第8.3章 集合的基数

主要内容

- 集合的等势及其性质
- 重要的等势或不等势的结果
- 集合的优势及其性质
- 自然数与自然数集合
- 集合的基数
- 可数集

第一节 集合的等势与优势

集合的势是度量集合所含元素多少的量，集合的势越大，所含的元素越多。

一、集合的等势

1. 等势定义

定义 9.1 设 A, B 是集合，如果存在着从 A 到 B 的双射函数，就称 A 和 B 是等势的，记作 $A\approx B$. 如果 A 不与 B 等势，则记作 $A\not\approx B$.

2. 集合等势的实例.

例（1）$Z\approx N$.

Z:	0	–1	1	–2	2	–3	3	…
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
N:	0	1	2	3	4	5	6	…

$$f: Z \to N, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

则 f 是 Z 到 N 的双射函数. 从而证明了 $Z\approx N$.

得到一个“数遍”这些点的方法，这个计数过程就是建立Z到N的双射过程。

(2)　$N\times N\approx N$.

$N\times N$ 中所有的元素排成有序图形

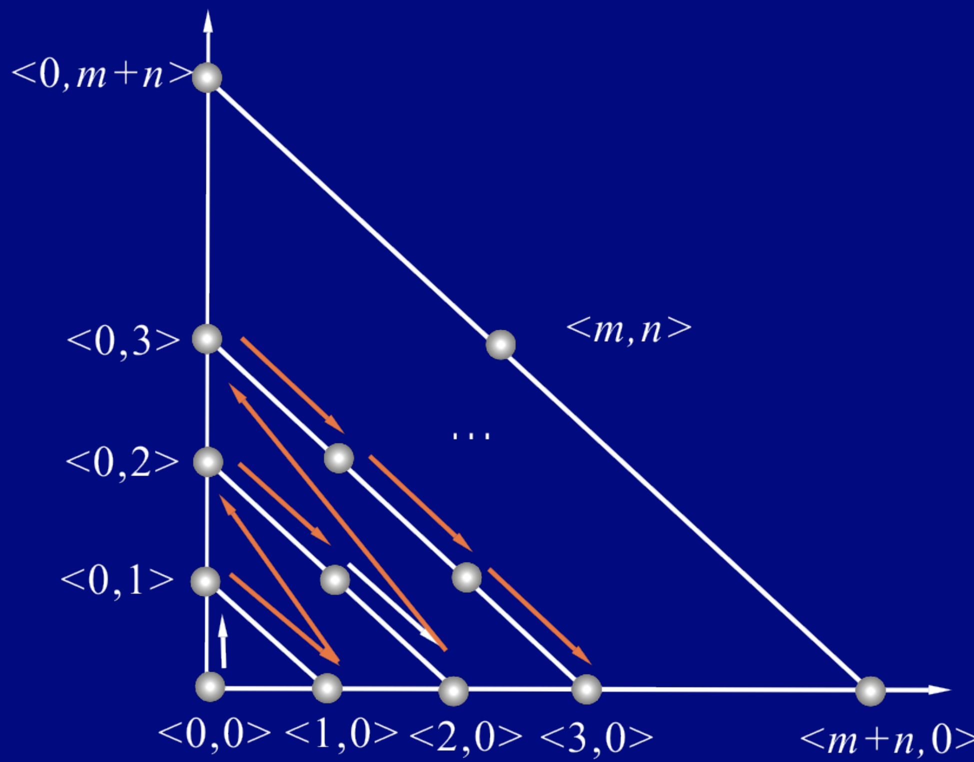

图 1

计数过程
〈0, 0〉 → 0
〈0, 1〉 → 1
〈1, 0〉 → 2
〈0, 2〉 → 3
〈1, 1〉 → 4
〈0, 2〉 → 5
…
〈m, n〉所在的直线方程是
x+y=m+n

每条斜线包含的点数分别是1，2，3，…,〈m, n〉所在斜线包含的点数是m+n+1。

〈m, n〉所在斜线下方的平面上的所有的斜线包含的点数是：1+2+…+(m+n)
〈m, n〉所在斜线按照箭头方向位于〈m, n〉之前的点数是m。

双射函数 $f: N\times N\rightarrow N,\quad f(<m,n>)=\dfrac{(m+n+1)(m+n)}{2}+m$

得到一个“数遍”这些点的方法，这个计数过程就是建立N×N到N的双射过程。

任何有理数都可以表示为分数。

(3) $N \approx Q$.

为建立 N 到 Q 的双射函数，先把所有形式为 p/q (p,q 为整数且 $q>0$) 的数排成一张表.在计数中只考虑每个数的第一次出现. 表中数 p/q 上方的方括号内标明了这个有理数所对应的计数结果.

双射函数　$f: N \rightarrow Q$, 其中 $f(n)$是[n]下方的有理数. 从而证明了 $N \approx Q$.

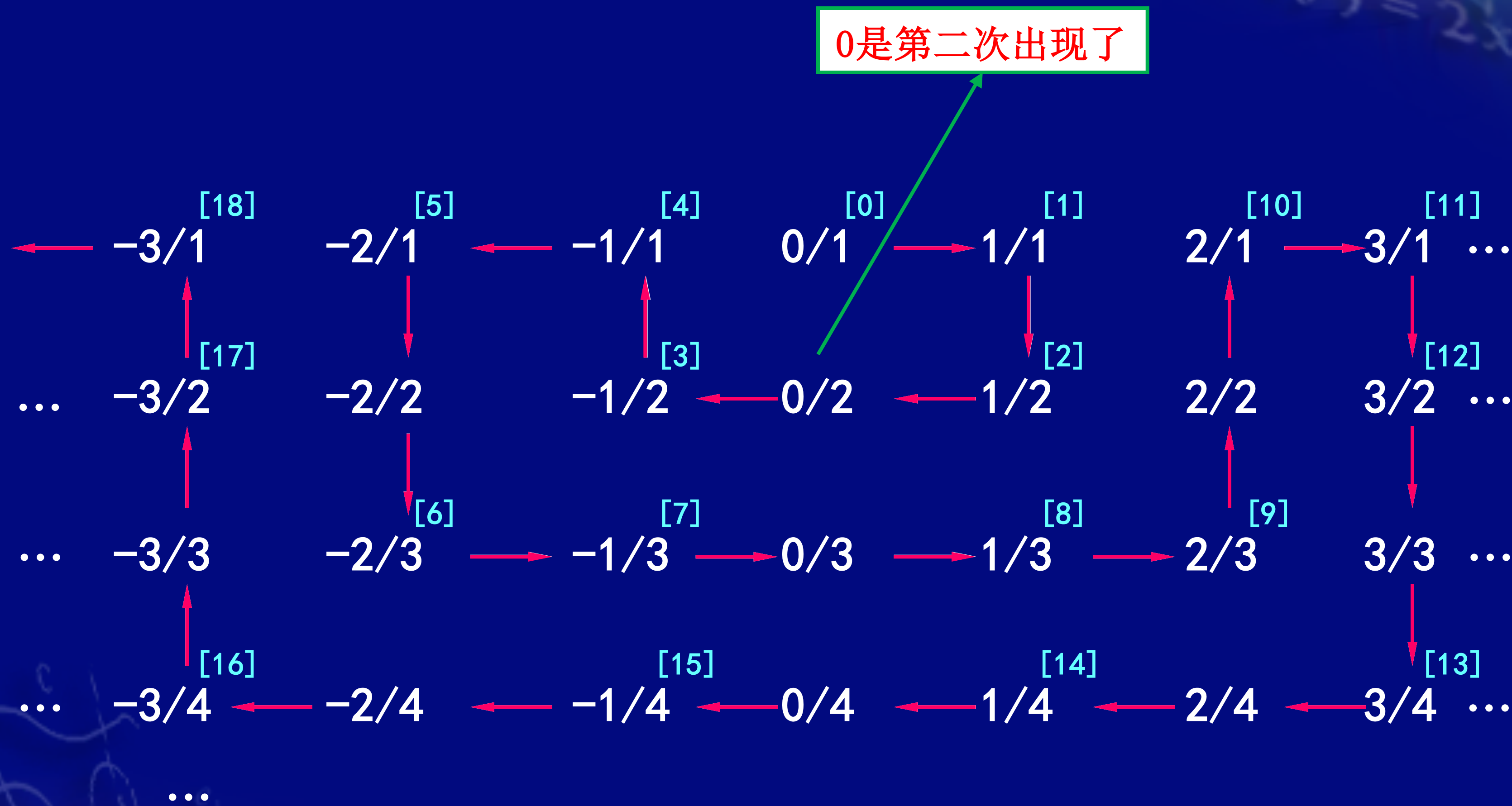
0是第二次出现了
[18] [5] [4] [0] [1] [10] [11]
−3/1 −2/1 −1/1 0/1 1/1 2/1 3/1 …
[17] [3] [2] [12]
… −3/2 −2/2 −1/2 0/2 1/2 2/2 3/2 …
[6] [7] [8] [9]
… −3/3 −2/3 −1/3 0/3 1/3 2/3 3/3 …
[16] [15] [14] [13]
… −3/4 −2/4 −1/4 0/4 1/4 2/4 3/4 …
…

图 2

PLAY

（4）$(0,1)\approx R$. 其中实数区间 $(0,1)=\{x \mid x\in R \wedge 0<x<1\}$. 令

双射函数 $f:(0,1)\to R,\quad f(x)=\tan\pi\dfrac{2x-1}{2}$

（5）$[0,1]\approx(0,1)$. 其中(0,1)和[0,1]分别为实数开区间和闭区间.

双射函数 $f:[0,1]\to(0,1)$

关键：
解决端点0和1的对应问题

$$f(x)=\begin{cases} 1/2 & x=0 \\ 1/2^2 & x=1 \\ 1/2^{n+2} & x=1/2^n,\ n=1,2,\ldots \\ x & \text{其它}x \end{cases}$$

（6）对任何 $a, b\in R$, $a<b$, $[0,1]\approx[a,b]$.

双射函数 f: $[0,1]\to[a,b]$, $f(x)=(b-a)x+a$

找到一个过点（0，a）和（1，b）的单调函数，比如一次线性函数：
y = px+q
则：p*0+q=a
p*1+q=b
=> p=b-a, q=a

类似地可以证明，对任何 $a, b\in R$, $a<b$, 有$(0,1)\approx(a,b)$.

设 A 为集合，对于任意的 $A'\subseteq A$，A' 的特征函数

$\chi_{A'}$：$A\to\{0,1\}$ 定义为

$\chi_{A'}(a)=1,\ a\in A'$

$\chi_{A'}(a)=0,\ a\in A-A'$

例　设 A 为任意集合，则 $P(A)\approx\{0,1\}^A$.

A的每个子集对应一个特征函数，不同的子集对应于不同的特征函数

证　如下构造从 $P(A)$ 到 $\{0,1\}^A$ 的函数

$$f:\ P(A)\to\{0,1\}^A,\ f(A')=\chi_{A'},\ \forall A'\in P(A).$$

其中 $\chi_{A'}$ 是集合 A' 的特征函数. 易证 f 是单射的.

对于任意的 $g\in\{0,1\}^A$，那么有 g：$A\to\{0,1\}$. 令

$$B=\{x \mid x\in A\wedge g(x)=1\}$$

则 $B\subseteq A$，且 $\chi_B=g$，即 $\exists B\in P(A),\ f(B)=g$. 从而证明了 f 是满射的. 由等势定义得

$$P(A)\approx\{0,1\}^A.$$

3．等势的性质

定理 9.1 设 A，B，C 是任意集合，

（1）$A \approx A$.

（2）若 $A \approx B$，则 $B \approx A$.

（3）若 $A \approx B$，$B \approx C$，则 $A \approx C$.

证明思路：利用等势的定义.

（1）I_A 是从 A 到 A 的双射

（2）若 f: $A \to B$ 是双射，则 f^{-1}：$B \to A$ 是从 B 到 A 的双射.

（3）若 f: $A \to B$，g：$B \to C$ 是双射，则 $f \circ g$：$A \to C$ 是从 A 到 C 的双射.

二、重要的等势或不等势的结果

1．等势结果

$N \approx Z \approx Q \approx N \times N$

任何实数区间都与实数集合 R 等势

$\boxed{R \approx [0,1] \approx (0,1) \approx [a,b], a,b \in R, a<b}$

2．不等势的结果

定理 9.2 (康托定理)

（1）$N \not\approx R$

（2）对任意集合 A 都有 $A \not\approx P(A)$.

证明思路:

（1）只需证明任何函数 f: $N \to [0,1]$都不是满射的.

任取函数 f: $N \to [0,1]$, 列出 f 的所有函数值.

然后构造一个[0,1]区间的小数 b，使得 b 与所有的函数值都不相等.

（2）任取函数 f: $A \to P(A)$，构造 $B \in P(A)$，使得 B 与 f 的任何函数值都不等.

证 （1）首先规定[0,1]中数的表示. 对任意的 $x\in[0,1]$, 令

$$x=0.x_1x_2\ldots,\ 0\le x_i\le 9$$

注意在 x 的表示式中不允许在某位（比如第 i 位为 4）之后有无数个 9 的情况. 若遇到这种情况, 则将 x 的第 i 位加 1（比如变成 4+1=5），而后面全是 0. （e.g., 0.24999.... 表示成 0.25000...）

用十进制表示，0.24999… 和 0.25000… 表达同一个实数，为了表达唯一性，只取其一表示方法。

设 f: $N\to[0,1]$是从 N 到[0,1]的任何一个函数. 如下列出 f 的所有函数值:

$$f(0)=0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}\ldots$$

$$f(1)=0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}\ldots$$

$$\ldots$$

$$f(n-1)=0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}\ldots$$

$$\ldots$$

构造一个y不在这个f的值域里：使得y的第n位表示b_n不等于第n个数f(n-1)的第n位表示$a_n^{(n)}$，此时y不等于任何一个列出的f函数值，而我们总能构造出这样的y。

令 y 的表示式为 $0.b_1b_2\ldots$, 并且满足 $b_i\ne a_i^{(i)}$, $i=1,2,\ldots$,那么 $y\in[0,1]$, 且 y 与上面列出的任何一个函数值都不相等. 这就推出 $y\notin\mathrm{ran}f$, 即 f 不是满射的.

对于任意一个x∈A,有两种情况：
1）如果$x \in g(x)$，那么$x \notin B$,从而$B \neq g(x)$；
2）如果$x \notin g(x)$，那么$x \in B$,从而$B \neq g(x)$；
因此，都有$B \neq g(x)$；

（2）我们将证明任何函数 $g: A \to P(A)$都不是满射的.

设 $g: A \to P(A)$是从 A 到 $P(A)$的函数，如下构造集合 B：

$$B=\{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}$$

则 $B \in P(A)$，但对任意 $x \in A$ 都有

如果B是空集，也就是说对于所有的x，x∈g(x)，那么说明∅ ∉ ran g.

$$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$$

从而证明了对任意的 $x \in A$ 都有 $B \neq g(x)$. 即 $B \notin$ ran g

注意：根据这个定理可以知道 $N \not\approx P(N)$，$N \not\approx \{0,1\}^N$.

三．优势

1．优势定义

定义 9.2

（1）设 A, B 是集合，如果存在从 A 到 B 的单射函数，就称 B 优势于 A，记作 $A \preccurlyeq\cdot B$.

如果 B 不是优势于 A，则记作 $A \npreceq\cdot B$.

（2）设 A, B 是集合，若 $A \preccurlyeq\cdot B$ 且 $A \not\approx B$，则称 B 真优势于 A，记作 $A \prec\cdot B$.

如果 B 不是真优势于 A，则记作 $A \nprec\cdot B$.

实例 $N \preccurlyeq\cdot N$, $N \preccurlyeq\cdot R$, $A \preccurlyeq\cdot P(A)$,

$R \npreceq\cdot N$

$N \prec\cdot R$, $A \prec\cdot P(A)$，但 $N \nprec\cdot N$.

2. 优势的性质.

定理 9.3 设 A, B, C 是任意的集合，则

（1）$A \preccurlyeq\cdot A$

（2）若 $A \preccurlyeq\cdot B$ 且 $B \preccurlyeq\cdot A$，则 $A \approx B$

（3）若 $A \preccurlyeq\cdot B$ 且 $B \preccurlyeq\cdot C$，则 $A \preccurlyeq\cdot C$

证明：略

（2）为证明集合之间的等势提供了一个有力的工具。因为在某些情况下，直接构造从A到B的双射函数相当困难，但是可以分别构造从A到B的单射函数和从B到A的单射函数可能更容易。

例 证明 $\{0,1\}^N \approx [0,1)$.

设 $x\in[0,1)$, $0.x_1x_2\ldots$是 x 的二进制表示. 规定表示式中不允许出现连续无数个 1.

用二进制表示，0. 01111… 和 0. 10000… 表达同一个实数，为了表达唯一性，只取其一表示方法。

对于 x，如下定义 f：$[0,1)\to\{0,1\}^N$，使得

$$f(x) = t_x,\ 且\ t_x: N\to\{0,1\},\quad t_x(n) = x_{n+1},\ n = 0,1,2,\ldots$$

例如 $x = 0.1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ldots$，则对应于 x 的函数 t_x 是:

n	0 1 2 3 4 5 6 7…
$t_x(n)$	1 0 1 1 0 1 0 0…

易见 $t_x \in \{0,1\}^N$，且对于 $x,y \in [0,1)$, $x\neq y$，必有 $t_x\neq t_y$，即 $f(x)\neq f(y)$.

这就证明了 f：$[0,1)\to\{0,1\}^N$ 是单射的.

考虑 $t\in\{0,1\}^N$，其中

$t(0)=0,\ t(n)=1,\ n=1, 2, \ldots.$

但是f不是满射的，所以f不是双射函数，所以不能通过f直接证明等势。

按照 f 的定义，只有 $x=0.011\ldots$才能满足 $f(x)=t$．但根据规定，这个数 x 应该记为 $0.100\ldots$，所以根本不存在 $x\in[0,1)$，满足 $f(x)=t$.

定义函数 g：$\{0,1\}^N\to[0,1)$. g 的映射法则恰好与 f 相反．即

$\forall t\in\{0,1\}^N,\quad t: N\to\{0,1\},\quad g(t)=0.x_1x_2\ldots$，其中 $x_{n+1}=t(n)$.

但不同的是，将 $0.x_1x_2\ldots$看作数 x 的十进制表示．这样就避免了形如 $0.0111\ldots$和 $0.1000\ldots$在二进制表示中对应了同一个数的情况，从而保证了 g 的单射性.

根据定理 9.3 有$\{0,1\}^N\approx[0,1)$．再使用等势的传递性得$\{0,1\}^N\approx R$.

g也不是满射的，因为用十进制表示，$x_1, x_2, x_3\cdots$大于1的时候，并没有对应的t。所以g也不是双射函数，所以不能通过g直接证明等势。

总结:

重要的等势或优势的结果.

- $N \approx Z \approx Q \approx N \times N$
- $R \approx [a,b] \approx (c,d) \approx \{0,1\}^N \approx P(N)$
- $\{0,1\}^A \approx P(A)$
- $N \prec\cdot R$
- $A \prec\cdot P(A)$

其中$[a,b]$, (c,d)代表任意的实数闭区间和开区间.

第二节 集合的基数

一．自然数与自然数集合

1. 定义

定义 9.3 设 a 为集合，称 $a\cup\{a\}$为 a 的后继，记作 a^+，

即 $a^+=a\cup\{a\}$.

如下定义自然数：

$0=\varnothing$

$1=0^+=\varnothing^+ = \{\varnothing\}=\{0\}$

$2=1^+= \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\}\cup\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=\{0,1\}$

$3=2^+=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}^+= \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}= \{0,1,2\}$

…

$n=\{0, 1, \ldots, n-1\}$

…

定义 9.4 设 A 为集合,如果满足下面的两个条件：

（1）$\varnothing \in A$

（2）$\forall a(a \in A \rightarrow a^{+} \in A)$

则称 A 是归纳集.

例如下面的集合

$$\{\varnothing,\varnothing^{+},\varnothing^{++},\varnothing^{+++},\ldots\}$$

$$\{\varnothing,\varnothing^{+},\varnothing^{++},\varnothing^{+++},\ldots,a,a^{+},a^{++},a^{+++},\ldots\}$$

都是归纳集.

定义 9.5

（1）一个自然数 n 是属于每一个归纳集的集合.

（2）自然数集 N 是所有归纳集的交集.

两个定义得到同样的结果.

鉴于自然数都是集合，有关集合的运算对自然数都是适用的，例如：

$2 \cup 5$，$3 \cap 4$ 等

2．自然数的性质

（1）对任何自然数 n 有 $n \approx n$.

（2）对任何自然数 n, m，若 $m \in n$，则 $m \subseteq n$.

（3）对任何自然数 n 和 m，以下三个式子：

$$m \in n, m \approx n, n \in m$$

必成立其一且仅成立其一. 这个性质称为自然数的三歧性.

3. 自然数的相等与大小顺序

对任何自然数 m 和 n，

$m = n \Leftrightarrow m \approx n$

$m < n \Leftrightarrow m \in n$

二、有穷集和无穷集.

定义 9.6

一个集合是有穷的当且仅当它与某个自然数等势;

如果一个集合不是有穷的, 就称作无穷集.

实例:

$\{a,b,c\}$是有穷集, 因为 $3=\{0,1,2\}$, 且

$\{a,b,c\}\approx\{0,1,2\}=3$

N 和 R 都是无穷集, 因为没有自然数与 N 和 R 等势

利用自然数的性质可以证明: 任何有穷集只与惟一的自然数等势.

三、基数

1. 集合基数的定义

定义 9.7

（1）对于有穷集合 A，称与 A 等势的那个惟一的自然数为 A 的基数，记作 card$A$，即

$\mathrm{card}A = n \Leftrightarrow A \approx n$ （对于有穷集 A, card$A$ 也可以记作$|A|$）

（2）自然数集合 N 的基数记作 $\aleph_0$，即

$\mathrm{card}N = \aleph_0$

（3）实数集 R 的基数记作$\aleph$ （读作阿列夫），即

$\mathrm{card}R = \aleph$

2. 基数的相等和大小

定义 9.8 设 A, B 为集合，则

（1） $\mathrm{card}A=\mathrm{card}B \Leftrightarrow A\approx B$

（2） $\mathrm{card}A\leq\mathrm{card}B \Leftrightarrow A\preccurlyeq\cdot B$

（3） $\mathrm{card}A<\mathrm{card}B \Leftrightarrow \mathrm{card}A\leq\mathrm{card}B \wedge \mathrm{card}A\neq\mathrm{card}B$

根据上一节关于势的讨论不难得到:

$$\mathrm{card}Z = \mathrm{card}Q = \mathrm{card}N\times N = \aleph_0$$

$$\mathrm{card}P(N) = \mathrm{card}2^N = \mathrm{card}[a,b] = \mathrm{card}(c,d) = \aleph$$

$$\aleph_0<\aleph$$

集合的基数就是集合的势，
基数越大，势就越大。

其中 $2^N = \{0,1\}^N$.

由于对任何集合 A 都满足 $A \prec\cdot P(A)$，所以有

$$\mathrm{card}A < \mathrm{card}P(A)$$

因为总可以通过集合的幂集构造更大的集合

这说明不存在最大的基数. 将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到：

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$$

其中：

$0, 1, 2\ldots, n, \ldots$ 是全体自然数，是有穷基数.

$\aleph_0, \aleph, \ldots$ 是无穷基数，

$\aleph_0$ 是最小的无穷基数，$\aleph$ 后面还有更大的基数，如 $\mathrm{card}P(R)$等.

四．可数集

1．可数集的定义

定义 9.9 设 A 为集合，若 card$A \le \aleph_0$，则称 A 为可数集或可列集.

实例：$\{a,b,c\}$, 5, 整数集 Z, 有理数集 Q, $N \times N$ 等都是可数集。

实数集 R 不是可数集，与 R 等势的集合也不是可数集.

对于任何的可数集，它的元素都可以排列成一个有序图形. 换句话说，都可以找到一个“数遍”集合中全体元素的顺序. 回顾前边的可数集，特别是无穷可数集，都是用这种方法来证明的.

2．关于可数集有下面的性质：

- 可数集的任何子集都是可数集.
- 两个可数集的并是可数集.
- 两个可数集的笛卡儿积是可数集.
- 可数个可数集的笛卡儿积仍是可数集.
- 无穷集 A 的幂集 $P(A)$不是可数集.

例　求下列集合的基数.

（1）$T=\{x \mid x$ 是单词“*BASEBALL*”中的字母$\}$

（2）$B=\{x \mid x \in R \wedge x^2=9 \wedge 2x=8\}$

（3）$C=P(A)$, $A=\{1, 3, 7, 11\}$

解　（1）由 $T=\{B, A, S, E, L\}$知 card$T=5$.

（2）由 $B=\varnothing$，可知 card$B=0$.

（3）由$|A|=4$ 可知 card$C$=card$P(A)=|P(A)|=2^4=16$.

例 设 A, B 为集合，且

$\mathrm{card}A=\aleph_0$, $\mathrm{card}B=n$, n 是自然数, $n\neq 0$.

求 $\mathrm{card}A\times B$.

解 方法一

由 $\mathrm{card}A=\aleph_0$, $\mathrm{card}B=n$，可知 A, B 都是可数集．令

$$A=\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$$

$$B=\{b_0,b_1,b_2,\ldots,b_{n-1}\}$$

对任意的$<a_i,b_j>$, $<a_k,b_l>\in A\times B$ 有

$$<a_i,b_j>=<a_k,b_l> \Leftrightarrow i=k\wedge j=l$$

定义函数

$$f: A\times B\rightarrow N$$

得到一个“数遍” N×N中元素的方法

$$f(<a_i,b_j>)=in+j,\quad i=0,1,\ldots,\ j=0,1,\ldots,n-1$$

易见 f 是 $A\times B$ 到 N 的双射函数，所以

$$\mathrm{card}A\times B=\mathrm{card}N=\aleph_0$$

方法二

直接使用可数集的性质求解.

因为 card$A=\aleph_0$, card$B=n$，所以 A, B 都是可数集.

根据性质（3）可知 $A\times B$ 也是可数集，所以

$$\mathrm{card}A\times B\le\aleph_0$$

显然当 $B\neq\varnothing$时, card$A\le$card$A\times B$，这就推出

$$\aleph_0\le\mathrm{card}A\times B$$

综合上述得到 card$A\times B=\aleph_0$.

作业

- 29
- 34
- 37
- 39

第8.3章 习题课

一、本章的主要内容及要求

1．主要内容

- 集合等势的定义
- 等势的性质
- 集合优势的定义
- 优势的性质
- 重要的集合等势以及优势的结果
- 自然数及其自然数集合的定义
- 可数集与不可数集
- 集合的基基数

2．要求

- 能够证明两个集合等势
- 能够证明一个集合优势于另一个集合
- 知道什么是可数集与不可数集
- 会求一个简单集合的基数

二、练习

1． 设 A, B 为二集合，证明：如果 $A \approx B$，则 $P(A) \approx P(B)$

证　因为 $A \approx B$，存在双射函数 f：$A \to B$，因此存在反函数 f^{-1}：$B \to A$，如下构造函数

关键是如何构造双射函数

$$g: P(A) \to P(B),$$

$$g(T) = f(T), \forall T \subseteq A$$ （这里的 $f(T)$ 是 T 在函数 f 的像）

证明 g 的满射性. 对于任何 $S \subseteq B$，存在 $f^{-1}(S) \subseteq A$，且

$$g(f^{-1}(S)) = f^{-1} \circ f(S) = S$$

证明 g 的单射性.

$$g(T_1) = g(T_2) \Rightarrow f(T_1) = f(T_2)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(T_1) = f^{-1}(f(T_2))$$

$$\Rightarrow I_A(T_1) = I_A(T_2) \Rightarrow T_1 = T_2$$

综合上述得到 $P(A) \approx P(B)$.

说明：证明集合 A 与 B 等势的方法

方法一：直接构造从 A 到 B 的双射函数

给出一个从 A 到 B 的函数 f：$A \to B$

证明 f 的满射性

证明 f 的单射性

方法二：利用定理 9.3，构造两个单射函数 f：$A \to B$ 和 g：$B \to A$.

给出函数 f 和 g

证明 f 和 g 的单射性

方法三：利用等势的传递性

方法四：直接计算 A 与 B 的基数，得到 $\mathrm{card}A=\mathrm{card}B$.

注意：

- 以上方法中最重要的是方法一.
- 证明集合 A 与自然数集合 N 等势的方法就是找到一个"数遍" A 中元素的顺序.

2．已知 $A=\{n^7|n\in N\}$, $B=\{n^{109}|n\in N\}$，求下列各题：

（1） card$A$;

（2） card$B$;

（3） card$(A\cup B)$

（4） card$(A\cap B)$

解：（1）构造双射函数 f：$N\to A$, $f(n)=n^7$，因此 card$A=\aleph_0$,

（2）构造双射函数 g：$N\to A$, $g(n)=n^{109}$，因此 card$B=\aleph_0$,

（3）可数集的并仍旧是可数集，因此 card$(A\cup B)\le \aleph_0$,

但是 card$(A\cup B)\ge$card$A=\aleph_0$,

从而得到 card$(A\cup B)=\aleph_0$.

（4）因为 7 与 109 互素，card$(A\cap B)=\{n^{7\times 109} \mid n\in N\}$，

与（1）类似得到 card$(A\cap B)=\aleph_0$

3．已知 card$A=\aleph_0$，且 card$B<$card$A$，求 card$(A-B)$

解：由 $A-B\subseteq A$ 得到 card$(A-B)\leq$card$A$，即

$$\text{card}(A-B)\leq \aleph_0$$

由 card$B<$card$A$ 可知 B 为有穷集，

即存在自然数 n 使得 card$B=n$.

假设 card$(A-B)<\aleph_0$，那么存在自然数 m，

使得 card$(A-B)=m$.

从而得到

$$\text{card}A \leq \text{card}(A\cup B) = \text{card}((A-B)\cup B) \leq n+m,$$

与 card$A=\aleph_0$ 矛盾.

因此，card$(A-B)=\aleph_0$.