4

微分的應用

4.7 最佳化問題

最佳化問題

在解決實際問題時，最大的挑戰常常是將問題轉化成數學的模型，其中一類可能的模型便是最佳化問題，也就是如何設定我們想觀察的變量，再來討論如何最佳化（使其達到最大值、最小值）。

我們先復習解決問題的幾個原則。

最佳化問題

1. 了解問題：什麼是變數？什麼是應變數？有什麼條件？

2. 建立關係圖：了解各個變量的關係

3. 利用符號代表各個變數與條件

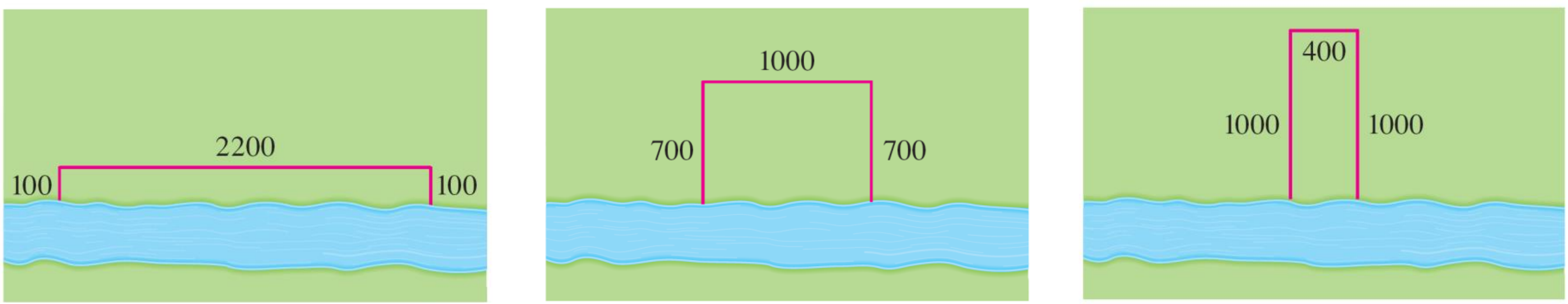
4. 用符號將變量之間的關係寫下函數、等式

5. 利用之前章節的方法討論我們關心變量的最大值或最小值。

範例一

一位農夫有 2400 吋長的籬笆，想沿著河岸圍住一塊長方形區塊的地。請問農夫需要怎麼圍，才可以圍出最大的面積？

解: 我們可以先嘗試幾個不同的情況如下圖



面積 = 220000 平方單位　面積 = 700000 平方單位　面積 = 400000 平方單位

圖一

範例一 / 解

cont'd

令 x, y 分別為矩形距離河岸的深度跟寬度，則可將面積表示為

$$A = xy$$

接著由條件

$$2x + y = 2400$$

於是我們可以將面積改寫為 x 的函數

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

範例一 / 解

cont'd

考慮現實條件 $x \geq 0,\ x \leq 1200$ ，於是我們的問題便是在這個區間上求函數的最大值

$$A(x) = 2400x - 2x^2 \qquad 0 \leq x \leq 1200$$

微分得到 $A'(x) = 2400 - 4x$ ，計算臨界點滿足

$$2400 - 4x = 0$$

知 $x = 600$ 。

於是 A 的最大值即發生在 x = 600 或者 [0,1200] 的邊界上。

範例一 / 解

帶入數值後得到 $A(0) = 0$, $A(600) = 720000$, 以及 $A(1200) = 0$ ，由於連續函數保證可以在閉區間上有最大值，其發生點若不在臨界點則在邊界，因此可以看出

$$A(600) = 720{,}000$$

為最大值。

在商業、經濟上的最佳化問題

在經濟上的應用

我們定義 $C(x)$ 為成本函數 **(cost function)**，表示生產 x 單位產品所需要的成本。而邊際成本 **(marginal cost)**，便是 C(x) 成本對於生產量的變化率。

換句話說邊際成本就是成本函數的導數。

接著考慮市場上的行銷，我們令 $p(x)$ 表示市場上有 x 單位產品時的銷售單價。

我們另外稱 p 為需求函數 **(demand function)** 或者價格函數 **(price function)**。一般而言市場上產品若越多，則可預期價格會減低。

在經濟上的應用

此時若市場上這項產品均售出，則可預期收入為：

$$R(x) = xp(x)$$

賣出 x 單位的產品，此時價格為 p(x) 。此時我們稱 *R(x)* 為收入函數 (**revenue function**).

收入函數的導數 R' 被稱為邊際收入 (**marginal revenue function**) ，也就是收入對產品銷售總量的變化率。

在經濟上的應用

將收入值減去成本便是獲利 (profit)

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

此時 P 稱為獲利函數 **(profit function)** 。

同樣的，邊際獲利 **(marginal profit function)** 則是 P' ，為獲利函數的導數。

範例六

一家商店在過去一週內售出 200 台藍光 DVD 播放器，其中一台價格為 350 美元。一項市場調查指出，價格每折 10 美元，則一週可以增加 20 臺的銷售量。試求此模型的需求與收入函數，並推論應該做多少折扣可以創造最大的獲利？

解:

我們假設 x 為藍光 DVD 播放器每週的銷售量，則比原先銷售量增加的數字即為 $x – 200$ 。

因此 $x – 200$ 每增加 20 ，價格則減 \$10 。

範例六 / 解

cont'd

因此每單位的增加銷售量，需要折扣的價格為 $\frac{1}{20} \times 10$ ，於是我們可寫下需求函數：

$$p(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200) = 450 - \frac{1}{2}x$$

此時獲利為

$$R(x) = xp(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$$

考慮邊際獲利 $R'(x) = 450 - x$ ，$R'(x) = 0$ 解得 $x = 450$ 。

由一次導數檢驗，可知 $x<450$ 時 R' 為正， $x>450$ 時 R' 為負，於是 R(x) 在 450 有局部極大值。同時，在其他點 R' 不再變號，因此在 $x = 450$ 時 R(x) 有最大值。

範例六 / 解

cont'd

此時相對應的價格為

$$p(450) = 450 - \frac{1}{2}(450) = 225$$

對應的折扣為 350 – 225 = 125.

因此為了創造最大獲利，應該做 $125 的折扣。