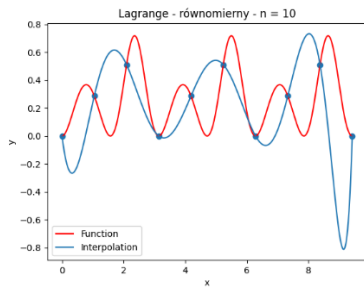
n	równ. max	Chebyshev max	równ. sqrt.	Chebyshev sqrt.
3	7,182818E-01	8,268171E-01	1,530590E-02	1,380562E-02
4	7,182818E-01	6,454683E-01	1,530590E-02	1,148537E-02
5	8,884817E-01	7,149856E-01	1,635087E-02	1,167527E-02
7	7,182818E-01	7,375997E-01	1,530590E-02	1,215384E-02
10	1,061030E+00	6,456120E-01	1,799151E-02	1,196513E-02
15	5,034675E+01	5,085590E-01	5,412534E-01	9,601586E-03
20	2,704070E+02	2,008314E-01	2,245595E+00	2,866430E-03
30	3,181205E+03	1,367768E-02	1,636396E+01	2,678006E-04
40	8,339425E+04	8,734355E-03	4,634250E+02	4,991813E-05
50	1,960435E+06	9,181486E+00	8,588014E+03	3,197274E-02
60	8,677638E+06	1,591141E+04	3,268282E+04	6,422310E+01
70	1,719685E+08	1,629671E+07	7,697703E+05	5,892898E+04
80	5,099791E+09	1,056560E+10	2,023570E+07	2,879063E+07
90	8,019287E+12	1,563776E+13	2,539690E+10	3,849179E+10
100	9,106987E+15	1,114879E+16	2,225938E+13	2,598898E+13

Tabela 3. Błędy obliczeniowe interpolacji Newtona

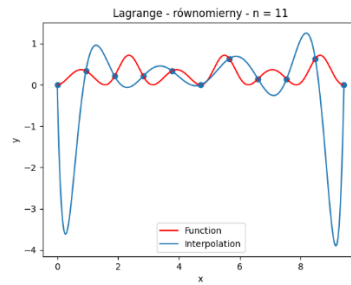
Interpolacja zerami Czebyszewa również tutaj okazała się być dokładniejszą metodą. Dodatkowo, możemy zauważyć, że od pewnego momentu (ok.  $n=7$  dla równoodległych węzłów oraz ok.  $n=40$  dla węzłów interpolowanych zerami Czebyszewa) wraz ze wzrostem liczby węzłów, dokładność interpolacji maleje. Możemy również zauważyć, że do  $n=20$  wyniki obu tabel są identyczne

## Efekt Rungego

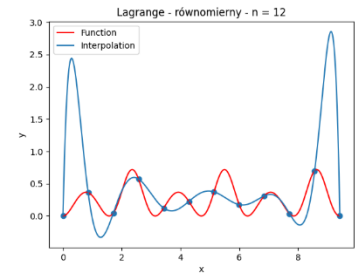
Efekt Rungego polega na występowaniu zmniejszenia dokładności wraz ze zwiększaniem liczby węzłów. Dodatkowo, zachodzi on tylko w przypadku gdy równocześnie interpolujemy wielomianami oraz gdy węzły interpolacyjne są równoodległe. W naszym przypadku, efekt ten możemy zauważyć już dla  $n = 10$  w przypadku obu interpolacji z równomiernym rozmieszczeniem węzłów. Poniżej znajdują się porównania interpolowanych funkcji w zależności od wykorzystywanego sposobu rozmieszczenia węzłów.



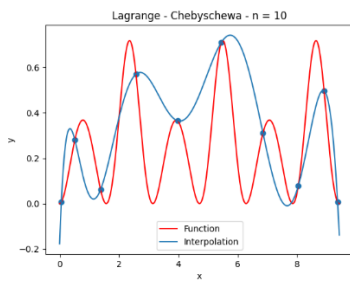
Wykres 29. Lagrange - równomierny -  $n=10$



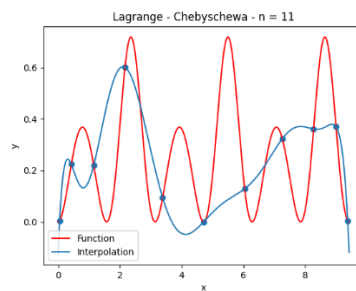
Wykres 30. Lagrange - równomierny -  $n=11$



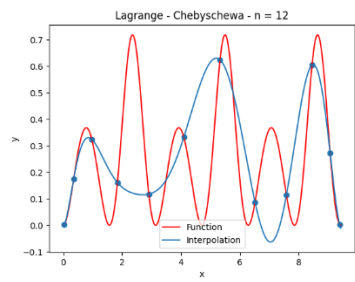
Wykres 31. Lagrange - równomierny -  $n=12$



Wykres 32. Lagrange - wielomiany Chebyschewa -  $n=10$



Wykres 33. Lagrange - wielomiany Chebyschewa -  $n=11$



Wykres 34. Lagrange - wielomiany Chebyschewa -  $n=12$

## Wnioski

Interpolowane wykresy posiadały największą dokładność wtedy, gdy węzły były rozmieszczone zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa. Dodatkowo, w przypadku interpolacji Lagrange'a, wzrost liczby węzłów zwiększał dokładność interpolacji.

Dla małej liczby węzłów interpolacje Lagrange'a oraz Newtona zwracają niemalże identyczne wyniki. Jednakże od pewnej liczby węzłów interpolacja Newtona zaczyna tracić na dokładności, bez względu na rozmieszczenie węzłów