

# Examen I33: Mathématiques pour l'informatique

28 Juin 2022

9<sup>3</sup>

## Exercice 1.

Pour chacune des questions ci-dessous, vous prendrez soin de soigneusement justifier vos réponses.

1. Que vaut l'ordre de 7 dans  $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$  ?
2. Que vaut le symétrique de 97 dans  $(\mathbb{Z}/547\mathbb{Z})^*$  ?
3. Que vaut le cardinal de  $(\mathbb{Z}/102\mathbb{Z})^*$  ? *101*
4. Que vaut l'ordre de 7 dans  $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}, +)$  ? *4*
5. Donnez un générateur de  $(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}, +)$ . *29*
6. Combien y a-t-il de générateurs dans  $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$  ? *5*
7. Combien vaut  $\varphi(27)$  ?
8. Combien vaut  $7^{999998888777766666555544442} \bmod 22$  ?
9. Combien existent-ils de corps fini contenant au plus 27 éléments ?

*3 2 10*

*21  
-11  
10  
p(27) = 27*

## Exercice 2.

Soit  $F = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \det(A) = 1\}$ . Pour tout élément  $A \in F$ , on note  $A^t$  la transposée de  $A$ .

1. Montrez que si  $A \in F$  et  $B \in F$ , alors  $A \times B \in F$ .
2. Montrez que si  $A \in F$ , alors  $A^{-1} \in F$ .
3. Montrez que si  $A \in F$ , alors  $A^t \in F$ .
4. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  ( $\lambda \neq 0$ ), soit  $A \in F$ , exprimez  $\det(\lambda.A)$  en fonction de  $\lambda$  et  $n$ .
5.  $(F, +)$  est-il un sous-espace vectoriel de  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$  ? Justifiez votre réponse.

## Exercice 3.

Soit  $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } -x - y + z - t = 0\}$

1. Montrez que  $E = \text{Vect}((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1))$ .
2. Donnez une base de  $E$  et en déduire la dimension de  $E$ .
3. Soit  $F = \text{Vect}((2, 3, 0, -5), (0, 2, -3, -5))$ . Montrez que  $F \subset E$ .
4. Soit  $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } -x - y + z - t \neq 0\}$ .  $(G, +)$  est-il un sous-espace vectoriel de  $(\mathbb{R}^4, +)$  ? Justifiez votre réponse.