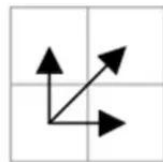


DTW (Dynamic Time Warping) 算法基於動態規劃的思想，可以在兩個長度長度時間序列的相似度，由日本學者 Itakura 提出。

假定我们有两个时间序列  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  和  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ ，长度分别是  $n$  和  $m$ ；那么 DTW 计算  $Q$  与  $C$  相似度的计算过程如下：

Step 1. 构建大小为  $n \times m$  的矩阵  $D$ ，矩阵元素  $d_{ij} = \text{dist}(q_i, c_j)$ ，其中  $\text{dist}$  表示距离计算函数，通常采用欧几里得距离。

Step 2. 在矩阵  $D$  中搜索从  $d_{11}$  到  $d_{nm}$  的最短路径（通常使用动态规划搜索），在  $d_{ij}$  位置，路径搜索方向如下图所示：



Step 3. 将矩阵  $D$  中从  $d_{11}$  到  $d_{nm}$  的最短路径作为  $Q$  和  $C$  序列的相似度。

案例：

假設我們有三個時間序列，分別是

$\text{ts\_a} = [1, 5, 8, 10, 56, 21, 32, 8]$

$\text{ts\_b} = [1, 5, 8, 10, 23, 56, 21, 32, 8]$

$\text{ts\_c} = [1, 3, 6, 9, 16, 29, 31, 32, 33]$

$\text{ts\_a}$  與  $\text{ts\_b}$  和  $\text{ts\_c}$  的長度不一樣，現在需要知道  $\text{ts\_a}$  與  $\text{ts\_b}$  和  $\text{ts\_c}$  這更相似，通過觀察，我們可以清楚的切削  $\text{ts\_a}$  與  $\text{ts\_b}$  的相似度更高。使用 DTW 相似度解決該問題的代碼如下：