4

微分的應用

4.8 牛頓法

牛頓法

考慮一位汽車經銷商，賣一台車的費用是 18000 美元，或者可以選擇貸款，五年分期一期一個月繳交 375 美元。

我們可能會想知道選擇分期繳交的話，反推回去計算貸款利息會是多少。

五年共六十期，本金加利息總共是

$$18000(1+x)^{60}$$

但每期償還的錢也會計算利息 375(1+x)n 總共六十期依幾何級數加總可得

$$375[(1+x)^{60}-1]/[(1+x) - 1]$$

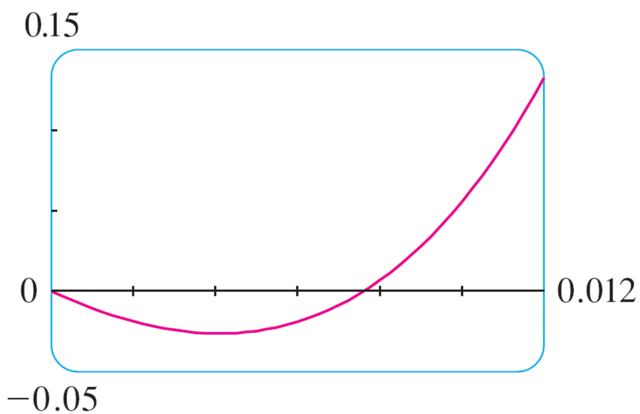
此時我們就必須要解這個方程式

$$18000(1+x)^{60} - [375(1+x)^{60} - 375]/x = 0$$

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0$$

牛頓法

利用電腦繪圖，我們可以稍稍看出滿足的 x 位置如下圖



圖一

除了 $x = 0$ 的解以外，我們可以觀察到仍有一解在 x = 0.007 以及 x = 0.008 之間。

在放大則可進一步知道大概在 0.0076 左右。

我們仍可以放大（用筆算的話可以使用二分逼近法），得到更多準確的位數，但我們需要更多的計算。

牛頓法

一般的電腦計算軟體可能可以解根到小數點後九位：

0.007628603

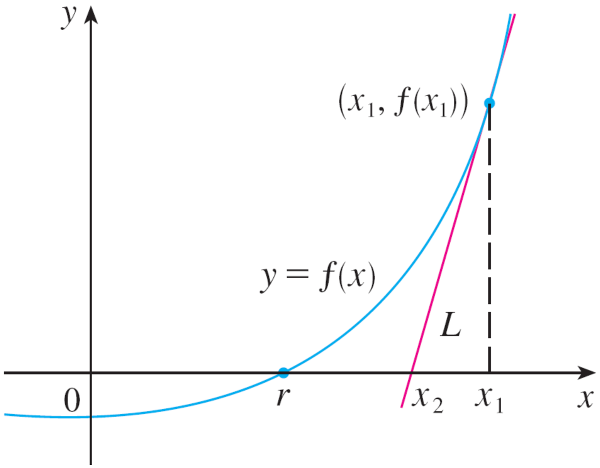
甚至，看電腦允許的精確度到幾位，還可以到小數點後十六位。那麼，這些電腦軟體到底是怎樣計算才能這麼快的解得根呢？

其中的一種演算法也是最常用的演算法便是 —— 牛頓法 (Newton’s method) ，一般也稱為 —— 牛頓拉弗森法 (Newton-Raphson method) 。

接下來我們將介紹這個方法的原理，以及線性逼近的概念。

牛頓法

牛頓法的幾何圖形如下所示，其中我們想知道的根便是圖中 r 所標示的位置。



圖二

選取第一個點 x_1 在圖形上的點 $(x_1,f(x_1))$ 做切線，切線與 x 軸相交於 x_2 。

牛頓法

在這個短短的過程中，我們想要做的是：

(1) 在小範圍內，我們可以用切線來貼近函數圖形

(2) 在小範圍內，用切線與 x 軸的交點會接近函數圖形與 x 軸的焦點。

如何得到 x_2 的值呢？首先我們可利用點斜式以及切線斜率 $f'(x_1)$ ，計算在 $(x_1,f(x_1))$ 的切線：

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

牛頓法

計算與 x 軸的交點，令 $y = f(x_2) = 0$ ，得

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

若 $f'(x_1) \neq 0$ 不為 0 ，則可將 $x_1 \text{->} x_2$ 的過程寫成迭代式：

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

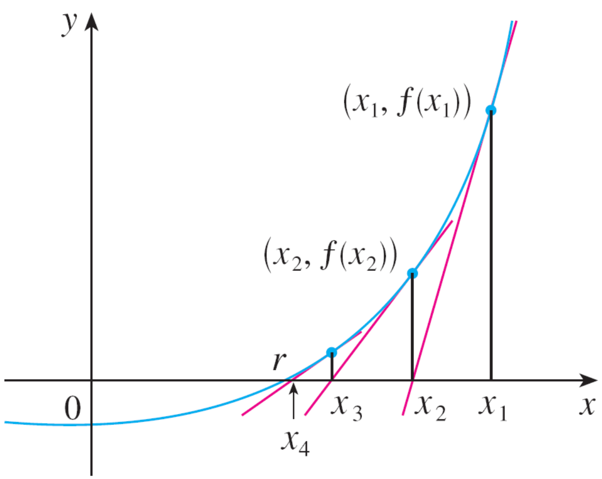
接著我們重覆一樣的動作，在 x_2 上利用 $(x_2, f(x_2))$ 上的切線計算切線與 x 軸相交的點。

牛頓法

於是可得到除了 x_1, x_2 的第三個逼近值 x_3：

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

在沒有遇到 $f'(x_n) = 0$ 或者剛好某個 $f(x_n) = 0$ 的情況之下，我們可以一直重複同樣的動作下去，得到一串逼近數列 x_1, x_2, x_3, x_4, …



圖三

牛頓法

對一般任意的函數，給定第 n 次的逼近值 x_n 且保證 $f'(x_n)$ 不為 0 時，可以得到第 n+1 次的逼近值：

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

當然，我們希望 x_n 會越來越接近我們所要的根 r ，也就是 x_n 的極限會是 r ：

$$\lim_{n \to \infty} x_n = r$$

我們先不討論是否會收斂至 r 。看幾個例子。

範例一

從 $x_1 = 2$ 開始，利用牛頓法求 $x^3 – 2x – 5$ 根的第三次的逼近值 x_3 。

解:

計算導函數

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \qquad \text{and} \qquad f'(x) = 3x^2 - 2$$

從 x_1 開始主要是利用勘根： $f(1) = –6$, $f(2) = –1$, $f(3) = 16$
於是我們可以知道在 (2, 3) 之間有一根。且此時 $f'(x) = 3x^2 – 2$ 在這附近大致上為正。

範例一 / 解

cont'd

於是我們得到迭代式：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

對 $n = 1$ ，

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2}$$

$$= 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2}$$

$$= 2.1$$

範例一 / 解

cont'd

當 $n = 2$ 時則有

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2x_2 - 5}{3x_2^2 - 2}$$

$$= 2.1 - \frac{(2.1)^3 - 2(2.1) - 5}{3(2.1)^2 - 2}$$

$$\approx 2.0946$$

可得到第三次的逼近值 $x_3 \approx 2.0946$ 。