

Rozwiązywanie układów równań liniowych

Jakub Kędra

Gr. nr 4

Spis treści

Spis tabel	1
Spis wykresów	2
Spis równań	2
Informacje techniczne	3
Poniższa tabela zawiera informacje sprzętowe.....	3
Zadanie	3
Macierze i układ równań	3
Wektor x	3
Wektor b	3
Macierz A	4
Macierz 1.	4
Macierz 2.	4
Macierz 3.	4
Wykorzystywane wartości:.....	4
Wstęp teoretyczny	5
Norma.....	5
Wskaźnik uwarunkowania układu równań	5
Algorytm eliminacji Gaussa	5
Macierz trójdzielna.....	6
Algorytm Thomasa	6
Wyniki.....	8
Macierz 1.	8
Macierz 2.	1
Macierz III	1
Wnioski	0
Bibliografia.....	0

Spis tabel

Tabela 1. Informacje techniczne	3
Tabela 2. Uwarunkowanie macierzy 1.	8
Tabela 3. Obliczone błędy dla macierzy 1.	8
Tabela 4. Uwarunkowanie macierzy 2.	1
Tabela 5. Obliczone błędy dla macierzy 2.	1
Tabela 6. Uwarunkowanie macierzy 3.	1
Tabela 7. Obliczone błędy dla algorytmu Thomasa.....	1
Tabela 8.Obliczone błędy dla algorytmu eliminacji Gauss	1

Tabela 9. Czas algorytmu Thomasa w sekundach	1
Tabela 10. Czas algorytmu eliminacji Gaussa w sekundach.....	1

Spis wykresów

Wykres 1. Porównanie wartości uwarunkowań dwóch pierwszych macierzy (uśrednione wartości)	1
Wykres 2. Porównanie otrzymanych błędów dla dwóch pierwszych macierzy (uśrednione wartości)..	1
Wykres 3. Porównanie otrzymanych błędów dla macierzy 3. (uśrednione wartości)	1
Wykres 4. Porównanie czasów wykonania obu algorytmów dla macierzy 3. (uśrednione wyniki)	1
Wykres 5. Porównanie wartości uwarunkowań dwóch ostatnich	0

Spis równań

Równanie 1. Ogólny wzór układu równań	3
Równanie 2. Wzór na i -ty element wektora współczynników x	3
Równanie 3. Wektor współczynników x	3
Równanie 4. Wzór macierzy 1.	4
Równanie 5. Wzór macierzy 2.	4
Równanie 6. Wzór macierzy 3.	4
Równanie 7. Wartości przyjmowane przez n	4
Równanie 8. Przyjmowane typy	4
Równanie 9. Wzór na przyjętą normę macierzy (Frobeniusa)	5
Równanie 10. Wzór na błędy wyliczane w tabelkach.....	5
Równanie 11. Wzór na uwarunkowanie macierzy	5
Równanie 12. Definicja oznaczenia wiersza Ei	5
Równanie 13. Układ równań w postaci trójkątnej	5
Równanie 14. Wzór na ostatnią niewiadomą $x_n - 1$	6
Równanie 15. Wzór na x_i wykorzystujący podstawienie wsteczne.....	6
Równanie 16. Macierzowy układ równań z zaznaczonymi odpowiednimi współczynnikami.....	6
Równanie 17. Wzór na i -ty współczynnik ci'	6
Równanie 18. Wzór na i -ty współczynnik di'	6
Równanie 19. Wzór na i -tą niewiadomą w algorytmie Thomasa.....	7

Informacje techniczne

Poniższa tabela zawiera informacje sprzętowe

System operacyjny	Windows 10 Home (64bit, kompilacja 19045)
Procesor	i7 9750h
Język programowania	Python
Kompilator	Python 3.8.10

Tabela 1. Informacje techniczne

Zadanie

Celem zadania było zbadanie algorytmów rozwiązywania układów równań, m.in. algorytmu eliminacji Gaussa oraz algorytmu Thomasa, a także zbadanie wpływu złego uwarunkowania na otrzymane wyniki.

Macierze i układ równań

W niniejszym sprawozdaniu będziemy próbowali rozwiązać następujący układ równań:

$$Ax = b$$

Równanie 1. Ogólny wzór układu równań

Gdzie:

A – macierz $n \times n$ współczynników przy x , pod nią będziemy podstawiali macierz 1., 2. oraz 3.

x – wektor niewiadomych x , będąca n -elementową permutacją ze zbioru $\{1, -1\}$

b – wektor

Wektor x

Wektor będący n -elementową permutacją ze zbioru $\{1, -1\}$. To właśnie jego wartości będziemy w tym sprawozdaniu szukali. Aby sprawdzić dokładność wyników, na potrzeby sprawozdania, przyjmujemy, że:

$$x_i = (-1)^i$$

Równanie 2. Wzór na i -ty element wektora współczynników x

Czyli

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \end{bmatrix}$$

Równanie 3. Wektor współczynników x

Wektor b

Wektor b , będący n -elementową prawą stroną równania. Jego wartości otrzymujemy podstawiając pod wzór ogólny układu równań (1.) zdefiniowanego w poprzedniej sekcji wektora niewiadomych x oraz macierzy A

Macierz A

Macierz współczynników A o wymiarach $n \times n$. W tym sprawozdaniu będzie ona przyjmowała 3

Macierz 1.

Przyjmujemy, że indeksowanie w macierzy rozpoczynamy od 0. Pierwszą z macierzy budujemy następująco:

$$a_{0j} = 1$$
$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \text{ dla } i \neq 0$$

Równanie 4. Wzór macierzy 1.

Macierz 2.

Na tej macierzy będziemy przeprowadzać dokładnie te same testy co na macierzy 1. Następnie porównamy zebrane wyniki

$$a_{ij} = \frac{2i}{j} \text{ dla } j \geq i$$
$$a_{ij} = a_{ji} \text{ dla } j < i$$

Równanie 5. Wzór macierzy 2.

Macierz 3.

$$a_{i,i} = 5$$
$$a_{i,i+1} = \frac{1}{i+5}$$
$$a_{i,i-1} = \frac{5}{i+6} \quad \text{dla } i > 0$$
$$a_{i,j} = 0 \quad \text{dla } j < i-1 \text{ oraz } j > i+1$$

Równanie 6. Wzór macierzy 3.

Macierz ta jest macierzą trójdziagonalną. Dzięki temu w celu optymalizacji obliczeń będziemy mogli skorzystać z algorytmu Thomasa. Dlatego też, dla tej macierzy przeprowadzimy podobne badania co w dwóch poprzednich, wykorzystując oba algorytmy (Gausa i Thomasa), wraz z zmierzeniem czasu wykonania każdego z nich.

Wykorzystywane wartości:

Na cele sprawozdania będziemy korzystali z następujących wymiarów macierzy i wektorów n :

$$n = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,20,30,50,70,100,200,300,500,700\}$$

Równanie 7. Wartości przyjmowane przez n

Badania będą przeprowadzane również dla 3 typów danych zmiennoprzecinkowych:

$$types = \{float16, float32, float64\}$$

Równanie 8. Przyjmowane typy

Wstęp teoretyczny

Norma

W sprawozdaniu w celu obliczenia normy macierzy wykorzystamy normę Frobeniusa, zadaną wzorem:

$$\|A\| := \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |a_{i,j}|^2}$$

Równanie 9. Wzór na przyjętą normę macierzy (Frobeniusa)

Natomiast aby sprawdzić dokładność wykorzystanych algorytmów będziemy liczyli różnicę pomiędzy obliczonymi niewiadomymi x , a zadanymi.

$$\text{error}(x_{\text{obliczone}}) = \|x_{\text{zadane}} - x_{\text{obliczone}}\|$$

Równanie 10. Wzór na błędy wyliczane w tabelkach

Wskaźnik uwarunkowania układu równań

Wskaźnik ten mówi nam jak bardzo czułe na zaburzenia jest nasz układ równań. Obliczamy go za pomocą wzoru

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Równanie 11. Wzór na uwarunkowanie macierzy

Algorytm eliminacji Gaussa

Jest to algorytm rozwiązywania układów równań liniowych o złożoności $O(n^3)$, wykorzystujący operacje elementarne, takie jak:

- $(\lambda E_i) \rightarrow E_i$ – pomnożenie/podzielenie przez niezerowy skalar
- $(E_i + \lambda E_j) \rightarrow E_i$ – dodanie/odjęcie do dowolnie wybranego wiersza macierzy wielokrotności innego wiersza ($i \neq j$)
- $E_i \leftrightarrow E_j$ – zamiana miejscami dwóch dowolnych wierszy

Gdzie E_i oznacza i -ty wiersz tabeli:

$$E_i: a_{i,0}x_0 + a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n-1}x_{n-1} = b_i$$

Równanie 12. Definicja oznaczenia wiersza E_i

Oraz λ oznacza niezerowy skalar. Celem algorytmu jest sprowadzenie macierzowego układu równań do postaci trójkątnej (schodkowej)

$$\begin{array}{cccccccl} a_{0,0}x_0 & + & a_{0,1}x_1 & + & \dots & + & a_{0,n-1}x_{n-1} & = & b_0 \\ & & a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n-1}x_{n-1} & = & b'_1 \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & = & b'_{n-1} \end{array}$$

Równanie 13. Układ równań w postaci trójkątnej

I w tedy ostatnią niewiadomą obliczamy z wzoru:

$$x_{n-1} = \frac{b'_{n-1}}{a'_{n-1,n-1}}$$

Równanie 14. Wzór na ostatnią niewiadomą x_{n-1}

A następnie każde pozostałe przez podstawienie wsteczne:

$$x_i = \frac{1}{a'_{i,i}} \left(b'_i - \sum_{j=i+1}^n a'_{i,j} x_j \right)$$

Równanie 15. Wzór na x_i wykorzystujący podstawienie wsteczne

Macierz trójdzielna

W matematyce, w algebrze liniowej, macierz trójdzielna jest macierzą, której wszystkie współczynniki, które nie znajdują się ani na głównej przekątnej, ani na przekątnej tuż powyżej, ani na przekątnej tuż poniżej, wynoszą zero.

Algorytm Thomasa

Algorytm Thomasa – algorytm rozwiązywania układów równań liniowych o złożoności $O(n)$. stosuje się tylko gdy mamy do czynienia z macierzą trójdzielną

$$\begin{bmatrix} b_0 & c_0 & & & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-2} \\ 0 & & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

Równanie 16. Macierzowy układ równań z zaznaczonymi odpowiednimi współczynnikami

Gdzie:

- b_i - i-ty element na głównej przekątnej
- a_{i+1} - i-ty element na przekątnej pod przekątną
- c_i - i-ty element na przekątnej nad przekątną

Następnie musimy wyliczyć nowe współczynniki c'_i oraz d'_i , zadanymi wzorami:

$$c'_0 = \frac{c_0}{b_0}$$

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n-2$$

Równanie 17. Wzór na i-ty współczynnik c'_i

$$d'_0 = \frac{d_0}{b_0}$$

$$d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n-1$$

Równanie 18. Wzór na i-ty współczynnik d'_i

A następnie w celu wyliczenia naszych niewiadomych, korzystamy z wzoru

$$x_{n-1} = d'_{n-1}$$

$$x_i = d'_i - c'_i x_{i+1} \text{ dla } i = n-2, \dots, 1, 0$$

Równanie 19. Wzór na i-tą niewiadomą w algorytmie Thomasa

Na potrzeby implementacyjne korzystamy z macierzy rzadkiej, trójdzielnej, reprezentowanej za pomocą trzech tablic o wymiarach $\text{len}(A_k) \leq n$, gdzie $\text{len}(A_k)$ oznacza długość k-tej tablicy. Do jej utworzenia oraz manipulacji wykorzystywana jest biblioteczna macierz rzadka **diags** z biblioteki **scipy.sparse**.

Wyniki

Macierz 1.

n	float16	float32	float64
3	4,765235E+02	4,853510E+02	4,853501E+02
4	1,366023E+04	1,714505E+04	1,714481E+04
5	8,545373E+04	5,969899E+05	5,964852E+05
6	2,446520E+06	2,113984E+07	2,055630E+07
7	2,214483E+05	1,346720E+09	7,046448E+08
8	3,482111E+06	3,067239E+09	2,407859E+10
9	1,594296E+06	9,330026E+09	8,211969E+11
10	1,040523E+07	4,184787E+09	2,797409E+13
11	3,949739E+05	3,239208E+09	9,541998E+14
12	1,018379E+06	3,689431E+09	3,375189E+16
13	4,982188E+05	5,204690E+09	1,032722E+18
14	5,573629E+05	5,143166E+09	1,130422E+18
15	5,014575E+05	8,979782E+09	7,789631E+17
20	3,076304E+06	2,465009E+10	1,239606E+19
30	1,992334E+07	3,447288E+10	3,398609E+19
50	1,520479E+07	1,245419E+11	1,214645E+20
70	1,166126E+07	1,355253E+11	3,602201E+20
100	1,388901E+08	3,314484E+12	5,457979E+20
200	7,056591E+07	8,794469E+11	1,438025E+21
300	2,278137E+08	2,561898E+12	1,126866E+21
500	8,183967E+08	1,037240E+13	3,500852E+21
700	1,353053E+09	6,106649E+13	1,274557E+22

Tabela 2. Uwarunkowanie macierzy 1.

n	float16	float32	float64
3	0,000000E+00	2,564732E-06	0,000000E+00
4	0,000000E+00	5,233332E-06	3,113000E-13
5	3,687011E+00	3,590696E-04	9,108384E-12
6	3,813307E+00	4,725080E-02	3,684056E-10
7	1,559730E+01	7,501334E-02	1,363120E-08
8	3,092571E+00	7,388270E+00	9,996019E-08
9	6,174238E+00	2,894883E+01	7,374515E-07
10	3,484785E+00	1,060997E+01	1,984431E-04
11	1,800528E+01	3,618725E+01	1,250225E-02
12	2,524863E+01	1,188812E+01	1,207761E+00
13	1,017332E+01	7,872453E+00	2,584414E+01
14	5,302401E+00	1,690768E+01	2,697814E+01
15	4,388025E+01	1,385185E+01	1,738565E+01
20	6,214330E+00	3,924313E+01	6,332196E+01
30	1,022210E+01	4,347308E+02	4,275408E+02
50	3,224851E+01	2,451433E+02	8,221171E+03
70	1,257302E+01	8,178151E+02	4,102947E+02
100	1,223941E+01	3,554725E+02	5,609490E+02
200	2,572948E+01	9,953566E+03	5,950971E+04
300	2,078611E+02	6,902776E+04	4,666629E+04
500	2,915504E+02	6,005198E+03	6,137080E+04
700	1,988110E+02	1,898339E+05	2,354320E+04

Tabela 3. Obliczone błędy dla macierzy 1.

Ze względu na złe uwarunkowanie macierzy, algorytm eliminacji Gaussa szybko dał nam mało precyzyjne wyniki. Już dla $n = 8$ błąd wynosi niemalże 8. Natomiast wraz z wzrostem rozmiaru n , stan ten pogarsza się jeszcze bardziej. Dla $n = 700$ uwarunkowanie to wynosi ponad 10^{22} . Dla mniejszych wartości n (do $n = 12$) algorytm daje w miarę dobre rezultaty, lecz wraz z wzrostem n wyniki pogarszają się.

Macierz 2.

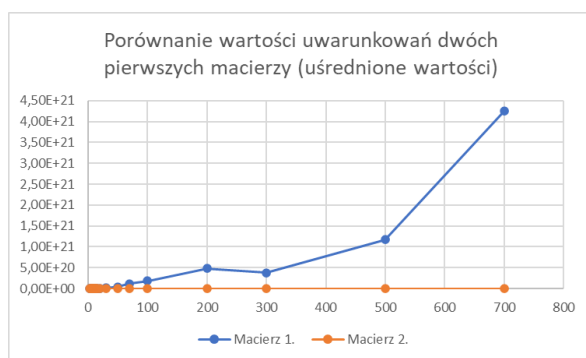
n	float16	float32	float64
3	7,836461E+00	7,842320E+00	7,842320E+00
4	1,503227E+01	1,503809E+01	1,503809E+01
5	2,529349E+01	2,532546E+01	2,532545E+01
6	3,906385E+01	3,906172E+01	3,906172E+01
7	5,651802E+01	5,657108E+01	5,657108E+01
8	7,811427E+01	7,815232E+01	7,815232E+01
9	1,039220E+02	1,040839E+02	1,040839E+02
10	1,343665E+02	1,346276E+02	1,346276E+02
11	1,697598E+02	1,700310E+02	1,700311E+02
12	2,101036E+02	2,105300E+02	2,105300E+02
13	2,555686E+02	2,563496E+02	2,563496E+02
14	3,070791E+02	3,077059E+02	3,077059E+02
15	3,640893E+02	3,648069E+02	3,648069E+02
20	7,439569E+02	7,432874E+02	7,432874E+02
30	2,034675E+03	2,034413E+03	2,034414E+03
50	7,216319E+03	7,260400E+03	7,260397E+03
70	1,672775E+04	1,680585E+04	1,680584E+04
100	4,138329E+04	4,093883E+04	4,093884E+04
200	2,699009E+05	2,312477E+05	2,312477E+05
300	inf	6,369510E+05	6,369510E+05
500	inf	2,283353E+06	2,283353E+06
700	inf	5,294522E+06	5,294537E+06

Tabela 4. Uwarunkowanie macierzy 2.

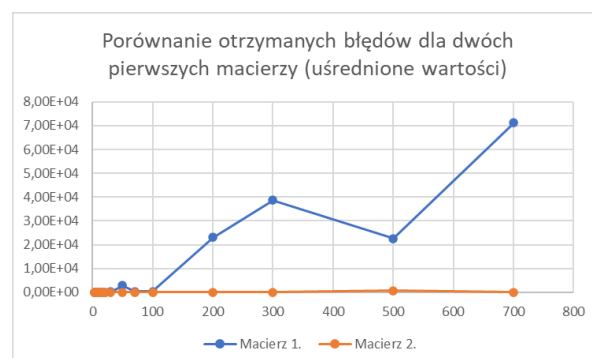
n	float16	float32	float64
3	1,198789E-03	1,463385E-07	3,140185E-16
4	2,157416E-03	1,519626E-07	2,482534E-16
5	1,063917E-03	2,003860E-07	4,154074E-16
6	3,727227E-03	4,599294E-07	9,742168E-16
7	8,796767E-03	1,252866E-06	1,694682E-15
8	9,710341E-03	1,442657E-06	4,672179E-15
9	1,592465E-02	1,637171E-06	3,310252E-15
10	1,615801E-02	4,215837E-06	3,082744E-15
11	1,391573E-02	4,215199E-06	4,421421E-15
12	2,373637E-02	7,600977E-06	1,980372E-14
13	3,748582E-02	1,155714E-05	2,201211E-14
14	2,841431E-02	1,382399E-05	2,276769E-14
15	3,808145E-02	1,388365E-05	2,836832E-14
20	1,432484E-01	1,704937E-05	3,793260E-14
30	2,380560E-01	5,217402E-05	9,940552E-14
50	8,917695E-01	1,602400E-04	3,464001E-13
70	1,968665E+00	4,717304E-04	9,251694E-13
100	3,864958E+00	9,237634E-04	2,287651E-12
200	8,760981E+01	5,602962E-03	2,556601E-11
300	4,559238E+01	2,175457E-02	8,849408E-11
500	2,142707E+03	1,101193E-01	3,623392E-10
700	3,463468E+02	2,698566E-01	9,926180E-10

Tabela 5. Obliczone błędy dla macierzy 2.

Druga z badanych macierzy posiada o wiele mniejsze wskaźniki uwarunkowania, przez co problem jesteśmy w stanie rozwiązać z większą dokładnością. Maksymalny wskaźnik uwarunkowania wynosi jedynie ok. $5,3 \cdot 10^6$, który w porównaniu do wskaźnika uwarunkowania macierzy 1. bliźniaczego rozmiaru, jest wartością ponad 10^{16} krotnie większą. Dla typu float16 od wartości $n = 300$ dodatkowo nie udało się wyliczyć poprawnej wartości uwarunkowania. Dzięki lepszemu uwarunkowaniu, udało się otrzymać bardzo dobre rezultaty. Potwierdzają to uzyskane wartości błędów, które dla typu float64 nawet dla $n = 700$ udało się otrzymać błąd nie przekraczający 10^{-9} .



Wykres 1. Porównanie wartości uwarunkowań dwóch pierwszych macierzy (uśrednione wartości)



Wykres 2. Porównanie otrzymanych błędów dla dwóch pierwszych macierzy (uśrednione wartości)

Powyższe wykresy jasno ilustrują różnicę w uwarunkowaniu oraz otrzymanych błędach pomiędzy oboma macierzami. Różnica ta jest po prostu ogromna.

Macierz III

n	float16	float32	float64
3	3,074908E+00	3,074908E+00	3,074908E+00
4	4,098980E+00	4,098980E+00	4,098980E+00
5	5,117797E+00	5,117797E+00	5,117797E+00
6	6,132921E+00	6,132921E+00	6,132921E+00
7	7,145347E+00	7,145347E+00	7,145347E+00
8	8,155741E+00	8,155741E+00	8,155741E+00
9	9,164564E+00	9,164564E+00	9,164564E+00
10	1,017215E+01	1,017215E+01	1,017215E+01
11	1,117874E+01	1,117874E+01	1,117874E+01
12	1,218452E+01	1,218452E+01	1,218452E+01
13	1,318963E+01	1,318963E+01	1,318963E+01
14	1,419418E+01	1,419418E+01	1,419418E+01
15	1,519826E+01	1,519826E+01	1,519826E+01
20	2,021362E+01	2,021362E+01	2,021362E+01
30	3,023091E+01	3,023091E+01	3,023091E+01
50	5,024638E+01	5,024638E+01	5,024638E+01
70	7,025353E+01	7,025353E+01	7,025353E+01
100	1,002591E+02	1,002591E+02	1,002591E+02
200	2,002659E+02	2,002659E+02	2,002659E+02
300	3,002682E+02	3,002682E+02	3,002682E+02
500	5,002701E+02	5,002701E+02	5,002701E+02
700	7,002709E+02	7,002709E+02	7,002709E+02

Tabela 6. Uwarunkowanie macierzy 3.

Prezentowana macierz posiada najlepsze uwarunkowanie z wszystkich 3 przedstawionych. Przyjmuje ona maksymalną wartość ok. $7 \cdot 10^2$.

n	float16	float32	float64
3	0,000000E+00	0,000000E+00	1,110223E-16
4	0,000000E+00	0,000000E+00	1,570092E-16
5	0,000000E+00	0,000000E+00	1,570092E-16
6	0,000000E+00	0,000000E+00	1,570092E-16
7	0,000000E+00	0,000000E+00	2,719480E-16
8	0,000000E+00	0,000000E+00	2,937374E-16
9	0,000000E+00	0,000000E+00	2,937374E-16
10	0,000000E+00	0,000000E+00	2,937374E-16
11	0,000000E+00	0,000000E+00	2,937374E-16
12	0,000000E+00	0,000000E+00	3,330669E-16
13	0,000000E+00	0,000000E+00	4,002966E-16
14	0,000000E+00	0,000000E+00	4,577567E-16
15	0,000000E+00	0,000000E+00	4,577567E-16
20	4,882812E-04	0,000000E+00	4,577567E-16
30	4,882812E-04	0,000000E+00	4,839350E-16
50	4,882812E-04	0,000000E+00	6,280370E-16
70	4,882812E-04	0,000000E+00	8,158440E-16
100	4,882812E-04	0,000000E+00	1,053250E-15
200	6,904602E-04	0,000000E+00	1,447554E-15
300	6,904602E-04	0,000000E+00	1,687393E-15
500	6,904602E-04	0,000000E+00	2,280691E-15
700	6,904602E-04	0,000000E+00	2,742049E-15

Tabela 7. Obliczone błędy dla algorytmu Thomasa

n	float16	float32	float64
3	9,765625E-04	0,000000E+00	0,000000E+00
4	9,765625E-04	0,000000E+00	0,000000E+00
5	9,765625E-04	0,000000E+00	0,000000E+00
6	9,765625E-04	0,000000E+00	0,000000E+00
7	1,380920E-03	0,000000E+00	2,220446E-16
8	1,691818E-03	0,000000E+00	3,140185E-16
9	1,691818E-03	1,192093E-07	3,140185E-16
10	1,953125E-03	1,192093E-07	3,140185E-16
11	2,183914E-03	1,685874E-07	3,140185E-16
12	2,183914E-03	2,064765E-07	4,440892E-16
13	2,183914E-03	2,064765E-07	4,965068E-16
14	2,183914E-03	2,384186E-07	5,438960E-16
15	2,183914E-03	2,665601E-07	5,438960E-16
20	2,584457E-03	2,920019E-07	5,874748E-16
30	3,087997E-03	3,153981E-07	6,280370E-16
50	3,520966E-03	4,298152E-07	8,005932E-16
70	3,654480E-03	4,768372E-07	1,041482E-15
100	3,906250E-03	5,717077E-07	1,294731E-15
200	4,028320E-03	8,596304E-07	1,803899E-15
300	4,028320E-03	1,039243E-06	2,106500E-15
500	4,028320E-03	1,353957E-06	2,782211E-15
700	4,257202E-03	1,608221E-06	3,367473E-15

Tabela 8. Obliczone błędy dla algorytmu eliminacji Gaussa

W przypadku macierzy 3. Algorytm Thomasa okazał się być w zdecydowanej większości przypadków dokładniejszy od algorytmu eliminacji Gaussa. Eliminacja Gaussa zwracała dokładniejsze wyniki dla typu float64 do macierzy o maksymalnym wymiarze $n = 8$, a także dla typu float16 od $n=20$ (lecz tutaj już mocno widać wpływ niedokładności samego typu). Natomiast dla typu float32 wykorzystując

algorytm Thomasa udało się otrzymać wyniki błędu równe 0. Dla typu float64 otrzymane wartości nie przekraczały

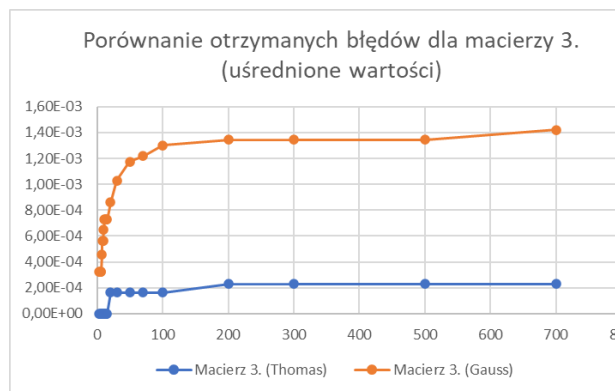
n	float16	float32	float64
3	4,560000E-05	3,840000E-05	3,060000E-05
4	3,940000E-05	3,900000E-05	3,730000E-05
5	4,630000E-05	4,580000E-05	4,320000E-05
6	5,310000E-05	5,320000E-05	5,100000E-05
7	6,120000E-05	6,120000E-05	5,810000E-05
8	6,740000E-05	6,740000E-05	6,430000E-05
9	7,540000E-05	7,480000E-05	7,960000E-05
10	8,250000E-05	8,120000E-05	7,850000E-05
11	9,020000E-05	8,910000E-05	8,490000E-05
12	1,166000E-04	9,620000E-05	9,140000E-05
13	1,044000E-04	1,032000E-04	9,800000E-05
14	1,107000E-04	1,092000E-04	1,049000E-04
15	1,181000E-04	1,182000E-04	1,135000E-04
20	1,538000E-04	1,537000E-04	1,467000E-04
30	2,294000E-04	2,246000E-04	2,158000E-04
50	3,704000E-04	3,857000E-04	3,543000E-04
70	5,100000E-04	5,273000E-04	4,936000E-04
100	7,443000E-04	7,441000E-04	7,179000E-04
200	1,427100E-03	1,447000E-03	1,406900E-03
300	2,194300E-03	2,176700E-03	2,047900E-03
500	3,672700E-03	3,637800E-03	3,476800E-03
700	5,097500E-03	5,115000E-03	4,887500E-03

Tabela 9. Czas algorytmu Thomasa w sekundach

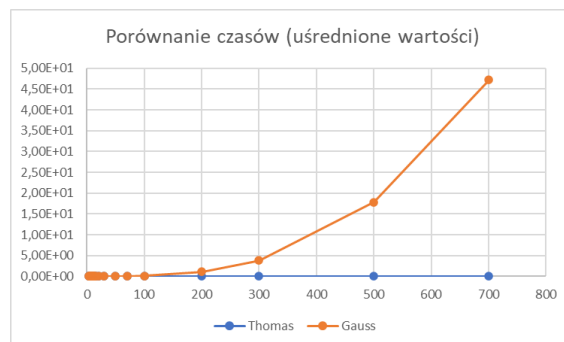
n	float16	float32	float64
3	1,492000E-04	1,035000E-04	9,470000E-05
4	1,258000E-04	1,348000E-04	1,242000E-04
5	1,640000E-04	1,647000E-04	1,549000E-04
6	2,061000E-04	2,169000E-04	1,955000E-04
7	2,566000E-04	2,594000E-04	2,459000E-04
8	3,219000E-04	3,180000E-04	3,024000E-04
9	3,997000E-04	3,908000E-04	3,807000E-04
10	4,787000E-04	4,743000E-04	5,362000E-04
11	5,756000E-04	5,640000E-04	5,365000E-04
12	6,823000E-04	6,825000E-04	6,452000E-04
13	7,931000E-04	7,989000E-04	7,568000E-04
14	9,252000E-04	9,278000E-04	8,801000E-04
15	1,081700E-03	1,074500E-03	1,055400E-03
20	2,048600E-03	2,047300E-03	1,964300E-03
30	5,537400E-03	5,568100E-03	5,164200E-03
50	2,077980E-02	2,090470E-02	2,040350E-02
70	5,456930E-02	5,492080E-02	5,360130E-02
100	1,476767E-01	1,459566E-01	1,468218E-01
200	1,112590E+00	1,080267E+00	1,135401E+00
300	3,853950E+00	3,790327E+00	3,909610E+00
500	1,812627E+01	1,736092E+01	1,803623E+01
700	4,765225E+01	4,872183E+01	4,509305E+01

Tabela 10. Czas algorytmu eliminacji Gaussa w sekundach

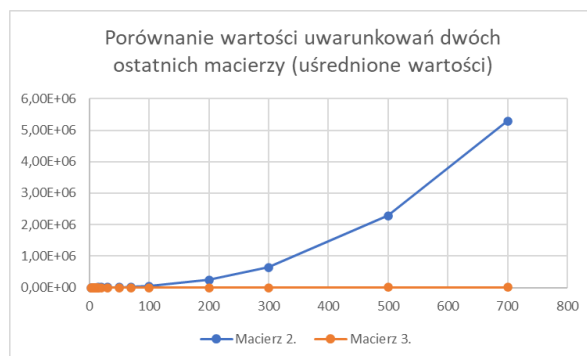
Porównując czasy wykonania obu algorytmów możemy dostrzec dużą przepaść, widoczną zwłaszcza w przypadku $n=700$, gdzie stosunek czasu wykonania algorytmu Thomasa, do czasu wykonania algorytmu eliminacji Gaussa wynosił aż 9525:1. Jest to ogromna różnica.



Wykres 3. Porównanie otrzymanych błędów dla macierzy 3. (uśrednione wartości)



Wykres 4. Porównanie czasów wykonania obu algorytmów dla macierzy 3. (uśrednione wyniki)



Wykres 5. Porównanie wartości uwarunkowań dwóch ostatnich

Wnioski

Uwarunkowanie macierzy ma znaczny wpływ na otrzymane wyniki. Możemy się o tym przekonać, porównując wyniki pierwszej macierzy z drugą. Błędy macierzy pierwszej były nawet 10^{14} krotnie większe niż błędy macierzy drugiej. Wynika to właśnie z uwarunkowania obu macierzy – stosunek uwarunkowania macierzy pierwszej do drugiej wynosił nawet 10^{16} : 1.

Algorytm eliminacji Gaussa można zastosować w przypadku wielu macierzy, lecz dla niektórych macierzy możemy skorzystać z precyzyjniejszych oraz bardziej dokładnych algorytmów. Badany w sprawozdaniu algorytm Thomasa dla macierzy trójdzielnych okazał się być o wiele szybszy, m.in. za sprawą swojej złożoności obliczeniowej ($O(n)$ kontra $O(n^3)$ algorytmu eliminacji Gaussa). Dodatkowo, algorytm ten dał nam o wiele lepsze rezultaty – obliczony błąd dla algorytmu Thomasa w zdecydowanej większości przypadków zwrócił nam błędy niemalże tożsame z zerem.

Bibliografia

- Metody obliczeniowe w nauce i technice – wykłady AGH 2022/23
- Tridiagonal Matrix Algorithm – [https://en.wikipedia.org/wiki/Tridiagonal_matrix_algorithm]
- Odwracanie macierzy – algorytm – [<https://www.quantstart.com/articles/matrix-inversion-linear-algebra-for-deep-learning-part-3/>]
- Metoda eliminacji Gaussa – [https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_eliminacji_Gaussa]
- Gauss elimination – [https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_elimination]