PROBLEMES CÀLCUL 1

Tema 1. FUNCIONS ELEMENTALS:

(1) Trobeu el domini de la funció:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$$

- $\frac{1}{x}$ falla quan $\boxed{x=0}$.
- $1 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$.
- $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = -1 \Leftrightarrow 1 = -1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-1}{2}}$.

Pertant, $\boxed{\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -1/2\}}$

(2) Resoleu les equacions següents:

(a) $2x + \sqrt{x} = 1.$

$\sqrt{x} = 1 - 2x$

$x = (1-2x)^2$

$x = 1 - 4x + 4x^2$

$4x^2 - 5x + 1 = 0$

$(x-1)(4x-1) = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \longrightarrow \text{No funciona} \\ x = \frac{1}{4} \longrightarrow \text{Si funciona} \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{\text{Solució: } x = \frac{1}{4}}$

(b) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{6x-11}$

$(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2})^2 = 6x - 11$

$x + 3 + 2\sqrt{(x+3)(x-2)} + x - 2 = 6x - 11$

$2\sqrt{(x+3)(x-2)} = 4x - 12$

$\sqrt{x^2+x-6} = 2x - 6$

$x^2 + x - 6 = (2x-6)^2$

$x^2 + x - 6 = 4x^2 - 24x + 36$

$3x^2 - 25x + 42 = 0$

$(x-6)(3x-7) = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 6 \longrightarrow \text{funciona} \\ x = \frac{7}{3} \longrightarrow \text{No funciona} \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{\text{Solució: } x = 6}$

(c) $\sqrt{\frac{x}{2}+4} = \sqrt[3]{2x+8}$

$$\left(\frac{x}{2}+4\right)^3 = (2x+8)^2 \Rightarrow \frac{x^3}{8} + 3\frac{x^2}{4}\cdot 4 + 3\frac{x}{2}\cdot 4^2 + 4^3 = 4x^2+32x+64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{8} + 3x^2 + 24x = 4x^2 + 32x \rightarrow x = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 8x - 64 = 0 \Rightarrow x = 4 \pm 4\sqrt{5}.$$

Comprovem les solucions:

- $\boxed{x=0}$ ✓
- $\boxed{x=4+4\sqrt{5}}$: $\sqrt{2+2\sqrt{5}+4} \overset{?}{=} \sqrt[3]{8+8\sqrt{5}+8} \Rightarrow \sqrt{6+2\sqrt{5}} \overset{?}{=} \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \sqrt{6+2\sqrt{5}} \overset{?}{=} 2\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \cdots =$ ✓
- $x = 4-4\sqrt{5}$: NO

(d) $e^{2x} - 2e^x = 15$

Introduïm el canvi $y = e^x$. Aleshores, $y^2 - 2y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = 5$ o $y = -3$.

Desfem el canvi: $e^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = \ln 5}$.

$e^x = -3$: No té solució real

(e) $(\ln x)^2 = \ln(x^4)$

$(\ln x)^2 = 4\ln x$. Introduïm el canvi $y = \ln x$. Aleshores, $y^2 = 4y \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 4 \end{cases}$

Desfem el canvi: $\ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$\ln x = 4 \Rightarrow \boxed{x = e^4}$

(f) $\cos(2x) = \sin x \quad x \in [-5,5]$.

$\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Ara, prenent arccos a les dues bandes,

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{6},\ n\in\mathbb{Z}} \\ \text{ó} \\ 2x = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{x = 2\pi k - \frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

③ Resoleu les desigualtats següents:

(a) $\dfrac{2x-3}{x+2} < \dfrac{1}{3}$ $\Big\downarrow$ multipliquem per $(x+2)^2 > 0$

$$(2x-3)(x+2) < \frac{1}{3}(x+2)^2 \Rightarrow 2x^2+4x-3x-6 < \frac{1}{3}(x+2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x^2+3x-18 < x^2+4x+4 \Rightarrow 5x^2-x-22<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(x+2)\left(x-\frac{11}{5}\right)<0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{x>-2 \quad x<\frac{11}{5}} \\ x<-2 \quad x>\frac{11}{5} \text{ No té sentit.}\end{cases}$$

Aleshores, $x \in \left(-2, \frac{11}{5}\right)$

(b) $x^2-5x+9 > x$

$$x^2-6x+9>0 \Longleftrightarrow (x-3)^2>0 \Longleftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}.$$

(c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}>0$

$$\frac{1-x}{x(1-x)}+\frac{x}{x(1-x)}>0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x(1-x)}>0 \Longleftrightarrow x(1-x)>0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x>0\ ,x<1 \\ x>1\ ,x<0 \text{ No té sentit.}\end{cases}$$

Aleshores, $x\in(0,1)$.

(d) $x^2-(a+b)x+ab<0$

$$(x-a)(x-b)<0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x\in(a,b) \text{ si } a<b \\ x\in(b,a) \text{ si } b<a \\ \text{No té solució per } a=b.\end{cases}$$

(e) $|x-5|<|x+1|$

$$\Updownarrow$$

$$|x-5|^2<|x+1|^2 \Longleftrightarrow x^2-10x+25<x^2+2x+1 \Longleftrightarrow 24<12x \Longleftrightarrow x>2.$$

(f) $|x^2-x|>1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-x>1 \Rightarrow x^2-x-1>0 \\ x^2-x<-1 \Rightarrow x^2-x+1<0\end{cases}$

- $x^2-x-1>0$:

$$x^2-x-1=0 \Longleftrightarrow \left(x-\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)\right)=0.$$

Aleshores, o bé $x>\frac{1+\sqrt5}{2}$ i $x>\frac{1-\sqrt5}{2}$ o bé $x<\frac{1+\sqrt5}{2}$ i $x<\frac{1-\sqrt5}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt5}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt5}{2},+\infty\right).$$

- $x^2-x+1<0$:

Però $x^2-x+1\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ Per continuïtat, $x^2-x+1>0$ o $x^2-x+1<0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Com $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x+1)=+\infty \Rightarrow x^2-x+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(g) $|x-1|+|x+1|<1$

$$|x-1|+|x+1| = |1-x|+|x+1| \geq |1-x+x+1| = |2| = 2.$$

Pertant $\nexists x\in\mathbb{R}$ tal que $|x-1|+|x+1|<1$.

(4) Trobeu l'interval més gran en el qual la funció $f(x)=\sqrt{1-|x|+|x-1|}$ té inversa. Calculeu la inversa en aquest cas.

Observem que si $x>1$, $f(x)=0\ \forall x>1$

Per altra banda, si $x<0$, $f(x)=2$.

En $[0,1]$, $f(x)=\sqrt{1-x+(1-x)}=\sqrt{2-2x}$ i aleshores, $f^{-1}(x)=1-\frac{x^2}{2}$ definida a $[0,\sqrt{2}]$.

(5) Trobeu la funció inversa de $f(x)=x^2-x+1$ quan es restringeix a $x\geq\frac{1}{2}$. Quin és el domini de la funció inversa?

f té el mínim en $x=\frac{1}{2}$. Ara és fàcil completar quadrats: $f(x)=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$.

Per $x\geq\frac{1}{2}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{1+\sqrt{4x-3}}{2}$. Notem que prenem l'arrel positiva ja que $x\geq\frac{1}{2}$. Si volem la inversa quan $x\leq\frac{1}{2}$, prendrem l'arrel negativa.

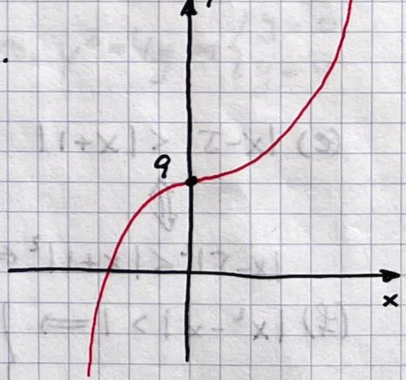
$\mathrm{Dom}\, f^{-1}=[3/4,+\infty)$.

(6) Proveu que la funció $f(x)=5x^3+9$ té inversa a tot $\mathbb{R}$ i doneu-ne l'expressió explícita.

Notem que f és estrictament creixent $\Rightarrow$ f és injectiva.

A més, f és també exhaustiva.

Aleshores, $\exists f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-9}{5}}$



(7) Una funció f satisfà

$$f(2x+3)=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Quant val $f(t)$ per $t\in\mathbb{R}$? Quant val $f(f(2))$?

$f(t)=x^2$ on $t=2x+3 \Rightarrow f(t)=\left(\frac{t-3}{2}\right)^2$

$f(f(2))=f(\frac{1}{4})=\left(\frac{11}{8}\right)^2$

(8) Proveu que si m és un nombre natural que no és quadrat de cap nombre natural, és a dir $m \neq n^2$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, llavors $\sqrt{m}$ és un nombre real no racional.

Indicació: Useu la descomposició de m en factors primers.

Pel Teorema Fonamental de l'Aritmètica, podem escriure

$$m = r_1^{s_1} \cdot r_2^{s_2} \cdots r_k^{s_k} \quad \text{on } r_1, \dots, r_k \text{ són nombres primers.}$$

A més, com m no és quadrat de cap natural, almenys un dels s_i és senar. Suposem s_i senar.

Suposem ara que $\sqrt{m}$ és racional; procedim per reducció a l'absurd.

$$\sqrt{m} = \frac{p}{q} \text{ irreductible} \longrightarrow m = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = m q^2.$$

Observem que com m és divisible per r_i, la banda dreta de l'equació ho és. Per tant la banda esquerra és divisible per $r_i \Rightarrow p$ és divisible per $r_i \Rightarrow$ $\Rightarrow p^2$ és divisible per r_i^2. Com s_i és senar, cal que q també sigui divisible per r_i. Això contradiu que la fracció $\frac{p}{q}$ fos irreductible. Aleshores, $\sqrt{m}$ és irracional.

(9) Justifiqueu les afirmacions següents:

(a) La suma d'un nombre racional i un nombre irracional és un nombre irracional.

Cert. Suposem que fos racional: aleshores, $\frac{p}{q} + x = \frac{r}{s} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{qr - ps}{sq}$$ que, un cop eliminats els factors comuns, ens donaria un racional. Contradicció. Per tant, és irracional.

(b) El producte d'un racional no nul per un irracional és un nombre irracional.

Cert. Suposem que $\frac{p}{q} \cdot x = \frac{r}{s} \Rightarrow x = \frac{rq}{ps}$ i, eliminant els factors comuns obtenim que x és racional. Contradicció. Per tant és irracional.

(c) La suma i el producte de dos irracionals pot ser racional o irracional.

Cert. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ és racional

$\sqrt{2} + \pi$ és irracional.

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ és racional.

$\pi \cdot \sqrt{2}$ és irracional.

(d) Els nombres $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ i $\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}+4}$ són irracionals.

Suposem que $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \alpha$ és racional. Aleshores $\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ també $\Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha^2 - 5 = 2\sqrt{6}$ és racional $\Rightarrow \frac{\alpha^2 - 5}{2} = \sqrt{6}$ també és racional. Contradicció amb l'apartat (a).

Anàlogament els altres apartats.

(10) Proveu les desigualtats següents i justifiqueu quan són igualtats:

(a) $a + \frac{1}{a} \geq 2$, on $a > 0$.

$$\frac{a^2+1}{a} \geq 2 \underset{\substack{\uparrow \\ a>0}}{\Longleftrightarrow} a^2+1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2-2a+1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0 \checkmark$$

La igualtat es dóna si $a=1$.

(b) $2xy \leq x^2+y^2 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \checkmark$

La igualtat es dóna si $x=y$.

(c) $4xy \leq (x+y)^2 \Leftrightarrow 4xy \leq x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow 2xy \leq x^2+y^2$ ✓ per l'apartat anterior.

La igualtat es dóna si $x=y$

(d) $x^2+xy+y^2 \geq 0$

De forma anàloga a (b), es pot veure que $2xy \geq -(x^2+y^2) \Rightarrow x^2+xy+y^2 \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq 0$.

La igualtat es dóna quan $x=y=0$.

(e) $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geq 27abc$, on $a,b,c > 0$.

Per simetria, només cal veure que $x^2+x+1 \geq 3x \Leftrightarrow x^2-2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ que és cert.

La igualtat es dóna quan $a=b=c=1$. El fet de demanar que $a,b,c>0$ s'usa al multiplicar les tres desigualtats.

(11) Proveu les desigualtats següents:

(a) $0 < x+y-xy < 1$, sempre que $0<x<1$, $0<y<1$.

Per una banda, notem que $x+y-xy = x(1-y)+y > 0$ ja que $x>0, (1-y)>0, y>0$.

Cal provar la segona desigualtat:

$$x(1-y) < 1\cdot(1-y) \quad \text{ja que } x<1$$
$$\Downarrow$$
$$x-xy < 1-y$$
$$\Downarrow$$
$$x-xy+y<1,$$ com volíem veure.

(b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{a+b-x} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, sempre que $0<a<x<b$.

Escribim la desigualtat com $\frac{a+b}{x(a+b-x)} < \frac{a+b}{ab}$. Com els denominadors són positius,

$$ab < x(a+b-x), \text{ és a dir } 0 < ax+bx-x^2-ab = (x-a)(b-x).$$

Com $x-a>0$ i $b-x>0$, tenim el que volem.

(12) Proveu que $|x|+|y|+|z| \leq |x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|$.
Indicació: utilitzeu la desigualtat triangular per a nombres reals $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Per simetria de les variables, podem distingir els casos següents:

- $x,y,z \geq 0$
- $x,y \geq 0,\ z \leq 0$
- $x \geq 0,\ y,z \leq 0$
- $x,y,z \leq 0$

Estudiem els casos per separat:

- $x,y,z \geq 0$: $x+y+z = |x+y-z+x-y+z-x+y+z| \leq$
$\leq |x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|$
- $x,y \geq 0,\ z \leq 0$: $|x|+|y|+|z| = x+y-z = |x+y-z| \leq$
$\leq |x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|$
- $x \geq 0,\ y,z \leq 0$: $|x|+|y|+|z| = x-y-z = |x-y-z| = |-x+y+z| \leq$
$\leq |x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|$
- $x,y,z \leq 0$: $|x|+|y|+|z| = -x-y-z = |-x-y-z| =$
$= |-x+x-x-y+y-y-z+z-z| =$
$= |x-x+x+y-y+y+z-z+z| \leq$
$\leq |x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|$.

(13) Estudieu quines de les següents igualtats són certes i, quan no ho siguin, doneu un contraexemple. Se suposa que f, g, h són funcions definides a $\mathbb{R}$.

(a) $f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h$

És fals. Exemple: $f(x)=x^2$, $g(x)=x$, $h(x)=1$.

$f\circ(g+h)(x) = (x+1)^2$

$(f\circ g + f\circ h)(x) = (f\circ g)(x) + (f\circ h)(x) = x^2+1$

(b) $(g+h)\circ f = g\circ f + h\circ f$

És cert. Vegem-ho: $((g+h)\circ f)(x) = (g+h)(f(x)) = g(f(x)) + h(f(x)) =$
$= (g\circ f)(x) + (h\circ f)(x)$.

(c) $\dfrac{1}{f\circ g} = \dfrac{1}{f}\circ g$

És cert. Vegem-ho: $\left(\dfrac{1}{f\circ g}\right)(x) = \dfrac{1}{(f\circ g)(x)} = \dfrac{1}{f(g(x))} = \left(\dfrac{1}{f}\right)(g(x)) = \left(\dfrac{1}{f}\circ g\right)(x)$

(d) $\dfrac{1}{f\circ g} = f\circ \dfrac{1}{g}$

És fals. Exemple: $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{1}{f\circ g}\right)(x) = \dfrac{1}{f(g(x))} = \dfrac{1}{x^2+1} \\[2ex] \left(f\circ \dfrac{1}{g}\right)(x) = f\left(\dfrac{1}{g(x)}\right) = \dfrac{1}{x^2}+1 \end{array}\right\} \text{són diferents, p.e. en } x=1.$$

(14) Siguin $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Indiqueu el domini natural de definició de la funció h donada per la regla que a cada cas s'indica.

(a) $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad$ $\mathrm{Dom}\, h = \{x\in \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g,\ g(x)\neq 0\}$.

(b) $h(x)=\arcsin(f(x))$ $\quad$ $\mathrm{Dom}\, h = \{x\in \mathrm{Dom}\, f,\ |f(x)|\leq 1\}$

(c) $h(x)=\ln(f(x))$ $\quad$ $\mathrm{Dom}\, h = \{x\in \mathrm{Dom}\, f,\ f(x)>0\}$

(d) $h(x)=\sqrt{f(x)}$ $\quad$ $\mathrm{Dom}\, h = \{x\in \mathrm{Dom}\, f,\ f(x)\geq 0\}$.

(e) $h(x)=\arccos(f(x))$ $\quad$ $\mathrm{Dom}\, h = \{x\in \mathrm{Dom}\, f,\ |f(x)|\leq 1\}$

(f) $h(x)=\arctan(f(x))$ $\quad$ $\mathrm{Dom}\, h = \{x\in \mathrm{Dom}\, f\} = \mathrm{Dom}\, f$

(g) $h(x)=g(x)^{f(x)}$ $\quad$ $\mathrm{Dom}\, h = \{x\in \mathrm{Dom}\, f\cap \mathrm{Dom}\, g,\ g(x)>0 \text{ o } (g(x)=0;\ f(x)\neq 0)\}$

(15) Una funció f és parella si $f(x)=f(-x)$ i senar si $f(x)=-f(-x)$

(a) Estudieu si la suma, el producte i la composició de funcions parelles o senars és una funció parella o senar. Estudieu tots els casos possibles.

Siguin f,g dues funcions parelles. Siguin h,i dues funcions senars.

- $p+p$: $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = f(-x)+g(-x) = (f+g)(-x) \Rightarrow f+g$ és parella.
- $s+s$: $(h+i)(x) = h(x)+i(x) = -h(-x)-i(-x) = -(h+i)(-x) \Rightarrow h+i$ és senar.
- $p+s$: $(f+h)(x) = f(x)+h(x) = f(-x)-h(-x) = (f-h)(-x)$ $\quad$ res.
- $s+p$: idem
- $p\cdot p$: $(f\cdot g)(x) = f(x)g(x) = f(-x)g(-x) = (fg)(-x) \Rightarrow fg$ és parella.
- $s\cdot s$: $(hi)(x) = h(x)\cdot i(x) = -h(-x)\cdot(-i(-x)) = h(-x)i(-x) = (hi)(-x) \Rightarrow hi$ és parella.
- $p\cdot s$: $(f\cdot h)(x) = f(x)\cdot h(x) = f(-x)\cdot(-h(-x)) = -(fh)(-x) \Rightarrow fh$ és senar.
- $s\cdot p$: idem
- $p\circ p$: $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(-x)) = (f\circ g)(-x) \Rightarrow f\circ g$ és parella.
- $s\circ s$: $(h\circ i)(x) = h(i(x)) = h(-i(-x)) = -h(i(-x)) = -(h\circ i)(-x) \rightarrow h\circ i$ és senar.
- $p\circ s$: $(f\circ h)(x) = f(h(x)) = f(-h(-x)) = f(h(-x)) = (f\circ h)(-x) \Rightarrow f\circ h$ és parella
- $s\circ p$: $(h\circ f)(x) = h(f(x)) = h(f(-x)) = (h\circ f)(-x) \Rightarrow h\circ f$ és parella.

En resum:

+	p	s
p	p	
s		s

·	p	s
p	p	s
s	s	p

∘	p	s
p	p	p
s	p	s

(b) Proveu que tota funció pot escriure's de forma única com suma d'una funció parella més una senar.

Sigui f una funció real.

Considerem les funcions $p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $s(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

Notem que p és parella i s és senar. A més, $f(x) = p(x)+s(x)$.

Suposem que $f(x) = p(x)+s(x) = \bar{p}(x)+\bar{s}(x)$ són dues descomposicions de f com a suma d'una funció parella i una senar.

Ara, $p+s = \bar{p}+\bar{s} \Rightarrow s-\bar{s} = \bar{p}-p$.

$\bar{p}-p$ és parella i, per tant, $s-\bar{s}$ també ho és. Però $s-\bar{s}$ és senar. Així doncs $s-\bar{s}$ és parella i senar i per tant, $s-\bar{s}=0$.

En conclusió $s=\bar{s}$ i $p=\bar{p}$ com volíem veure.

Obs: Si f és parella, $-f$ també. Si f és senar, $-f$ també.

(16) Proveu que la funció donada per $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, és estrictament decreixent en $\mathbb{R}^+$. Deduïu que

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Vegem que f és decreixent en $[0,+\infty)$. Siguin $0 \leq x < y$. Volem veure que $f(x) > f(y)$

$$y > x \Rightarrow 1+y > 1+x \Rightarrow \frac{1}{1+x} > \frac{1}{1+y} \Rightarrow f(x) > f(y) \quad \text{com volíem veure.}$$

Observem que podem escriure la desigualtat com

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \Longleftrightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{|x+y|}} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{|x|}} + \frac{1}{1+\frac{1}{|y|}}$$

$|x|, |y|, |x+y| \neq 0.$

Tractarem els casos $|x|=0$, $|y|=0$, $|x+y|=0$ per separat.

- $|x|=0$: En aquest cas la desigualtat és una igualtat.
- $|y|=0$: Idem
- $|x+y|=0$: Idem

Considerem el cas $|x|, |y|, |x+y| \neq 0$.

Cal veure doncs, que $f\left(\frac{1}{|x+y|}\right) \leq f\left(\frac{1}{|x|}\right) + f\left(\frac{1}{|y|}\right)$

La desigualtat triangular $|x+y| \leq |x|+|y|$ és equivalent a $\frac{1}{|x|+|y|} \leq \frac{1}{|x+y|}$

Com que f és decreixent $f\left(\frac{1}{|x+y|}\right) \leq f\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right) =$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{|x|+|y|}} = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq$$

$$\leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} = f\left(\frac{1}{|x|}\right) + f\left(\frac{1}{|y|}\right)$$ com voliem veure.

(17) (a) Compareu $a^{\ln b}$ i $b^{\ln a}$.

$\ln(a^{\ln b}) = \ln b \cdot \ln a$

$\ln(b^{\ln a}) = \ln a \cdot \ln b$ " Aleshores, com $\ln$ és injectiva, $a^{\ln b} = b^{\ln a}$.

(b) • $a^{\ln(\ln a)/\ln a}$

Prenem logaritme: $\ln\left(a^{\ln(\ln a)/\ln a}\right) = \frac{\ln(\ln a)}{\ln a} \cdot \ln a = \ln(\ln a)$

Per la injectivitat del logaritme, $a^{\ln(\ln a)/\ln a} = \ln a$.

• $\log_a(\log_a(a^{a^x})) = \log_a(a^x \log_a(a)) = \log_a(a^x) = x \log_a a = x$

(18) Proveu que $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2}-x) = 0$

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2}-x) = \ln\left((\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)\right) =$$

$$= \ln(1+x^2-x^2) = \ln(1) = 0.$$

(19) Sigui $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció que verifica les propietats:

(a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}$,

(b) $f(xy) = f(x) f(y)$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}$.

Proveu que o bé f és $f(x) = 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, o bé és $f(x) = x$ per tot $x \in \mathbb{R}$.

Indicació: Suposeu que f no és idènticament nul·la, proveu primer que f és estrictament creixent i que $f(r) = r$ per a tot $r \in \mathbb{Q}$. Suposeu també que hi ha algun nombre real a tal que $f(a) \neq a$ i deduïu una contradicció (utilitzeu que entre dos nombres reals qualssevol sempre hi ha un nombre racional).

És evident que $f \equiv 0$ satisfà les dues condicions de l'enunciat. Busquem ara quines altres funcions satisfan les condicions.

Suposem que f s'anul·la en un punt $a \neq 0$. Aleshores,

$$f(x) = f\left(a \frac{x}{a}\right) = \underbrace{f(a)}_{=0} \cdot f\left(\underset{a\neq 0}{\frac{x}{a}}\right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

i f seria idènticament nul·la.

Aleshores, tenim que $f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$.

Observem que $f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) \underset{f(1)\neq 0}{\Longrightarrow} f(1) = 1$.

Sigui ara $x > 0$.

$$f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = f(\sqrt{x}) \cdot f(\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})^2 > 0$$

$\sqrt{x} > 0 \Rightarrow f(\sqrt{x}) \neq 0$.

Siguin $x, y \in \mathbb{R}$ tals que $x < y$. Aleshores,

$$f(y) = f(x + (y-x)) = f(x) + f(y-x) > f(x)$$

$f(y-x) > 0$ ja que $y > x$

Aleshores f és creixent. Provem ara que $f(r) = r \quad \forall r \in \mathbb{Q}$.

Siguin $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ i $x \in \mathbb{R}$

$$n f\left(\frac{m}{n} x\right) \underset{(a)}{=} f\left(n \frac{m}{n} x\right) = f(mx) \underset{(a)}{=} m f(x) \Longrightarrow f\left(\frac{m}{n} x\right) = \frac{m}{n} f(x).$$

Hem vist que $f(rx) = r f(x) \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. En particular, per $x = 1$,

$f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r$ com volíem veure.

Suposem ara que $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x < f(x)$. Aleshores, prenent un racional r tal que $x < r < f(x)$, tenim $f(x) < f(r) = r$ ja que f és creixent. Això contradiu $r < f(x)$.
Anàlogament, si $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x > f(x)$, $\exists r \in \mathbb{Q}$ tal que $x > r > f(x)$.
Com f és creixent, $f(x) > f(r) = r$. Contradicció amb $r > f(x)$.
Aleshores $f(x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$, com volíem veure.

(20) Sigui $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció que verifica les propietats:
(a) $f(xy) = f(x) + f(y)$,
(b) $f(x) > 0$ per a tot $x > 1$,
(c) $f(e) = 1$.
Proveu que $f(x) = \ln x$ per a tot $x \in \mathbb{R}^+$.
Indicació: Proveu que f és creixent i que $f(e^r) = r$ per a tot $r \in \mathbb{Q}$.
Sigui $\varphi(x) = f(e^x)$. Justifiqueu que φ és estrictament creixent.
Suposeu que hi ha algun nombre a tal que $\varphi(a) \neq a$ i deduïu una contradicció (utilitzeu que entre dos nombres reals qualssevol sempre hi ha un nombre racional).

Comencem veient que f és creixent. Siguin $x < y$ dos reals positius.

$$f(y) = f\left(x \frac{y}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{y}{x}\right) > f(x)$$

$f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$ ja que $y > x$

Aleshores f és creixent.
Provem ara que $f(e^r) = r$ $\forall r \in \mathbb{Q}$. Donats $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, tenim

$$n f\left(e^{\frac{m}{n}}\right) = f\left(e^{\frac{m}{n}}\right) + \overset{(n)}{\cdots} + f\left(e^{\frac{m}{n}}\right) = f\left(e^{\frac{m}{n}} \overset{(n)}{\cdots} e^{\frac{m}{n}}\right) = f\left(e^{\frac{m \cdot n}{n}}\right) =$$

$$= f(e^m) = f(e \overset{(m)}{\cdots} e) = f(e) + \overset{(m)}{\cdots} + f(e) = m f(e) = m$$

Aleshores $f\left(e^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}$ com volíem veure.
Considerem ara $\varphi(x) = f(e^x)$. Observem que φ és estrictament creixent:

$$x < y \underset{e^x \text{ creixent}}{\Rightarrow} e^x < e^y \underset{f \text{ creixent}}{\Rightarrow} f(e^x) < f(e^y) \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y).$$

És evident que $\varphi(r) = r$ $\forall r \in \mathbb{Q}$. Vegem ara que això també és cert per als reals:
Suposem que $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(a) > a \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\varphi(a) > r > a \underset{\varphi \text{ creixent}}{\Rightarrow} \varphi(r) = r > \varphi(a) \quad \text{Contradicció!}$$

Anàlogament, si $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(a) < a$, $\exists r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\varphi(a) < r < a \underset{\varphi \text{ creixent}}{\Longrightarrow} \varphi(r) = r < \varphi(a) \quad \text{Contradicció.}$$

Hem vist que $\varphi(x) = f(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Aleshores, $f(x) = \ln x$ com volíem veure.

(21) Proveu les igualtats següents:

(a) $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

A partir del Teorema de Pitàgores $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, tenim que

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

Introduint $y = \tan x$, tenim que

$$\cos(\arctan y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$ com volíem veure.

(b) $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

A partir del Teorema de Pitàgores $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, tenim que

$$1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \Longrightarrow \sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

Introduint $y = \tan x$, tenim

$$\sin(\arctan y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

(c) $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

A partir del teorema de Pitàgores $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, tenim que

$$\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

Introduint $y = \sin x$, tenim

$$\tan(\arcsin y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

(d) $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

Podem escriure $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$

Notem que $\frac{\pi}{2} - \arccos x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ quan $x \in (-1,1)$.
Com la funció sinus és injectiva en $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, podem escriure la igualtat anterior com

$$x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \underbrace{\cos(\arccos x)}_{=x} - \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \sin(\arccos x)$$

i per tant, la igualtat és certa.

(22) Les funcions hiperbòliques elementals són el sinus, cosinus i tangent hiperbòlics, definits respectivament, com:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \; ; \; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \; ; \; \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

(a) Proveu les igualtats següents:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} =$$

$$= \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1 \quad \text{Com volíem veure.}$$

$$\tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x} \iff \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x} \iff$$

$$\iff \frac{\sinh^2 x + 1}{\cosh^2 x} = 1 \underset{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}{\iff} \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 \iff 1 = 1 \quad \text{com volíem veure.}$$

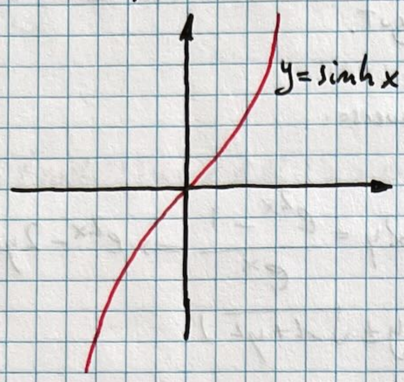
(b) Trobeu el domini i recorregut d'aquestes funcions hiperbòliques i doneu les seves gràfiques.

- <u>sinh</u>: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ Dom(sinh) = $\mathbb{R}$.

Observem que $\lim_{x \to +\infty} \sinh(x) = +\infty$ i $\lim_{x \to -\infty} \sinh(x) = -\infty$

Aleshores, per continuïtat, $Im(\sinh) = \mathbb{R}$.

Notem que la funció és senar: $\sinh(-x) = -\sinh(x)$. La seva gràfica és

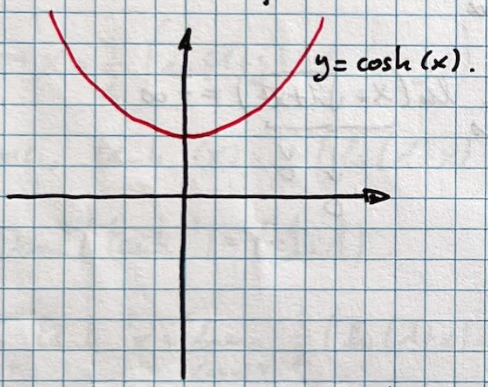


- <u>cosh</u>: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad$ $Dom(\cosh) = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} \cosh(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \cosh(x) = +\infty.$$

El cosinus hiperbòlic té simetria parella: $\cosh(x) = \cosh(-x)$

Observem que té un mínim en $x = 0$.



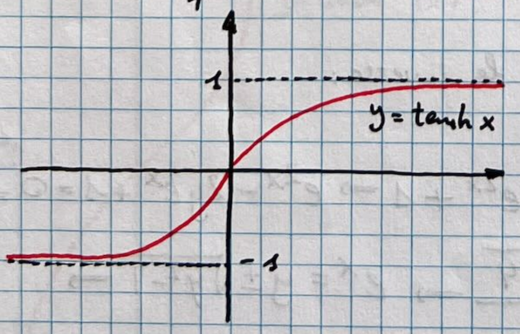
Així doncs, $Im(\cosh) = [1, +\infty)$

- <u>tanh</u>: $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\quad$ $Dom(\tanh) = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1$$

Per continuïtat, $Im(\tanh) = (-1, 1)$

Notem que tanh és senar: $\tanh(-x) = -\tanh(x)$



(23) Doneu l'expressió explícita de les funcions inverses de les funcions hiperbòliques elementals anomenades argsinh, argcosh i argtanh i doneu les seves gràfiques, domini i recorregut.

- $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Busquem la inversa:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow 2y = e^x - e^{-x} \Rightarrow 2y = \frac{e^{2x}-1}{e^x} \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^x = y \pm \sqrt{1+y^2} \Rightarrow x = \ln\left(y \pm \sqrt{1+y^2}\right)$$

Prenem $x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$ ja que $y - \sqrt{1+y^2} < 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$.

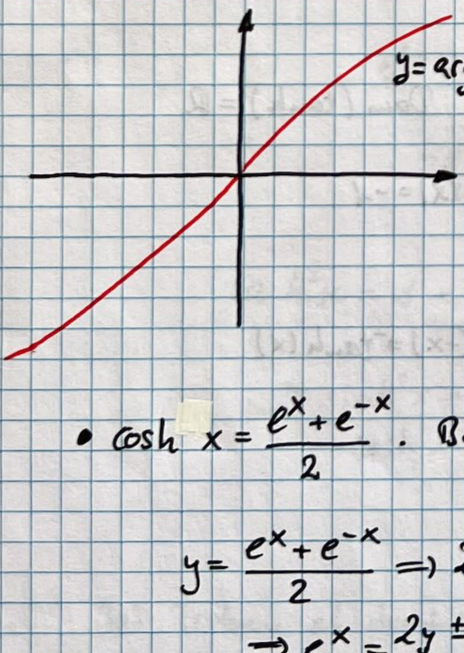
Aleshores, $\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

$\mathrm{Dom}(\sinh^{-1}) = \mathbb{R}$.

Per altra banda,
$$\lim_{x\to+\infty} \sinh^{-1} x = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh^{-1} x = \lim_{x\to-\infty} \ln\Big(\underbrace{x+\sqrt{1+x^2}}_{\downarrow\, 0,\ >0}\Big) = -\infty$$

Per continuïtat, $\mathrm{Im}(\sinh^{-1}) = \mathbb{R}$



- $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Busquem la inversa:

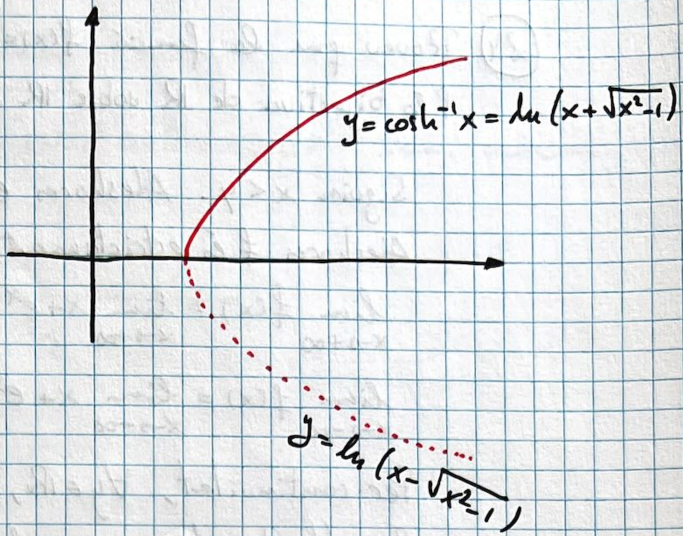
$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow 2ye^x = e^{2x} + 1 \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2} \Rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right)$$

Aleshores $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ Prenem aquesta inversa que es correspon amb la branca $x>0$ de cosh

$\text{Dom}(\cosh^{-1}) = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}.$

$\lim_{x\to+\infty} (\cosh^{-1} x) = +\infty$

$\text{Im}(\cosh^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$



- $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Busquem la inversa:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow e^x y + \frac{y}{e^x} = e^x - e^{-x} \Rightarrow y e^{2x} + y = e^{2x} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + y = (1-y)e^{2x} \Rightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow 2x = \ln(1+y) - \ln(1-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(\ln(1+y) - \ln(1-y)\right)$$

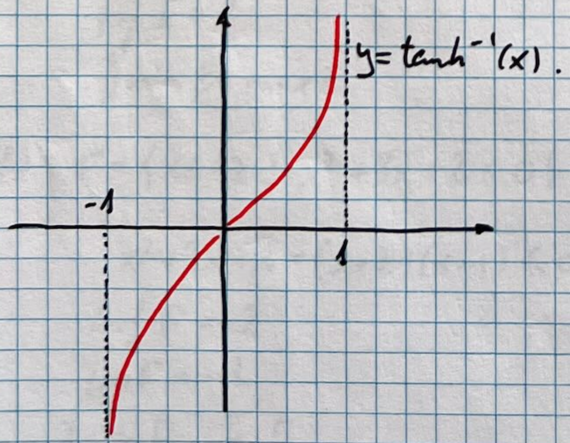
Aleshores, $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$

$\text{Dom}(\tanh^{-1}) = (-1, 1)$

$$\lim_{x\to -1^+} \tanh^{-1} x = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \tanh^{-1} x = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = +\infty.$$

Aleshores, $\text{Im}(\tanh^{-1}) = \mathbb{R}$.



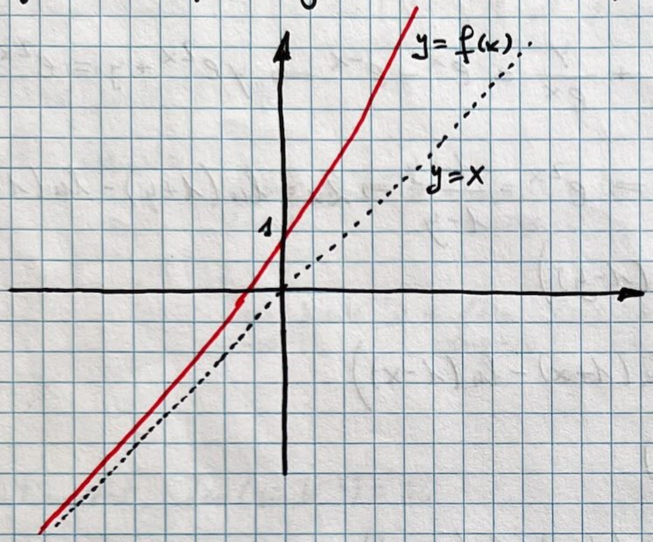
24) Proveu que la funció $f(x)=x+e^x$ és estrictament creixent, deduïu que f és bijectiva de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ i feu un esquema de la seva gràfica.

Siguin $x<y$. Aleshores $e^x<e^y$ i, pertant, $x+e^x<y+e^y \Rightarrow f(x)<f(y)$.
Aleshores f és estrictament creixent.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x+e^x = +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+e^x = -\infty.$$

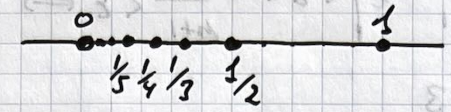
Per continuïtat, $\forall y\in\mathbb{R}$, $\exists x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=y \Rightarrow f$ és exhaustiva. Per altra banda, com f és estrictament creixent, si $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$ i, pertant, f és injectiva. Per tant, f és bijectiva.



Tema 2: SUCCESSIONS DE NOMBRES REALS.

① Trobeu l'ínfim i el suprem en $\mathbb{Q}$ en cas d'existència. Quins tenen màxim o mínim?

(a) $A = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$



$\sup A = 1 = \max A$

$\inf A = 0$

$\nexists \min A.$

(b) $B = A \cup \{0\}$

$\sup B = 1 = \max B$

$\inf B = 0 = \min B.$

(c) $C = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$

$\sup C = \frac{3}{2} = \max C$

$\inf C = -1,\ \nexists \min C$

$C = \Big\{ \underbrace{\frac{1}{2n} + 1}_{\frac{2n+1}{2n}\ \searrow\ 1},\ n \in \mathbb{N} \Big\} \cup \Big\{ \underbrace{\frac{1}{2n+1} - 1}_{\frac{-2n}{2n+1}\ \searrow\ -1},\ n \in \mathbb{N} \Big\}$

(d) $D = \{ x \in \mathbb{Q}\ ;\ x > 0,\ x^2 < 3 \}$

$\inf D = 0$

$\nexists \sup D, \max D, \min D.$

(e) $E = \{ x \in \mathbb{Q}\ ;\ x^2 < 4 \} = (-2, 2)$

$\inf E = -2$

$\sup E = 2$

$\nexists \min E, \max E.$

(f) $F = \{ x \in \mathbb{Q}\ ;\ x^2 + 3x + 2 < 0 \} = (-2, -1)$

$x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1) < 0 \iff -2 < x < -1$

$\inf F = -2$

$\sup F = -1$

$\nexists \min F, \max F.$

② Proveu, usant la definició de límit. ($\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $|x_n - l| < \varepsilon$)

(a) $\lim_n \frac{1}{n+1} = 0$

$$l = 0, \quad \left|\frac{1}{n+1} - l\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n > N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

(b) $\lim_n \frac{3n}{n+2} = 3$

$$l = 3, \quad \left|\frac{3n}{n+2} - l\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{3n}{n+2} - 3\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{-6}{n+2}\right| < \varepsilon \iff \frac{6}{n+2} < \varepsilon \iff$$

$$\iff \frac{6}{\varepsilon} < n+2 \iff n > N = \frac{6}{\varepsilon} - 2$$

(c) $\lim_n \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$

$$l = \frac{2}{3}, \quad \left|\frac{2n+1}{3n} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{3n}\right| < \varepsilon \iff n > N = \frac{1}{3\varepsilon}$$

(d) $\lim_n \frac{n^2+1}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$

$$l = \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{n^2+1}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{1/2}{2n^2+1}\right| < \varepsilon \iff 2n^2+1 > \frac{1}{2\varepsilon} \iff$$

$$\iff 2n^2 > \frac{1}{2\varepsilon} - 1 \iff n^2 > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \iff n^2 > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} \iff$$

$$\iff n > N = \sqrt{\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}}$$

③ Per a $\varepsilon = 1/1000$, trobeu el mínim n_0 tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon \ \forall n > n_0$ en cadascun dels límits de l'exercici anterior.

(a) $n > n_0 = \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 = 999$

(b) $n > n_0 = \dfrac{6}{\varepsilon} - 2 = 5998$

(c) $n > n_0 = \dfrac{1}{3\varepsilon} = 333{,}\hat{3}$

(d) $n > n_0 = \sqrt{\dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}} = \quad = \sqrt{\dfrac{1}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}} = \sqrt{250 - \dfrac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{499}{2}} \approx 15{,}8$

④ Proveu la desigualtat de Bernouilli:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall x \geq -1,\ n \in \mathbb{N}$$

Justifiqueu que la igualtat es verifica si i només si $n = 1$ o $x = 0$.

Procedim per inducció:

Si $n = 1$: $1 + x = 1 + x$ ✓

Suposem $(1+x)^n \geq 1 + nx \Longrightarrow \underbrace{(1+x)}_{\substack{(1+x) \geq 0 \\ \text{ja que } x \geq -1}}(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \Longrightarrow$

$\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ ✓

Volem provar que $(1+x)^n = 1 + nx \Leftrightarrow n = 1$ o $x = 0$

$\Leftarrow$] Si $n = 1 \Rightarrow 1 + x = 1 + x$ ✓

Si $x = 0 \Rightarrow 1 = 1$ ✓

$\Rightarrow$] $(1+x)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Binomi} \\ \text{de Newton}}}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \underbrace{\binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n}_{g_n(x) \text{ polinomi de grau } n \text{ per } n \geq 2.}$

$(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$g_n(x) = 0 \Leftrightarrow n = 1$ o $x = 0$.

(5) A partir de la desigualtat de Bernoulli, demostreu que si $x>-1$,

$$(1+x)^{1/n} \leq 1+\frac{x}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Considerem la desigualtat de Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Fem el canvi $x = \frac{y}{n} > -1 \Rightarrow y > -n$ en particular, per $y>-1$.

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \geq 1+y \Longrightarrow 1+\frac{y}{n} \geq (1+y)^{1/n} \text{ com volíem veure.}$$

Deduïu de la desigualtat anterior i/o del teorema binomial:

(a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c} = 1, \quad c>0$

• Si $c=1$, trivial. • Si $c<1$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c} = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{b}} = 1$, $b = \frac{1}{c} > 1$. • Considerem $c>1$

$$0 \underset{\sqrt[n]{c}\geq 1 \ \forall n\in\mathbb{N}}{\leq} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c} - 1 = \lim_{n\to+\infty} c^{1/n} - 1 \underset{\substack{c=1+x>0 \\ \Downarrow \\ x>-1}}{\leq} \lim_{n\to+\infty} \frac{c-1}{n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c} = 1.$$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Considerem $d_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Cal veure que $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$.

És evident que $d_n \geq 0$. Com $d_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Longrightarrow n = (1+d_n)^n$.

$$n = (1+d_n)^n \underset{\text{Binomi de Newton}}{=} 1 + \binom{n}{1} d_n + \binom{n}{2} d_n^2 + \dots \underset{\text{Per } n>1}{\geq} 1 + \binom{n}{2} d_n^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} d_n^2 \Longrightarrow d_n^2 \leq \frac{2}{n} \Longrightarrow d_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Així,

$$0 \leq d_n \leq \underbrace{\sqrt{2/n}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 0} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} d_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

⑥ Justifiqueu els resultats següents:

(a) $\lim_n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = 0.$

$$\lim_n \left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim_n \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_n \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \lim_n \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0.$$

(b) $\lim_n \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \frac{1}{2}$

$$\lim_n \left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \lim_n \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_n \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \lim_n \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+1} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

(c) $\lim_n \left(\frac{1+2+\dots+n}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$

$$\lim_n \left(\frac{1+2+\dots+n}{n^2}\right) = \lim_n \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_n \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

(d) $\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$

$$\lim_n \frac{n!}{n^n} \overset{\uparrow}{=} \lim_n \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^n} = \lim_n e^{-n}\sqrt{2\pi n} = 0$$

Stirling: $\lim_n \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} = 1.$

⑦ Utilitzant que $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, trobeu els límits següents.

(a) $\lim_n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n =$

$$= \lim_n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_n \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{n}{n-1}-1\right)^n} =$$

$$= \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1\cdot\frac{n}{n-1}}} = \lim_n \frac{1}{e^{\frac{n}{n-1}}} = \frac{1}{e}$$

(b) $$\lim_n \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_n \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{n^2}{n^2-1}-1\right)^{n^2}} =$$

$$= \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n^2}} = \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n^2-1\cdot\frac{n^2}{n^2-1}}} = \lim_n \frac{1}{e^{\frac{n^2}{n^2-1}}} = \frac{1}{e}$$

(c) $$\lim_n \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_n \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\frac{n}{n^2}} = \lim_n e^{1/n} = 1.$$

(d) $$\lim_n \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} = \lim_n \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2} = \lim_n \frac{1}{\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n^2}} = \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{n}{n-2}-1\right)^{n^2}} =$$

$$= \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n-2}\right)^{n^2}} = \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{2}}\right)^{n^2}} =$$

$$= \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{2}}\right)^{\frac{n-2}{2}\cdot\frac{2n^2}{n-2}}} = \lim_n \frac{1}{e^{\frac{2n^2}{n-2}}} = 0$$

(8) (a) Demostreu que $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z_n}\right)^{z_n}=e$ si $\lim_{n\to+\infty} z_n=+\infty$.

Indicació: Recordeu que $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

Definim $a_n=\lfloor z_n\rfloor$ la part entera de z_n. Observem que $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ i que

$$a_n\leq z_n\leq a_n+1.$$

Aleshores,

$$\left(1+\frac{1}{a_n+1}\right)^{a_n}\leq\left(1+\frac{1}{z_n}\right)\leq\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n+1}$$

$$\downarrow n\to+\infty \qquad\qquad \downarrow n\to+\infty$$

$$e \qquad\qquad e$$

Obs: $\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Per tant, això també és vàlid per $z_n\to-\infty$.

Pel criteri del sandwich, $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z_n}\right)^{z_n}=e$.

(b) Sigui $(x_n)_n$ una successió que té límit 0, demostreu que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(1+x_n)}{x_n}=1$

Suposarem que $\forall n>N,\ x_n>0$. En cas que $\forall n>M\ x_n<0$, obtenim el mateix resultat usant l'observació de l'apartat anterior. Si no es dóna cap d'aquests casos, prendrem les parcials $a_n\geq0$ i $b_n<0$ de x_n i com les dues parcials cobreixen tot, només caldrà veure-ho per les parcials.

Suposem doncs que $\exists N\in\mathbb{N}$ tal que $x_n\geq0\ \forall n>N$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{z_n}\right)^{z_n}=\ln e=1.$$

$z_n=\frac{1}{x_n}$ $\lim_{n\to+\infty} z_n=+\infty$

(c) Sigui $(x_n)_n$ una successió que té límit 0, demostreu que $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=1$

Considerem la successió $y_n=e^{x_n}-1\Rightarrow e^{x_n}=1+y_n\longrightarrow x_n=\ln(1+y_n)$

Observem que $y_n\xrightarrow[n]{}0$.

Així,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{\ln(1+y_n)}=1$$

apartat (b)

(d) Siguin $(a_n), (b_n)$ successions amb $\lim_n a_n = 1$ i $\lim_n b_n = +\infty$. Proveu que, si la successió $(b_n(a_n-1))_n$ és convergent amb límit α, aleshores la successió $(a_n^{b_n})_n$ és convergent amb límit e^α.

$$\lim_n a_n^{b_n} = \lim_n e^{\ln(a_n^{b_n})} = \lim_n e^{b_n \ln(a_n)} =$$

$$= \lim_n e^{b_n \frac{\ln(a_n)}{a_n-1}(a_n-1)} = \lim_n e^{b_n(a_n-1)} = e^\alpha$$

$$\lim_n \frac{\ln(a_n)}{a_n-1} = \lim_n \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1 \qquad \lim_n b_n(a_n-1) = \alpha$$

$$x_n = a_n - 1 \xrightarrow[n]{} 0$$

(9) Apliqueu el problema anterior a l'estudi del límit de les següents successions:

(a) $x_n = \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2+3n+4}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}$ Observem que la successió (x_n) satisfà les hipòtesis de l'apartat (d) del problema anterior.

$$a_n = \frac{n^2-5n+1}{n^2+3n+4} \xrightarrow[n]{} 1$$

$$b_n = \frac{n^2+1}{n} \xrightarrow[n]{} +\infty$$

Calculem doncs,

$$\lim_n b_n(a_n-1) = \lim_n \frac{n^2+1}{n}\left(\frac{n^2-5n+1}{n^2+3n+4} - 1\right) =$$

$$= \lim_n \frac{n^2+1}{n}\left(\frac{-8n-3}{n^2+3n+4}\right) = \lim_n \left(\frac{-8n^3-3n^2-8n-3}{n^3+3n^2+4n}\right) = -8$$

Aleshores, $\lim_n x_n = e^{-8}$

(b) $x_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{b\cdot n}$ on $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_n \left(1+\frac{a}{n}\right)^{b\cdot n} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n/a}\right)^{b\cdot n} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n/a}\right)^{n/a \cdot a/n \cdot b\cdot n} = e^{ab}.$$

apartat (a) del problema anterior

Alternativa:

$a_n = 1 + \frac{a}{n} \to 1$

$b_n = b\cdot n \to +\infty$

(d) del problema anterior

$\lim_n b_n(a_n-1) = \lim_n b\cdot n \cdot \frac{a}{n} = ab \Rightarrow \lim_n x_n = e^{ab}$

(c)
$$x_n = \left(\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\right)^{\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}}$$

Siguin $a_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}}$, $b_n = \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}$

Observem que $\lim_n a_n = 1$

$$\lim_n b_n = \lim_n \frac{\sqrt{2n}\cdot(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})}{2n+1-2n} =$$

$$= \lim_n \frac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{1} = +\infty.$$

Per tant, es compleixen les hipòtesis de l'apartat (d) del problema anterior. Ara, cal veure que $b_n(a_n-1)$ és convergent:

$$\lim_n b_n(a_n-1) = \lim_n \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}\cdot\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}-1\right) =$$

$$= \lim_n \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}\cdot\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}} = 1$$

Aleshores, $\lim_n x_n = e^1 = e$.

(10) Useu el lema del Sandvitx per calcular els límits següents:

(a) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)$

Observem que $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ i aleshores,

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 1 \qquad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$$

Pertant,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right) = 1.$$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n^2+n}\right)$

Notem que $\sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt[n]{n^2+n} \leq \sqrt[n]{2n^2}$

$$\sqrt[n]{n^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \longrightarrow 1 \quad \text{pel problema 5 d'aquest tema}$$

$$\sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \longrightarrow 1\cdot 1 = 1$$

Ara, pel criteri del Sandwich, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n!)^{1/n^2}$

Notem que $(n)^{1/n^2} \leq (n!)^{1/n^2} \leq (n^n)^{1/n^2}$

$$(n)^{1/n^2} = (n)^{1/n \cdot 1/n} \xrightarrow{\text{problema 5}} 1$$

$$(n^n)^{1/n^2} = n^{1/n} \xrightarrow{\text{problema 5}} 1$$

Aleshores, pel criteri del Sandvitx, $\lim\limits_{n} (n!)^{1/n^2} = 1$.

11 (a) Sigui (x_n) una successió i suposem que existeixen nombres $\rho \in (0,1)$, $n_0 \in \mathbb{N}$, tals que per tot $n \geq n_0$ es té $|x_{n+1}| \leq \rho |x_n|$. Proveu que $\lim\limits_n x_n = 0$.

Sigui $n > p$. Aleshores,

$$|x_{n+1}| \leq \rho^{n-n_0+1}\cdot|x_{n_0}| = \rho^{n+1}\cdot\frac{|x_{n_0}|}{\rho^{n_0}} = M\rho^{n+1} \quad \text{on } M = \frac{|x_{n_0}|}{\rho^{n_0}}$$

Com que $\rho \in (0,1)$, $\rho^n \xrightarrow[n]{} 0$ i per tant $x_n \xrightarrow[n]{} 0$

Alternativa: La desigualtat $|x_{n+1}| \leq \rho|x_n|$ $\forall n > n_0$ amb $\rho \in (0,1)$ implica que $(|x_n|)$ és decreixent a partir de n_0. Com $|x_n| > 0$ i decreixent, aleshores ha de convergir a un nombre $\alpha \geq 0$. Així, $\lim\limits_n |x_n| = \alpha$. La desigualtat $|x_{n+1}| \leq \rho |x_n|$ implica que $\alpha \leq \rho\alpha \Rightarrow \alpha = 0$. Pertant $\lim\limits_n x_n = 0$.

(b) Sigui (x_n) una successió de nombres no nuls verificant $\lim\limits_n \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lambda$ on $0 \leq \lambda < 1$. Proveu que $\lim\limits_n x_n = 0$.

Sigui $\varepsilon > 0$ tal que $\rho = \lambda + \varepsilon < 1$ (per exemple $\varepsilon = \frac{1-\lambda}{2}$) tenim que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$ tenim que

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq \rho \Longrightarrow |x_{n+1}| \leq \rho |x_n|$$

Per l'apartat anterior, $x_n \xrightarrow[n]{} 0$.

(c) Utilitzeu l'apartat anterior per provar que, donats $a \in (-1,1)$ i $k \in \mathbb{N}$, $\lim_n (n^k a^n) = 0$.

Sigui $(x_n)_n$ la successió definida per $x_n = n^k a^n$.

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot |a| \Longrightarrow \lim_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |a| < 1$$

Per l'apartat anterior, $\lim_n (n^k a^n) = 0$.

(12) Estudieu la convergència de les successions següents:

(a) $x_n = n^2 \left(\frac{1+n}{3n}\right)^n$

$$\lim_n n^2 \left(\frac{1+n}{3n}\right)^n = \lim_n n^2 \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow \text{ prob 7} \atop e} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_n e n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

Per l'apartat (c) del problema anterior.

(b) $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ on $a, b > 0$.

Notem que $c \le \sqrt[n]{a^n+b^n} \le \sqrt[n]{2c^n}$ on $c = \max\{a,b\}$.

$$\sqrt[n]{2c^n} = \sqrt[n]{2} \cdot c \longrightarrow c$$

Pertant $\lim \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\}$.

(c) $x_n = \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Procedim seguint la idea de l'apartat (b) del problema anterior

$$\lim_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_n \frac{|x^{n+1} \cdot n!|}{|x^n \cdot (n+1)!|} = \lim_n \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Aleshores, per l'apartat (b) del problema anterior,

$$\lim_n \frac{x^n}{n!} = 0.$$

(d) $x_n = \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right)$

$$\lim_n \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right) = \lim_n \frac{(n^2+\sqrt{n}-n^2)(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n})}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n} =$$

$$= \lim_n \frac{\sqrt{n^2+n}+n\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n} = \lim_n \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n\sqrt{n}}}+1} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

(13) Estudieu la convergència de la successió:

$$x_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Indicació: Proveu que per tot $k \geq 1$, $0 < x_{k+1} - x_k < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

Provem la indicació:

$$x_{n+1} - x_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) - \frac{1}{\sqrt{n+1}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$$

$$2\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \iff \sqrt{n+1} > \sqrt{n}$$

$\sqrt{x}$ és monòtona

Aleshores $x_{n+1} > x_n \Rightarrow (x_n)$ és estrictament creixent. Vegem ara que (x_n) és fitada superiorment.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Ara, introduint la suma telescòpica,

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Aleshores,

$$x_n - x_1 < 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow x_n < 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + x_1 \underset{x_1=1}{=} 2 - \frac{1}{\sqrt{n}} < 2$$

Fins ara hem vist que x_n és monòtona creixent fitada superiorment per 2. Aleshores, x_n és convergent.

(14) Donats $0 < a_1 < b_1$, definim per tot $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Justifiqueu que les successions així definides són monòtones i convergeixen al mateix valor.

Hem de provar que a_n i b_n són monòtones i convergeixen al mateix valor. En concret, provarem

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < b_n < \ldots < b_2 < b_1$$

$$a_2 = \sqrt{a_1 b_1} \underset{a_1 < b_1}{>} \sqrt{a_1^2} = a_1, \qquad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \underset{a_1 < b_1}{<} b_1$$

$$a_{n-1} < a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}} \iff \sqrt{a_{n-1}} < \sqrt{b_{n-1}} \iff a_{n-1} < b_{n-1}$$

i aquesta darrera desigualtat és certa per la Desigualtat entre la mitjana geomètrica i la mitjana aritmètica de dos nombres:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{ on la igualtat es dóna} \iff a = b.$$

$$b_{n-1} > b_n \iff b_{n-1} > \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \iff b_{n-1} > a_{n-1}$$

que de nou és cert per la desigualtat entre la mitjana geomètrica i aritmètica.

Hem vist que $(a_n)_n$ és creixent i fitada superiorment. Aleshores $(a_n)_n$ és convergent. Hem vist que $(b_n)_n$ és decreixent i fitada inferiorment. Aleshores $(b_n)_n$ és convergent.

Les dues successions tenen límit:

Sigui $l_1 = \lim_n a_n$ i $l_2 = \lim_n b_n$.

Aleshores,

$$\lim_n b_n = \frac{\lim_n b_{n-1} + \lim_n a_{n-1}}{2} \implies l_2 = \frac{l_2 + l_1}{2} \to l_1 = l_2$$

■

(15) Estudieu la convergència de les successions següents:

(a) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$

Abans de res, suposem que és convergent i busquem un candidat a límit. Sigui $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $x_n \to \alpha \Rightarrow \alpha = \sqrt{3\alpha} \Rightarrow \alpha = 3$. Aleshores, si la successió $(x_n)_n$ és convergent, el seu límit serà 3.

Per a provar que convergeix veurem que és monòtona i fitada.

$x_1 = 1$

$x_2 = \sqrt{3}$

Sospitem que és creixent. En aquest cas, tindríem que $x_n < 3$ $\forall n$. Provem aquesta afirmació: procedim per inducció sobre n. $x_1 = 1 < 3$. Suposem $x_n < 3$ i provem que $x_{n+1} < 3$. $x_{n+1} = \sqrt{3x_n} < \sqrt{9} = 3$ com volíem veure. Aleshores $(x_n)_n$ està fitada superiorment per 3. Provem ara que és creixent.

Tenim que

$$3x_n = x_{n+1}^2 = x_{n+1} x_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ x_{n+1} < 3}}{<} 3x_{n+1} \Rightarrow x_n < x_{n+1}$$

En conclusió: $(x_n)_n$ és creixent i fitada superiorment per 3. Aleshores és convergent i, pel que hem vist al principi, té límit 3.

(b) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = \dfrac{3 + 3x_n}{3 + x_n}$

Suposem que $(x_n)_n$ és convergent i $x_n \to \alpha$. De la igualtat $x_{n+1} = \dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$ tenim que $\alpha = \dfrac{3+3\alpha}{3+\alpha} \Rightarrow 3\alpha + \alpha^2 = 3 + 3\alpha \Rightarrow \alpha = \sqrt{3}$.

Prenem l'arrel positiva ja que $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ i, per tant, $\alpha > 0$.

Hem provat que, si $(x_n)_n$ és convergent, tindrà límit $\alpha = \sqrt{3}$.

Com $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, sospitem que la successió és decreixent.

En aquest cas, $x_n > \sqrt{3}$ $\forall n$. Provem-ho: procedirem per inducció:

$x_1 = 3 > \sqrt{3}$. Per altra banda,

$$x_{n+1} > \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{3+3x_n}{3+x_n} > \sqrt{3} \Leftrightarrow 3 + 3x_n > 3\sqrt{3} + \sqrt{3}x_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_n\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) > 3(\sqrt{3}-1) \Leftrightarrow x_n > \sqrt{3}$$

Per tant, si $x_n > \sqrt{3}$, aleshores $x_{n+1} > \sqrt{3}$. Per tant $(x_n)_n$ està fitada inferiorment per $\sqrt{3}$.

Provem ara que $(x_n)_n$ és decreixent. Tenim que

$$x_{n+1}-x_n = \frac{3+3x_n}{3+x_n} - x_n = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} \underset{x_n>\sqrt{3}}{<} 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n.$$

En conclusió, la successió $(x_n)_n$ és decreixent i fitada inferiorment. També hem vist que si té límit, és $\sqrt{3}$. Aleshores $\lim_n x_n = \sqrt{3}$.

(c) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{4+3x_n}{3+2x_n}$

Suposem que $x_n \to \alpha$. Aleshores $\alpha = \dfrac{4+3\alpha}{3+2\alpha} \Leftrightarrow 3\alpha + 2\alpha^2 = 4 + 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{2}$.

Notem que hem pres l'arrel positiva perquè $x_n > 0$ $\forall n$ i pertant $\alpha \geq 0$.

Observem que $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{7}{5} < \sqrt{2}$. Per tant sospitem que $(x_n)_n$ és creixent i té límit $\sqrt{2}$. Comencem provant que $(x_n)_n$ està fitada superiorment per $\sqrt{2}$:

$x_1 = 1 < \sqrt{2}$. Suposem $x_n < \sqrt{2}$. Volem provar que $x_{n+1} < \sqrt{2}$.

$$x_{n+1} < \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{4+3x_n}{3+2x_n} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 4+3x_n < 3\sqrt{2} + 2x_n\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3-2\sqrt{2})x_n < 3\sqrt{2} - 4 \Leftrightarrow x_n < \frac{3\sqrt{2}-4}{3-2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x_n < \sqrt{2}$$

Aleshores $(x_n)_n$ és fitada superiorment per $\sqrt{2}$. Vegem ara que $(x_n)_n$ és creixent:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4+3x_n}{3+2x_n} - x_n > 0 \Leftrightarrow \frac{4+3x_n}{3+2x_n} > x_n \Leftrightarrow 4+3x_n > 3x_n + 2x_n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 > 2x_n^2 \Leftrightarrow x_n^2 < 2 \Leftrightarrow x_n < \sqrt{2}$$

En conclusió, $(x_n)_n$ és monòtona creixent i fitada superiorment per $\sqrt{2}$. Aleshores, pel que hem vist al principi, $x_n \xrightarrow[n]{} \sqrt{2}$.

(d) Per $a \in (-2,-1)$, definim $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 2}{x_n + 4}$.

Abans de res, busquem un candidat a límit. Si $x_n \to \alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{\alpha - 2}{\alpha + 4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + 4\alpha = \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)(\alpha+2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$ o $\alpha = -2$.

Aleshores, si x_n és convergent, tindrà límit -1 o -2.

$x_1 = a \in (-2,-1)$

$x_2 = \dfrac{a-2}{a+4} > a \Leftrightarrow a - 2 > a^2 + 4a \Leftrightarrow a^2 + 3a + 2 < 0 \Leftrightarrow a \in (-2,-1)$.

Pertant sospitem que x_n és creixent. Cal provar-ho. Abans, provem que

x_n està fitada superiorment per -1. $x_1 = a \in (-2,-1) \Rightarrow x_1 < -1$. Suposem que $x_n < -1$. Volem veure que $x_{n+1} < -1$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n - 2}{x_n + 4} < -1 \Leftrightarrow x_n - 2 < -x_n - 4 \Leftrightarrow 2x_n < -2 \Leftrightarrow x_n < -1.$$

Hem vist que $(x_n)_n$ està fitada superiorment per -1.

Provem ara que és monòtona: volem veure que $x_{n+1} - x_n > 0$

$$x_{n+1} - x_n > \Leftrightarrow \frac{x_n - 2}{x_n + 4} - x_n > 0 \Leftrightarrow x_n - 2 > x_n^2 + 4x_n \Leftrightarrow x_n^2 + 3x_n + 2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_n \in (-2,-1).$$

Notem que ens cal veure que $x_n > -2$ $\forall n$. Vegem-ho: $x_1 = a > -2$. Suposem $x_n > -2$. Volem veure que $x_{n+1} > -2$.

$$x_{n+1} > -2 \Leftrightarrow \frac{x_n - 2}{x_n + 4} > -2 \Leftrightarrow x_n - 2 > -2x_n - 8 \Leftrightarrow 3x_n > -6 \Leftrightarrow x_n > -2$$

En conclusió: hem provat que $(x_n)_n$ està fitada inferior i superiorment per -2 i -1 respectivament i que és monòtona creixent. En aquest cas, dels nostres candidats a límit, només pot ser $x_n \to -1$.

(e) Donat $a > 0$, definim $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$

Busquem un candidat a límit: si $x_n \xrightarrow[n]{} \alpha \Rightarrow \alpha = \sqrt{a + \alpha} \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha - a = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$. Òbviament, com que $x_n > 0$ $\forall n$,
$\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$. Anomenarem $\bar{\alpha} = \dfrac{1 - \sqrt{1+4a}}{2}$ a l'altra arrel. $\bar{\alpha} < 0$.

Observem que $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} > x_1$. Sospitem que $(x_n)_n$ és creixent. En aquest cas, voldríem que $(x_n)_n$ estigués fitada superiorment, per exemple per α. Provem-ho:

$x_1 = \sqrt{a} < \alpha$. Suposem que $x_n < \alpha$. Volem veure que $x_{n+1} < \alpha$.

$$x_{n+1} < \alpha \Leftrightarrow \sqrt{a + x_n} < \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} \Leftrightarrow a + x_n < \frac{(1 + \sqrt{1+4a})^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a + 4x_n < 1 + 2\sqrt{1+4a} + 1 + 4a \Leftrightarrow 4x_n < 2 + 2\sqrt{1+4a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_n < \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$ com volíem veure.

Hem vist que $(x_n)_n$ està fitada superiorment per α.

Ara cal veure que $(x_n)_n$ és creixent.

$$x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow \sqrt{a+x_n} > x_n \Leftrightarrow a + x_n > x_n^2 \Leftrightarrow x_n^2 - x_n - a < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_n - \alpha)(x_n - \bar{\alpha}) < 0 \Leftrightarrow \bar{\alpha} < x_n < \alpha \quad \text{com volíem veure.}$$

(Recordem que $\bar{\alpha} < 0 < x_n$).

En conclusió, $(x_n)_n$ és monòtona creixent i fitada superiorment per $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Per tant és convergent. Aleshores, pel que hem vist al principi,

$$\lim_n x_n = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Observació: En el cas $a=1$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$, $x_n \longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

16 (a) Sigui $(x_n)_n$ una successió de nombres reals i suposem que existeixen nombres $\rho \in (0,1)$, $M > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que $|x_{n+1} - x_n| \leq M\rho^n$ per a tot $n \geq n_0$. Proveu que $(x_n)_n$ és convergent.

Indicació: Tenint en compte que $\forall n, h \in \mathbb{N}$ es compleix

$$\rho^{n+h-1} + \rho^{n+h-2} + \dots + \rho^n < \frac{\rho^n}{1-\rho}$$

deduïu que $(x_n)_n$ verifica una condició de Cauchy.

Abans de res, comprovem la indicació:

Sabem que per $\rho \in (0,1)$, $\frac{1}{1-\rho} = 1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{h-1} + \dots$

Aleshores, $\frac{1}{1-\rho} > 1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{h-1}$. Multiplicant per ρ^n a banda i banda obtenim el que volíem.

Comprovem ara que $(x_n)_n$ és una successió de Cauchy:

Siguin $n, h \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

$$|x_{n+h} - x_n| = \left| \sum_{k=0}^{h-1} (x_{n+k+1} - x_{n+k}) \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desigualtat} \\ \text{triangular}}}{\leq} \sum_{k=0}^{h-1} |x_{n+k+1} - x_{n+k}| \underset{\substack{\uparrow \\ n \geq n_0}}{\leq}$$

$$\leq M \sum_{k=0}^{h-1} \rho^{n+k} = M\rho^n \sum_{k=0}^{h-1} \rho^k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indicació}}}{<} \rho^n \frac{M}{1-\rho} = K\rho^n \quad \text{on } K = \frac{M}{1-\rho}$$

Observem que K no depen de n i de h.
Deduïm que si $K\rho^n < \varepsilon \Longrightarrow |x_{n+h} - x_n| < \varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{N}$.

Ara, donat $\varepsilon > 0$, podem trobar m_ε a partir de la condició

$$\rho^{m_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{K}$$

tal que $\forall n \geq m_\varepsilon$ i per tot $h \in \mathbb{N}$ es verifica $|x_{n+h} - x_n| < \varepsilon$.
Aleshores $(x_n)_n$ és de Cauchy i, per tant, convergent.

(b) Sigui $(x_n)_n$ una successió de nombres reals i suposem que existeixen nombres $\rho \in (0,1)$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que $|x_{n+1} - x_n| \leq \rho |x_n - x_{n-1}|$ per a tot $n \geq n_0$. Proveu que $(x_n)_n$ és convergent aplicant l'apartat anterior.

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \rho |x_n - x_{n-1}| \leq \rho^2 \cdot |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \dots \leq \rho^{n-n_0} |x_{n_0+1} - x_{n_0}| =$$

$$= M \cdot \rho^n \quad \text{on} \quad M = \frac{|x_{n_0+1} - x_{n_0}|}{\rho^{n_0}} \text{ és una constant independent de } n.$$

Per l'apartat anterior, $(x_n)_n$ és convergent.

(c) Estudia la convergencia de la successió definida per tot n com:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}.$$

Vegem que podem aplicar l'apartat anterior:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+x_{n-1}} = \frac{x_{n-1} - x_n}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} < \frac{x_{n-1} - x_n}{2}$$

$$(1+x_n)(1+x_{n-1}) = 1 + x_{n-1} + \underbrace{x_n(1+x_{n-1})}_{=1} = 2 + x_{n-1} > 2.$$

Prenent valors absoluts,

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}|$$

Per l'apartat anterior, $(x_n)_n$ és convergent. El límit ha de satisfer

$$\alpha = \frac{1}{1+\alpha} \Longleftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La solució és $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ja que l'altra opció és negativa però $x_n > 0 \ \forall n$.

Nota: La successió no és monòtona i per tant no podem usar el mètode del problema anterior.

Nota: $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \varphi^{-1}$. Amb la recurrència $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $x_n \to \varphi$.

(17) Calculeu els límits superior i inferior de les successions següents.

(a) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

Considerem la subsuccessió dels nombres parells:

$$a_{2n} = \frac{2n}{2n+1} \xrightarrow[n]{} 1$$

i la parcial dels senars

$$a_{2n+1} = \frac{-2n-1}{2n+2} \xrightarrow[n]{} -1$$

Els seus límits són els límits superior i inferior de $(a_n)_n$

(b) $a_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ és parell,} \\ \frac{2n}{3n+1} & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$

$$\liminf a_n = 0$$

$$\limsup a_n = \frac{2}{3}$$

(c) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1} + (-1)^{n+1} \dfrac{2n}{n+1}$

Observem que

$$a_n = \begin{cases} \frac{-n}{n+1} & \text{si } n \text{ parell} \\ \frac{n}{n+1} & \text{si } n \text{ senar.} \end{cases}$$

Aleshores, $a_{2n} \xrightarrow[n]{} -1$, $a_{2n+1} \xrightarrow[n]{} 1$

En conclusió $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$.

(d) $a_n = \cos^n\left(\dfrac{2\pi n}{3}\right)$

Notem que $-1 \le a_n \le 1$, on la primera igualtat no s'assoleix mai

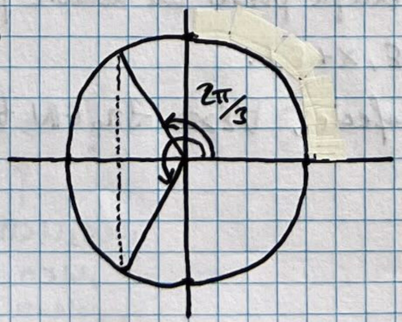
$$a_{3n} = 1 \longrightarrow 1.$$

$$a_{3n+1} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{3n+1} \longrightarrow 0$$

$$a_{3n+2} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{3n+2} \longrightarrow 0$$

Això doncs, $\limsup a_n = 1$.

$\liminf a_n = 0$.



(18) Sigui $(x_n)_n$ una successió i suposem que hi ha dues successions parcials $(x_{\sigma(n)})_n$ i $(x_{s(n)})_n$ que convergeixen al mateix nombre x i tal que $\sigma(\mathbb{N}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Prove que $(x_n)_n$ també és convergent a x.

Volem veure que $(x_n)_n$ és convergent. Ho veurem provant que $(x_n)_n$ és de Cauchy.

Donat $\varepsilon > 0$ $\exists n_1$ tal que $\forall n \geq n_1$, $n \in \sigma(\mathbb{N})$, $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

Donat $\varepsilon > 0$ $\exists n_2$ tal que $\forall m \geq n_2$, $m \in s(\mathbb{N})$, $|x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

Aleshores, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Com volíem veure.

(19) Sigui $(x_n)_n$ una successió tal que les successions parcials $(x_{2n})_n$, $(x_{2n+1})_n$ i $(x_{3n})_n$ són convergents. Prove que $(x_n)_n$ també és convergent.

Si $a_{2n} \longrightarrow l_1$, $a_{2n+1} \longrightarrow l_2$ i $a_{3n} \longrightarrow l_3$,

aleshores la successió a_{6n} té límit l_1 i l_3 i, per la unicitat del límit, $l_1 = l_3$. Per altra banda, la successió a_{6n+3} té límits l_2 i l_3 i, per tant, $l_2 = l_3$.
Ara, pel problema anterior, $\lim_n a_n = l_1 = l_2 = l_3$.

(20) Suposant que $\lim_n x_n = x$, proveu que el conjunt $A = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ té element màxim i mínim.

Els elements d'A són els termes d'una successió conjuntament amb el seu límit. El conjunt A pot ser finit o infinit.
Si A és finit, aleshores trivialment A té màxim i mínim.
Suposem doncs que A és infinit. Per $\varepsilon > 0$, prou petit, tots els elements d'A, excepte potser un nombre finit d'ells, es trobaran a l'interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

En efecte, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ $|x_n - x| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall n \geq n_0$, $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Els elements més grans d'A han de trobar-se a la dreta de $x+\varepsilon$. Com aquests són un nombre finit queda provada l'existència de màxim, excepte que no n'hi hagi cap, és a dir, quan $x = \sup_n \{x_n\}$. En aquest cas, $x = \text{màx } A$.

Anàlogament pel mínim.

(21) (Criteris de la mitjana aritmètica i geomètrica)

(a) Suposeu que $(a_n)_n \longrightarrow L$ on L és un nombre real, o $L=+\infty$ o $L=-\infty$, aleshores es té

$$\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right)_n \longrightarrow L.$$

Suposem $L\in\mathbb{R}$.

Tenim que $a_n \longrightarrow L\in\mathbb{R}$. Sigui $\varepsilon>0$. Aleshores $\exists N_1\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n>N_1 \quad |a_n-L|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Aleshores $\exists N_2>N_1$ tal que

$$\frac{|a_1-L|+\dots+|a_{N_1}-L|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n>N_2$$

Aleshores $\forall n>N_2$,

$$\left|\frac{a_1+\dots+a_n}{n}-L\right| = \left|\frac{a_1+\dots+a_n-nL}{n}\right| =$$

$$= \left|\frac{(a_1-L)+\dots+(a_n-L)}{n}\right| =$$

$$= \left|\frac{(a_1-L)+\dots+(a_{N_1}-L)+(a_{N_1+1}-L)+\dots+(a_n-L)}{n}\right| \leq$$

$$\underset{\substack{\text{Desigualtat}\\ \text{triangular}}}{\leq} \underbrace{\frac{|a_1-L|+\dots+|a_{N_1}-L|}{n}}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{|a_{N_1+1}-L|+\dots+|a_n-L|}{n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n-N_1)\frac{\varepsilon}{2}}{n} \underset{\substack{n>N_2>N_1\\ n>N_1\\ 0<\frac{n-N_1}{n}<1}}{<} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Considerem ara $L=+\infty$.

Tenim que $a_n \longrightarrow +\infty$. Volem veure que $\dfrac{a_1+\dots+a_n}{n} \longrightarrow +\infty$.

Sigui $M>0$. Aleshores $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M \ \forall n > N_1$

Ara,

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} = \frac{a_1+\dots+a_{N_1}}{n} + \frac{a_{N_1+1}+\dots+a_n}{n} >$$

$$> \underbrace{\frac{a_1+\dots+a_{N_1}}{n}}_{\text{Volem fer-ho positiu.}} + \frac{M\cdot n}{n}$$

$$\frac{a_1+\dots+a_m}{n} > 0 \iff a_1+\dots+a_m > 0.$$

Com que $a_n \longrightarrow +\infty$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a_1+\dots+a_m > 0 \ \forall m > N_2$

$N_2 > N_1$

Aleshores, $\forall n > N_2$

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n} = \underbrace{\frac{a_1+\dots+a_{N_2}}{n}}_{\substack{\vee \\ 0}} + \frac{a_{N_2+1}+\dots+a_n}{n} \underset{N_2>N_1}{>} 0 + \frac{M\cdot n}{n} = M.$$

El cas $L=-\infty$ és totalment anàleg. <u>Alternativa:</u> Aplicar criteri d'Stolz.

(b) Suposeu que $(a_n)_n \longrightarrow L$ on L és un nombre real o $L=+\infty$ i la successió $(a_n)_n$ és de termes positius, llavors es té

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \longrightarrow L$$

$$\lim_n \ln\left(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right) = \lim_n \frac{\ln a_1 + \dots \ln a_n}{n} = \ln(L)$$

$x_n = \ln(a_1)+\dots+\ln(a_n)$

$y_n = n$

Apliquem Stolz:

$$\lim_n \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_n \frac{\ln(a_{n+1})}{1} = \ln L$$

Per la continuïtat del logaritme, $\lim_n \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} = L$, com volíem veure.

(c) Suposeu que $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_n \longrightarrow L$ on $(x_n)_n$ és una successió de termes positius i L és un nombre real o bé $L=+\infty$. Proveu que $(\sqrt[n]{x_n})_n \longrightarrow L$. Indicació: apliqueu l'apartat (b) a la successió $a_1=1$, $a_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}$ per a tot $n\in\mathbb{N}$.

Seguint la indicació, definim $a_1=1$, $a_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}$. Sabem que $a_n \longrightarrow L$. Aleshores, per l'apartat anterior,

$$L=\lim_n \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} = \lim_n \sqrt[n]{1\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_{n+1}}{x_n}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{x_{n+1}}{x_2}} =$$

$$= \lim_n \frac{\sqrt[n]{x_{n+1}}}{\sqrt[n]{x_2}} = \lim_n \sqrt[n]{x_{n+1}} = \lim_n \sqrt[n]{x_n} \quad \text{com volíem veure.}$$

$$\sqrt[n]{x_2} \xrightarrow[n]{} 1$$

(22) Calculeu el límit de les successions següents:

(a) $x_n=\frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$, on $p\in\mathbb{N}$.

Podem escriure x_n com $x_n=\frac{a_n}{b_n}$ on $a_n=1^p+2^p+\dots+n^p$ i $b_n=n^{p+1}$ i podem aplicar el Criteri d'Stolz, ja que n^{p+1} és estrictament creixent i té límit $+\infty$.

Aleshores,

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p\frac{1}{n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{p+1}-1\right]}=$$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p\frac{1}{n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}-1\right)}$$

Notem que

$$n\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}}_{\downarrow\, 1}-1\right)\sim n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}=(p+1)\cdot n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim$$

$$\sim(p+1)\cdot n\cdot\frac{1}{n}=p+1$$

Aleshores $\lim_n \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{1}{p+1}$ i, pel criteri d'Stolz, $\lim_n x_n = \frac{1}{p+1}$

(b) $x_n = \dfrac{\ln n}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$

Escribim $a_n = \ln n$, $b_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$. Com que $b_n \longrightarrow +\infty$ i és estrictament creixent, podem aplicar el criteri d'Stolz.

$$\lim_n \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_n \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\frac{1}{n+1}} = \lim_n \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n+1}} =$$

$\ln(1+x_n) \sim x_n$
$x_n \sim 0$

$$= \lim_n \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_n \frac{n+1}{n} = 1.$$

Aleshores, pel criteri d'Stolz, $\lim_n x_n = 1$.

(c) $x_n = \dfrac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{5+7+9+\dots+(2n+3)}$

Escribim $a_n = 1+4+7+\dots+(3n-2)$, $b_n = 5+7+9+\dots+(2n+3)$
Com que $b_n \longrightarrow +\infty$ i és estrictament creixent, podem aplicar el criteri d'Stolz.

$$\lim_n \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_n \frac{3n-2}{2n+3} = \frac{3}{2}.$$

Aleshores, $\lim_n x_n = \frac{3}{2}$.

(d) $x_n = \left(\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^{1/n}$. Pel problema 21 (c), $\lim_n \sqrt[n]{x_n} = L$ si $\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$

Calculem doncs, on $y_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$$\lim_n \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim_n \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)(n!)^2}{((n+1)!)^2} =$$

$$= \lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4.$$

Aleshores, pel problema 21 (c),

$$\lim_n x_n = 4.$$

(e) $x_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$

Apliquem el problema 21 (c).

Sigui $y_n = \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

Cal veure que existeix $\lim_n \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim_n \frac{\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$

$$= \lim_n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$$

Aleshores, pel problema 21 (c), $\lim_n x_n = e$.

(23) Siguin $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ dues successions de nombres reals. Demostreu que, si $(x_n)_n$ és una successió de Cauchy i $\lim_n |x_n - y_n| = 0$, aleshores $(y_n)_n$ també és una successió de Cauchy.

x_n és de Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_1$, $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\lim_n |x_n - y_n| = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, $|x_n - y_n| < \varepsilon/3$.

Sigui ara $\varepsilon > 0$, aleshores $\forall n, m \geq \max\{N_1, N_2\}$,

$$|y_n - y_m| = |y_n - x_n + x_n - x_m + x_m - y_m| \leq$$

$$\leq |y_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - y_m| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Aleshores, $(y_n)_n$ és de Cauchy.

(24) Demostreu que la successió de terme general $a_n = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{2^n}$ és convergent.

Indicació: Proveu que és de Cauchy.

Vegem que a_n és de Cauchy: siguin $m > n$ dos naturals.

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{\sin((n+1)x)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin(mx)}{2^m} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{\sin((n+1)x)}{2^{n+1}} \right| + \cdots + \left| \frac{\sin(mx)}{2^m} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n} \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^m} \right)}_{\wedge\ 1} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$\forall n > N = \frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$

A $\mathbb{R}$, totes les successions de Cauchy són convergents.

(25) Calculeu el límit de la successió $(S_n)_n$ en cadascun dels apartats següents:

(a) $S_n = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$

Ja sabem que, per $|x|<1$,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Fent $x = \frac{1}{3}$,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots = \lim_n S_n.$$

(b) $S_n = \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{3}{2^n}$

Per $|x|<1$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$

Fent $x = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots = \lim_n S_n.$$

(26) Considerem la successió (x_n) definida per $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$,

(a) Calculeu $\lim_n \frac{x_n}{\ln n}$

Pel problema 22 (b), $\lim_n \frac{x_n}{\ln n} = 1$.

(b) Demostreu que (x_n) és divergent.

Si $x_n \to \ell < +\infty$, aleshores, $\lim_n \frac{x_n}{\ln n} = 0$ ja que $\ln n \xrightarrow[n]{} +\infty$

Alternativa:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \dots$$

(27) Sigui α un nombre real. Demostreu que la successió $(x_n)_n$ definida per

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}, \text{ per a tot } n \geq 1,$$

no és convergent si $\alpha < 1$ i és convergent si $\alpha > 1$.

En primer lloc, si $\alpha \leq 0$, la successió divergeix ja que $\frac{1}{k^\alpha} \geq 1$ i, per tant,

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \geq 1 + 1 + \dots + 1 = n.$$

i, per tant, $x_n \xrightarrow[n]{} +\infty$.

Com que (x_n) és una successió creixent, si $2^k \leq n < 2^{k+1}$, aleshores $x_{2^k} \leq x_n < x_{2^{k+1}}$. Llavors és suficient veure que, si $\alpha > 1$, la successió $(x_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ és fitada superiorment i, per tant, convergent.

I si $0 < \alpha < 1$, la successió $(x_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ no és fitada superiorment i, pertant, divergent.

Si $\alpha > 1$, tenim $\forall k \geq 1$,

$$x_{2^k} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^k)^\alpha} < 1 + \overbrace{\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}}^{2 \text{ termes}} + \overbrace{\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}}^{4 \text{ termes}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}} + \dots + \frac{1}{2^{(k-1)\alpha}}}_{2^{k-1} \text{ termes}} + \frac{1}{2^{k\alpha}} =$$

$$2^k \leq n < 2^{k+1}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{2^{k\alpha}}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^j}{2^{j\alpha}} + \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^{j(\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{k\alpha}} =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}}\right) + \frac{1}{2^{k\alpha}} < 2 + \frac{1}{2^{k\alpha}} < 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Pertant, $(x_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ és fitada superiorment $\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és fitada superiorment. Com $(x_n)_n$ és creixent, aleshores és convergent.

Si $0<\alpha<1$, veiem que $(X_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ no és fitada superiorment.
Anàlogament al cas anterior,

$$X_{2^k} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{2^{k\alpha}} > 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \overbrace{\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}}^{2 \text{ termes}} + \overbrace{\frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha}}^{4 \text{ termes}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{k\alpha}} + \dots + \frac{1}{2^{k\alpha}}}_{2^{k-1} \text{ termes}} =$$

$$2^{k-1} \leq n < 2^k$$

$$0<\alpha<1 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{2^{k\alpha}}$$

$$= 1 + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^j}{2^{(j+1)\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} 2^{j(1-\alpha)}}$$

sèrie geomètrica no convergent, ja que la raó $2^{1-\alpha} \underset{0<\alpha<1}{>} 1$

Pertant, $(X_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ no està fitada superiorment $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no està fitada superiorment. En ser creixent, $\lim_n x_n = +\infty$.

Tema 3: CONTINUÏTAT I LÍMITS DE FUNCIONS:

① Proveu que si $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua en $a \in A$, també ho és $|f|$. Doneu un exemple de funció discontínua amb valor absolut continu.

Lema: (Desigualtat triangular inversa):

$$||x|-|y|| \leq |x-y|$$

dem:

$$\left.\begin{array}{l} |x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y| \\ |y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x| \Rightarrow |x|-|y| \geq -|x-y| \end{array}\right\} \Rightarrow ||x|-|y|| \leq |x-y|$$

∎

f contínua en $a \in A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $|f(x)-f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ tal que $|x-a| < \delta$.

$|f|$ contínua en $a \in A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $||f(x)|-|f(a)|| \leq |f(x)-f(a)| < \varepsilon$ $\forall x \in A$ tal que $|x-a| < \delta$

Alternativa: Composició de funcions contínues és contínua.

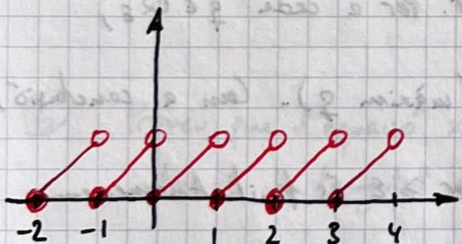
Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| = 1$$

② Denotem per $[x]$ la part entera de x, el major nombre enter més petit o igual a x. Feu un esquema de les gràfiques de les funcions següents i estudieu la seva continuïtat:

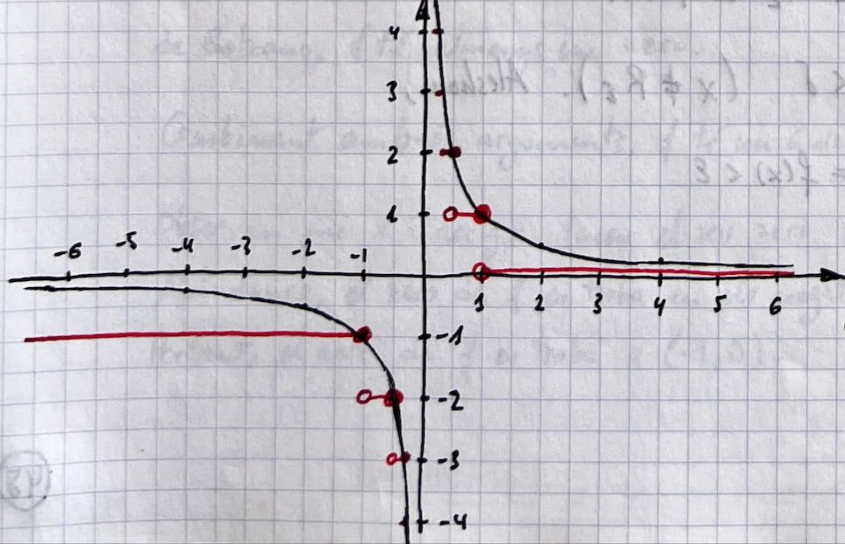
(a) $f(x) = x - [x]$



Estudiem la continuïtat:

- $a \notin \mathbb{Z}$. f és contínua en a per ser resta de funcions contínues.
- $a \in \mathbb{Z}$. $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = 0 \end{array}\right\}$ f no és contínua en a.

(b) $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$



Estudiem la continuïtat:

- $f(x)$ és contínua si $\frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$
- $x = 0$: $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ f discontínua en $x = 0$
- $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to \frac{1}{n}^+} f(x) = n-1 \\ \lim_{x \to \frac{1}{n}^-} f(x) = n \end{array}\right\}$ f discontínua en $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

③ Estudieu la continuïtat de la funció $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \text{ o } x \text{ és irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ (fracció irreduïble)} \end{cases}$$

(funció de Thomae)

Veurem que f és discontínua en tot racional de $(0,1]$ i contínua en $x=0$ i en $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Sigui $r = \frac{p}{q} \in (0,1]$ un racional. $f(r) = \frac{1}{q}$. Sigui $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{1}{q}$, per exemple $\varepsilon = \frac{1}{2q}$. $\forall \delta > 0$, en $(r-\delta, r+\delta) \cap [0,1]$ hi ha irracionals. Sigui x un d'aquests irracionals. Aleshores,

$$|f(x) - f(r)| = \frac{1}{q} - 0 = \frac{1}{q} > \frac{1}{2q} = \varepsilon$$

i per tant, f és discontínua en r.

Sigui $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \cap [0,1]$ o $\alpha = 0$. Donat $\varepsilon > 0$, triem tots els punts de $[0,1]$ on f pren valors més grans que ε. Aquests són els punts $r = \frac{p}{q}$ tals que $\frac{1}{q} \geq \varepsilon$ (i.e. $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$). Fixat $\varepsilon > 0$, els $q \in \mathbb{N}$ tals que $\frac{1}{q} \geq \varepsilon$ són un conjunt finit. Anomenem Q_ε a aquest conjunt finit. Per a cada $q \in Q_\varepsilon$, les fraccions de la forma $\frac{p}{q} \in (0,1]$ són finites (màxim q). Com a conclusió, el nombre de racionals de $(0,1]$ on f pren un valor $\geq \varepsilon$ és finit. Anomenem R_ε aquest conjunt.

$\alpha \notin R_\varepsilon$. $\forall r \in R_\varepsilon$, $|\alpha - r| > 0$. Sigui $\delta = \min\{|\alpha - r| : r \in R_\varepsilon\} > 0$.

Notem que δ existeix ja que R_ε és finit.

$\forall x \in [0,1]$ tal que $0 < |x - \alpha| < \delta$ $(x \notin R_\varepsilon)$. Aleshores,

$$|f(x) - \underbrace{f(\alpha)}_{0}| = f(x) < \varepsilon$$

Per tant, f és contínua en α.

④ Sigui $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Suposem que $a \leq f(x) \leq b$ per tot $x \in [a,b]$. Proveu que existeix algun punt $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

Considerem la funció $g(x) = f(x) - x$. g és contínua.

Observem que $g(a) = f(a) - a \geq 0$,

$g(b) = f(b) - b \leq 0$.

Si $g(a) = 0 \Rightarrow f(a) = a \Rightarrow c = a$.

Si $g(b) = 0 \Rightarrow f(b) = b \Rightarrow c = b$.

Si $\underset{0}{\underset{\vee}{g(a)}}, \underset{0}{\underset{\wedge}{g(b)}} \neq 0 \Rightarrow$ Pel Teorema de Bolzano, $\exists c \in (a,b)$ tal que $g(c) = 0$.

En aquest cas, $f(c) = c$, com volíem veure.

⑤ Sigui $a > 1$. Proveu que l'equació $x + e^{-x} = a$ té almenys una solució positiva i una negativa.

Considerem la funció $g(x) = x + e^{-x} - a$. Notem que g és contínua.

Observem que $g(0) = 1 - a < 0$.
A més, $g(a) = e^{-a} > 0$
$\Bigg\} \Rightarrow$ Pel Teorema de Bolzano, $\exists c \in (0,a)$ tal que $g(c) = 0 \Leftrightarrow c + e^{-c} = a$.

Per altra banda, $g(-a) = e^{a} - 2a > 0$. $\Rightarrow$ Pel Teorema de Bolzano, $\exists c \in (-a, 0)$ tal que $g(c) = 0 \Leftrightarrow c + e^{-c} = a$.

⑥ Proveu que l'equació $x + e^{x} + \operatorname{arctg} x = 0$ té una sola solució real. Doneu un interval de longitud 1 en el qual es trobi aquesta solució.

Sigui $f(x) = x + e^{x} + \operatorname{arctg} x$. Observem que f és estrictament creixent i contínua. Aleshores, f té, com a molt, un zero.

Per altra banda, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Aleshores, pel Teorema de Bolzano, f té almenys un zero.

Combinant ambdós arguments, f té un únic zero. Ara cal fitar-lo.

Observem que x i $\operatorname{arctg} x$ tenen el seu zero en $x = 0$. Aleshores, $f(0) = 1$. Així doncs, el zero de f es troba en els negatius. Provem: $f(-1) = -1 + \frac{1}{e} - \frac{\pi}{4} < 0$. Per tant, el zero de f es troba a $(-1, 0)$.

(7) (a) Sigui $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua amb $f(a)<f(b)$. Donat $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, proveu que hi ha algun punt $c \in \left[a, b-\frac{b-a}{n}\right]$ tal que

$$f\left(c+\frac{b-a}{n}\right)-f(c)=\frac{f(b)-f(a)}{n}$$

Donat $n \geq 2$, ens preguntem si hi ha algun interval de longitud $\frac{b-a}{n}$ en el qual l'increment de f sigui $\frac{f(b)-f(a)}{n}$.

Dividim l'interval $[a,b]$ en n intervals de longitud $\frac{b-a}{n}$. Aquests intervals són de la forma $[x_k, x_{k+1}]$ on $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k=0,1,\dots,n-1$.

Evidentment, la suma dels increments de f en cadascun dels n intervals $[x_k, x_{k+1}]$ és igual a l'increment de f en $[a,b]$:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{k+1})-f(x_k)\right)}_{\text{suma telescòpica.}} = f(b)-f(a)$$

Com la suma té n sumands, o bé tots els sumands són iguals a $\frac{f(b)-f(a)}{n}$, o bé algun d'ells és més gran que $\frac{f(b)-f(a)}{n}$, i per tant algun altre serà més petit.

Definim

$$g:\left[a, b-\frac{b-a}{n}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f\left(x+\frac{b-a}{n}\right)-f(x)$$

Observem que $g(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$.

Ara, tal i com hem dit,

- O bé $\forall k=0,1,\dots,n-1$, $g(x_k)=\frac{f(b)-f(a)}{n}$ i, en aquest cas,
$$f(x_{k+1})-f(x_k)=\frac{f(b)-f(a)}{n}$$
- O bé hi ha punts x_p, x_q tals que $g(x_p) < \frac{f(b)-f(a)}{n} < g(x_q)$.

En aquest cas, com que f (i per tant g) és contínua, pel teorema de Bolzano, $\exists \tilde{x} \in (x_p, x_q)$ tal que $g(\tilde{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{n}$. És a dir,

$$f\left(\tilde{x}+\frac{b-a}{n}\right)-f(\tilde{x})=\frac{f(b)-f(a)}{n}$$

(b) Un corredor recorre 6 quilòmetres en 30 minuts. Proveu que en algun moment de la seva carrera recorre 1 quilòmetre en exactament 5 minuts.

$$f(0)=0$$
$$f(30)=6$$

Per l'apartat anterior, per $n=6$ existeix $\tilde{t}\in\left[0,30-\frac{30-0}{6}\right]=[0,25]$

tal que $$\underbrace{f\left(\tilde{t}+\frac{30}{6}\right)}_{f(\tilde{t}+5)}-f(\tilde{t})=\frac{f(30)-f(0)}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Aleshores, la distància recorreguda en 5 minuts és 1 km.

(8) Sigui $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ contínua i decreixent. Proveu que hi ha un únic $a\in\mathbb{R}$ tal que $f(a)=a$.

Considerem la funció $g(x)=f(x)-x$. g és estrictament decreixent.

A més, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

Pel Teorema de Bolzano hi ha almenys un real $a\in\mathbb{R}$ tal que $g(a)=0$.

Suposem que n'hi ha dos: $a_1<a_2$ tals que $g(a_1)=g(a_2)=0$. Això contradiu que sigui estrictament decreixent.

Aleshores, $\exists!\, a\in\mathbb{R}$ tal que $g(a)=f(a)-a=0 \iff f(a)=a$. $\blacksquare$

(9) Sigui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua i complint l'equació funcional $f(x)\cdot f(f(x))=1\ \forall x\in\mathbb{R}$. Sabent que $f(1000)=999$, calculeu $f(500)$.

$$f(1000)\cdot f(f(1000))=1\implies f(999)=\frac{1}{999}$$

Com que $\left.\begin{aligned} f(1000)&=999\\ f(999)&=\frac{1}{999}\end{aligned}\right\}$ Pel Teorema dels valors intermedis, $\exists c\in(999,1000)$ tal que $f(c)=500$

Per aquesta c, l'equació funcional implica:

$$\underbrace{f(c)}_{500}\cdot f(500)=1\implies f(500)=\frac{1}{500}$$ $\blacksquare$

(10) Proveu que la funció $f: (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

és bijectiva. Calculeu f^{-1} i comproveu que és una funció contínua.

__Lema__: Tota funció $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ estrictament monòtona té inversa f^{-1} en $f(I)$

__demostració__: És clar que $f: I \rightarrow f(I)$ és exhaustiva. Per veure la injectivitat, prenem $x_1, x_2 \in I$ tals que $x_1 < x_2$. Aleshores, per ser f estrictament monòtona, $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ i per tant és injectiva. ∎

Provarem que f és estrictament creixent:

prenem $x_1 < x_2$ en $(-1,1)$. Volem veure que $f(x_1) < f(x_2)$

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{\frac{1+x_1}{1-x_1}}\right) < \ln\left(\sqrt{\frac{1+x_2}{1-x_2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+x_1}{1-x_1}} < \sqrt{\frac{1+x_2}{1-x_2}} \Leftrightarrow \frac{1+x_1}{1-x_1} < \frac{1+x_2}{1-x_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+x_1)(1-x_2) < (1-x_1)(1+x_2) \Leftrightarrow 1 - x_1x_2 + x_1 - x_2 < 1 - x_1x_2 - x_1 + x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 < x_2 - x_1 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$ com volíem veure.

Aleshores, f és bijectiva i per tant invertible. Trobem la inversa de f:

$$y = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \Rightarrow e^y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow e^{2y} - xe^{2y} = 1 + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = x$$

Aleshores, $f^{-1}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, que és contínua.

(11) Sigui $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Proveu que

(a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$,

(b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$

(a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ tal que si $x\in(0,\delta)$ $|f(x)-L|<\varepsilon$

Fent el canvi $y=\frac{1}{x}$, tenim que

$\lim_{y\to+\infty} f\left(\frac{1}{y}\right) = L \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $\frac{1}{y}\in(0,\delta)$ $\left|f\left(\frac{1}{y}\right)-L\right|<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$y>\delta^{-1}=M$

$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = L \iff \forall\varepsilon>0\ \exists M>0$ tal que si $x>M$ $\left|f\left(\frac{1}{x}\right)-L\right|<\varepsilon$

(b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = L \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $x\in(-\delta,0)$ $|f(x)-L|<\varepsilon$

Fent el canvi $y=\frac{1}{x}$, tenim que

$\lim_{y\to-\infty} f\left(\frac{1}{y}\right) = L \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $y<\frac{-1}{\delta}=M$ $\left|f\left(\frac{1}{y}\right)-L\right|<\varepsilon$

(12) Sigui $f:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ la funció definida per $x\in(0,1)$ com:

$$f(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{x(x-1)}$$

Proveu que $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ i que $\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$. Deduïu que la imatge de f és tot $\mathbb{R}$.

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{Ax-A+Bx}{x(x-1)}=\frac{(A+B)x-A}{x(x-1)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\Rightarrow B=1.\\ A=-1\end{cases}$$

Així,

$$f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$$

Ara,

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)=+\infty.$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)=-\infty.$$

Provem ara que $\mathrm{Im}\, f=\mathbb{R}$:

Sigui $y\in\mathbb{R}$. Volem trobar $x\in(0,1)$ tal que $f(x)=y$.

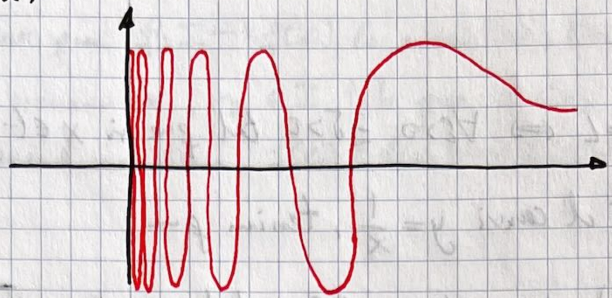
$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty\Rightarrow\exists x_0 \text{ tal que } f(x_0)>y\\ \lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty\Rightarrow\exists \underset{\to x_0}{x_1} \text{ tal que } f(x_1)<y\end{array}\right\}$ Pel Teorema dels valors intermedis $\exists x\in(x_0,x_1)$ tal que $f(x)=y$. ∎

(13) Sigui $\alpha \in \mathbb{R}$ i $f: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $f(0)=0$ i, per $x>0$,

$$f(x) = x^{\alpha} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Estudieu la continuïtat de f segons els valors d'α.

- $\underline{\alpha = 0}$: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no té límit en $x=0$ (discontinuïtat essencial).



- $\underline{\alpha > 0}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{(zero per fitat)}$$

- $\underline{\alpha < 0}$: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\beta}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no existeix (discontinuïtat essencial).

$\beta = -\alpha$

$\beta > 0$

(14) Siguin $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les funcions definides per:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{x}/x & x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

Estudieu la continuïtat de f i g en tot punt de $\mathbb{R}$ i l'existència de límits de f i g a $+\infty$ i $-\infty$.

(a) $$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1 \end{aligned}\right\} \text{Discontinuïtat de salt en } x=0.$$

Pertant f és contínua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

(b) $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$

} Discontinuïtat assimptòtica en $x=0$.

$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$

$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt[5]{x} = 1$

} Contínua en $x=1$.

Pertant, g és contínua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt[5]{x} = +\infty$, $\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$.

(15) Sigui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funció contínua no nul·la tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Proveu que si $f(x)>0$ per tot $x\in\mathbb{R}$, llavors f assoleix un màxim absolut sobre $\mathbb{R}$.

Sigui $\varepsilon = f(0)$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \exists M>0$ tal que $f(x)<\varepsilon$ $\forall x>M$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \exists N<0$ tal que $f(x)<\varepsilon$ $\forall x<N$.

f és contínua en $[N,M]$. Aleshores, pel Teorema de Weierstrass, f té un màxim en $[N,M]$, diguem-ne a $\tilde{x}$.

Per una banda, $f(\tilde{x}) \geq f(x)$ $\forall x\in[N,M]$. Per altra banda, $f(\tilde{x}) \geq f(0) > f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus[N,M]$. Aleshores $\tilde{x}$ és un màxim global de f. ■

(16) Sigui f una funció contínua amb límit finit tant a $+\infty$ com a $-\infty$. Proveu que f és fitada i uniformement contínua. Doneu un exemple d'una funció fitada i uniformement contínua, amb domini tot $\mathbb{R}$, que no verifiqui les hipòtesis anteriors.

Comencem veient que f és fitada.

Suposem $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$.

Aleshores, $\exists M>0$ tal que $L_1-1 < f(x) < L_1+1$ $\forall x\geq M$.

$\exists N<0$ tal que $L_2-1 < f(x) < L_2+1$ $\forall x\leq N$.

Per altra banda, f és contínua en $[N,M]$. Aleshores, pel Teorema de Weierstrass, $\exists A,B\in\mathbb{R}$ tals que $A\leq f(x)\leq B$ $\forall x\in[N,M]$.

Notem que $\min\{L_1-1, L_2-1, A\} \leq f(x) \leq \max\{L_1+1, L_2+1, B\}$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Aleshores f és fitada.

Volem veure ara que f és uniformement contínua.

Donat $\varepsilon>0$, cal provar que $\exists\delta>0$ tal que $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $|x-y|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Pel Teorema de Heine-Cantor, com l'interval $[N,M]$ és tancat i fitat i f és contínua en $[N,M]$, aleshores f és uniformement contínua en $[N,M]$.
Aleshores, donat $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que $\forall x,y\in[N,M]$, $|x-y|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$.

Ara, si $|x-y|<\delta$, $x,y\in\mathbb{R}$, tenim cinc casos possibles:

(i) $x,y>M$:

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-L_1|+|L_1-f(y)|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

(ii) $x,y<N$:

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-L_2|+|L_2-f(y)|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

(iii) $x<N$, $y\in[N,M]$:

$$|f(x)-f(y)|\leq\underbrace{|f(x)-L_2|}_{\wedge\ \frac{\varepsilon}{4}}+\underbrace{|L_2-f(N)|}_{\wedge\ \varepsilon/4}+\underbrace{|f(N)-f(y)|}_{\wedge\ \varepsilon/2}<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ja que $|y-N|\leq|y-x|<\delta$

(iv) $x\in[N,M]$, $y>M$:

$$|f(x)-f(y)|\leq\underbrace{|f(x)-f(M)|}_{\wedge\ \varepsilon/2}+\underbrace{|f(M)-L_1|}_{\wedge\ \varepsilon/4}+\underbrace{|L_1-f(y)|}_{\wedge\ \varepsilon/4}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$$

(v) $x,y\in[N,M]$:

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

En qualsevol cas, $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$ tals que $|x-y|<\delta$.

Com a exemple de funció fitada, uniformement contínua a tot $\mathbb{R}$ que no verifiqui les hipòtesis de l'enunciat, considerem la funció $f(x)=\sin x$

$$\underset{x>y}{|\sin x-\sin y|}=2\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq 2\,\frac{|x-y|}{2}=|x-y|$$

Aleshores f és uniformement contínua però f no té límit a $+\infty$ ni $-\infty$.

(17) Estudieu si són uniformement contínues les funcions següents:

(a) $f(x)=\frac{1}{x}$ a l'interval $[1,+\infty)$.

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{|x-y|}{xy}\underset{x,y\geq 1}{\leq}|x-y|$$

Fent $\delta=\varepsilon$, f és uniformement contínua.

(b) $f(x)=\frac{1}{x}$ a l'interval $(0,1]$.

Sigui $\varepsilon_0=1$. Donat $\delta>0$, sigui $n>1$ tal que $\frac{1}{n}<\delta$ i considerem els punts $x=\frac{1}{n}$, $y=\frac{1}{n^2}$, $x,y\in(0,1)$

$$|x-y|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right|=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}<\delta.$$

$$|f(x)-f(y)|=|n-n^2|=n(n-1)>n>1=\varepsilon_0.$$

Això implica que per cada $\delta>0$, trobem punts x,y incomplint la condició.

Aleshores $f(x)=\frac{1}{x}$ en $(0,1]$ no és uniformement contínua.

(c) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ a tot $\mathbb{R}$.

Notem que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ i f és contínua a $\mathbb{R}$.

Aleshores, pel problema 16, f és uniformement contínua.

(18) Sigui $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una funció contínua al punt $x=0$ i verificant l'equació funcional de Cauchy:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \text{per tot } x,y\in\mathbb{R}.$$

Proveu que f és contínua a tot $\mathbb{R}$ i que $f(x)=ax$ per una certa constant $a\in\mathbb{R}$.

Indicació: Proveu primer que $f(r)=ar\ \forall r\in\mathbb{Q}$.

Notem que $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)\longrightarrow f(0)=0$.

Ara, $f(x+h)=f(x)+f(h)\longrightarrow f(x+h)-f(x)=f(h)$

$$\lim_{h\to 0}\left(f(x+h)-f(x)\right)=\lim_{h\to 0}f(h)\underset{f \text{ és contínua en } h=0}{=}0$$

Aleshores, f és contínua en tot $\mathbb{R}$.

Definim $a=f(1)$. Observem que, si $n\in\mathbb{N}$, $f(n)=f(n\cdot 1)=nf(1)=na$.

Notem que $f(x)=-f(-x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. f és senar.

Sigui $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Aleshores,

$$q \cdot f(r) = f(qr) = f(p) = p \cdot f(1) = ap \Rightarrow f(r) = ar \quad \forall r \in \mathbb{Q}.$$

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sigui $(x_n)_n$ una successió de racionals tal que $x_n \xrightarrow[n]{} x$.
Per la continuïtat de f i, com que $f(x_n) = a x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, tenim

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} a x_n = ax$$

Aleshores, f és contínua a tot $\mathbb{R}$ i $f(x) = ax \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(19) Considerem l'equació $x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x = 1$, per a tot $n \geq 1$ enter.

(a) Fixat n, demostreu que l'equació té una única solució real positiva. Denoteu-la per α_n.

Sigui $n = 1$, l'equació $x = 1$ té una única solució $\alpha_1 = 1$.
Sigui $n > 1$.

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - 1$$

Notem que $f_n(0) = -1 < 0$.

$$f_n(1) = n - 1 > 0$$

Aleshores, pel Teorema de Bolzano, f_n té almenys una arrel a $(0,1)$.
A més, com f_n és estrictament creixent, $\exists! \alpha_n \in (0,1)$ tal que $f_n(\alpha_n) = 0$.

(b) Demostreu que la successió $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és decreixent i trobeu-ne el límit.

Efectivament,

$$f_{n+1}(0) = -1 < 0$$

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} + \underbrace{\alpha_n^n + \dots + \alpha_n - 1}_{= f_n(\alpha_n) = 0} = \alpha_n^{n+1} > 0$$

Aleshores, pel Teorema de Bolzano, $\exists \alpha_{n+1} \in (0, \alpha_n)$ tal que $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$.
Com que $0 < \alpha_{n+1} < \alpha_n$, veiem que la successió $(\alpha_n)_n$ és decreixent i fitada inferiorment per 0. Aleshores, α_n té límit. Calculem ara el límit.

Observem que

$$0 = f_n(\alpha_n) = \alpha_n^n + \alpha_n^{n-1} + \dots + \alpha_n - 1 = \frac{\alpha_n^{n+1} - \alpha_n}{\alpha_n - 1} - 1 =$$

Suma geomètrica de raó α_n.

$$= \frac{\alpha_n^{n+1} - 2\alpha_n + 1}{\alpha_n - 1} \Rightarrow \alpha_n^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$$

Passant al límit, com que $\alpha_n \in (0,1)$, $\lim_n \alpha_n^{n+1} = 0$,

$$0 = \lim_n \left(\alpha_n^{n+1} - 2\alpha_n + 1\right) = 0 - 2\lim_n \alpha_n + 1 \Rightarrow \lim_n \alpha_n = \frac{1}{2}$$

(20) Sigui I un interval tancat, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció i suposem que existeix $\alpha \in (0,1)$ tal que, per a tot $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha \cdot |x-y|.$$

Es diu llavors que f és contractiva en I. Suposem, a més, que $f(x) \in I$ per tot $x \in I$. Donat un punt $a \in I$, definim $x_1 = a$ i, recurrentment $x_{n+1} = f(x_n)$ per tot $n \in \mathbb{N}$.

(a) Proveu que la successió $(x_n)_n$ és de Cauchy i, per tant convergent, cap a un punt fix x de f, és a dir, $f(x) = x$.

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \alpha \cdot |x_n - x_{n-1}|$$

Ara, pel problema 16, apartat (b), del tema de successions, la successió x_n és convergent.

Notem que f és contínua per verificar una condició Lipschitz. Aleshores, per pas al límit, el límit de x_n, x, ha de ser tal que $f(x) = x$.

(b) Proveu que aquest punt fix és únic.

Suposem que hi ha dos punts fixs diferents x, y. Aleshores $f(x) = x$, $f(y) = y$. Per tant,

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x-y|$$

$$\Downarrow$$

$$|x-y| \leq \alpha|x-y| \underset{\alpha \in (0,1)}{<} |x-y| \qquad \text{Contradicció.}$$

Aleshores hi ha un únic punt fix.

(c) Estudieu la convergència de la successió $(x_n)_n$ definida per $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$ i calculeu el seu límit.

$$x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n} = f(x_n)$$

Com que $0 < x_n < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2-\sqrt{2}} < x_{n+1} = \sqrt{2-x_n} < \sqrt{2}$

Si $x, y \in (0, \sqrt{2})$, $f(x) = \sqrt{2-x}$ i tenim que

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{2-x} - \sqrt{2-y}| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{2-x} + \sqrt{2-y}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|x-y|}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{|x-y|}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Aleshores, f és contractiva amb $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

Pels apartats anteriors, x_n convergeix cap al punt fix de f:

$$\sqrt{2-x} = x \iff x^2+x-2=0 \iff (x-1)(x+2)=0 \iff$$

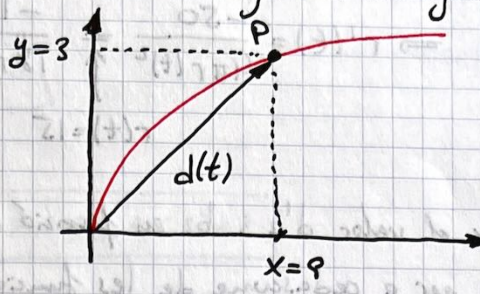
$$\iff x=1,\ x=-2.$$

Clarament, el punt fix és $x=1$. Aleshores $x_n \xrightarrow[n]{} 1$.

Tema 4: DERIVABILITAT:

① Un punt P es mou sobre la part de la paràbola $x=y^2$ situada al primer quadrant de forma que la seva coordenada x augmenta a raó de 5 cm/s. Calculeu la velocitat a la qual el punt P s'allunya de l'origen quan $x=9$.

$$\left.\begin{array}{l} d(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)} \\ x(t)=5t \\ y(t)=\sqrt{5t} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$



$\Rightarrow d(t)=\sqrt{25t^2+5t}$ distància de P a l'origen en funció de t.

$$\left.\begin{array}{l} d'(t)=\dfrac{50t+5}{2\sqrt{25t^2+5t}} \\ x(t)=9 \Longleftrightarrow t=\dfrac{9}{5} \end{array}\right\} \Longrightarrow d'\left(\frac{9}{5}\right)=\frac{95}{6\sqrt{10}} \text{ cm/s.}$$

② El volum d'un cub augmenta a una raó de 70 cm^3/minut. Calculeu la velocitat a la qual augmenta l'àrea del cub quan la longitud del costat és de 12 cm.

El volum en funció del temps és $V(t)=c(t)^3$ on $c(t)$ és la longitud del costat en funció del temps. $V'(t)=3c(t)^2c'(t)=70$.

Per altra banda, la superfície del cub en funció del temps és $S(t)=6\,c(t)^2$, i per tant, $S'(t)=12\,c(t)\cdot c'(t)$.

Com que $c'(t)=\dfrac{70}{3c(t)^2}$, aleshores, $S'(t)=12\,c(t)\cdot\dfrac{70}{3c(t)^2}=\dfrac{12\cdot 70}{3c(t)}$

Si $c(t)=12$, $\quad S'(t)=\dfrac{70}{3}$ cm^2/min.

③ Una bola de gel esfèrica es desfà de manera uniforme a tota la superfície, a raó de $50\,cm^3/min$. Amb quina velocitat disminueix el radi de la bola quan aquest mesura 15 cm?

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3 \Rightarrow V'(t) = 4\pi r(t)^2 \cdot r'(t) = -50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r'(t) = \frac{-50}{4\pi r(t)^2} \underset{r(t)=15}{=} \frac{-1}{18\pi}\ cm/min$$

④ Calcular el valor d'a i b en funció de c, perquè existeixi la derivada en el punt c per a cadascuna de les funcions següents:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le c \\ ax+b & x > c \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1/|x| & |x| > c \\ a+bx^2 & |x| \le c \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \cos x & x \le c \\ ax+b & x > c \end{cases}$$

(a) Imposem continuïtat a f:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to c^-} f(x) &= c^2 \\ \lim_{x\to c^+} f(x) &= ac+b \end{aligned}\right\} \text{Imposem continuïtat, } c^2 = ac+b.$$

Igualem les dues derivades en c:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to c^-} f'(x) &= 2c \\ \lim_{x\to c^+} f'(x) &= a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{a = 2c}$$

Ara, usant la segona equació, la primera ens dóna $\boxed{b = -c^2}$

(b) Imposem continuïtat en g:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to c^+} g(x) &= a+bc^2 \\ \lim_{x\to c^-} g(x) &= \frac{1}{c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a+bc^2 = \frac{1}{c}$$

Igualem les dues derivades:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to c^+} g'(x) &= 2bc \\ \lim_{x\to c^-} g'(x) &= \frac{-1}{c^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2bc = \frac{-1}{c^2} \Rightarrow \boxed{b = \frac{-1}{2c^3}}$$

I la primera equació ens dóna $\boxed{a = \frac{3}{2c}}$

(c) Imposem continuïtat a h:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to c^-} h(x) = \cos c \\ \lim\limits_{x\to c^+} h(x) = ac+b\end{array}\right\} \Rightarrow \cos c = ac+b$$

Igualem les dues derivades:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to c^-} h'(x) = -\sin c \\ \lim\limits_{x\to c^+} h'(x) = a\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = -\sin c}$$

Ara, de la primera equació obtenim $\boxed{b = \cos c + c\sin c}$

5) Calculeu directament, aplicant la definició, la derivada de les funcions següents en un punt genèric a del seu domini.

(a) $f(x) = x^3$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2.$$

(b) $f(x) = \sqrt{x+7}$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+7} - \sqrt{x+7}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h+7} - \sqrt{x+7})(\sqrt{x+h+7} + \sqrt{x+7})}{h(\sqrt{x+h+7} + \sqrt{x+7})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h+7-x-7}{h(\sqrt{x+h+7} + \sqrt{x+7})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+7} + \sqrt{x+7}} = \frac{1}{2\sqrt{a+7}}$$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h+2} - \frac{1}{a+2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{a+2-a-h-2}{(a+h+2)(a+2)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(a+h+2)(a+2)} = \frac{-1}{(a+2)^2}$$

6) Suposem que f és una funció que verifica una desigualtat del tipus $|f(x)| \le |x|^r$ a algun interval obert que conté el punt 0, on $r > 1$. Proveu que f és derivable en 0 i calculeu $f'(0)$.

Com que $|f(x)| \le |x|^r \Rightarrow f(0) = 0$.

Ara, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{h}\right| \le \lim_{h\to 0} |h|^{r-1} = 0$

Per tant, $\displaystyle f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = 0.$

7. Calculeu la derivada en tot punt de la funció definida per:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

Si $x\neq 0$, f és derivable i $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$.

Considerem ara $x=0$:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\underset{\downarrow\, 0}{h}\,\underbrace{\sin\left(\frac{1}{h}\right)}_{\text{fitat}}=0$$

8. Calculeu les equacions de les rectes tangent i normal a una elipse d'equació

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

en un punt (x_0,y_0) genèric d'aquesta.

Usem la derivació implícita per trobar el pendent de la recta tangent a la corba en un punt qualsevol.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Downarrow \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0\Rightarrow y'=-\frac{xb^2}{ya^2}$$

Pertant, en un punt (x_0,y_0) de l'elipse tenim pendent $m=\frac{-x_0b^2}{y_0a^2}$.

La recta tangent és

$$y-y_0=\frac{-x_0b^2}{y_0a^2}(x-x_0)\Rightarrow a^2y_0y+b^2x_0x=\underbrace{a^2y_0^2+b^2x_0^2}_{=\,a^2b^2 \;\leftarrow\text{ Eq. Elipse.}}\Rightarrow$$

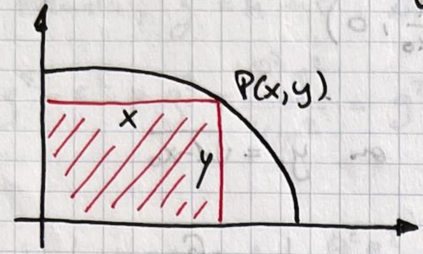
$$\Rightarrow\boxed{a^2y_0y+b^2x_0x=a^2b^2}$$

El pendent de la recta normal és $m_\perp=\frac{y_0a^2}{x_0b^2}$. La recta normal és

$$y-y_0=\frac{y_0a^2}{x_0b^2}(x-x_0)\Rightarrow\boxed{x_0b^2y-y_0a^2x=x_0y_0(b^2-a^2)}$$

⑨ Determineu el rectangle amb costats paral·lels als eixos coordenats inscrit a l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ i que tingui àrea màxima.

Per simetria, podem restringir-nos al primer quadrant.



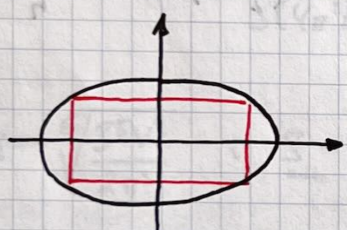
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$S(x,y)=x\cdot y=bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=S(x)$$

$$S'(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+bx\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{-2x}{a^2}=0 \Leftrightarrow$$

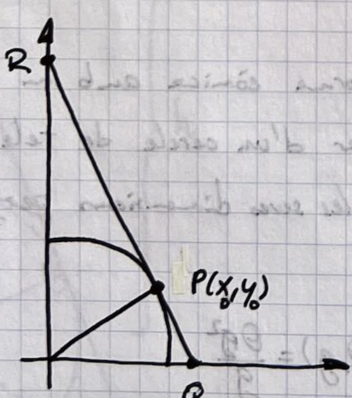
$$\Leftrightarrow 1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow x^2=\frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Ara, com que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{b}{\sqrt{2}}$



$$\boxed{\text{Àrea}=2x\cdot 2y=2ab}$$

⑩ Trobeu un punt P de la circumferència $x^2+y^2=1$ amb coordenades positives i tal que el triangle amb vèrtexs el punt $(0,0)$ i les interseccions de la tangent a la circumferència en el punt P amb els eixos de coordenades tingui àrea mínima.



$$x^2+y^2=1.$$
$\Downarrow$ derivem implícitament

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{-x}{y}$$ (Alternativament, y' és la pendent de la recta ortogonal al radi en P).

$$y-y_0=\frac{-x_0}{y_0}(x-x_0) \Rightarrow yy_0+xx_0=\underbrace{x_0^2+y_0^2}_{=1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{yy_0+xx_0=1}$$

Calculem les interseccions amb els eixos coordenats:

$$x=0: \quad yy_0 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{y_0} \Rightarrow R = \left(0, \frac{1}{y_0}\right)$$

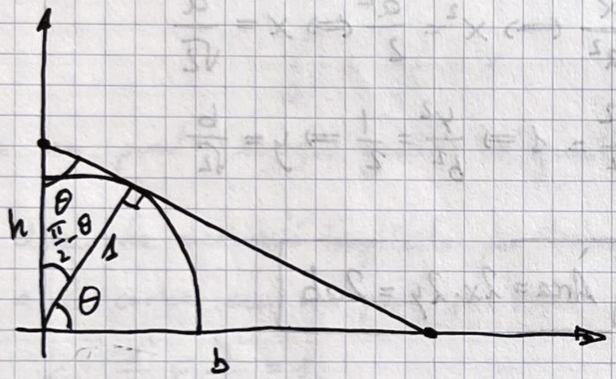
$$y=0: \quad xx_0 = 1 \rightarrow x = \frac{1}{x_0} \Rightarrow Q = \left(\frac{1}{x_0}, 0\right)$$

L'àrea del triangle és $S = \dfrac{1}{2x_0y_0}$ on $y_0 = \sqrt{1-x_0}$

Aleshores, $S'(x_0) = \dfrac{2x_0^2 - 1}{2x_0^2(1-x_0)^{3/2}} = 0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

I $y_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. El punt P és el punt $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

• Resolució alternativa:



$$\cos\theta = \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{1}{\cos\theta}$$

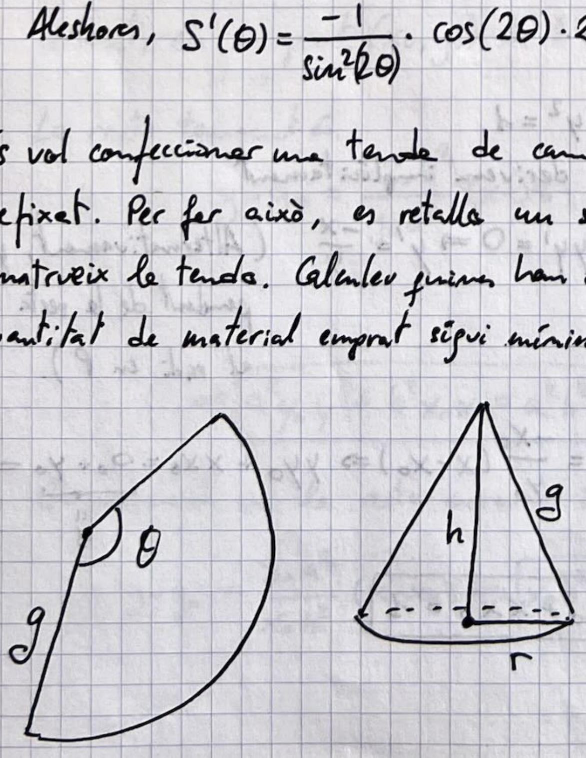
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta = \frac{1}{h} \Rightarrow h = \frac{1}{\sin\theta}$$

Així doncs, $S(\theta) = \dfrac{1}{2\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{1}{\sin(2\theta)}$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

Aleshores, $S'(\theta) = \dfrac{-1}{\sin^2(2\theta)} \cdot \cos(2\theta)\cdot 2 = 0 \Leftrightarrow \cos(2\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\theta = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$.

(11) Es vol confeccionar una tenda de campanya de forma cònica amb un volum prefixat. Per fer això, es retalla un sector circular d'un cercle de tela i es construeix la tenda. Calculeu quines han de ser totes les seves dimensions perquè la quantitat de material emprat sigui mínima.



$$S(\theta, g) = \frac{\theta g^2}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Volem minimitzar S deixant V fix.

La base de la tenda té longitud $2\pi r$ i ha de ser igual a θg. Així,

$$2\pi r = \theta g \Rightarrow r = \frac{\theta g}{2\pi}$$

Per altra banda, $g^2 = h^2 + r^2$. Aleshores,

$$h^2 = g^2 - r^2 = g^2 - \frac{\theta^2 g^2}{4\pi^2} = g^2\left(1 - \frac{\theta^2}{4\pi^2}\right) \rightarrow h = \frac{g\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}}{2\pi}$$

Pertant,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{\theta^2 g^2}{4\pi^2}\frac{g\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}}{2\pi} = \frac{g^3\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}{24\pi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = \frac{2(3\pi^2 V)^{1/3}}{\theta^{2/3}(4\pi^2 - \theta^2)^{1/6}}$$

Ara,

$$S(\theta, g) = \frac{\theta g^2}{2} = \frac{(9\pi^4 V^2)^{1/3}}{(4\pi^2\theta - \theta^3)^{1/3}} = S(\theta).$$

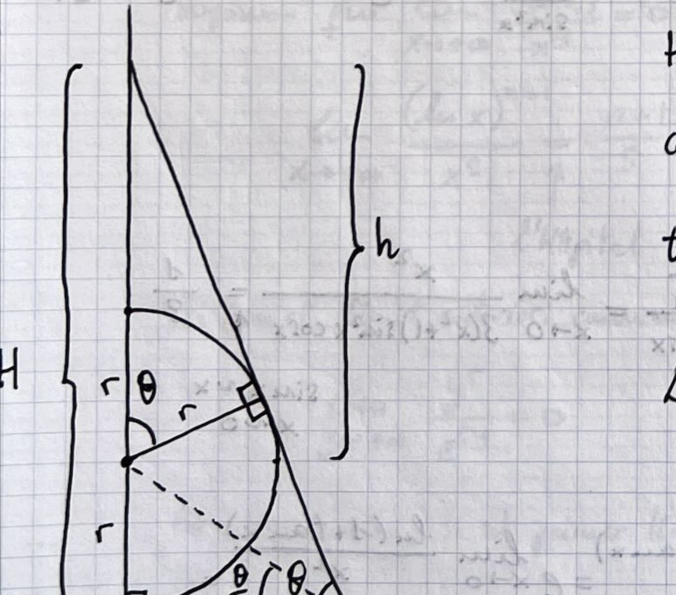
Derivant,

$$S'(\theta) = (9\pi^4 V^2)^{1/3}\frac{3\theta^2 - 4\pi^2}{3(4\pi^2\theta - \theta^3)^{4/3}} = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Finalment,

$$g = \sqrt[6]{\frac{3^5 V^2}{2\pi^2}} \quad i \quad S_{min} = 3\sqrt[6]{\frac{3\pi^2 V^4}{4}}.$$

(12) Demostra que de tots els triangles isòscels que podem circumscriure a una circumferència de radi r, el que té àrea mínima és l'equilàter d'alçada $3r$.



$$H = h + r$$

$$\cos\theta = \frac{r}{h} \Rightarrow h = \frac{r}{\cos\theta}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{r}{b} \Rightarrow b = \frac{r}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

L'àrea de tot el triangle isòsceles és

$$S(\theta) = b\cdot H = \left(r + \frac{r}{\cos\theta}\right)\frac{r}{\tan\frac{\theta}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(\theta) = r^2\left(\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta}\right)\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

Després d'algunes manipulacions trigonomètriques,

$$S'(\theta) = r^2\frac{(1-2\cos\theta)\cos^2(\theta/2)}{\cos^2\theta\,\sin^2(\theta/2)}$$

L'únic zero de la derivada el trobem quan $1-2\cos\theta = 0$, és a dir, quan $\theta = \frac{\pi}{3}$, com volíem veure. Ara podem comprovar que

$$H = r + \frac{r}{\cos\theta} = r + 2r = 3r.$$

L'àrea del triangle és $S = 3r^2\sqrt{3}$.

(13) Calculeu el límit, en el punt a indicat a cada cas, de cadascuna de les funcions següents:

(a) $f(x) = (\sin x + \cos x)^{1/x}$, $a = 0$.

$$\lim_{x\to 0} (\sin x + \cos x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\sin x + \cos x)^{1/x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(\sin x + \cos x)} \underset{\substack{\ln x \sim x-1 \\ \text{quan } x\sim 1}}{=} \lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin x + \cos x - 1}{x}} = e$$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \cos(0) = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \sin(0) = 0$

(Definició de derivada)

(b) $f(x) = (\cot x)^{\sin x}$, $a = 0$

$$\lim_{x\to 0} (\cot x)^{\sin x} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \cdot \ln(\cot x)} = e^{\lim_{x\to 0} (\underbrace{\sin x \cdot \ln\cos x}_{\downarrow\, 0} - \sin x \ln \sin x)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{-\ln(\sin x)}{1/\sin x}} \underset{\text{Hôpital}}{=} e^{\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}} = e^{\lim_{x\to 0} \sin x} = e^0 = 1.$$

(c) $f(x) = \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{\sin^3 x}$, $a = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{atan} x}{\sin^3 x} \underset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{x^2+1}}{3\sin^2 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3(x^2+1)\sin^2 x \cos x} \underset{\substack{\sin x \sim x \\ x\sim 0}}{=} \frac{1}{3}$$

(d) $f(x) = (1 + \tan x)^{1/x^2}$, $a = 0$

$$\lim_{x\to 0} (1 + \tan x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+\tan x)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\tan x)}{x^2}} \underset{\substack{\ln(1+x)\sim x \\ x\sim 0}}{=}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow\, 1} \frac{1}{x\cos x}} = \begin{cases} +\infty & \text{quan } x\to 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{tg} x)^{1/x^2} = +\infty \\ -\infty & \text{quan } x\to 0^- \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} (1+\operatorname{tg} x)^{1/x^2} = 0 \end{cases}$$

(e) $f(x)=\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$, $a=\dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2} \underset{y=\frac{\pi}{2}-x}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\ln(\cos y)}{4y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{4}\underbrace{\frac{\ln(\cos y)}{\cos y-1}}_{\to 1}\,\underbrace{\frac{\cos y-1}{y^2}}_{\to -\frac{1}{2}} = \frac{-1}{8}.$$

$\to 1$ ja que $\ln t\sim t-1$ quan $t\to 1$

$\to -\frac{1}{2}$ ja que $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ quan $x\to 0$

(f) $f(x)=(x+e^x)^{1/x}$, $a=0$

$$\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+e^x)}{x}} \underset{\text{l'Hôpital}}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{1+e^x}{x+e^x}} = e^2$$

(14) Justifiqueu que per tot $r\in\mathbb{R}$ i tot $s>0$ es verifica:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^r}{x^s}=0\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{e^{sx}}=0\ ,\quad \lim_{x\to 0^+}x^s|\ln x|^r=0$$

Per $r\leq 0$, és evident que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^r}{x^s}=0$

Cal provar-ho per $r>0$. És suficient veure-ho per $n\in\mathbb{N}$. Procedirem per inducció:

Sigui $n=1$. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^s} \underset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{sx^{s-1}} = \frac{1}{s}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^s}=0$$

Suposem que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x^s}=0$. Aleshores,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{n+1}}{x^s} \underset{\text{l'Hôpital}}{=} \frac{n+1}{s}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x^s}=0\text{, com volíem veure.}$$

Si, en el límit anterior, canviem $x=e^y$, obtenim

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y^r}{e^{sy}}=0$$

Per altra banda, si al primer límit fem el canvi $x=\frac{1}{y}$, obtenim

(15) Calculeu el límit, en el punt a que s'indica a cada cas, per les funcions següents:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$, $a = +\infty$. Aquest límit no surt per l'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

Ara, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ per l'exercici anterior

(b) $f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $a = 0$, $a = +\infty$.

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\sin x}_{\downarrow\, 0}\ \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{fitat}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\sin x}_{\text{fitat}}\ \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\downarrow\, 0} = 0$$

(c) $f(x) = \sin\sqrt{1+x} - \sin\sqrt{x}$, $a = +\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sin\sqrt{1+x} - \sin\sqrt{x}\right)$ no és cap de les indeterminacions usuals,

de fet, el límit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin\sqrt{x}$ no existeix.

Per a resoldre el nostre límit, usarem el teorema del valor mig. Apliquem el teorema a la funció $\sin\sqrt{x}$ en l'interval $[x, x+1]$. Aleshores, $\exists y \in (x, x+1)$ tal que

$$\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x} = \frac{\cos\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$$

Prenent valors absoluts,

$$\left|\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right| = \left|\frac{\cos\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{y}} \underset{y>x}{\leq} \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Pertant,

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x} = 0.$$

(d) $f(x)=\left(\cos\frac{\pi}{x+2}\right)^{x^2}$, $a=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{\pi}{x+2}\right)^{x^2} = e^{\lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)\right)} \underset{\substack{\ln t\sim t-1 \\ \text{quan } t\sim 1}}{=} e^{\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)-1\right)} \underset{y=\frac{1}{x}}{=}$$

$$= e^{\lim_{y\to0^+}\frac{\cos\left(\frac{\pi y}{1+2y}\right)-1}{y^2}} = e^{\lim_{y\to0^+}\frac{\cos\left(\frac{\pi y}{1+2y}\right)-1}{\left(\frac{\pi y}{1+2y}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{\pi y}{1+2y}\right)^2}{y^2}} \underset{\substack{1-\cos t\sim\frac{t^2}{2} \\ t\to0}}{=}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\lim_{y\to0^+}\frac{\pi^2y^2}{y^2(1+2y)^2}} = e^{-\frac{\pi^2}{2}}$$

16) Sigui $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable a $\mathbb{R}$ i dos cops derivable en el punt 0, sent a més, $g(0)=0$. Definim $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ com $f(x)=\frac{g(x)}{x}$ si $x\neq0$, $f(0)=g'(0)$. Estudieu la derivabilitat de f. És f' contínua a $x=0$?

Per la regla de la cadena, f és derivable a $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. A més,

$$f'(x)=\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2} \quad \text{per } x\neq0.$$

Per a comprovar la derivabilitat en $x=0$ cal usar la definició:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g'(0)\cdot x}{x^2}\underset{\substack{\text{Teorema de} \\ \text{Taylor-Young}}}{=}\frac{g''(0)}{2}$$

(Alternativa: Hôpital un cop)

> Teorema de Taylor-Young, f n cops derivable en a, $T_n(f,a)$ Taylor d'ordre n en a.
> Aleshores
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n}=0$$

Pertant, f és derivable en $x=0$ i $f'(0)=\frac{g''(0)}{2}$

Estudiem la continuïtat de f' en $x=0$.

Tenim que $\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$ i aquí no podem aplicar l'Hôpital perquè no sabem si g' és derivable. (A l'enunciat ens diuen que és un cop derivable a $\mathbb{R}$). Escribim:

$$\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}=\frac{xg'(x)-xg'(0)+xg'(0)-g(x)}{x^2}=\underbrace{\frac{g'(x)-g'(0)}{x}}_{\downarrow\, g''(0)}-\underbrace{\frac{g(x)-g'(0)x}{x^2}}_{\downarrow\, \frac{g''(0)}{2}} \qquad x\to0$$

i deduïm que $\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{g''(0)}{2}$. Aleshores f' és contínua en $x=0$.

També es pot resoldre usant el següent resultat:

<u>Proposició</u>: $f: I \to \mathbb{R}$ contínua, $a \in I$. Si f és derivable en $I\setminus\{a\}$ i $\lim_{x\to a} f'(x) = L$, aleshores f és derivable en a i $f'(a) = L$ i, per tant, f' és contínua en a.

(17) Calculeu els límits següents:

(a) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4} \underset{\text{l'Hôpital}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3} \underset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2-2(\cos^2 x-\sin^2 x)}{12x^2} =$$

$$\boxed{\text{Alternativa: } x-\sin x \sim \frac{x^3}{6}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos(2x)}{12x^2} \underset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4\sin(2x)}{24x} \underset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{8\cos(2x)}{24} = \frac{1}{3}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x)}{\ln x}} \underset{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})}{=}$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\operatorname{arctg}(\frac{1}{x}))}{-\ln(\frac{1}{x})}} \underset{y=\frac{1}{x}}{=} e^{\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{atan} y)}{-\ln y}} =$$

$$= e^{-\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{atan} y)}{\ln y}} \underset{\text{l'Hôpital}}{=} e^{-\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{(1+y^2)\operatorname{atan} y}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

(c) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x^2}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3\cos x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}} \underset{\text{l'Hôpital}}{=}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}} = e^{1/3}$$

(d) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \underset{\substack{\ln x \sim x-1 \\ \text{quan } x\sim 1}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} \underset{\text{l'Hôpital}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2x(x-1)} = \frac{1}{2}$$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - \sin x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)}{\frac{x^3}{2}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-x^3/6}{x^3/2} = \dfrac{-1}{3}$

$\dfrac{d}{dx}\left(\arctan x\right) = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$

$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$

Per tant, $\arctan x \sim x - \dfrac{x^3}{3}$ quan $x \sim 0$

Per altra banda, $\sin x \sim x - \dfrac{x^3}{6}$

$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow x(1-\cos x) \sim \dfrac{x^3}{2}$

(f) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{1-\cos x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{1-\cos x}} =$

$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)}} \underset{\uparrow}{=} e^{\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - x}{x^3/2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{-x^3/6}{x^3/2}} = e^{-\frac{1}{3}}$

Apartat anterior

(18) Calculeu els límits següents i expliqueu perquè no és aplicable la regla de l'Hôpital.

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\cos x}$ l'Hôpital exigeix que la derivada del denominador no s'anul·li en un interval que tingui per extrem el punt on calculem el límit.
  En aquest cas, $1-\sin x$ té infinits zeros $(2\pi k,\ k\in\mathbb{Z})$ en l'interval $(c,+\infty)\ \forall c \in \mathbb{R}$.

  Per a calcular el límit fem

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1.$$

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$ En aquest cas no podem aplicar l'Hôpital perque el límit

  $$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}$$

  no existeix (el numerador té límit 1 però el denominador no té límit).

  En aquest cas, $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{x}{\sin x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{fitat}} = 0$

(19) Calculeu el nombre de zeros i la imatge de la funció polinòmica $f(x)=x^6-3x^2+2$.

Calculem la primera i segona derivades,

$f'(x)=6x^5-6x$

$f''(x)=30x^4-6$.

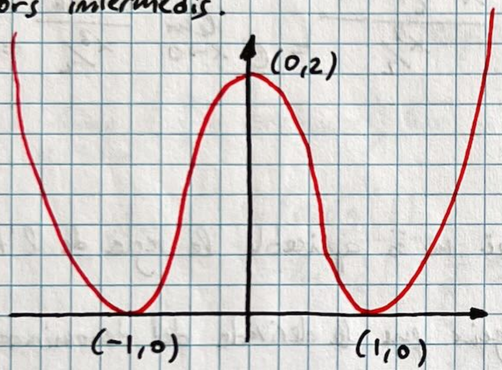
Busquem els punts crítics i els classifiquem:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^5-x=0 \Leftrightarrow x(x^4-1)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=-1,\ x=+1$.

- $x=0$: $f''(0)=-6<0 \Rightarrow f$ té un màxim en $x=0$. $f(0)=2$.
- $x=-1$: $f''(-1)=24>0 \Rightarrow f$ té un mínim en $x=-1$. $f(-1)=0$.
- $x=1$: $f''(1)=24>0 \Rightarrow f$ té un mínim en $x=+1$. $f(1)=0$.

A més, sabem que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Aleshores, els únics zeros possibles són $x=\pm 1$. $\mathrm{Im}\, f=[0,+\infty)$ pel Teorema dels valors intermedis.



(20) Calculeu el nombre de solucions de l'equació $3\ln x - x = 0$.

Sigui $f(x)=3\ln x - x$. Observem que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Per altra banda, $f(e)=3-e>0$. Pel Teorema de Bolzano, f té almenys un zero a $(-\infty,e)$ i un altre a $(e,+\infty)$. Notem que la derivada de f, $f'(x)=\frac{3}{x}-1$ té un únic zero en $x=3$. Pel Teorema de Rolle, f no pot tenir més de dos zeros diferents. Per tant, l'equació $3\ln x - x=0$ té dues solucions. De fet, com $f(1)<0$ i $f(e^2)<0$, les dues solucions estan en $(1,e)$ i (e,e^2).

(21) Justifiqueu que l'equació $x^2 = x\sin x + \cos x$ té exactament dues solucions reals.

Sigui $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$. Volem veure que f s'anul·la en dos punts. La funció f és contínua i $f(0) = -1$, $f(\pi) = f(-\pi) = \pi^2 + 1$.
Pel Teorema de Bolzano, f s'anul·la en algun punt de l'interval $(-\pi, 0)$ i en algun punt de l'interval $(0, \pi)$. Per tant, f s'anul·la almenys en dos punts. Vegem que no es pot anul·lar enlloc més.
La derivada de f és $f'(x) = x(2 - \cos x)$. Com $2 - \cos x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ només s'anul·la en $x = 0$. Si la funció f s'anul·lés en 3 o més punts, pel Teorema de Rolle, la seva derivada s'anul·laria en almenys dos punts. Per tant f només té dos zeros.
Alternativament, es podria argumentar que $f'(x) <$ $\forall x < 0$ i $f'(x) > 0$ $\forall x > 0$ i, com $f(0) = -1 < 0$, pel teorema de Bolzano, f només té dos zeros: un a $(-\infty, 0)$ i un altre a $(0, +\infty)$.

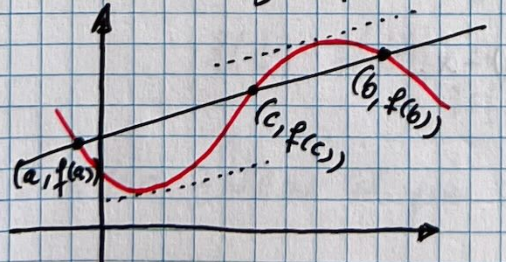
(22) Utilitzeu el Teorema de Rolle per justificar els fets següents.
(a) L'equació $5x^4 - 4x + 1 = 0$ té alguna solució a l'interval $[0,1]$

Considerem la funció $f(x) = x^5 - 2x^2 + x$. Notem que $f(0) = f(1) = 0$. Aleshores, pel Teorema de Rolle, $\exists c \in (0,1)$ tal que $f'(c) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5c^4 - 4c + 1 = 0$ com volíem veure.

(b) Entre cada dues solucions reals de l'equació $e^x \sin x = 1$ hi ha almenys una solució real de l'equació $e^x \cos x = -1$.

Reescribim l'equació $e^x \sin x = 1$ com $\sin x - e^{-x} = 0$.
Sigui $f(x) = \sin x - e^{-x}$. Entre dos zeros de $f(x)$ hi ha un zero de $f'(x) = \cos x + e^{-x}$. Però $\cos x + e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x \cos x = -1$.
Com volíem veure.

(23) Sigui $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua a l'interval $[a,b]$ i dos cops derivable a l'interval (a,b). Suposem que el segment d'extrems $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ talla la gràfica de f en un punt $(c, f(c))$ amb $a < c < b$. Demostreu que existeix algun punt $d \in (a,b)$ tal que $f''(d) = 0$.



Pel Teorema del valor mitjà aplicat a l'interval $[a,c]$, $\exists u \in (a,c)$ tal que

$$f'(u) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

Pel Teorema del valor mitjà aplicat a l'interval $[c,b]$, $\exists v \in (c,b)$ tal que
$$f'(v) = \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$
Com que els punts $(a,f(a))$, $(c,f(c))$, $(b,f(b))$ estan alineats,
$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{f(b)-f(c)}{b-c},$$
i pertant, $f'(u)=f'(v)$. Aleshores, pel Teorema de Rolle, $\exists d \in (u,v)$ tal que $f''(d)=0$.

(24) Siguin $0<x<y$. Proveu que

(a) $\frac{y-x}{y} < \ln y - \ln x < \frac{y-x}{x}$

Pel Teorema del valor mig,
$$\ln y - \ln x = \frac{1}{\xi}(y-x) \quad \text{amb } \xi \in (x,y)$$

A més,
$$\frac{1}{y}(y-x) \underset{\xi<y}{<} \frac{1}{\xi}(y-x) \underset{\xi>x}{<} \frac{1}{x}(y-x)$$
com volíem veure.

(b) $\frac{y-x}{1+y^2} < \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x < \frac{y-x}{1+x^2}$

Pel Teorema del Valor mig,
$$\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+\xi^2}(y-x) \quad \text{amb } \xi \in (x,y)$$

Aleshores,
$$\frac{1}{1+y^2}(y-x) \underset{\xi<y}{<} \frac{1}{1+\xi^2}(y-x) \underset{\xi>x}{<} \frac{1}{1+x^2}(y-x)$$

(25) Proveu que per tot $x>-1$ es compleix
$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$$
És evident que la desigualtat es compleix per $x=0$ (de fet es compleix la igualtat. Cal provar-ho ara per $x\in(-1,0)$ i $x\in(0,+\infty)$.

Considerem la funció $f(x)=\ln(1+x)-x$.
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

Aleshores, f és creixent a $(-1,0)$ i decreixent a $(0,+\infty)$. $x=0$ és el màxim absolut. Aleshores, $f(x)=\ln(1+x)-x\leq f(0)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Pertant $\ln(1+x)\leq x$ amb la igualtat en $x=0$.

Sigui ara $g(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}$$

Aleshores g és creixent a $(0,+\infty)$ i decreixent a $(-1,0)$. $x=0$ és el mínim absolut de g. Pertant, $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{x+1}\geq g(0)=0$. Aleshores, $\ln(1+x)\geq\dfrac{x}{x+1}$ amb igualtat quan $x=0$.

(26) Proveu que per tot $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ es verifica que

(a) $1-\dfrac{x^2}{2}<\cos x<1$.

Per una banda, és evident que $\cos x<1$ $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Per altra banda, definim $g(x)=\cos x-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)$

$g'(x)=-\sin x+x>0$ a $(0,\frac{\pi}{2})$. Aleshores g és creixent a $(0,\frac{\pi}{2})$ i pertant, $g(x)>g(0)$ $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})\Longrightarrow\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$ a $(0,\frac{\pi}{2})$.

(b) $\dfrac{2x}{\pi}<\sin x<x<\tan x$

- $x<\tan x$: Pel Teorema del Valor mig, $\tan x-\underbrace{\tan 0}_{0}=\dfrac{1}{\cos^2\xi}\cdot x>x$, $\xi\in(0,x)$.
- $\sin x<x$: Pel Teorema del Valor mig, $\sin x-\underbrace{\sin 0}_{0}=\cos(\xi)\cdot x<x$, $\xi\in(0,x)$.
- $\dfrac{2x}{\pi}<\sin x$: $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ és derivable a $(0,\frac{\pi}{2})$

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0 \text{ a } (0,\tfrac{\pi}{2})$$

i pertant f és decreixent a $(0,\frac{\pi}{2})$.

Aleshores, $f(x)>f(\frac{\pi}{2})$ $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})\Longrightarrow\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi}\Longrightarrow\sin x>\dfrac{2x}{\pi}$

(27) Sigui $f:(0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ una funció derivable tal que $|f'(x)|\leq 1$ per tot $x\in(0,1)$. Proveu que la successió $(f(\frac{1}{n}))_n$ és convergent.

Provarem que és de Cauchy.

$$\left|f\left(\tfrac{1}{n}\right)-f\left(\tfrac{1}{m}\right)\right|\leq\sup_{\xi\in[\frac{1}{n},\frac{1}{m}]}\{f'(\xi)\}\cdot\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|\leq\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|<\varepsilon$$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n,m>N$ $\left|f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{m})\right|<\varepsilon$

(28) Sigui $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable amb f' creixent. Proveu que la funció $g:(a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per tot $x \in (a,b]$ com

$$g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

és creixent.

Calculem $g'(x) = \dfrac{f'(x)\cdot(x-a) - (f(x)-f(a))}{(x-a)^2}$, $a < x \leq b$.

Aplicant el Teorema del Valor Mig a f en l'interval $[a,x]$, $x \in [a,b]$, tenim que

$$f(x)-f(a) = f'(c)(x-a) \quad \text{per } c \in (a,x).$$

Aleshores,

$$f'(x)\cdot(x-a) - (f(x)-f(a)) = (f'(x)-f'(c))(x-a) \geq 0$$

ja que f' és creixent. Pertant, $g'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b]$. Aleshores g és creixent.

(29) Calculeu una funció polinòmica φ de grau mínim tal que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - \varphi(x)}{x^5} = 0$

$\varphi(x) = T_5(\sqrt[3]{1+x}, 0)(x)$

$$(\sqrt[3]{1+x})' = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$$

$$(\sqrt[3]{1+x})'' = \frac{-2}{3^2}(1+x)^{-5/3}$$

$$(\sqrt[3]{1+x})''' = \frac{2\cdot 5}{3^3}(1+x)^{-8/3}$$

$$(\sqrt[3]{1+x})^{iv} = \frac{-2\cdot 5\cdot 8}{3^4}(1+x)^{-11/3}$$

$$(\sqrt[3]{1+x})^{v} = \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{3^5}(1+x)^{-14/3}$$

Aleshores, $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{5} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}(x-0)^i$ on $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

Pertant, $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \frac{22}{729}x^5$

(30) Calculeu una funció polinòmica φ de grau mínim tal que $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\operatorname{atan}(x+1)) - \varphi(x)}{x^2} = 0$

$\varphi(x) = T_2(f,0)(x)$ on $f(x) = \ln(\operatorname{atan}(x+1))$.

$$f(0) = \ln(\operatorname{atan} 1) = \ln\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(0) = \frac{1}{\operatorname{atan}(x+1)} \cdot \frac{1}{(x+1)^2+1}\Bigg|_{x=0} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$f''(0) = \frac{-1}{\operatorname{atan}^2(x+1)} \cdot \frac{1}{(1+(x+1)^2)^2} + \frac{1}{\operatorname{atan}(x+1)} \cdot \frac{-2(x+1)}{((x+1)^2+1)^2}\Bigg|_{x=0} =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{-2}{4} = \frac{-16}{\pi^2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi} = \frac{-4}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}$$

Com $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}(x-0)^i$, tenim que

$$\varphi(x) = \ln\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}x - \left(\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)x^2$$

(31) Calculeu, fent servir un desenvolupament de Taylor convenient, un valor aproximat del nombre real α amb un error menor de 10^{-3} en cadascun dels casos següents:

(a) $\alpha = \sqrt[3]{7}$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 8$, $x = 7$.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \underset{\substack{a=8\\x=7}}{=} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(-1)^{n+1}, \quad c\in(7,8)$$

$$|R_n(7)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}$$

$$|f^{(n+1)}(x)| = \left|\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n\right)x^{\frac{1}{3}-(n+1)}\right| = \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3^{n+1}}\frac{\sqrt[3]{x}}{x^{n+1}}$$

$$\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} \underset{c\in(7,8)}{<} \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{(n+1)!\,3^{n+1}}\frac{\sqrt[3]{8}}{7^{n+1}} < \frac{2}{7^{n+1}} < 10^{-3} \Longrightarrow 7^{n+1} > 2000.$$

La primera n que ho compleix és $n=3$.

$$T_3(f,8)(x) = f(8) + f'(8)(x-8) + \frac{f''(8)}{2}(x-8)^2 + \frac{f'''(8)}{6}(x-8)^3 =$$

$$= 2 + \frac{x-8}{12} - \frac{1}{288}(x-8)^2 + \frac{5}{3456\cdot 6}(x-8)^3$$

$$T_3(f,8)(7) \approx 1.912953$$

(b) $\alpha=\sqrt{e}$

$f(x)=e^x$, $a=0$, $x=\frac{1}{2}$

$T_n(f,0)(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}$

$|R_n(\frac{1}{2})|=\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ amb $c\in(0,\frac{1}{2})$.

$|R_n(\frac{1}{2})|=\frac{e^c}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{e^{1/2}}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{2}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}}<10^{-3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1000}{2^n}<(n+1)!$ Que és cert a partir de $n=4$.

Aleshores, $e^{1/2}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^4\approx 1.6484375$

(c) $\alpha=\sin(\frac{1}{2})$

$f(x)=\sin x$, $a=0$, $x=\frac{1}{2}$

$T_n(f,0)(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n$

$|R_n(\frac{1}{2})|=\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}}<10^{-3}\Leftrightarrow 1000<2^{n+1}(n+1)!$

que és cert a partir de $n=4$.

$T_4(f,0)(x)=x-\frac{x^3}{3!}$. Aleshores, $\sin(\frac{1}{2})\approx T_4(\sin x,0)(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{48}=0,4791\hat{6}\approx\sin\frac{1}{2}$.

(d) $\alpha=\sin(61^\circ)=\sin\left(\frac{61\cdot\pi}{180}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}\right)$

$f(x)=\sin x$, $a=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}$.

$|R_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{\pi}{180}\right)^{n+1}\leq\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{\pi}{180}\right)^{n+1}<\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{2}{100}\right)^{n+1}<10^{-3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1000<50^{n+1}(n+1)!$ que és cert a partir de $n=1$.

$T_n(f,\frac{\pi}{3})(x)=\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2}(x-\frac{\pi}{3})^2+\dots+\frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{3})}{n!}(x-\frac{\pi}{3})^n$

Aleshores, $\sin(61^\circ)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}\right)\approx T_1(f,\frac{\pi}{3})\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

Pertant, $\sin(61^\circ)\approx 0.87475$

(32) Useu polinomis de Taylor adequats per calcular els límits a l'origen de les següents funcions:

(a) $\dfrac{x-\tan x}{\ln(1-x^3)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{\ln(1-x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)}{-x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}}{-x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+O(x^5)$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+O(x^5)$$

$$\ln(1-x^3) = -x^3-\frac{x^6}{2}+O(x^9)$$

(b) $\dfrac{1-\cos(x^2)}{\arcsin(x^4)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{\arcsin(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^4}{2}\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{x^4}{x^4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)$$

$$\arcsin x = x+\frac{x^3}{6}+O(x^4)$$

(c) $\dfrac{e^x-x-\cos x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)-x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \quad \begin{cases}\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty\end{cases}$$

(d) $\dfrac{(1-\cos x)^3}{\sin(x^6)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^3}{\sin(x^6)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right)^3}{x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^6}{8}}{x^6} = \frac{1}{8}$$

(e) $\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{\sin(x^4)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{\sin(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{12}\frac{x^4}{x^4} = \frac{-1}{12}$$

(f) $\dfrac{(\sin x - x)^2 - \frac{1}{36}x^6}{x^8}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)^2 - \frac{1}{36}x^6}{x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - x\right)^2 - \frac{1}{36}x^6}{x^8} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2 - \frac{1}{36}x^6}{x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^6}{36} - 2\frac{x^8}{720} + \frac{x^{10}}{14400} - \frac{1}{36}x^6}{x^8} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^8}{360} + \frac{x^{10}}{14400}}{x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{360} + \frac{x^2}{14400} = \frac{-1}{360}.$$

(g) $\dfrac{\operatorname{arctg} x \cdot \cos(x^2) - x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x \cdot \cos(x^2) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\left(1 - \frac{x^4}{2} + \dots\right) - x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3/3}{x^3} = \frac{-1}{3}$$

(h) $\dfrac{\sin(x^2) - \sin^2 x}{x^4}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)^2}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \dots\right) - \left(x^2 - 2\frac{x^4}{6} + \dots\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4/3}{x^4} = \frac{1}{3}$$

(i) $\dfrac{x + \ln(1-x)}{1 - \sqrt{1-x^2}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \ln(1-x)}{1 - \sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \left(-x - \frac{x^2}{2} + \dots\right)}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2/2}{x^2/2} = -1.$$

(33) Calculeu els valors màxim i mínim de les funcions següents en els intervals que s'indiquen:

(a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en l'interval $[-2,2]$.

Pel Teorema de Weierstrass, f té màxim i mínim en $[-2,2]$.

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$.

$f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+96}}{6} = \dfrac{2 \pm 10}{6}$ $\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-4}{3} \end{cases}$

$f(2) = -11$

$f\left(\frac{-4}{3}\right) = \dfrac{203}{27}$

Cal comprovar també $x = -2$: $f(-2) = 5$

Aleshores: mínim absolut: $f(2) = -11$. màxim absolut: $f\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{203}{27}$

(b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ en l'interval $[-1,2]$.

f és contínua a tot $\mathbb{R}$. Pel Teorema de Weierstrass té màxim i mínim en $[-1,2]$.

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}=0 \iff x^2+2x-1=0 \iff$$

$$\iff x=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

Notem que $\sqrt{2}-1\in[-1,2]$ però $-\sqrt{2}-1\notin[-1,2]$.

$$f(\sqrt{2}-1)=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(4+2\sqrt{2})}{16-8}=\frac{4\sqrt{2}+4}{8}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Cal comprovar també $x=-1$ i $x=2$.

$f(-1)=0$

$f(2)=3/5$

El màxim absolut és $f(\sqrt{2}-1)=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ i el mínim absolut és $f(-1)=0$.

(c) $f(x)=\frac{1}{2}(\sin^2 x+\cos x)+2\sin x-x$ en l'interval $[0,\pi/2]$.

f té màxim i mínim en $[0,\pi/2]$.

$$f'(x)=\sin x\cdot\cos x-\frac{1}{2}\sin x+2\cos x-1=\sin x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)+2\cos x-1=$$

$$=(\sin x+2)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0\iff$$

$$\iff\begin{cases}\sin x=-2 & \text{mai}\\ \cos x=\frac{1}{2}\iff x=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)+2\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{8}+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\approx 1.309$$

Cal comprovar els extrems de l'interval $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$.

$f(0)=\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+2-\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}-\frac{\pi}{2}\approx 0,929$.

El mínim absolut és $f(0)=\frac{1}{2}$. El màxim absolut és $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{8}+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

(d) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,(5-2x)$ en l'interval $[-1,2]$.

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}(5-2x)-2x^{2/3}=\frac{10}{3}x^{-1/3}-\frac{4}{3}x^{2/3}-2x^{2/3}=\frac{10}{3}\left(x^{-1/3}-x^{2/3}\right)=0\iff$$

$\iff x=1.$

f no és derivable en $x=0$, caldrà comprovar-lo també.

$f(1)=3$

$f(0)=0$

Comprovem els extrems: $f(-1)=7$, $f(2)=\sqrt[3]{4}$. El màxim és $f(-1)=7$, el mínim és $f(0)=0$.

(e) $f(x) = -x^3 + 12x + 5$ en l'interval $[-3,3]$.

$f'(x) = -3x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

$f(-2) = -11$

$f(2) = 21$

$f(-3) = -4$

$f(3) = 14$

El màxim s'assoleix a $f(2) = 21$, el mínim s'assoleix a $f(-2) = -11$.

(34) Sigui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ per $x \neq 0$ i $f(0) = 0$. Estudieu la continuïtat i la derivabilitat de f i calculeu la seva imatge.

Comencem estudiant la continuïtat. f és contínua a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Falta veure si és contínua en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to +\infty} e^{-y} = 0 = f(0)$$

Per tant f és contínua a $\mathbb{R}$.

f és derivable a $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Falta veure si f és derivable a $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} e^{-1/h^2} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{h} e^{\frac{-1}{h^2}} = \lim\limits_{y\to +\infty} y e^{-y^2} = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{1}{h} e^{-1/h^2} = \lim\limits_{y\to -\infty} y e^{-y^2} = 0 \end{cases}$$

Aleshores f és derivable en $x = 0$ i $f'(0) = 0$.

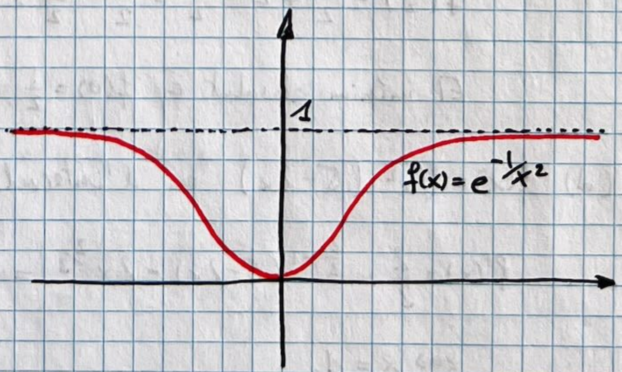
Si $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$. Es pot provar per inducció que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

f és creixent a $(0, +\infty)$ i decreixent a $(-\infty, 0)$. f té un mínim en $x = 0$.

Per altra banda,

$$\lim_{x\to \pm\infty} e^{-1/x^2} = 1$$

Aleshores, $\operatorname{Im} f = [0,1)$.



(35) Raoneu si la funció $f(x) = 1 + x^8 e^{-x}$ té un extrem relatiu a l'origen, de dues maneres diferents: estudiant-ne el creixement, i a partir dels polinomis de Taylor de la funció e^{-x}.

$$f'(x) = 8x^7 e^{-x} - x^8 e^{-x} = e^{-x}(8x^7 - x^8) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^7(8-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 8.$$

Estudiem el signe de la derivada en un entorn de l'origen.

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$$
$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 8)$$

Aleshores, f té un mínim local en $x = 0$.

Usem ara el polinomi de Taylor de e^{-x}:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \ldots$$

$$f(x) = 1 + x^8 - x^9 + \frac{x^{10}}{2} - \ldots$$

Observem que $f(x) > 1$ en un entorn de $x = 0$ mentre que $f(0) = 1$.

Pertant, f té un mínim en $x = 0$.

(36) Justifiqueu que existeix una funció $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable i que verifica que

$$g(x) + e^{g(x)} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calculeu $g'(1)$ i $g'(1+e)$.

Observem que g és la funció inversa de $f(x) = x + e^x$.

Notem que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és bijectiva. Aleshores $\exists g$ inversa de f i és derivable.

$f'(x) = 1 + e^x$. (Teorema de la funció inversa).

Pel Teorema de la funció inversa,

$$(f^{-1})'(f(p)) = \frac{1}{f'(p)}$$

o, equivalentment si $q = f(p)$,

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}.$$

En el nostre cas,

$$g'(q) = \frac{1}{f'(g(q))}.$$

Pertant, necessitem calcular $g(1)$ i $g(1+e)$.

Notem que $f(0)=1 \Rightarrow g(1)=0$

$f(1)=1+e \Rightarrow g(1+e)=1$.

Finalment,
$$g'(1)=\frac{1}{1+e^{g(1)}}=\frac{1}{1+e^{0}}=\frac{1}{2}$$
$$g'(1+e)=\frac{1}{1+e^{g(1+e)}}=\frac{1}{1+e}$$

(37) Sigui $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ verificant que $f(x+y)=f(x)f(y)$ per tot $x,y\in\mathbb{R}$; $f(0)\neq 0$ i f derivable al punt $x=0$. Justifica que f és derivable a tot punt i que existeix un nombre real α tal que $f(x)=e^{\alpha x}$ per tot $x\in\mathbb{R}$.

$$f(0)=f(0+0)=f(0)\cdot f(0) \underset{f(0)\neq 0}{\Longrightarrow} f(0)=1$$

Intentem calcular la derivada de f en un punt $a\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a)\cdot f(h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0} f(a)\,\frac{f(h)-1}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0} f(a)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}=f(a)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\underset{\substack{f \text{ és derivable en } x=0.}}{=}f(a)\cdot f'(0).$$

Aleshores f és derivable en a i tenim que
$$f'(a)=f(a)\cdot f'(0).$$
Anomenem $\alpha=f'(0)$. Aleshores,
$$f'(x)=\alpha f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
Notem que $f(x)\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ ja que, si $f(x_0)=0$ per algun $x_0\in\mathbb{R}$, aleshores $f(0)=f(x_0-x_0)=\underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(x_0)}}\cdot f(-x_0)=0$ contradicció.

Aleshores,
$$\alpha=\frac{f'(x)}{f(x)},$$
i integrant,
$$\ln(f(x))=\alpha x+k \Rightarrow f(x)=e^{\alpha x+k}$$
i pertant,
$$f(x)=C e^{\alpha x}.\quad \text{Imposant } f(0)=1,\quad f(x)=e^{\alpha x}$$

Tema 5: INTEGRACIÓ:

① Calculeu les primitives següents:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{1/a^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1/a}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{completem} \\ \text{quadrats}}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx = \arcsin(x-1)+C$

Obs: $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$

(c) $\displaystyle\int e^{e^x}e^x dx = e^{e^x}+C$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}\arcsin(x^2)+C$

(e) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}+C$

(f) $\displaystyle\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\arctan^2(x)+C$

(g) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \tan x + \frac{1}{\cos x} + C = \frac{1+\sin x}{\cos x}+C$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln x)+C$

(i) $\displaystyle\int \ln(\cos x)\cdot \tan x\, dx = \frac{-1}{2}\int 2\ln(\cos x)\frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\frac{1}{2}\ln^2(\cos x)+C$

(j) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\cos^2(x^2)}dx = \frac{1}{2}\tan(x^2)+C$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}dx = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x}dx = \int \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x}dx = \operatorname{arctg}(\sinh x)+C.$

② Calculeu les primitives següents, pel mètode d'integració per parts:

(a) $\int x \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$

$f' = x$, $g = \arctan x$

$f = \frac{x^2}{2}$, $g' = \frac{1}{1+x^2}$

$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right) + C = \frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + C.$

(b) $\int x \ln^2 x \, dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \underbrace{\int x \ln x \, dx}_{= I}$

$f'(x) = x$, $g(x) = \ln^2 x$

$f(x) = \frac{x^2}{2}$, $g'(x) = \frac{2\ln x}{x}$

$I = \int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

$f'(x) = x$, $g(x) = \ln x$

$f(x) = \frac{x^2}{2}$, $g'(x) = \frac{1}{x}$

Pertant, $\int x \ln^2 x \, dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C$

(c) $\int \ln(\sqrt{1+x^2}) dx = x \ln\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \underset{\text{apartat (a)}}{=} x \ln\sqrt{1+x^2} - x + \operatorname{atan} x + C$

$f'(x) = 1$, $g(x) = \ln\sqrt{1+x^2}$

$f(x) = x$, $g'(x) = \frac{x}{1+x^2}$

(d) $\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int x^2 \cdot 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} dx\right) =$

$f(x) = x^2$, $g'(x) = 2x e^{x^2}$

$f'(x) = 2x$, $g(x) = e^{x^2}$

$= \frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2}\right) + C = \frac{x^2-1}{2} e^{x^2} + C.$

(e) $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$

- $a=0$: $\int \cos(bx)\,dx = \frac{1}{b}\sin(bx) + C$

- $b=0$: $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

- $a,b\neq 0$: $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \int \frac{b}{a}e^{ax}\sin bx\,dx =$

$f'(x)=e^{ax}$, $g(x)=\cos bx$ $\qquad$ $f'(x)=e^{ax}$, $g(x)=\sin bx$

$f(x)=\frac{1}{a}e^{ax}$, $g'(x)=-b\sin bx$ $\qquad$ $f(x)=\frac{1}{a}e^{ax}$, $g'(x)=b\cos bx$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \int \frac{b}{a}e^{ax}\cos bx\,dx\right)$$

Anomenant $I=\int e^{ax}\cos bx\,dx$, tenim que

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx}{a^2+b^2}$$

Notem que fent $a=0$ o $b=0$ recuperem els dos casos anteriors.

③ Calculeu les primitives següents, mitjançant un canvi de variable.

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx = \int \frac{2}{u^2-1}du = -2\int \frac{1}{1-u^2}du = -2\operatorname{argtanh}(u) + C =$

Canvi de variable:

$u=\sqrt{1+e^x}$

$du = \frac{1}{2u}e^x dx = \frac{u^2-1}{2u}dx$

$dx = \frac{2u\,du}{u^2-1}$

$$= -2\operatorname{argtanh}(\sqrt{1+e^x}) + C \overset{\uparrow}{=} \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) + C'$$

$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ amb domini $(-1,1)$

(b) $$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-x}\cdot(1+\sqrt{x})}{1-x}\,dx = \int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx + \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2\sqrt{1-x} + \underbrace{\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx}_{= I}$$

Ara calculem I:

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}(-2t)\,dt = -2\int \sqrt{1-t^2}\,dt \underset{\text{apartat (e)}}{=}$$

$$\begin{cases} t = \sqrt{1-x} \\ t^2 = 1-x \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{1-t^2} \\ dx = -2t\,dt \end{cases}$$

$$= -2\left(\frac{-\arccos t}{2} + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}\right) + C = \arccos t - t\sqrt{1-t^2} + C =$$

$$= \arccos\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x}\,\sqrt{x} + C.$$

Aleshores,

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = \arccos\sqrt{1-x} - (2+\sqrt{x})\sqrt{1-x} + C$$

(c) $$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx \underset{\substack{u=\sqrt[6]{x}\\ dx = 6u^5du}}{=} \int \frac{6u^5\cdot u^3}{u^2+1}\,du = 6\int \frac{u^8}{u^2+1}\,du = 6\int\left(u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1}\right)du =$$

$$\begin{array}{l|l} u^8 & u^2+1 \\ \hline -(u^8+u^6) & u^6-u^4+u^2-1 = b(x) \\ -u^6 & \\ -(-u^6-u^4) & \\ u^4 & \\ -(u^4+u^2) & \\ -u^2 & \\ -(-u^2-1) & \\ 1 = r(x) & \end{array}$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = b(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

$$= \frac{6}{7}u^7 - \frac{6}{5}u^5 + \frac{6}{3}u^3 - 6u + 6\arctan(u) + C =$$

$$= \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[5]{x} + 6\arctan(\sqrt[6]{x}) + C.$$

(d) $\displaystyle\int \frac{\ln(3x)}{x\ln(6x)}\,dx = \int \frac{u}{\frac{e^u}{3}\cdot(u+\ln 2)}\,\frac{e^u}{3}\,du = \int \frac{u}{u+\ln 2}\,du = \int\left(1-\frac{\ln 2}{u+\ln 2}\right)du =$

$$\begin{cases} u=\ln 3x \Rightarrow x=\dfrac{e^u}{3} \\ du=\dfrac{1}{x}dx \\ dx=\dfrac{e^u}{3}du \end{cases}$$

$\displaystyle = u-\ln 2\cdot\int\frac{1}{u+\ln 2}\,du = u-\ln 2\cdot\ln(u+\ln 2)+C_1 =$

$= \ln 3x - \ln 2\cdot\ln(\ln 6x)+C_1.$

(e) $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int \sin^2 u\,du = -\int\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos(2u)}{2}\right)du =$

$$\begin{cases} x=\cos u \\ dx=-\sin u\,du \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2u = 1-2\sin^2 u \\ \sin^2 u = \frac{1}{2}(1-\cos 2u) \end{cases}$$

$\displaystyle = \frac{-u}{2}+\frac{1}{2}\int\cos 2u\,du = \frac{-u}{2}+\frac{\sin 2u}{4}+C_1 = \frac{-u}{2}+\frac{\sin u\cos u}{2}+C_1 =$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\displaystyle = \frac{-\arccos x}{2}+\frac{\sin(\arccos x)\cdot x}{2}+C_1 = \frac{-\arccos x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C_1$

$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$

(fent el canvi $x=\cos y$)

(f) $\displaystyle\int\sqrt{1+x^2}\,dx = \int\sqrt{1+\tan^2 u}\,\frac{1}{\cos^2 u}\,du = \int\frac{1}{\cos^3 u}\,du = \int\frac{1}{\cos^4 u}\,dt =$

$$\begin{cases} x=\tan u \\ dx=\dfrac{1}{\cos^2 u}du \end{cases} \qquad \begin{cases} t=\sin u \\ dt=\cos u\,du \end{cases}$$

$\displaystyle = \int\frac{1}{(1-\sin^2 u)^2}\,dt = \int\frac{1}{(1-t^2)^2}\,dt$

Descomposem en fraccions simples:

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{A}{1-t}+\frac{B}{(1-t)^2}+\frac{C}{1+t}+\frac{D}{(1+t)^2} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C+D=1 \\ -A+C=0 \Rightarrow A=C \\ -A+B-C+D=0 \\ A+2B-C-2D=0 \end{cases}$$

$$2A+B+D=1$$
$$-2A+B+D=0$$
$$2B-2D=0 \Longrightarrow B=D$$

Aleshores, $A+B=\frac{1}{2}$; $A=B \Rightarrow A=B=C=D=\frac{1}{4}$.

Seguint amb la integral,

$$\int \frac{1}{(1-t^2)^2}\,dt = \int \frac{1/4}{1-t}+\frac{1/4}{(1-t)^2}+\frac{1/4}{1+t}+\frac{1/4}{(1+t)^2}\,dt =$$

$$= \frac{-1}{4}\ln(1-t)+\frac{1}{4}\frac{1}{1-t}+\frac{1}{4}\ln(1+t)-\frac{1}{4}\frac{1}{1+t}+C=$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)+\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right)+C=$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)+\frac{2t}{1-t^2}\right)+C \underset{t=\sin u}{=} \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right)+\frac{2\sin u}{1-\sin^2 u}\right)+C=$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right)+\frac{2\sin u}{\cos^2 u}\right)+C \underset{u=\operatorname{atan} x}{=} \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{1+\sin(\operatorname{atan} x)}{1-\sin(\operatorname{atan} x)}\right)+\frac{2\sin(\operatorname{atan} x)}{\cos^2(\operatorname{atan} x)}\right)+C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right)+\frac{2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}}\right)+C = \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)+2x\sqrt{1+x^2}\right)+C=$$

$$\sin(\operatorname{atan} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\operatorname{atan} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left(\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2\right)+2x\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+x\sqrt{1+x^2}\right)+C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sinh^{-1}(x)+x\sqrt{1+x^2}\right)+C.$$

$$\operatorname{argsinh}(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

Alternativa: Usant les funcions hiperbòliques.

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx \underset{\substack{x=\sinh u\\ dx=\cosh u}}{=} \int \cosh^2 u\,du \underset{\cosh^2 u = \frac{1}{2}\cosh(2u)+\frac{1}{2}}{=} \int \left(\frac{1}{2}\cosh(2u)+\frac{1}{2}\right)du =$$

$$= \frac{u}{2} + \frac{1}{4}\sinh(2u) + C \underset{\sinh(2u)=2\sinh(u)\cosh(u)}{=} \frac{1}{2}\left(u + \sinh(u)\cosh(u)\right) + C \underset{u=\sinh^{-1}(x)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sinh^{-1}(x) + x\cdot\cosh(\operatorname{argsinh}(x))\right) + C \underset{\cosh(\sinh^{-1}(x))=\sqrt{1+x^2}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sinh^{-1}(x) + x\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

(g) $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx \underset{\substack{x=\cosh t\\ dx=\sinh t\,dt}}{=} \int \sinh^2 t\,dt \underset{\sinh^2 x = \frac{\cosh(2x)-1}{2}}{=} \frac{1}{2}\int(\cosh(2t)-1)\,dt = \frac{1}{2}\int \cosh 2t\,dt - \frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sinh(2t) - \frac{t}{2} + C \underset{\sinh(2x)=2\sinh x\cosh x}{=} \frac{1}{2}\underbrace{\sinh(\operatorname{argcosh} x)}_{=\sqrt{x^2-1}}\cdot x - \frac{\operatorname{argcos} x}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{argcosh} x\right) + C$$

(h) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}\,dx \underset{\substack{x=\frac{4}{\cos t}\\ dx=\frac{4\tan t}{\cos t}dt}}{=} \int \frac{\frac{4^2}{\cos^2 t}}{\frac{4\sin t}{\cos t}}\cdot\frac{4\tan t}{\cos t}\,dt = 16\int\frac{1}{\cos^3 t}\,dt \underset{\text{Apartat (f)}}{=}$$

$$= 16\cdot\frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) + \frac{2\sin t}{\cos^2 t}\right) + C \underset{t=\arccos\left(\frac{4}{x}\right)}{=} 4\left(\ln\left(\frac{1+\sin(\arccos(\frac{4}{x}))}{1-\sin(\arccos(\frac{4}{x}))}\right) + \frac{2\sin(\arccos(\frac{4}{x}))}{\left(\frac{4}{x}\right)^2}\right) + C$$

$$= 4\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{4}{x}\right)^2}}{1-\sqrt{1-\left(\frac{4}{x}\right)^2}}\right) + \frac{2\sqrt{1-\left(\frac{4}{x}\right)^2}}{\frac{4^2}{x^2}}\right) + C =$$

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

$$= 4\left(\ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}\sqrt{x^2-16}}{1-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-16}}\right) + \frac{\frac{2}{x}\sqrt{x^2-16}}{\frac{4^2}{x^2}}\right) + C =$$

$$= 4\left(\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-16}}{x-\sqrt{x^2-16}}\right) + \frac{x}{8}\sqrt{x^2-16}\right) + C =$$

$$= 4\ln\left(\frac{\left(x+\sqrt{x^2-16}\right)^2}{16}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-16} + C =$$

$$= \underbrace{8\ln\left(\frac{x}{4}+\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2-1}\right)} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-16} + C = 8\,\mathrm{argcosh}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-16} + C.$$

(i) $$\int\sqrt{-x^2+2x}\,dx = \int\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = \int\sqrt{1-u^2}\,du = \int\cos^2 t\,dt =$$

completem quadrats $\quad \begin{cases} u = x-1 \\ du = dx \end{cases} \quad \begin{cases} u = \sin t \\ du = \cos t\,dt \end{cases} \quad \cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2}$

$$= \int\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}\right)dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C =$$

$$= \frac{\arcsin u}{2} + \frac{1}{2}\cos t\sin t + C =$$

$$= \frac{\arcsin u}{2} + \frac{1}{2}u\cos(\arcsin u) + C =$$

$\cos(\arcsin u) = \sqrt{1-u^2}$

$$= \frac{\arcsin u}{2} + \frac{u}{2}\sqrt{1-u^2} + C =$$

$u = x-1$

$$= \frac{\arcsin(x-1)}{2} + \frac{x-1}{2}\sqrt{2x-x^2} + C.$$

④ Calculeu les primitives racionals següents.

(a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx = \int \frac{2x+1}{(x-1)^3}\,dx = \int\left(\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}\right)dx =$

$$\frac{2x+1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=2 \\ C=3 \end{cases}$$

$$= \frac{-2}{x-1} - \frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + C$$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+12}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$

Descomposem en fraccions simples:

$$\frac{x^2-x+12}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^2+(A+B-2C)x-2A+2B+C}{(x-1)^2(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A+C=1 \\ A+B-2C=-1 \\ -2A+2B+C=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=4 \\ C=2 \end{cases}$$

Aleshores

$$\int \frac{x^2-x+12}{(x-1)^2(x+2)}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{2}{x+2}\right)dx =$$

$$= -\ln(x-1) - 4\frac{1}{x-1} + 2\ln(x+2) + C.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+x+2}\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+2}+\frac{5}{x^2+x+2}\right)dx =$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx}_{I_1} + \frac{5}{2}\underbrace{\int\frac{1}{x^2+x+2}\,dx}_{I_2}$$

$I_1 = \ln(x^2+x+2)$

$$I_2 = \int\frac{1}{x^2+x+2}\,dx = \int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,dx = \frac{4}{7}\int\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2}\right)^2+1}\,dx =$$

completant quadrats.

$$= \frac{4}{7}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}\,dx = \frac{4}{7}\frac{\sqrt{7}}{2}\int \frac{2/\sqrt{7}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}\,dx = \frac{4}{7}\frac{\sqrt{7}}{2}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C' =$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

Aleshores,

$$\int \frac{x+3}{x^2+x+2}\,dx = \frac{\ln(x^2+x+2)}{2} + \frac{5\sqrt{7}}{7}\,\mathrm{atan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C$$

(d) $$\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx = \int \frac{x^3+1-1}{x^3+1}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{x^3+1}\right)dx = x - \underbrace{\int \frac{1}{x^3+1}\,dx}_{I_1}$$

Descomposem el denominador de I_1.

$$x^3+1 = (x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{\Delta<0 \Rightarrow \text{ no té arrels reals.}}$$

Ara descomposem en fraccions simples:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Cx + Bx + C}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A + C}{(x+1)(x^2-x+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=\frac{-1}{3} \\ C=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Aleshores,

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^3}\,dx = \int \frac{1}{3}\frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx}_{I_2}$$

$$I_2 = \int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{x^2-x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{3}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx}_{I_3}$$

Finalment trobem I_3:

$$I_3 = \int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx =$$

completant quadrats,

$$x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Recopilant,

$$\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx = x - I_1 \underset{\uparrow}{=} x - \frac{1}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{3}I_2 \underset{\uparrow}{=}$$

$$I_1 = \frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{3}I_2 \qquad I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{3}{2}I_3$$

$$= x - \frac{1}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{2}I_3 \underset{\uparrow}{=}$$

$$I_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$= x - \frac{1}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

(5) Calculeu les primitives següents, sense fer cap canvi de variable:

(a) $$\int \cos^3 x\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{3}{4}\int \cos x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos 3x\,dx = \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + C.$$

$$\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}.$$

Aquest tipus de fórmules trigonomètriques es poden deduir de la fórmula de De Moivre: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. La fórmula de De Moivre es dedueix fàcilment de les definicions de sinus i cosinus:

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$(e^{ix})^n = e^{inx}$$

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx)+i\sin(nx)$$

En el cas $n=3$, tenim

$$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cos^3 x + 3\cos^2 x\, i \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i\sin^3 x = \cos 3x + i\sin 3x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x \Longrightarrow \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x. \\ \sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x \Longrightarrow \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x. \end{cases}$$

<u>Alternativa:</u>

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx = \int \cos x\, dx - \int \sin^2 x \cos x\, dx =$$

$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

(b) $$\int \sin^2 x\, dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{2}\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C \underset{\uparrow}{=} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C$$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ $\qquad\qquad$ $\sin 2x = 2\sin x \cos x.$

(c) $$\int \cos^6\left(\frac{x}{2}\right) dx \underset{\uparrow}{=} \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{2}\right)^3 dx = \int \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos x + \frac{3}{8}\cos^2 x + \frac{1}{8}\cos^3 x\right) dx =$$

$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$$= \frac{x}{8} + \frac{3}{8}\sin x + \frac{3}{8}\int \cos^2 x\, dx + \frac{1}{8}\int \cos^3 x\, dx \underset{\uparrow}{=}$$

apartat (a)

$$= \frac{x}{8} + \frac{3}{8}\sin x + \frac{3}{8}\int\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)dx + \frac{1}{8}\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right) + C =$$

$$= \frac{x}{8} + \frac{3}{8}\sin x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{8}\,\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin x - \frac{1}{24}\sin^3 x + C =$$

$$= \frac{5}{16}x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{3}{32}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin^3 x + C.$$

(d) $$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx \underset{\uparrow}{=} \int \sin x\,(1-\cos^2 x)\cos^2 x\, dx = \int (\cos^2 x \sin x - \cos^4 x \sin x)\, dx =$$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

(e) $$\int \sinh^2 x\, dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{2}\cosh(2x)\, dx - \frac{x}{2} + C' = \frac{1}{4}\sinh 2x - \frac{x}{2} + C_1 \underset{\uparrow}{=}$$

$\sinh^2 x = \dfrac{\cosh(2x) - 1}{2}$ $\qquad\qquad$ $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

$$= \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x - x) + C_1 .$$

⑥ Canvis de variable per a integrals de funcions racionals de funcions trigonomètriques.
Sigui $R(z_1, z_2)$ una funció racional (quocient de polinomis) en dues variables.
Els canvis de variable següents transformen integrals de funcions trigonomètriques, del tipus $R(\cos x, \sin x)$, en integrals racionals:

- $\sin x = t$, quan $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$.
- $\cos x = t$, quan $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$.
- $\tan x = t$, quan $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$.

Utilitzeu algun d'aquests canvis de variable per calcular les primitives següents:

(a) $$\int \frac{dx}{\sin x} \underset{\uparrow}{=} \int \frac{-dt}{\sin^2 x} = -\int \frac{dt}{1-t^2} \underset{\uparrow}{=} -\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt =$$

$t = \cos x$

$dt = -\sin x\, dx$

$\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{A}{1-t} + \dfrac{B}{1+t} \longrightarrow A = B = \dfrac{1}{2}$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\ln(1-t) + \ln(1+t)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) + C_1 \underset{\uparrow}{=}$$

$t = \cos x$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C_1 .$$

(b) $$\int \frac{dx}{\cos x} \underset{\uparrow}{=} \int \frac{dt}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{1-t^2} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C_1 .$$

$t = \sin x$ $\qquad$ apartat (a)

$dt = \cos x\, dx$

(c) $$\int \tan^4 x\, dx = \int \frac{t^4}{t^2+1}\, dt \underset{\uparrow}{=} \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right) dt = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{atan} t + C_1 =$$

$t = \tan x$

$dt = (1+t^2)\, dx$

dividint els polinomis,
$\dfrac{t^4}{t^2+1} = t^2 - 1 + \dfrac{1}{t^2+1}$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C_1 .$$

desfent el canvi

(d) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1-\cos x}\,dx \underset{\substack{t=\cos x\\ dt=-\sin x\,dx}}{=} \int \frac{\sin x \cdot t}{1-t}\,\frac{dt}{-\sin x} = -\int \frac{t}{1-t}\,dt =$

$$= -\int\left(\frac{1}{1-t}-1\right)dt = -\left(-\ln(1-t)-t\right)+C = \ln(1-t)+t+C =$$

$$= \cos x + \ln(1-\cos x) + C.$$

7. Sigui $f(x)=\dfrac{e^x \sin x}{x}$. Justifiqueu que f és integrable a $[0,1]$ i es compleix la desigualtat

$$0 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq e-1.$$

Noteu que f és contínua en $(0,1]$ i fitada a $[0,1]$:

$$0 \leq f(x) \underset{\sin x \leq x \text{ en } [0,1].}{\leq} e^x$$

Aleshores, f és integrable en $[0,1]$ i,

$$0 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 e^x\,dx = e-1$$

8. Sigui f una funció contínua i positiva a l'interval $[a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Proveu que $f(x)=0$ per tot $x\in[a,b]$.

Usarem el Teorema Fonamental del Càlcul. Com que $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$, aleshores,

$$0 \leq \int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt = 0 \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = 0$$

Ara, pel Teorema Fonamental del Càlcul, com que f és contínua en $[a,b]$, F és derivable en (a,b). Aleshores, $F'(x)=f(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$. Per continuïtat $f(x)=0$ $\forall x\in[a,b]$, com volíem veure.

<u>Alternativa</u>: sense usar el Teorema Fonamental del càlcul:

Suposem que f no és idènticament 0 en $[a,b]$. Aleshores $\exists x_0\in(a,b)$ tal que $f(x_0)>0$. Per tant $\exists \varepsilon>0$ tal que $f(x)>0$ $\forall x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ ja que f és contínua. Ara,

$$\int_a^b f(t)\,dt \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(t)\,dt > 0$$

i arribem a una contradicció. Aleshores, $f(x)=0$ $\forall x\in[a,b]$.

(9) Feu servir que, si $x>0$, $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$, justifiqueu les desigualtats

$$\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n},$$

i deduïu que $e = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Notem que $\frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{n+1}$ i $\frac{1}{n} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{n}$.

Aleshores,

$$\frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \int_n^{n+1} \frac{dt}{n} = \frac{1}{n}$$

com volíem veure. Provem ara que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n]{} e$.

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n} \Rightarrow \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) < 1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

per altra banda,

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \Rightarrow 1 < \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) \Rightarrow e < \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e\frac{n}{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Aleshores,

$$e\frac{n}{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

Passant al límit, $e \le \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e \Rightarrow \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

(10) Calculeu els límits de les successions següents expressant-les com a sumes de Riemann.

(a) $x_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, $\alpha > 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$$

(b) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx =$$

$$= \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$$

(c) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2.$$

(d) $x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\operatorname{atan} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

(e) $x_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+4} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \left[\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

(f) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)k}{n^3}$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)k}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n} = \int_0^1 (1-x)x\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{6}$$

(g) $x_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \sin\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx =$$

$$= \underbrace{\left[-x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{2}{\pi}\right]_0^1}_{0-0=0} + \int_0^1 \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\pi^2}$$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \qquad v = -\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{2}{\pi}$

(h) $x_n = \left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{1/n}$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{1/n} = e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n^n}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdots\frac{n+n}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)} =$$

$$= e^{\int_0^1 \ln(1+x)\,dx} = e^{2\ln 2 - 1} = 4/e$$

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left[x\cdot\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \ln 2 - \int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx =$$

$$u = \ln(1+x) \quad du = \frac{dx}{1+x} \qquad = \ln 2 - 1 + \ln 2 = 2\ln 2 - 1$$

$$dv = dx \qquad v = x$$

(i) $x_n = \sum_{k=np+1}^{nq} \frac{1}{k} \quad (p,q\in\mathbb{N},\ p<q)$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=np+1}^{nq}\frac{1}{k} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n(q-p)}\frac{1}{np+k} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n(q-p)}\frac{1}{p+\frac{k}{n}} = \int_0^{q-p}\frac{1}{p+x}\,dx =$$

$$= \left[\ln(p+x)\right]_0^{q-p} = \ln q - \ln p = \ln\frac{q}{p}$$

(11) Siguin f i g dues funcions definides en $[a,b]$, i $c\in(a,b)$. Suposem que f és integrable en $[a,b]$.

(a) Si $g(x)=f(x)$ per a tot $x\neq c$, i $g(c)\neq f(c)$, proveu que g és integrable i $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Definim $h = f-g$ s'anul·la en tots els punts excepte en el punt $x=c$.
Cal veure que h és integrable i que té integral 0.
Si $h(c)>0$, $s(h,\Pi_\varepsilon)$ per tota partició Π_ε donat $\varepsilon>0$ i,

$$S(h,\Pi_\varepsilon) = f(c)\Delta x_i + f(c)\Delta x_{i+1} < \varepsilon,$$

si $c = x_i$ i $\Delta x_i, \Delta x_{i+1} < \frac{\varepsilon}{2f(c)}$.

Aleshores, h és integrable i té integral 0. Pertant g és integrable i $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(b) Suposem que f i g prenen els mateixos valors a $[a,b]$ excepte en un nombre finit de punts. Proveu que g és integrable i $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Dividim l'interval $[a,b]$ en subintervals de manera que cada subinterval contingui exactament un dels punts on f i g són diferents. Ara apliquem l'apartat anterior a cada subinterval.

(12) Sigui f una funció integrable a $[-a,a]$, $a>0$. Demostreu que

(a) si f és una funció parella, aleshores $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \underset{f(x)=f(-x)}{=} \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

(b) si f és una funció senar, aleshores $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx =$$
$$= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0.$$

(c) si f és una funció parella o senar, aleshores $\int_{-a}^{a} (f(x))^2 \sin x\, dx = 0$.

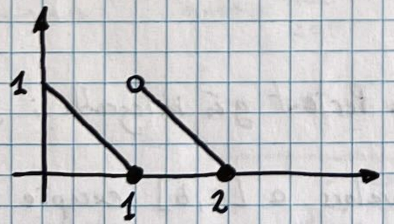
Tant si f és parella com senar, $f\cdot f$ és parella. Com sin és senar, $(f(x))^2 \sin x$ és senar. Per l'apartat anterior, $\int_{-a}^{a} (f(x))^2 \sin x\, dx = 0$.

(13) Considereu la funció real f definida per

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0\le x\le 1, \\ 2-x, & 1<x\le 2. \end{cases}$$

Trobeu l'expressió analítica i estudieu la continuïtat i la derivabilitat de la funció

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad , \ x\in[0,2].$$



$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x (1-t)dt = \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x = x-\frac{x^2}{2} & \text{si } 0\le x\le 1 \\ \int_0^1 (1-t)dt + \int_1^x (2-t)dt = \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[2t-\frac{t^2}{2}\right]_1^x = 2x-\frac{x^2}{2}-1 & \text{si } 1<x\le 2. \end{cases}$$

Notem que F és contínua a $[0,1)\cup(1,2]$. Vegem què passa a $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(2x-\frac{x^2}{2}-1\right) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow F \text{ és contínua en } x=1.$$

Pertant, F és contínua a $[0,2]$. F és derivable a $[0,2]\setminus\{1\}$ i

$$F'(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0<x<1 \\ 2-x & \text{si } 1<x<2 \end{cases}$$

(14) Sigui $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida com $f(x)=0$ si x és irracional, $f(x) = \frac{1}{n}$ si $x = \frac{m}{n}$ és racional de $(0,1]$ amb $\text{mcd}(m,n)=1$. Proveu que f és integrable a $[0,1]$ i que $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Per veure la integrabilitat de f, cal provar que $\forall \varepsilon>0$ $\exists P_\varepsilon$ una partició de $[0,1]$ tal que

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon,$$

on $U(f,P_\varepsilon)$ i $L(f,P_\varepsilon)$ denoten respectivament les sumes superiors i inferiors de f associades a la partició P_ε.

Tota suma inferior $L(f,P_\varepsilon)$ és 0, ja que a tot interval de la partició hi haurà irracionals i $f(x)\geq 0$.

Per fitar les sumes superiors, $\forall \varepsilon>0$ considerem les fraccions irreductibles $\frac{m}{n}$ amb denominador n tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. D'aquestes n'hi ha un nombre infinit i, per contra, existeix un nombre finit N de fraccions irreductibles a $[0,1]$ amb denominador més petit o igual a $n_0 = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor$.

Considerem $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ una partició de $[0,1]$ amb

$$\delta = \max_{i=1,\ldots,k} \{x_i - x_{i-1}\} < \frac{\varepsilon}{2N}$$

Aleshores,

$$U(f,P_\varepsilon) < \underbrace{N}_{\substack{\text{nombre de fraccions} \\ \text{amb denominador} \leq 2/\varepsilon}} \cdot \delta + \overbrace{\frac{1}{n}}^{\text{fita superior de fraccions amb denominador} > \frac{2}{\varepsilon}} \cdot 1 < \frac{\varepsilon}{2N} \cdot N + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Com que $0 \leq U(f,P_\varepsilon) - \underbrace{L(f,P_\varepsilon)}_{=0} = U(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$, f és integrable Riemann a $[0,1]$ i $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

(15) Comproveu les següents fórmules recurrents vàlides per $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) $I_n = \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n}\left(\cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} \right)$.

$$I_n = \int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx =$$

$u = \cos^{n-1} x$, $du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x \, dx$

$dv = \cos x \, dx$, $v = \sin x$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x \, dx =$$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow n I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2}.$$

(b) $J_n = \int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - J_{n-2}$

$$J_n = \int \tan^n x \, dx = \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x \, dx = \int \tan^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int \tan^{n-2} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx - \int \tan^{n-2} x \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - J_{n-2}.$$

(16) Definim per tot $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$,

(a) Proveu que $I_0 = \frac{\pi}{2}$, i $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$, si $n \geq 2$.

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Ara, per $n \geq 2$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx =$$

$$I_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = I_{n-2} - \left[\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n-1} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx =$$

$u = \cos x$ $\quad du = -\sin x \, dx$

$dv = \sin^{n-2} x \cos x \, dx$ $\quad v = \frac{\sin^{n-1} x}{n-1}$

$$= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n \Longrightarrow I_n \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) = I_{n-2} \Longrightarrow I_n \left(\frac{1}{n-1} \right) = I_{n-2} - I_n =$$

$$\Longrightarrow I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Com volíem veure.

(b) Proveu que $I_1 = 1$, i si $n \geq 1$,

$$I_{2n} = \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1)}{2\cdot 4 \cdot \cdots (2n-2)(2n)} \frac{\pi}{2},$$

i

$$I_{2n+1} = \frac{2\cdot 4 \cdot \cdots (2n-2)(2n)}{1\cdot 3 \cdot \cdots (2n-1)(2n+1)}.$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = -(-\cos 0) = 1.$$

$$\underset{\uparrow (a)}{I_2 =} 1\cdot (I_0 - I_2) \Rightarrow I_2 = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\underset{\uparrow (a)}{I_{2n} =} \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{(2n-2)\cdots 4\cdot 2} \frac{\pi}{2}$$

$$\underset{\uparrow (a)}{I_{2n+1} =} \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$$

(c) Deduïu que, si $n \geq 1$,

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \left(\frac{1\cdot 3 \cdot \cdots (2n-1)}{2\cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)}\right)^2 \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1)}{2\cdot 4 \cdot \cdots (2n-2)(2n)} \dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{2\cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)}{1\cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)}} = \left(\frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)}\right)^2 \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

(d) Proveu les desigualtats $0 \leq I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$ i que, per tant,

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2n}$$

Com que $0 \leq \sin x \leq 1$ per $x \in [0, \pi/2]$, aleshores

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx$$ com volíem veure.

Ara, dividint $0 \leq I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$ entre I_{2n+1}, tenim

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$$

(e) Demostreu que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\underset{\text{apartat (d)}}{1 =} \lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \underset{\text{apartat (c)}}{=} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n)}\right)^2 \frac{2n+1}{2}\pi$$

Aleshores,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2n+1}} = 1 \longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

com volíem veure.

(f) Demostreu que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+1}} =$$

$$\underset{\text{apartat (e)}}{=} \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

17. Sigui f una funció contínua tal que $\int_0^x t\cdot f(t)\,dt = \sin x - x\cos x$. Calculeu $f(\frac{\pi}{2})$ i $f'(\frac{\pi}{2})$.

Definim $g(x) = \int_0^x t\cdot f(t)\,dt$. $g'(x) = x\cdot f(x)$.

Per altra banda, $g(x) = \sin x - x\cos x$. Aleshores, $g'(x) = x\sin x$ i per tant,

$f(x) = \sin x$; $f'(x) = \cos x$.

$f(\pi/2) = 1$, $f'(\pi/2) = 0$.

18. Sigui f una funció contínua i definim $F(x) = \int_1^x \left(t\int_1^t f(s)\,ds\right)dt$. Calculeu $F'(1)$ i $F''(x)$.

$F'(x) = x\int_1^x f(s)\,ds$

$F'(1) = 1\cdot\int_1^1 f(s)\,ds = 0$

$F''(x) = \int_1^x f(s)\,ds + x f(x).$

(19) Proveu que per tot $x \in [0, \pi/2]$ es verifica la igualtat:

$$\int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\,dt + \int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t})\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

Sigui $G(x) = \int_0^{\cos^2 x} \underbrace{\arccos(\sqrt{t})}_{f(t)}\,dt + \int_0^{\sin^2 x} \underbrace{\arcsin(\sqrt{t})}_{h(t)}\,dt$

Calculem $G'(x) = \frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_0^{\cos^2 x} + \frac{d}{dx}\Big[H(t)\Big]_0^{\sin^2 x}$ on $F'(t) = f(t)$; $H'(t) = h(t)$.

Aleshores,

$$G'(x) = \arccos(\cos x)\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x) + \arcsin(\sin x)\cdot 2\sin x\cos x =$$
$$= -2x\sin x\cos x + 2x\sin x\cos x = 0.$$

Per tant $G(x)$ és constant.

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \arccos(\sqrt{t})\,dt + \int_0^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \arcsin(\sqrt{t})\,dt =$$

$$= \int_0^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \underbrace{\left(\arccos(\sqrt{t}) + \arcsin(\sqrt{t})\right)}_{= \frac{\pi}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

problema 21 del tema 1

Aleshores $G(x) = \frac{\pi}{4}$ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(20) Sigui $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua. Es defineix $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt, & x \neq 0 \\ f(0), & x = 0. \end{cases}$$

Demostreu que

(a) F és contínua a $\mathbb{R}$ i derivable a $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - (-f(-x))}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{2} = f(0).$$

l'Hôpital ja que és $\frac{0}{0}$

Així, F és contínua a $\mathbb{R}$, ja que per $x \neq 0$, F és contínua ja que f és contínua.

Ara, per $x \neq 0$,

$$F'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{(f(x) - (-f(-x)))x - \int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{(f(x)+f(-x))x - \int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{x^2}$$

i per tant, F és derivable.

(b) si existeix $f'(0)$, aleshores existeix $F'(0)$.

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt - F(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^{x} f(t)\,dt - f(0)\cdot 2x}{2x^2} \underset{\text{l'Hôpital } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)+f(-x)-2f(0)}{4x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{4x} + \lim_{x\to 0} \frac{f(-x)-f(0)}{4x} \underset{\exists f'(0)}{=} \frac{f'(0)}{4} - \frac{f'(0)}{4} = 0$$

(21) Sigui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funció contínua i derivable tal que $f(0)=0$ i $f'(0)=1$.
Demostreu que
$$F(x) = \int_{-2x+1}^{4x^2-1} f(t)\,dt$$
té un mínim al punt $x=\frac{1}{2}$.

$$F'(x) = 8x\cdot f(4x^2-1) - (-2)f(-2x+1) = 8x\cdot f(4x^2-1) + 2f(1-2x)$$

$$F'(\tfrac{1}{2}) = 4\cdot f(0) + 2\cdot f(0) = 0$$

$$F''(x) = (8x)^2 f'(4x^2-1) + 8\cdot f(4x^2-1) + 2f'(1-2x)\cdot(-2)$$

$$F''(\tfrac{1}{2}) = 4^2 f'(0) + 8f(0) - 4f'(0) = 12\cdot f'(0) = 12 > 0.$$

Aleshores, F té un mínim en $x=\frac{1}{2}$.

(22) Estudieu la monotonia de la funció $f(x) = \int_{x}^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+2}}$.

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x)^4+(2x)^2+2}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+2}} = \frac{2\sqrt{x^4+x^2+2} - \sqrt{16x^4+4x^2+2}}{\sqrt{16x^4+4x^2+2}\,\sqrt{x^4+x^2+2}} = 0 \iff$$

$$\iff 2\sqrt{x^4+x^2+2} = \sqrt{16x^4+4x^2+2} \iff 4(x^4+x^2+2) = 16x^4+4x^2+2 \iff$$
$$\iff 12x^4-6=0 \iff x^4=\tfrac{1}{2} \iff x=\pm\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}.$$

Aleshores, f és estrictament creixent a $(-\infty, -\sqrt[4]{1/2}) \cup (+\sqrt[4]{1/2}, +\infty)$ i estrictament decreixent a $(-\sqrt[4]{1/2}, +\sqrt[4]{1/2})$.

(23) Calculeu els límits següents:

(a) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3} \underset{\text{l'Hôpital } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x\cdot 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{3}\,\frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}.$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt} \underset{\text{l'Hôpital } \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} \underset{\text{l'Hôpital } \frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

(c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{x^2+1} e^{-t}/t\,dt}{x^2} \underset{\text{l'Hôpital } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{-(x^2+1)}}{x^2+1}\cdot 2x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-(x^2+1)}}{x^2+1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(24) Calculeu totes les funcions de classe C^1 en $\mathbb{R}$ tals que

$$f^2(x) = \int_0^x \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)dt + 2018.$$

Derivant a banda i banda,

$$2\cdot f(x)\cdot f'(x) = f^2(x) + f'(x)^2 \Leftrightarrow (f(x) - f'(x))^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f = f' \Rightarrow \ln f(x) = x + k \to f(x) = Ce^x$$

Com que $(f(0))^2 = 2018 \Longrightarrow f(0) = \pm\sqrt{2018}$

Aleshores, $f(x) = \pm\sqrt{2018}\,e^x$.

(25) Sigui $f: [a,b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$ una funció derivable tal que $f'(x) > 0$, per tot $x \in [a,b]$. Demostreu l'equació següent de les dues maneres que s'indiquen:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx = b\,f(b) - a\,f(a)$$

(a) Treballant directament el membre de l'esquerra.

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx = \int_a^b y\cdot f'(y)\,dy = [y\cdot f(y)]_a^b - \int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx.$$

$f^{-1}(x) = y$ $u = y \quad dv = f'(y)dy$

$x = f(y)$ $du = dy \quad v = f(y)$

$dx = f'(y)dy$

(b) Derivant ambdós costats respecte b (i considerant a fix).

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt$$

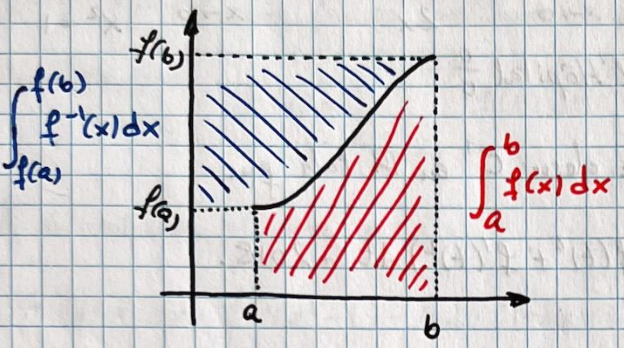
$$G'(x) = f(x) + f^{-1}(f(x))\cdot f'(x) = f(x) + x f'(x).$$

Per altra banda, si $H(x) = x f(x) - a f(a)$,

$H'(x) = f(x) + x f'(x)$.

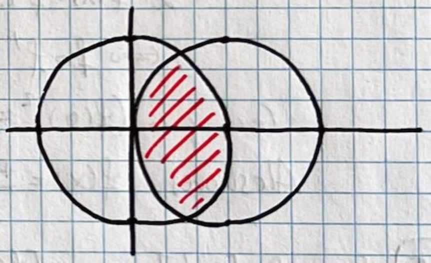
Ara, com $G(a) = H(a) = 0$, tenim que $G(x) = H(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

Doneu una interpretació geomètrica d'aquesta fórmula:



(26) Calculeu l'àrea comuna als cercles $x^2+y^2=9$; $(x-3)^2+y^2=9$.

$$S = 2S_0 = 2\int_0^{3/2}\sqrt{9-(x-3)^2}\,dx + 2\int_{3/2}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx =$$



$$= 4\int_{3/2}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx = 4\int_{\pi/6}^{\pi/2}(3\cos\theta)^2\,d\theta =$$

$y = x-3$
$dy = dx$

$x = 3\sin\theta$
$dx = 3\cos\theta\,d\theta$
$x = \frac{3}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$
$x = 3 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

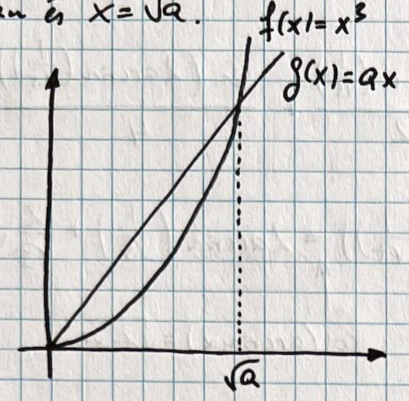
$$= 36\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = 36\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = 18\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/2} =$$

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$$= 18\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sin\pi - \sin\pi/3}{2}\right] = 18\left(\frac{2\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 6\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3}.$$

(27) Calculeu el valor d'$a>0$ per tal que la funció $f(x)=x^3$ divideixi en dues parts iguals el triangle determinat per la funció $g(x)=ax$, l'eix OX i el punt de tall més gran de les funcions f i g.

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3=ax \Leftrightarrow x=0,\ x=-\sqrt{a},\ x=\sqrt{a}$. El punt de tall més gran és $x=\sqrt{a}$.



l'àrea del triangle és $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a}\cdot a\sqrt{a}=\frac{a^2}{2}$.

Ara,

$$\int_0^{\sqrt{a}} x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{a^2}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}\right).$$

Aleshores, l'enunciat es verifica per a qualsevol valor d'$a>0$.

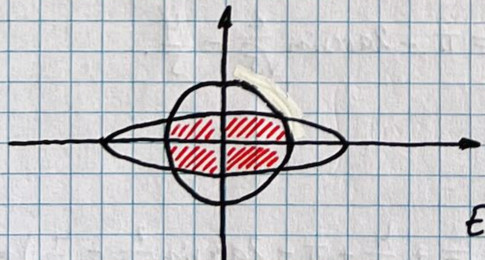
(28) Trobeu l'àrea limitada per la corba $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ i els eixos de coordenades.

La corba talla els eixos a $(1,0)$ i $(0,1)$.

$$S=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2dx=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)\,dx=\left[x+\frac{x^2}{2}-2\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1=$$

$$=\left[x+\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x^{3/2}\right]_0^1=1+\frac{1}{2}-\frac{4}{3}=\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{9-8}{6}=\frac{1}{6}.$$

(29) Calculeu l'àrea de la regió comú a la circumferència $x^2+y^2=4$ i l'el·lipse $\frac{x^2}{16}+y^2=1$.



$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=4\\ \frac{x^2}{16}+y^2=1\end{array}\right\}\Rightarrow x^2\left(1-\frac{1}{16}\right)=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{3}{15}16\Rightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}\rightarrow y=\frac{\pm2}{\sqrt{5}}$$

Els quatre punts de tall entre les dues còniques són $\left(\frac{\pm4}{\sqrt{5}},\frac{\pm2}{\sqrt{5}}\right)$.

Per simetria, $S=4\cdot S_{\square}$

$$S_{\square}=\underbrace{\int_0^{4/\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_{4/\sqrt{5}}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^{4/\sqrt5} \sqrt{1-\frac{x^2}{16}}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)} 4\cos^2\theta\, d\theta = 4\int_0^{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)} \cos^2\theta\, d\theta \underset{\uparrow}{=} 4\int_0^{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta =$$

$x = 4\sin\theta$

$dx = 4\cos\theta\, d\theta$

$x = \frac{4}{\sqrt5} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$$= 4\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)} = 4\left(\frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)}{2} + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)}{4}\right) =$$

$$= 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\frac{1}{\sqrt5}\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) \underset{\uparrow}{=} 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + \frac{2}{\sqrt5}\sqrt{1-\frac{1}{5}} =$$

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

$$= 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + \frac{4}{5}.$$

$$I_2 = \int_{4/\sqrt5}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{\arcsin\frac{2}{\sqrt5}}^{\pi/2} 4\cos^2\theta\, d\theta = 4\int_{\arcsin\frac{2}{\sqrt5}}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta =$$

$x = 2\sin\theta$

$dx = 2\cos\theta\, d\theta$

$x = \frac{4}{\sqrt5} \Rightarrow \theta = \arcsin\frac{2}{\sqrt5}$

$x = 2 \Rightarrow \theta = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

$$= 4\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\arcsin\frac{2}{\sqrt5}}^{\pi/2} = 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin\left(2/\sqrt5\right)}{2} - \frac{\sin\left(2\arcsin\frac{2}{\sqrt5}\right)}{4}\right) =$$

$$= \pi - 2\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt5}\right) - 2\frac{2}{\sqrt5}\cos\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt5}\right) = \pi - 2\arcsin\frac{2}{\sqrt5} - \frac{4}{5}.$$

Així doncs,

$$S = 4\cdot S = 4(I_1 + I_2) = 4\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + \frac{4}{5} + \pi - 2\arcsin\frac{2}{\sqrt5} - \frac{4}{5}\right) =$$

$$= 4\pi + 8\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{2}{\sqrt5}\right).$$