Defensa del plan de trabajo docente y de investigación

Xavier Rivas

Convocatoria 2024/D/LD/COPOEV/3

Concurso de profesor Lector DLRF7236

Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques
Universitat Rovira i Virgili

21 de junio de 2024

Outline

Presentación

Plan de trabajo docente

- Álgebra lineal y geometría
- Análisis complejo
- Métodos geométricos en física

Proyecto de investigación

- Geometría de contacto y sistemas dinámicos disipativos
- Teorías de campos de contacto
- Sistemas de Lie
- Colaboración con grupos en la URV

Outline

Formación

- Grado en Matemáticas (Universitat Politècnica de Catalunya)
  - Trabajo de fin de grado:
    Formulación geométrica de las teorias gauge y de Yang–Mills
    (dirigido por el profesor Narciso Román-Roy)
- Master in Advanced Mathematics and Mathematical Engineering (UPC)
  - Trabajo de fin de máster:
    Constraint algorithm for singular k-cosymplectic field theories
    (dirigido por los profesores Narciso Román-Roy y Xavier Gràcia Sabaté)
- Doctorado en Matemáticas (UPC)
  - Tesis doctoral:
    Geometrical aspects of contact mechanical systems and field theories
    (dirigida por los profesores Narciso Román-Roy y Xavier Gràcia Sabaté)

Docencia

- Docencia en secundaria y bachillerato en el Col·legi Llor (Sant Boi de Llobregat, Barcelona) y en la escuela Pare Manyanet (Les Corts, Barcelona).
- Profesor asociado a tiempo parcial en el Departamento de Ciencies de la Computación de la UPC.
- Profesor asociado a tiempo parcial en el Departamento de Matemáticas de la UPC.
- Profesor contratado doctor en la Universidad Internacional de La Rioja.

Investigación

Mi investigación se centra en la geometría diferencial y sus aplicaciones a la física y los sistemas dinámicos.

Colaboro con distintos grupos:

- Department of Mathematical Methods in Physics (Universidad de Varsovia)
- Red Temática de Geometría, Dinámica y Teoría de Campos
- ICMAT - CSIC
- Universitat Politècnica de Catalunya
- Universidad de Zaragoza
- Universidad de Santiago de Compostela
- Universidad de La Laguna
- Universidad de Burgos

Investigación

Durante los años 2022, 2023 y 2024 he realizado estancias de investigación en distintas instituciones:

- Universidad de Varsovia
- Centre de Recherches Mathématiques (Université de Montréal)
- ICMAT
- Universidad de Burgos
- Universidad de Zaragoza

financiadas por distintos proyectos de la Generalitat de Catalunya, del Gobierno de España y del Gobierno de Polonia.

Organización de reuniones científicas

He formado parte de la organización de varios congresos:

- *XVI International Young Researchers Workshop in Geometry, Dynamics and Field Theory*, celebrado en el Centre de Recerca Matemàtica de Barcelona en diciembre de 2021.
- *VI Congreso de Jóvenes Investigadores de la RSME*, celebrado en la Universidad de León en febrero de 2023.
- *XVIII International Young Researchers Workshop in Geometry, Dynamics and Field Theory*, celebrado en la Universidad de Varsovia en febrero de 2024.

Organizo un seminario online conjunto con el Departamento de Métodos Matemáticos en Física de la Universidad de Varsovia:

- Geometry and Applications: Modern Mathematical Approaches (GAMMA) `www.fuw.edu.pl/KMMF/gamma/`

Supervisión de TFG/TFM

A lo largo de mi carrera he supervisado trabajos de fin de grado y máster en la UPC, la UNIR i en la Universidad de Varsovia. Destacan:

- Trabajo de fin de grado en matemáticas (FME - UPC)
  Título: Sistemas dinámicos de contacto
  Estudiante: Daniel Muñoz Checa

- Trabajo de fin de grado en matemática computacional (UNIR)
  Título: Geometría de superficies y teorema de Gauss–Bonnet
  Estudiante: Eduardo Nieto Almeida

- Trabajo de fin de grado en matemáticas (FME - UPC)
  Título: Variational integrators for Lagrangian and Hamiltonian systems
  Estudiante: Ángel Martínez Muñoz
  (defensa en julio de 2024)

Supervisión de TFG/TFM

- Trabajo de fin de máster en matemática avanzada e ingeniería matemática (FME - UPC)
  Título: Conexiones en fibrados principales y teorema de Ambrose–Singer
  Estudiante: Annamaria Villanova
  (defensa en octubre de 2024)

- Trabajo de fin de máster en física teórica (Universidad de Varsovia)
  Título: k-Contact Lie systems: theory and applications
  Estudiante: Tomasz Sobczak
  (defensa en septiembre de 2024)

Supervisión de tesis doctorales

- Bartosz M. Zawora (Universidad de Varsovia)
  Tema: Reducciones de Marsden–Weinstein y métodos de energía-momento
  (codirigida con el dr. hab. Javier de Lucas)
  (defensa en diciembre de 2025)

- Daniel Torres Moral (UPC)
  Tema: Geometría de los sistemas dependientes del tiempo
  (codirigida con el prof. Xavier Gràcia Sabaté)
  (inicio en septiembre de 2024)

Outline

Introducción

Dada la variabilidad de asignaturas impartidas por el departamento receptor de este concurso se presenta, a modo ilustrativo, la planificación de:

- una asignatura de **álgebra lineal y geometría** de un primer curso de ingeniería.
- una asignatura de **análisis complejo** orientada a un grado de física o matemáticas, que también puede acortarse para formar parte de una asignatura del tipo *Métodos matemáticos* o *Matemática avanzada* de un segundo curso de ingeniería.
- una asignatura titulada **Métodos geométricos en física**. Este curso podría ser una asignatura optativa del *grado en ingeniería matemática y física* de la URV. Está pensada como una continuación natural de la asignatura *Geometria diferencial i aplicacions* y combina los conocimientos matemáticos y físicos adquiridos en el grado.

Introducción

Ideas para TFG/TFM:

- Integradores geométricos de contacto para sistemas de ecuaciones diferenciales (EDOs o EDPs).
- Álgebras de Lie de campos vectoriales.
- Dinámica en variedades de Kähler y de Sasaki.
- El problema inverso en la mecánica simpléctica.
- Geometría multisimpléctica.
- Dinámica compleja.
- Funciones holomorfas de varias variables.

Outline

Álgebra lineal y geometría — Objetivos y planificación

Objetivos:

El objetivo de esta asignatura es ofrecer al estudiante una base sólida en el ámbito del álgebra lineal. El álgebra lineal es, junto con el cálculo en una variable, la base sobre la que se construye toda la matemática que se usará a lo largo de un grado en ingeniería.

Planificación:

La dedicación total de los alumnos a esta asignatura (7.5 créditos ECTS) es de 65 horas presenciales, distribuidas en 5 horas semanales de clase a lo largo de 15 semanas efectivas de clase.

- *Sesiones teóricas/magistrales (35 horas)*
- *Sesiones de problemas (20 horas)*
- *Sesiones de laboratorio de problemas/prácticas con Matlab (10 horas)*

Álgebra lineal y geometría — Contenidos

Con el objetivo de adquirir las competencias y resultados de aprendizaje se propone el siguiente programa:

1. Espacios vectoriales
   - *Definiciones, propiedades y ejemplos*
   - *Bases y dimensión*
2. Matrices y aplicaciones lineales
   - *Matrices*
   - *Aplicaciones lineales*
3. Determinantes
   - *Definición y primeras propiedades*
   - *Determinantes y aplicaciones lineales*
4. Sistemas lineales
   - *Definición y propiedades*
   - *Métodos de resolución*
5. Diagonalización
   - *Valores y vectores propios propios*
   - *Diagonalización*
6. Geometría afín y euclídea
   - *Geometría afín*
   - *Geometría euclídea*

Álgebra lineal y geometría — Bibliografía y evaluación

Bibliografía básica:

- M. Castellet, I. Llerena. *Álgebra lineal y geometría*. Editorial Reverté, 2000.
- J. Rojo. *Ejercicios y problemas de álgebra lineal*. McGraw-Hill, 2005.
- F. Cedó, A. Reventós. *Geometria plana i àlgebra lineal*. Manuals UAB, 2004.

Bibliografía complementaria:

- J. Rojo. *Álgebra lineal*. McGraw-Hill, 2007.
- F. Neri. *Linear Algebra for Computational Sciences and Engineering*. Springer, 2016.

Evaluación

La evaluación consistirá en: un examen parcial (con un peso del 30% de la evaluación), actividades entregables y prácticas durante el curso (con un peso conjunto del 20%) y un examen final (con un peso del 50%).

Outline

Análisis complejo — Objetivos y planificación

Objetivos:

Esta asignatura está dedicada al estudio de las funciones holomorfas. La asignatura tiene dos grandes objetivos: en primer lugar, adquirir una base sólida de la teoría de funciones holomorfas y, en segundo lugar, relacionar el análisis complejo con otras áreas de las matemáticas.

Planificación:

La dedicación total de los alumnos a esta asignatura (6 créditos ECTS) es de 60 horas presenciales, distribuidas en 4 horas semanales de clase a lo largo de 15 semanas efectivas de clase.

- *Sesiones teóricas/magistrales (35 horas)*
- *Sesiones de problemas (20 horas)*
- *Sesiones de laboratorio de problemas/prácticas con Matlab (5 horas)*

Análisis complejo — Contenidos (1/2)

Análisis complejo — Contenidos (2/2)

5. Singularidades
   - *Series de Laurent*
   - *Singularidades*
6. Residuos
   - *Ceros y polos*
   - *El teorema de los residuos*
   - *Aplicaciones del teorema de los residuos*
7. Aplicaciones conformes y teorema de Riemann
   - *Sucesiones de funciones holomorfas*
   - *Aplicacions conformes*
   - *El teorema de Riemann*

Evaluación:

La evaluación de la asignatura consistirá en: un examen parcial (con un peso del 30% de la evaluación), actividades entregables y prácticas durante el curso (con un peso conjunto del 10%) y un examen final (con un peso del 60%).

Análisis complejo — Bibliografía

Bibliografía básica:

- J.E. Marsden, M.J. Hoffman. *Basic Complex Analysis*. W. H. Freeman New York (1999).
- J. Conway. *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag (1973).
- S.M. Sasane, A. Sasane. *A friendly approach to complex analysis*. World Scientific (2014).
- R.V. Churchill, J.W. Brown. *Variable compleja y aplicaciones*. McGraw-Hill (1992).
- S. Lang. *Complex analysis*. Springer-Verlag (2003).
- L.V. Ahlfors. *Complex analysis. An introduction to the theory of analytics functions of one complex variable*. McGraw-Hill (1979).

Bibliografía complementaria:

- R.A. Silverman. *Complex analysis with applications*. Dover (1974).
- T.W. Gamelin. *Complex analysis*. Springer-Verlag (2001).
- I. Stewart, D. Tall. *Complex Analysis*. 2a edició. Cambridge University Press (2018).
- H.K. Pathak. *Complex Analysis and Applications*. Springer (2019).

Outline

Métodos geométricos en física — Objetivos y planificación

Objetivos generales

- Ampliar los conocimientos de **geometría diferencial** adquiridos por el estudiante en la asignatura *Geometria diferencial i aplicacions*.
- Mostrar al alumno algunas de las muchas **aplicaciones de la geometría diferencial a la física** y, más concretamente, a la mecánica geométrica.

Planificación

La dedicación total de los alumnos a esta asignatura (6 créditos ECTS) es de 60 hores presenciales, distribuidas en 4 horas semanales de clase a lo largo de 15 semanas efectivas de clase.

- *Sesiones teóricas/magistrales (40 horas)*
- *Sesiones de problemas (20 horas)*

Métodos geométricos en física — Contenidos (1/3)

1. Grupos y álgebras de Lie
   - *Grupos de Lie*
   - *Acciones de grupos de Lie en variedades*
   - *Álgebras de Lie*
   - *Relación entre los grupos y las álgebras de Lie*
2. Fibrados vectoriales
   - *Fibraciones*
   - *Fibrados vectoriales*
   - *Operaciones con fibrados vectoriales*
   - *El fibrado tangente de una variedad*
   - *Vectores tangentes verticales*
3. Estructuras canónicas de los fibrados tangente y cotangente
   - *El endomorfismo vertical de* $\mathrm{T}(\mathrm{T}M)$
   - *La involución canónica de* $\mathrm{T}(\mathrm{T}M)$
   - *Levantamiento de campos vectoriales al fibrado tangente*
   - *Ecuaciones diferenciales de segundo orden*
   - *Las formas diferenciales canónicas del fibrado cotangente*
   - *Levantamiento de difeomorfismos y campos vectoriales al fibrado cotangente*

Métodos geométricos en física — Contenidos (2/3)

4. Geometría simpléctica
   - *Variedades simplécticas. Teorema de Darboux*
   - *Campos vectoriales hamiltonianos*
   - *Corchete de Poisson*
   - *Simplectomorfismos y transformaciones canónicas*
   - *Variedades de Poisson*
5. Cálculo variacional
   - *Funcionales y variaciones*
   - *Ecuación de Euler–Lagrange*
   - *Aplicación: geodésicas en variedades pseudoriemannianas*
   - *La segunda variación*
   - *Otros problemas variacionales*
6. Fundamentos de mecánica
   - *Principios básicos*
   - *El espaciotiempo galileano*
   - *El grupo de Galileo*
   - *Cinemática*
   - *Dinámica*
   - *Sistema de partículas en el espacio*
   - *El problema de los dos cuerpos*

Métodos geométricos en física — Contenidos (3/3)

7. Mecánica en variedades de Riemann
   - *La ecuación de Newton*
   - *Fuerzas conservativas*
   - *Fuerzas dependientes de la velocidad y del tiempo*
   - *Sistemas con ligaduras. Principio de d'Alembert*
   - *Ecuaciones de Lagrange*
8. Formalismo lagrangiano
   - *La ecuación de Euler–Lagrange*
   - *Formulación geométrica de la ecuación de Euler–Lagrange*
   - *Lagrangianas regulares*
   - *Simetrías y constantes del movimiento*
   - *Lagrangianas mecánicas*
   - *Generalizaciones de las lagrangianas mecánicas*
   - *Lagrangianas singulares*
9. Formalismo hamiltoniano
   - *Sistemas dinámicos hamiltonianos*
   - *Simetrías de los sistemas dinámicos hamiltonianos*
   - *Formulación hamiltoniana de la mecánica*
   - *Sistemas completamente integrables*

Métodos geométricos en física — Bibliografía (1/2)

Bibliografía básica:

- John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Springer (2012)
- John M. Lee. *Riemannian manifolds. An introduction to curvature*. Springer (1997)
- Joan Girbau. *Geometria diferencial i relativitat*. (1993)
- Ivan Kolár, Peter W. Michor, Jan Slovák. *Natural operations in differential geometry*. (1993)
- Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden, Tudor S. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*. (1983)
- Manuel de León, Paulo R. Rodrigues. *Methods of differential geometry in analytical mechanics*. (1989)
- Paulette Libermann, Charles-Michel Marle. *Symplectic geometry and analytical mechanics*. (1987)
- Anna Cannas de Silva. *Lectures on symplectic geometry*. (2001)
- Hossein Abbaspour, Martin Moskowitz. *Basic Lie theory*. World Scientific (2007)

Métodos geométricos en física — Bibliografía (2/2)

Bibliografía complementaria:

- Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden. *Foundations of mechanics*. (1978)
- Jerrold E. Marsden. *Lectures on mechanics*. (1992/2009)
- Jerrold E. Marsden, Tudor S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry*. (1994/2003)
- Vladimir I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. (1974/1989)
- Jorge V. José, Eugene J. Saletan. *Classical dynamics. A contemporary approach*. (1998)
- Veeravalli S. Varadarajan. *Lie groups, Lie algebras, and their representations*. Springer (1974/1984)
- Peter J. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations*. 2nd ed. Springer (1993)

Métodos geométricos en física — Evaluación

La evaluación de la asignatura consistirá en: un examen parcial (con un peso del 25% de la evaluación), un examen final (con un peso del 50%) y un trabajo sobre uno de los temas propuestos o elegido por el alumno, previa autorización del profesor, (con un peso del 25%). Una posible lista de temas es la siguiente:

- Variedades de contacto
- Lagrangianas singulares
- Variedades k-simplécticas
- Variedades multisimplécticas
- Fibrados principales
- Clasificación de álgebras de Lie en dimensiones 1, 2 y 3
- Clases características
- Integración en variedades y el teorema de De Rham
- Métodos numéricos geométricos
- Relatividad general

Outline

Introducción

Mi área de investigación es la **geometría diferencial y sus aplicaciones**, en particular a la **mecánica geométrica** y a la **física matemática**.

Durante mi tesis doctoral introdujimos unos nuevos objetos geométricos, denominados **variedades de k-contacto**, para formalizar geométricamente ciertas **teorías de campos no conservativas**. Las estructuras de k-contacto son una extensión tanto de las variedades de contacto como de las variedades k-simplécticas.

Además de los **6 artículos que constituyen el contenido de la tesis doctoral**, he publicado **9 artículos más directamente vinculados a las líneas de trabajo de la tesis**. Adicionalmente, he publicado **3 artículos y tengo 3 preprints en revisión** sobre otros temas de investigación vinculados a la mecánica geométrica y a la física matemática.

En total, en este momento, he publicado un total 18 artículos en revistas científicas y tengo 300 citas en Google Scholar, tal y como se puede ver en mi CV y en mis perfiles académicos online.

Introducción

En los próximos años quiero seguir trabajando en las **estructuras de contacto** y sus múltiples extensiones, así como en sus aplicaciones al estudio de los **sistemas dinámicos** y las **teorías de campos**. Más concretamente, las líneas de investigación que seguiré son las siguientes:

- Geometría de contacto y sistemas dinámicos disipativos
- Teorías de campos de contacto
- Sistemas de Lie

A continuación detallaré cuáles son mis objetivos en cada una de las tres líneas. Durante el turno de intervenciones podremos profundizar en cualquiera de estas líneas, aclarando conceptos, avanzando resultados preliminares y ofreciendo más ejemplos y aplicaciones.

Outline

Geometría de contacto

Una *variedad de contacto* es un par (M, ξ) tal que M es una variedad de dimensión impar $2n+1$ y ξ es una distribución maximalmente no integrable de corango 1 en M.

Localmente, $\xi|_U$ es el núcleo de una 1-forma η en $U \subset M$ tal que $\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^n$ es una forma de volumen en U. Una *variedad de contacto co-orientable* es un par (M, η), donde η es una 1-forma en M tal que $(M, \ker \eta)$ es una variedad de contacto. Decimos que η es una *forma de contacto*. Si η es una forma de contacto en M, entonces $f\eta$ es también una forma de contacto para toda función f que no se anule en ningún punto.

Toda forma de contacto induce una descomposición $\mathrm{T}M = \ker \eta \oplus \ker \mathrm{d}\eta$.

Existe un único campo vectorial $R \in \mathfrak{X}(M)$, llamado *campo vectorial de Reeb*, tal que $\iota_R \mathrm{d}\eta = 0$ y $\iota_R \eta = 1$.

Existe un isomorfismo de fibrados vectoriales $\flat : \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^*M$ dado por

$$\flat(v) = \iota_v(\mathrm{d}\eta)_x + (\iota_v \eta_x)\eta_x\,, \qquad \forall v \in \mathrm{T}_x M, \quad \forall x \in M\,.$$

Coordenadas de Darboux

Theorem (Teorema de Darboux)

Dada una variedad de contacto (M, η) *tal que* $\dim M = 2n + 1$*, alrededor de todo punto* $x \in M$ *existen coordenadas* $\{q^i, p_i, s\}$*, con* $i = 1, \ldots, n$*, conocidas como coordenadas de Darboux, de forma que*

$$\eta = \mathrm{d}s - p_i \mathrm{d}q^i \, .$$

En estas coordenadas, $R = \partial/\partial s$*.*

Example (Variedad de contacto canónica)

Consideremos la variedad $M = \mathrm{T}^*Q \times \mathbb{R}$. Entonces $\eta = \mathrm{d}s - \theta$, donde θ es el pull-back de la 1-forma de Liouville $\theta_\circ \in \Omega^1(\mathrm{T}^*Q)$ respecto de la proyección canónica $\mathrm{T}^*Q \times \mathbb{R} \to \mathrm{T}^*Q$, es una forma de contacto en M. En estas coordenadas,

$$\eta = \mathrm{d}s - p_i \mathrm{d}q^i \, , \qquad R = \frac{\partial}{\partial s} \, .$$

Las coordenadas $\{q^i, p_i, s\}$ son coordenadas de Darboux en M.

Sistemas Hamiltonianos de contacto

Un *sistema hamiltoniano de contacto* es una terna (M, η, H), donde (M, η) es una variedad de contacto y $H \in \mathscr{C}^\infty(M)$.

Dado un sistema hamiltoniano de contacto (M, η, H), existe un único campo vectorial $X_H \in \mathfrak{X}(M)$, llamado *campo vectorial hamiltoniano de contacto* asociado a la función hamiltoniana h, que cumple las condiciones equivalentes siguientes:

(1) $\iota_{X_H} \mathrm{d}\eta = \mathrm{d}H - (\mathscr{L}_R H)\eta$ y $\iota_{X_H}\eta = -H$,

(2) $\mathscr{L}_{X_H}\eta = -(\mathscr{L}_R H)\eta$ y $\iota_{X_H}\eta = -H$,

(3) $\flat(X_H) = \mathrm{d}H - (\mathscr{L}_R H + H)\eta$.

La función hamiltoniana no suele preservarse a lo largo de las curvas integrales del campo hamiltoniano X_H:

$$\mathscr{L}_{X_H} H = -(\mathscr{L}_R H)H \,.$$

Expresiones locales

En coordenadas de Darboux, la expresión local del campo vectorial hamiltoniano X_H es

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + p_i\frac{\partial H}{\partial s}\right)\frac{\partial}{\partial p_i} + \left(p_i\frac{\partial H}{\partial p_i} - H\right)\frac{\partial}{\partial s}\,.$$

Sus curvas integrales, pongamos $\gamma(t) = (q^i(t), p_i(t), s(t))$, satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + p_i\frac{\partial H}{\partial s}\right)\,, \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = p_j\frac{\partial H}{\partial p_j} - H\,, \qquad i = 1,\dots,n\,.$$

Esta formulación posee una contraparte lagrangiana, de modo que obtenemos las ecuaciones de Herglotz–Euler–Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial v^i}\frac{\partial L}{\partial s}\,, \qquad \dot{s} = L\,.$$

Geometría de cocontacto

En colaboración con el prof. Manuel de León, hemos introducido recientemente las estructuras de cocontacto para geometrizar los sistemas disipativos dependientes del tiempo:

Una **variedad de cocontacto** es una terna (M, τ, η) donde M es una variedad diferenciable de dimensión $2n+2$, y τ y η son dos 1-formas diferenciales en M tales que

$$\mathrm{d}\tau = 0\,, \qquad \tau \wedge \eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^{\wedge n} \neq 0\,.$$

Algunos ejemplos de sistemas de cocontaco son:

- La **ecuación de Duffing**, $\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos \omega t$, proviene de la lagrangiana

$$L(t, x, v, s) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\alpha x^2 - \frac{1}{4}\beta x^4 - \delta s + \gamma x \cos \omega t\,.$$

Ejemplos

- Consideremos el **problema de Kepler con rozamiento** en el cas que la masa de la partícula sea una función del tiempo $m(t)$ no nula.

$$H(t, r, \varphi, p_r, p_\varphi, s) = \frac{p_r^2}{2m(t)} + \frac{p_\varphi^2}{2m(t)r^2} + \frac{k}{r} + \gamma s\,.$$

Sus ecuaciones de Hamilton (de cocontacto) son

$$\begin{cases} \dot{t} = 1\,, \quad m(t)\dot{r} = p_r\,, \quad m(t)r^2\dot{\varphi} = p_\varphi\,, \quad \dot{p}_r = \dfrac{p_\varphi^2}{m(t)r^3} + \dfrac{k}{r^2} - \gamma p_r\,, \\ \dot{p}_\varphi = -\gamma p_\varphi\,, \quad \dot{s} = \dfrac{p_r^2}{2m(t)} + \dfrac{p_\varphi^2}{2m(t)r^2} - \dfrac{k}{r} - \gamma s\,. \end{cases}$$

Combinándolas, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(t)\dot{r}\right) = m(t)r\dot{\varphi}^2 + \dfrac{k}{r^2} - \gamma m(t)\dot{r}\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(t)r^2\dot{\varphi}\right) = -\gamma m(t)r^2\dot{\varphi}\,, \end{cases}$$

que corresponden al problema de Kepler con rozamiento y masa no constante. Notemos que en el caso que no haya fricción ($\gamma = 0$) recuperamos la ley de conservación del momento angular habitual.

Ejemplos

- **Cohete con rozamiento cuadrático.** Consideremos una partícula con masa dependiente del tiempo $m(t)$ sobre el eje vertical sometida a la acción de la gravedad, a una fuerza vertical constante F que lo impulsa hacia arriba y a un rozamiento con el aire proporcional al cuadrado de la velocidad.
  En este caso el espacio de configuraciones es el eje de ordenadas $Q = \mathbb{R}$ con coordenada (y). Consideremos la función lagrangiana dada por

$$L(t, y, \dot{y}, s) = \frac{1}{2} m(t)\dot{y}^2 + \frac{m(t)g}{2\gamma}\left(e^{-2\gamma y} - 1\right) - 2\gamma \dot{y} s + \frac{1}{2\gamma} F\,,$$

  donde γ es el coeficiente de rozamiento y la masa viene dada por una función monótona decreciente $m(t) > 0$. Las ecuaciones de Herglotz–Euler–Lagrange para esta función lagrangiana son

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(t)\dot{y}\right) = F - m(t)g - \gamma m(t)\dot{y}^2\,, \qquad \dot{s} = L\,.$$

Objetivos

- **MC-1:** Lograr avances en el problema inverso de la mecánica de contacto, tanto en el caso de sistemas en dimensión impar, como sistemas en dimensión par que admitan una dimensión adicional que los convierta en sistemas de contacto.
- **MC-2:** Estudiar los sistemas reversibles de contacto. En particular, intentar caracterizarlos en dimensión 3 y hallar nuevos ejemplos.
- **MC-3:** Definir la noción de variedad de cocontacto no co-orientable. Proseguir el estudio de los sistemas disipativos con dependencia temporal usando técnicas de geometría de cocontacto: reducción de Marsden–Weinstein, método de energía-momento, teoría de Hamilton–Jacobi, etc.

Resultados preliminares

Theorem

Sea (M, τ, η) una variedad de cocontacto co-orientable y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial en M. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes

(i) *X es hamiltoniano con función hamiltoniana $h \in \mathscr{C}^\infty(M)$, es decir,*

$$\iota_X \mathrm{d}\eta = \mathrm{d}h - R_z(h)\eta - R_t(h)\tau\,, \qquad \iota_X\eta = -h\,, \qquad \iota_X\tau = 1\,.$$

(ii) $\flat(X) = \mathrm{d}h - (R_s(h) + h)\,\eta + (1 - R_t(h))\,\tau$.

(iii) *El campo vectorial X satisface las condiciones*

$$\mathscr{L}_X\eta = f\eta + g\tau\,, \qquad \iota_X\tau = 1\,,$$

para ciertas funciones $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$.

(iv) *El campo vectorial X satisface las condiciones*

$$[X, \ker\tau \cap \ker\eta] \subset \ker\tau \cap \ker\eta\,, \qquad \iota_X\tau = 1\,.$$

Resultados preliminares

Este resultado motiva la siguiente definición:

Definition

Una *estructura de cocontacto* es una variedad M es un par de distribuciones tangentes $(\mathcal{V}, \mathcal{D})$ tales que

(i) $\mathcal{V}$ es integrable de corango 1,

(ii) $\mathcal{D}$ es maximalmente no integrable de corango 1,

(iii) $\operatorname{corank} \mathcal{V} \cap \mathcal{D} = 2$.

Bajo estas hipótesis, $(M, \mathcal{V}, \mathcal{D})$ es una variedad de cocontacto.

Sin embargo, esta definición es provisional ya que presenta algunos problemas que deben ser resueltos.

Outline

k-campos vectoriales y secciones integrales

Sea M una variedad diferenciable n-dimensional y consideremos la suma de Whitney

$$\bigoplus^{k} \mathrm{T}M := \mathrm{T}M \oplus_M \overset{(k)}{\cdots} \oplus_M \mathrm{T}M$$

con las proyecciones naturales

$$\mathrm{pr}^{\alpha} \colon \oplus^{k} \mathrm{T}M \to \mathrm{T}M\,, \qquad \mathrm{pr}_M \colon \oplus^{k} \mathrm{T}M \to M\,, \quad \alpha = 1, \ldots, k,$$

donde pr^{α} denota la proyección en la componente α-ésima de la suma de Whitney.

Definition

Un *k-campo vectorial* en una variedad M es una sección $\mathbf{X} \colon M \to \oplus^k \mathrm{T}M$ de la proyección pr_M. El espacio de k-campos vectoriales en M se denota $\mathfrak{X}^k(M)$.

$$\begin{tikzcd}
 & \oplus^k \mathrm{T}M \arrow[d, "\mathrm{pr}^{\alpha}"] \\
M \arrow[ur, "\mathbf{X}"] \arrow[r, "X_{\alpha}"] & \mathrm{T}M
\end{tikzcd}$$

k-campos vectoriales y secciones integrales

En vista del diagrama anterior, un k-campo vectorial $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^k(M)$ es una familia de campos vectoriales $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ dados por $X_\alpha = \mathrm{pr}^\alpha \circ \mathbf{X}$ con $\alpha = 1, \dots, k$. Podemos denotar $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$. También induce una distribución $D^{\mathbf{X}}$ en M generada por $X_1, \dots, X_k$.

Definition

Dada una aplicación $\phi\colon U \subset \mathbb{R}^k \to M$, definimos su *primera prolongación* a $\oplus^k \mathrm{T}M$ como la aplicación $\phi'\colon U \subset \mathbb{R}^k \to \oplus^k \mathrm{T}M$ dada por

$$\phi'(t) = \left(\phi(t); \mathrm{T}_t\phi\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^1}\right|_t\right), \dots, \mathrm{T}_t\phi\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^k}\right|_t\right)\right) \equiv (\phi(t); \phi'_\alpha(t)), \quad t \in \mathbb{R}^k,$$

donde $t = (t^1, \dots, t^k)$ son las coordenadas canónicas en $\mathbb{R}^k$.

Definition

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}^k(M)$ un k-campo vectorial. Una *sección integral* de $\mathbf{X}$ es una aplicación $\phi\colon U \subset \mathbb{R}^k \to M$ tal que $\phi' = \mathbf{X} \circ \phi$, es decir $\mathrm{T}\phi\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right) = X_\alpha \circ \phi$ for $\alpha = 1, \dots, k$. Un k-campo vectorial $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^k(M)$ es *integrable* si todo punto de M está en la imagen de una sección integral de $\mathbf{X}$.

k-campos vectoriales y secciones integrales

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ un k-campo vectorial con expresión local $X_\alpha = X^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}$, con $\alpha = 1, \ldots, k$ y $i = 1, \ldots, n$. Entonces, $\phi\colon U \subset \mathbb{R}^k \to M$ es una sección integrla de $\mathbf{X}$ si y solo si satisface el sistema de EDPs

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial t^\alpha} = X^i_\alpha \circ \phi\,, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \alpha = 1, \ldots, k\,.$$

Entonces, $\mathbf{X}$ es integrable si y solo si $[X_\alpha, X_\beta] = 0$ for $\alpha, \beta = 1, \ldots, k$. Estas son las condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad del sistema de EDPs.

Todo k-campo vectorial $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ en una variedad M define una distribución $D^{\mathbf{X}} \subset \mathrm{T}M$ dada por $D^{\mathbf{X}}_x = D^{\mathbf{X}} \cap \mathrm{T}_x M = \langle X_1(x), \ldots, X_k(x) \rangle$.

La noción de integrabilidad de un k-campo vectorial es más fuerte que la noción de integrabilidad de la distribución $D^{\mathbf{X}}$. La distribución $D^{\mathbf{X}}$ es integrable si y solo si $[X_\alpha, X_\beta] = f^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma$ para ciertas funciones $f^\gamma_{\alpha\beta}$. Por otro lado, un k-campo vectorial es integrable si sus componentes $X_1, \ldots, X_k$ conmutan.

Estructuras k-simplécticas

Definition

Una *forma k-simpléctica* en una variedad diferenciable M es una 2-forma diferencial a valores vectoriales $\boldsymbol{\omega} = \omega^\alpha \otimes e_\alpha \in \Omega^2(M)$ cerrada tal que

$$\ker \boldsymbol{\omega} = \cap_{\alpha=1}^{k} \ker \omega^\alpha = \{0\} \,.$$

Decimos que el par $(M, \boldsymbol{\omega})$ es una *variedad k-simpléctica*.

Example (Modelo canónico de variedad k-simpléctica)

El modelo canónico de variedad k-simpléctica es la suma fibrada

$$\bigoplus^{k} \mathrm{T}^* Q = \mathrm{T}^* Q \oplus_Q \stackrel{(k)}{\cdots} \oplus_Q \mathrm{T}^* Q \,.$$

En coordenadas naturales $\{q^i, p_i^\alpha\}$ en $\bigoplus^k \mathrm{T}^* Q$, tenemos

$$\boldsymbol{\theta} = p_i^\alpha \mathrm{d} q^i \otimes e_\alpha \;, \quad \boldsymbol{\omega} = -\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = \mathrm{d} q^i \wedge \mathrm{d} p_i^\alpha \otimes e_\alpha \,.$$

Sistemas k-simplécticos

Definition

Sea $(M, \boldsymbol{\omega})$ una variedad k-simpléctica y sea $H \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Entonces, $(M, \boldsymbol{\omega}, h)$ es un *sistema hamiltoniano k-simpléctico*. Un k-campo vectorial en M, pongamos $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k) \in \mathfrak{X}^k(M)$, es un *$k$-campo vectorial k-simpléctico* si es solución de la ecuación

$$\iota_{X_\alpha}\omega^\alpha = \mathrm{d}H\,. \tag{1}$$

La función h recibe el nombre de *función hamiltoniana* de $\mathbf{X}$.

Consideremos un k-campo vectorial $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k) \in \mathfrak{X}^k(M)$ con expresión local

$$X_\alpha = (X_\alpha)^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (X_\alpha)_i^\beta \frac{\partial}{\partial p_i^\beta}\,.$$

Si $\mathbf{X}$ is hamiltoniano, la ecuación (1) nos da las condiciones

$$\frac{\partial H}{\partial p_i^\beta} = (X_\beta)^i\,, \qquad \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\sum_{\alpha=1}^k (X_\alpha)_i^\alpha\,.$$

Sistemas k-simplécticos

Esto muestra que toda función $H \in \mathscr{C}^\infty(M)$ puede tener distintos k-campos hamiltonianos.

Sea $\psi : \mathbb{R}^k \to M$ una sección integral con expresión local

$$\psi(t) = (q^i(t), p_i^\alpha(t)) \,, \quad t \in \mathbb{R}^k \,,$$

de un k-campo hamiltoniano $\mathbf{X}$. En este caso, ψ satisface el sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\frac{\partial q^i}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha} \,, \qquad \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial p_i^\alpha}{\partial t^\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \,.$$

Esta formulación hamiltoniana admite una contraparte lagrangiana, en la que dada una función lagrangiana $L\colon \bigoplus^k \mathrm{T}Q \to \mathbb{R}$ dada por $L(q^i, v_\alpha^i)$, obtenemos las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^\alpha} \frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \,.$$

Ejemplo

Example (Ecuación de las superficies mínimas)

Consideremos $Q = \mathbb{R}$ y la Lagrangiana $L\colon \mathrm{T}\mathbb{R} \oplus \mathrm{T}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$L(q, v_1, v_2) = \sqrt{1 + v_1^2 + v_2^2}\,.$$

En este caso,

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial v_1} = \frac{v_1}{\sqrt{1 + v_1^2 + v_2^2}}\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial v_2} = \frac{v_2}{\sqrt{1 + v_1^2 + v_2^2}}\,.$$

Entonces, una sección integral ϕ de un 2-campo vectorial $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ solución de la ecuación $\iota_{X_1}\omega^1 + \iota_{X_2}\omega^2 = \mathrm{d}E_L$ satisface la ecuación diferencial

$$0 = (1 + (\partial_2\phi)^2)\partial_{11}\phi - 2\partial_1\phi\partial_2\phi\partial_{12}\phi + (1 + (\partial_1\phi)^2)\partial_{22}\phi\,,$$

que corresponde a la ecuación de superficies mínimas.

Estructuras de k-contacto

La principal contribución de mi tesis doctoral fue la introducción de un nuevo tipo de estructuras que permitan geometrizar ciertas teorías de campos no conservativas:

Definition

Una *forma de k-contacto* en M es una 1-forma diferencial en M con valores en $\mathbb{R}^k$, pongamos $\boldsymbol{\eta} = \sum_\alpha \eta^\alpha \otimes e_\alpha \in \Omega^1(M, \mathbb{R}^k)$, tal que

(1) $\ker \boldsymbol{\eta} \subset \mathrm{T}M$ es una distribución regular de corango k,

(2) $\ker \mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \subset \mathrm{T}M$ es una distribución regular de rango k,

(3) $\ker \boldsymbol{\eta} \cap \ker \mathrm{d}\boldsymbol{\eta} = 0$.

Diremos que $(M, \boldsymbol{\eta})$ es una *variedad de k-contacto co-orientada*.

Durante mi tesis doctoral desarrollamos formalismos hamiltoniano, lagrangiano y de Skinner–Rusk para sistemas de k-contacto, y lo aplicamos a sistemas físicos como la ecuación de Burgers, cuerdas y membranas vibrantes con disipación, la ecuación del telegrafista (la cual es una contactificación de la ecuación de Klein–Gordon), etc.

Objetivos

- **TC-1:** Estudiar las variedades de k-contacto. Concretamente, definir una generalización de éstas usando distribuciones que permita verlas como variedades k-simplécticas homogéneas. Desarrollar un procedimiento de reducción de tipo Marsden–Weinstein para teorías de campos con disipación usando geometría de k-contacto.
- **TC-2:** Estudiar la geometría de las variedades de multicontacto: procedimientos de reducción, existencia de brackets con buenas propiedades, estudio de las subvariedades legendrianas, teoría de Hamilton–Jacobi, extensiones para lagrangianas de orden superior, etc.
- **TC-3:** Buscar nuevas aplicaciones de estas estructuras para estudiar distintos modelos de la física teórica como ciertas teorías de cuerdas, gravitación, electromagnetismo y teorías de campo escalar (Klein–Gordon).

Resultados preliminares

Definition

Una *distribución de k-contacto* $D \subset \mathrm{T}M$ es una distribución tal que, para todo punto $x \in M$, existe un entorno $U \ni x$ y una forma de k-contacto $\boldsymbol{\eta}$ en U tal que $D|_U = \ker \boldsymbol{\eta}$. Decimos que (M, D) es una *variedad de k-contact*.

Es importante resaltar que ser maximalmente no integrable no es suficiente para ser una distribución de k-contacto. Por ejemplo, la distribución de $\mathbb{R}^4$ con coordenadas $\{x, y, z, t\}$ dada por $D = \langle \partial_x, \partial_y + (x^3/3 + z^2 x + t^2)\partial_z + x\partial_t \rangle$ es una distribución de k-contacto.

Theorem

Una distribución D en M es una distribución de k-contacto si y solo si es maximalmente no integrable y, alrededor de todo punto $x \in M$, admite un k-campo vectorial $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_k)$ integrable tal que

$$\langle S_1, \dots, S_k \rangle \oplus D = \mathrm{T}M\,.$$

Outline

Campos vectoriales dependientes del tiempo

Todo campo vectorial dependiente del tiempo X en M da lugar al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t,x)\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \forall x \in M\,. \tag{2}$$

Esto permite asociar un campo vectorial dependiente del tiempo X a su sistema de ecuaciones diferenciales asociado (2), y usar la misma notación X para referirnos a ambos.

El *álgebra de Lie minimal* de un campo vectorial dependiente del tiempo X es el álgebra de Lie $V^X = \mathrm{Lie}(\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}})$.

Toda álgebra de Lie de campos vectoriales V en M da lugar a una distribución asociada en M de la forma

$$\mathcal{D}_x^V = \{X_x : X \in V\}\,, \qquad \forall x \in M\,.$$

Sistemas de Lie

Un *sistema de Lie* es un campo vectorial dependiente del tiempo X en M tal que su álgebra de Lie asociada V^X tiene dimensión finita.

Si X toma valores en un álgebra de Lie finito-dimensional de campos vectoriales V, i.e. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subset V$, decimos que V es un *álgebra de Lie de Vessiot–Guldberg (VG)* de X y que X admite un álgebra de Vessiot–Guldberg.

Un *sistema de Lie automórfico* es un sistema de Lie X^G en un grupo de Lie G que admite un álgebra de Lie de VG dada por el espacio de campos vectoriales invariantes por la derecha en G, $\mathfrak{X}_R(G)$.

Un *sistema de Lie localmente automórfico* es una terna (M, X, V) tal que V es un álgebra de Lie de VG de X cuya distribución asociada, $\mathcal{D}^V$, coincide con $\mathrm{T}M$ y $\dim V = \dim M$.

Example (Ecuaciones de Riccati)

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_1(t) + a_2(t)x + a_3(t)x^2\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

donde $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ son funciones arbitrarias. El sistema (3) es el sistema asociado al campo vectorial dependiente del tiempo en $\mathbb{R}$ dado por

$$X(t,x) = \sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha(t) X_\alpha(x)\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

donde

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}\,, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}\,, \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x}$$

son campos vectoriales en $\mathbb{R}$. Puesto que

$$[X_1, X_2] = X_1\,, \quad [X_1, X_3] = 2X_2\,, \quad [X_2, X_3] = X_3\,,$$

vemos que X_1, X_2, X_3 generan un álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{sl}_2$. Así, X define un sistema de Lie $\mathbb{R}$ con álgebra de Lie de VG $\langle X_1, X_2, X_3\rangle \simeq \mathfrak{sl}_2$.

Teorema de Lie–Scheffers

La propiedad más importante de los sistemas de Lie está relacionada con la existencia de principios de superposición.

Un *principio de superposición* para un sistema X en M es una aplicación $\Phi : M^k \times M \to M$ tal que la solución general $x(t)$ de X puede escribirse como

$$x(t) = \Phi\left(x_{(1)}(t), \ldots, x_{(k)}(t); \rho\right) \ ,$$

donde $x_{(1)}(t), \ldots, x_{(k)}(t)$ es una familia genérica de soluciones particulares de X y ρ es un punto cualquiera de M relacionado con las condiciones iniciales de X.

El Teorema de Lie–Scheffers establece que un sistema X admite un principio de superposición si y solo si es un sistema de Lie.

Sistemas de Lie compatibles con estructuras geométricas

Un *sistema de Lie–Hamilton* es una terna (M, Λ, X), donde X es un sistema de Lie en M que admite un álgebra de Lie de VG de campos vectoriales hamiltonianos respecto al bivector de Poisson Λ en M (recordamos que un bivector de Poisson es un tensor $\Lambda \in \Gamma(\wedge^2 \mathrm{T}M)$ tal que $[\Lambda, \Lambda] = 0$).

Si $\Lambda^\sharp \colon \mathrm{T}^*M \to \mathrm{T}M$ es invertible, da lugar a una forma simpléctica $\omega \in \Omega^2(M)$ tal que $\omega(v, \cdot) = (\Lambda^\sharp)^{-1}(v)$ para todo $v \in \mathrm{T}M$. En este caso, es habitual denotar (M, Λ, X) por (M, ω, X).

Los sistema de Lie–Hamilton son relevantes ya que permiten usar técnicas de geometría simpléctica y de Poisson a la búsqueda de principios de superposición, simetrías de Lie y constantes del movimiento, entre otras ventajas.

Esta compatibilidad entre el concepto de sistema de Lie y ciertas estructuras geométricas ha llevado al estudio de los sistemas de Lie k-simplécticos, multisimplécticos, de Jacobi, pseudoriemannianos (álgebra de VG de campos de Killing), etc.

Objetivos

- **SL-1:** Definir y estudiar los sistemas de Lie de k-contacto combinando las ideas de los sistemas de Lie k-simplécticos y de los sistemas de Lie de contacto. Aplicar los resultados obtenidos a ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales tales como la ecuación de Schwarz compleja y ciertos sistemas de control.

- **SL-2:** Definir y estudiar los sistemas de Lie de multicontacto combinando las ideas de los sistemas de Lie de contacto y de los sistemas de Lie multisimplécticos.

- **SL-3:** Estudiar los sistemas de Lie para ecuaciones en derivadas parciales. Esto permitirá estudiar ciertos sistemas de ecuaciones en derivadas parciales y hallar principios de superposición para dichos sistemas.

Resultados preliminares

Durante estos años de colaboración con el grupo del prof. de Lucas, hemos estudiado los sistemas de Lie multisimplécticos, los sistemas de Lie de contacto (incluyendo una clasificación en el caso tridimensional con álgebra de Lie no abeliana) y los sistemas de Lie k-simplécticos.

Los resultados obtenidos se han aplicado a sistemas tan variados como el sistema de Darboux–Brioschi–Halphen, la derivada de Schwarz real y compleja, ciertos sistemas de control, osciladores armónicos cuánticos, sistemas afines, etc.

Actualmente estamos trabajando en los sistemas de Lie de k-contacto (con el estudiante de máster Tomasz Sobczak) y de multicontacto.

Outline

Colaboración con grupos en la URV

Dada la naturaleza de mi investigación en las aplicaciones de la geometría diferencial a la física, espero incorporarme al grupo de **Geometría Aplicada** liderado por el prof. Blas Herrera.

Sin embargo, también es posible que aparezcan colaboraciones con el grupo **Sistemes Dinàmics Discrets i Continus (SISDINDC)** liderado por la prof. Carme Olivé, ya que es posible aplicar técnicas de geometría diferencial al estudio de los sistemas dinámicos dados por EDOs y al estudio de sistemas de EDPs con una estructura geométrica subyacente.

Debido a que muchos modelos biológicos, epidemiológicos o poblacionales poseen una estructura (pre)simpléctica, de Poisson o de contacto subyacente, también sería posible establecer algún tipo de colaboración con el grupo **Algorithms Embedded in Physical Systems (ALEPHSYS)** liderado por el prof. Àlex Arenas.

Muchas gracias por vuestra atención