

7.4 关系的性质

本节总假定关系是某一非空集合上的二元关系，这一假定不失一般性。因为任一 A 到 B 的关系 R ，即 $R \subseteq A \times B$, $A \times B \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B)$ ，所以关系 R 总可看成是 $A \cup B$ 上的关系，它与原关系 R 具有完全相同的序偶，对它的讨论代替对 R 的讨论不改变于问题的本质。

一. 五种性质的定义

- 自反性与反自反性

定义7.11 设 R 为 A 上的关系,

(1) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$, 则称 R 在 A 上是自反的. ($I_A \subseteq R$?)

(2) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反的. ($R \cap I_A = \emptyset$?)

实例:

自反关系: 全域关系 E_A , 恒等关系 I_A , 小于等于关系 L_A , 整除关系 D_A .

反自反关系: 实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

$A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系, 其中

$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$ 自反

$R_2 = \{\langle 1, 3 \rangle\}$ 反自反

$R_3 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$ 既不是自反也不是反自反

一. 五种性质的定义

• 对称性与反对称性

定义7.12 设 R 为 A 上的关系,

(1) 若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$, 则称 R 为 A 上对称的关系. ($R=R^{-1}$?)

(2) 若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x=y)$, 则称 R 为 A 上的反对称关系.

($R \cap R^{-1} \subseteq I_A$?)

实例:

对称关系: A 上的全域关系 E_A , 恒等关系 I_A 和空关系 \emptyset .

反对称关系: 恒等关系 I_A 和空关系 \emptyset 也是 A 上的反对称关系.

设 $A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3 和 R_4 都是 A 上的关系, 其中

$R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$ 反对称但不对称 $R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ 对称但不是反对称

$R_3 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$ 既对称也反对称 $R_4 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$ 既不对称也不是反对称

一. 五种性质的定义

- 传递性

定义7.13 设 R 为 A 上的关系, 若

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R), \quad (R \circ R \subseteq R ?)$$

则称 R 是 A 上的传递关系.

实例:

A 上的全域关系 E_A , 恒等关系 I_A 和空关系 \emptyset

小于等于和小于关系, 整除关系, 包含与真包含关系

设 $A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3, R_4 是 A 上的关系, 其中

$R_1 = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$ 传递关系

$R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ 不是传递关系

$R_3 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$ 传递关系

$R_4 = \{\langle 1, 3 \rangle\}$ 传递关系

传递性定义条件不成立,
蕴含前件为假

【例】 设 $A = \{a, b, c\}$ ，以下各关系

R_i ($i=1, 2, \dots, 8$) 均为 A 上二元关系，请判断下列关系是否为自反或者反自反关系。

(1) $R_1 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle \}$ 自反关系

$R_2 = \{ \langle a, c \rangle, \langle c, a \rangle \}$ 反自反关系

$R_3 = \{ \langle a, a \rangle \}$ 既不自反也不反自反关系

A 上的 Φ 关系 反自反关系

当 $A = \Phi$ 时（这时 A 上只有一个关系 Φ ）， A 上空关系既是自反的，又是反自反的，

因为 $A = \Phi$ 使自反和反自反定义的前提总为假，所以蕴涵表达式的结果总为真。

自反： $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$

反自反： $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$

请判断下列关系是否为对称或者反对称关系

(2) $R_4 = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle \}$ 对称关系

$R_6 = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle \}$ 反对称关系

$R_5 = \{ \langle a, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, a \rangle \}$ 既不对称, 也不是反对称

A 上的恒等关系 I_A 既对称, 也反对称

请判断下列关系是否为传递关系

(3) $R_7 = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, c \rangle \}$ 传递关系

$R_7 - \{ \langle a, c \rangle \}$ 非传递关系

A 上的空关系 Φ , $R_8 = \{ \langle a, b \rangle \}$ 传递关系

因为传递性定义的前提对它们而言均为假:

$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$

(4) 任何非空集合上的空关系都是反自反、对称、反对称、传递的；其上的恒等关系是自反、对称、反对称、传递的；其上的全域关系是自反、对称、传递的。

(5) 三角形的相似关系、全等关系是自反、对称、传递的。

(6) 正整数集合上的整除关系是自反、反对称、传递的；但整数集合上的整除关系只有传递性 ($\langle 0,0 \rangle, \langle 1,-1 \rangle$)。

判断一个关系是否具有上述某种的性质，除直接用定义，还有下面的充要条件。

二. 关系性质的等价描述

下面给出这五种性质成立的充分必要条件.

定理7.9 设 R 为 A 上的关系, 则

- (1) R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$
- (2) R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \emptyset$
- (3) R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$
- (4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
- (5) R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$,
则称 R 在 A 上是自反的.

证明

(1) 必要性.

任取 $\langle x, y \rangle \in I_A$, 由于 R 在 A 上自反必有

$$x, y \in A \wedge x = y \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$$

从而证明了 $I_A \subseteq R$

充分性.

任取 x , 有

$$x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$$

因此 R 在 A 上是自反的.

R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \emptyset$

若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反的.

(2) 必要性: 用反证法。

假设 $R \cap I_A \neq \emptyset$, 必存在 $\langle x, y \rangle \in R \cap I_A \Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A$,
由于 I_A 是 A 上的恒等关系, 从而有 $x=y$, 所以
 $\langle x, x \rangle \in R$, 这与 R 在 A 上是反自反的相矛盾。

充分性: 任取 $x \in A$, 则有 $x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in I_A$
 $\Rightarrow \langle x, x \rangle \notin R$ (由于 $I_A \cap R = \emptyset$), 从而证明了 R 在 A 上是反自反的。

R 在 A 上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

若 $\forall x\forall y(x,y \in A \wedge \langle x,y \rangle \in R \rightarrow \langle y,x \rangle \in R)$,
则称 R 为 A 上对称的关系

(3) 必要性.

任取 $\langle x,y \rangle$,

$$\langle x,y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle y,x \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x,y \rangle \in R^{-1}$$

所以 $R = R^{-1}$

充分性.

任取 $\langle x,y \rangle$, 由 $R = R^{-1}$ 得

$$\langle x,y \rangle \in R \Rightarrow \langle y,x \rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle y,x \rangle \in R$$

所以 R 在 A 上是对称的.

R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(4) 必要性.

任取 $\langle x, y \rangle$, 有

$$\langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R$$

$$\Rightarrow x=y \wedge x, y \in A \quad (\text{因为 } R \text{ 在 } A \text{ 上是反对称的})$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A$$

这就证明了 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

充分性.

任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A \quad (R \cap R^{-1} \subseteq I_A)$$

$$\Rightarrow x=y$$

从而证明了 R 在 A 上是反对称的.

若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x=y)$,
则称 R 为 A 上的反对称关系.

R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

(5) 必要性.

任取 $\langle x, y \rangle$ 有

$$\langle x, y \rangle \in R \circ R$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \quad (\text{因为 } R \text{ 在 } A \text{ 上是传递的})$$

所以 $R \circ R \subseteq R$.

充分性.

任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R$, 则

$$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \circ R$$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$$

所以 R 在 A 上是传递的.

设 R 为 A 上的关系, 若

$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$, 则称 R 是 A 上的传递关系.

三、关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij} = 1$, 且 $i \neq j$, 则 $r_{ji} = 0$	对 M^2 中 1 所在位置, M 中相应位置都是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边, 是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 到 x_j 有边, x_j 到 x_k 有边, 则从 x_i 到 x_k 也有边

向量三角形

例 判断下图中关系的性质，并说明理由.

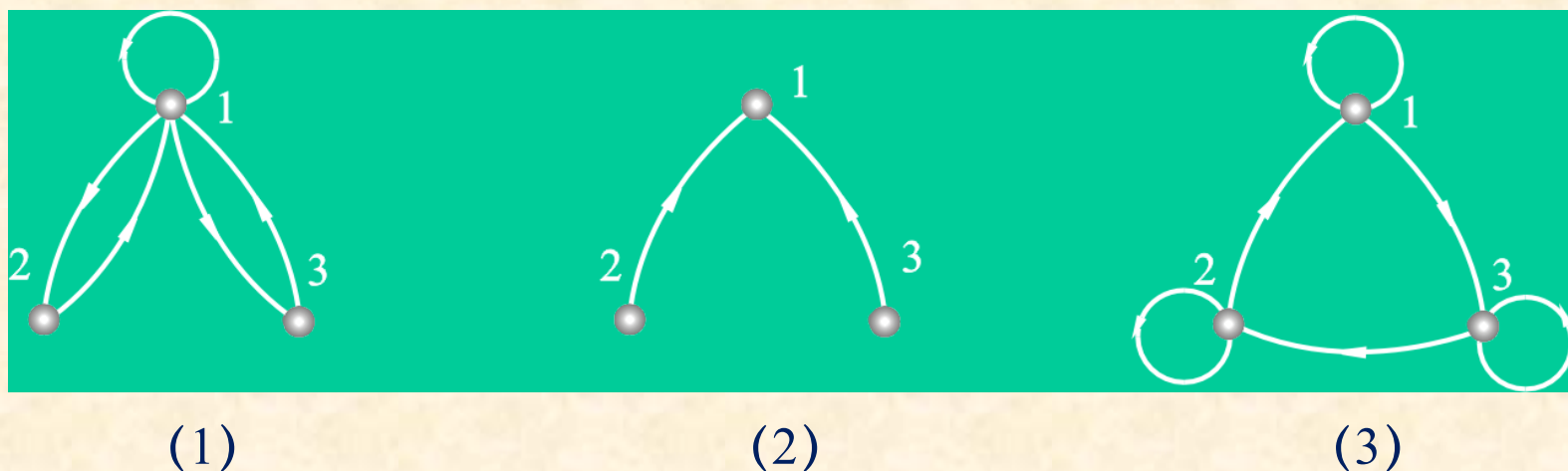


图 4

- (1) 不是自反也不是反自反的；对称的，不是反对称的；不是传递的.
- (2) 是反自反但不是自反的；是反对称的但不是对称的；是传递的.
- (3) 是自反但不是反自反的；是反对称的但不是对称的；不是传递的.

【例】 设 R_i 是 $A=\{1, 2, 3\}$ 上的二元关系（如图7.4.1所示），判断它们各具有什么性质？并说明理由。

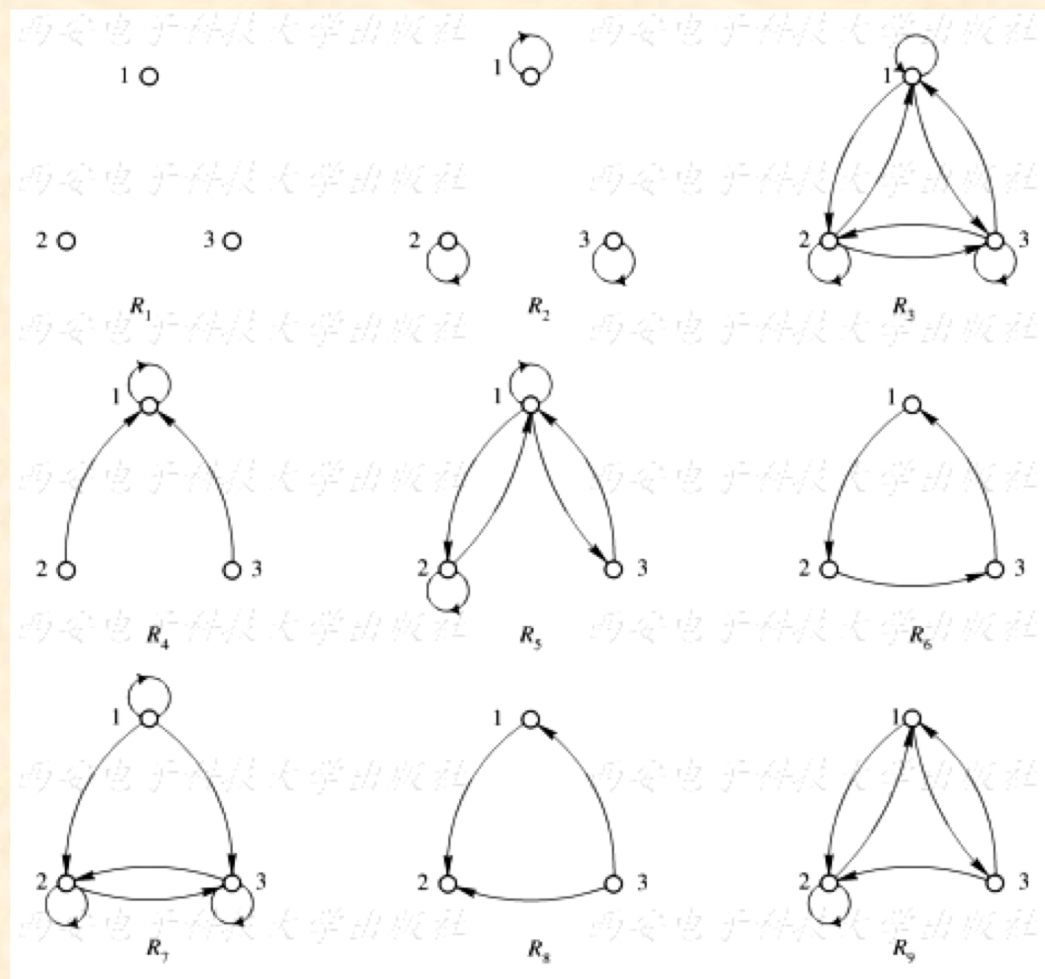
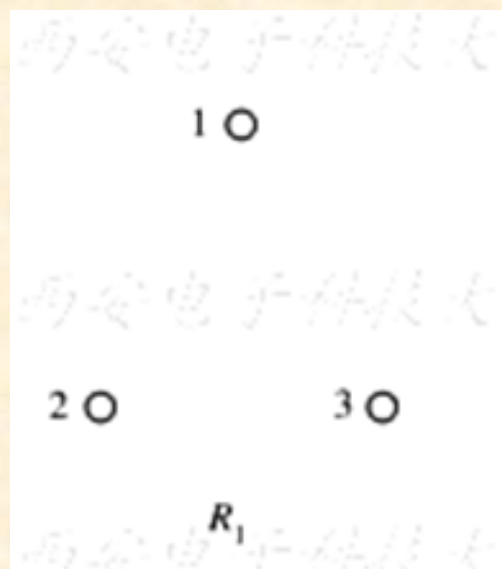
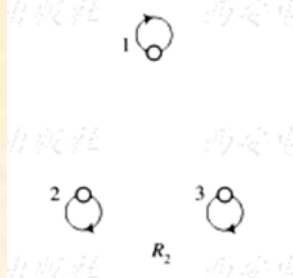


图7.4.1

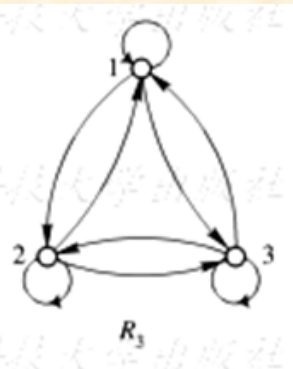
解 根据关系图的特征，我们可判断下列各关系具有的性质。

R_1 具有反自反性、对称性、反对称性、传递性。因为每一结点处均无环，既无双边又无单边，也无三角形。

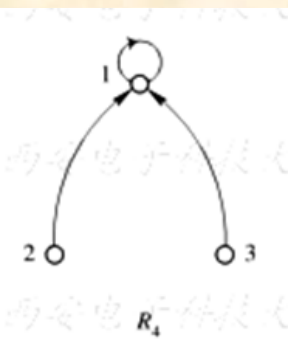




R_2 具有自反性、对称性、反对称性、传递性。因为每一结点处有一环，既无双边又无单边。

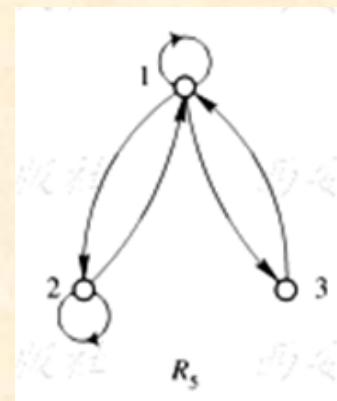


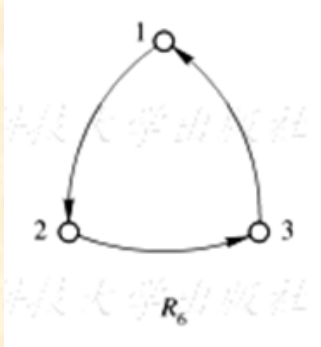
R_3 具有自反性、对称性、传递性。因为每一结点处有一环，有边就有双边，有三角形就是向量三角形。



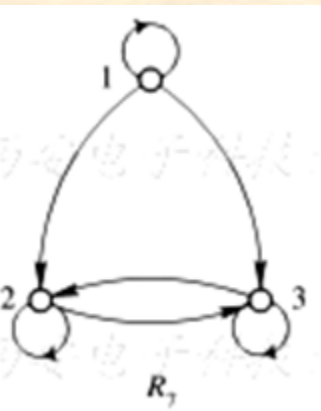
R_4 具有反对称性、传递性。因为无双边，无三角形。

R_5 具有对称性。因为无单边。

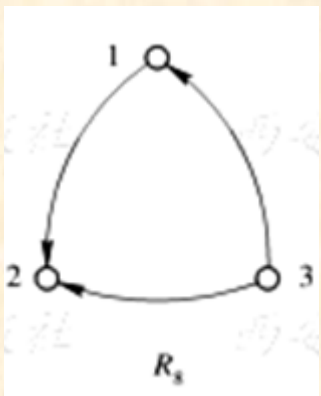




R_6 具有反自反性、反对称性。因为每一结点处均无环。

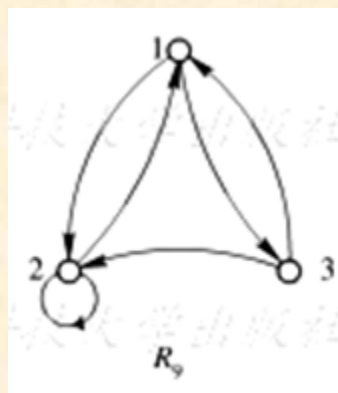


R_7 具有自反性、传递性。因为每一结点处有一环，有三角形，且是向量三角形。



R_8 具有反自反性、反对称性、传递性。因为每一结点处均无环，有三角形，且是向量三角形。

R_9 均不具备。



四. 五种性质对基本运算的封闭性

关系是序偶的集合，可作交、并、差、逆、复合运算。

如果已知某些关系具有某一性质，经过关系运算后的结果仍具有这一性质，我们称该性质对这一运算**封闭**。

定理7.4.2 设 R_1 、 R_2 是 A 上的自反关系，则 R_1^{-1} 、 $R_1 \cap R_2$ 、 $R_1 \cup R_2$ 、 $R_1 \circ R_2$ 也是 A 上的自反关系。证明留给读者。

定理7.4.3 设 R_1 、 R_2 是 A 上的对称关系，则 R_1^{-1} 、 $R_1 \cap R_2$ 、 $R_1 \cup R_2$ 、 $R_1 - R_2$ 也是 A 上的对称关系。

证明 仅证对称性对并运算封闭。

设 R_1 、 R_2 对称要证 $R_1 \cup R_2$ 对称。任取 $\langle x, y \rangle \in R_1 \cup R_2$ ，那么 $\langle x, y \rangle \in R_1$ 或 $\langle x, y \rangle \in R_2$ 。由 R_1 、 R_2 对称知 $\langle y, x \rangle \in R_1$ 或 $\langle y, x \rangle \in R_2$ ，因而 $\langle y, x \rangle \in R_1 \cup R_2$ 。 $R_1 \cup R_2$ 对称性得证。

按照定义来证明

若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$ ，
则称 R 为 A 上对称的关系

定理7.4.4 设 R_1 、 R_2 是 A 上的传递关系，则
 R_1^{-1} 、 $R_1 \cap R_2$ 是 A 上的传递关系。但 $R_1 \cup R_2$ 不一定是传递的。
($R_1 = \{ \langle 1, 3 \rangle \}$, $R_2 = \{ \langle 3, 4 \rangle \}$)

证明 (1) 证传递性对求逆运算封闭。

设 R_1 传递，要证 R_1^{-1} 传递，设有 $\langle x, y \rangle \in R_1^{-1}$, $\langle y, z \rangle \in R_1^{-1}$ ，那么 $\langle y, x \rangle \in R_1$, $\langle z, y \rangle \in R_1$ 。由 R_1 具有传递性可得 $\langle z, x \rangle \in R_1$ ，即 $\langle x, z \rangle \in R_1^{-1}$ 。

R_1^{-1} 在 A 上是传递的，得证。

设 R 为 A 上的关系，若
 $\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$ ，则称 R 是 A 上的传递关系。

(2) 证传递性对交运算封闭。

设 R_1, R_2 传递, 要证 $R_1 \cap R_2$ 传递。设有 $\langle x, y \rangle \in R_1 \cap R_2, \langle y, z \rangle \in R_1 \cap R_2$, 那么 $\langle x, y \rangle \in R_1, \langle x, y \rangle \in R_2, \langle y, z \rangle \in R_1, \langle y, z \rangle \in R_2$ 。由 R_1, R_2 具有传递性, 可得 $\langle x, z \rangle \in R_1, \langle x, z \rangle \in R_2$, 从而 $\langle x, z \rangle \in R_1 \cap R_2$ 。故 $R_1 \cap R_2$ 在 A 上是传递的, 得证。

定理7.4.5 设 R_1 、 R_2 是 A 上的反对称关系，
则 R_1^{-1} 、 $R_1 \cap R_2$ 、 $R_1 - R_2$ 是 A 上的反对称关系。
但 $R_1 \cup R_2$ 不一定是反对称的。 $R_1 = \{ \langle 1, 3 \rangle \}$, $R_2 = \{ \langle 3, 1 \rangle \}$

证明 仅证反对称性对差运算封闭。

设 R_1 、 R_2 反对称，要证 $R_1 - R_2$ 反对称。

设 $\langle x, y \rangle \in (R_1 - R_2)$ 且 $\langle y, x \rangle \in (R_1 - R_2)$ ， 因而 $\langle x, y \rangle \in R_1$ ， $\langle y, x \rangle \in R_1$ ， 从而由 R_1 的反对称性得 $x=y$ 。
这就完成了 $R_1 - R_2$ 反对称的证明。

若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x=y)$ ，
则称 R 为 A 上的反对称关系。

定理7.4.6 设 R_1 、 R_2 是 A 上的反自反关系，
则 R_1^{-1} 、 $R_1 \cap R_2$ 、 $R_1 \cup R_2$ 、 $R_1 - R_2$ 是 A 上的反自反关系。

证明留给读者。

我们举例说明反自反性、对称性、反对称性、传递性对复合运算均不封闭。

【例7.4.3】 $A=\{a, b, c\}$ ，讨论在下列各种情况下 $R \circ S$ 是否具有原有的性质。

$$R \circ S = \{ \langle a, a \rangle \}$$

(1) $R=\{ \langle a, b \rangle \}$, $S=\{ \langle b, a \rangle \}$ ， R 、 S 是反自反的。不是反自反

(2) $R=\{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle \}$ ， $R \circ S = \{ \langle a, c \rangle \}$ ，不是对称

$S=\{ \langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle \}$ ， R 、 S 是对称的。

(3) $R=\{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \}$ ， $R \circ S = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle \}$ ，对称

$S=\{ \langle b, b \rangle, \langle c, a \rangle \}$ ， R 、 S 是反对称的。

(4) $R=\{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle \}$ ，

$S=\{ \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle \}$ ， R 、 S 是传递的。

$R \circ S = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, a \rangle, \langle a, c \rangle \}$ ，不是传递的

补充练习（课后完成）。

(1) 设 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$ ， A 中“整除”关系记为 R ，问： R 是自反的？反自反的？对称的？反对称的？传递的？

(2) 设 $A=\{2,3,4,6,12,24,36\}$ ， A 中“整除”关系记为 R ，求 R^{-1} 及 R 的关系矩阵，说明 R^{-1} 的属性。

(3) 设 $A=\{a,b,c,d\}$ ，判定下列关系的性质

$$R_1=\{<a,a>, <b,a>\}$$

$$R_2=\{<a,a>, <b,c>, <d,a>\}$$

$$R_3=\{<c,d>\}$$

$$R_4=\{<a,a>, <b,b>, <c,c>\}$$

$$R_5=\{<a,c>, <b,d>\}$$

五、关系的性质和运算之间的联系.

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

7.5 关系的闭包

闭包运算是关系运算中一种比较重要的特殊运算，是对原关系的一种扩充。在实际应用中，有时会遇到这样的问题，给定了的某一关系并不具有某种性质，要使其具有这一性质，就需要对原关系进行扩充，而所进行的扩充又是“最小”的。这种关系的扩充就是对原关系的这一性质的闭包运算。

一、闭包定义

定义 7.14 设 R 是非空集合 A 上的关系, R 的自反 (对称或传递) 闭包是 A 上的关系 R' , 使得 R' 满足以下条件:

- (1) R' 是自反的 (对称的或传递的)
- (2) $R \subseteq R'$
- (3) 对 A 上任何包含 R 的自反 (对称或传递) 关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$ ，对称闭包记作 $s(R)$ ，传递闭包记作 $t(R)$ 。它们分别是具有自反性或对称性或传递性的 R 的“最小”超集合。称 r 、 s 、 t 为闭包运算，它们作用于关系 R 后，分别产生包含 R 的、最小的具有自反性、对称性、传递性的二元关系。这三个闭包运算也可由下述定理来构造。

二、闭包的构造方法

1. 集合表示

定理 设 R 为 A 上的关系, 则有

$$(1) \quad r(R)=R \cup R^0$$

$$(2) \quad s(R)=R \cup R^{-1}$$

$$(3) \quad t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

- (1) R' 是自反的 (对称的或传递的)
- (2) $R \subseteq R'$
- (3) 对 A 上任何包含 R 的自反 (对称或传递) 关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

证明思路:

(1) 和 (2) : 证明右边的集合满足闭包定义的三个条件.

(3) 采用集合相等的证明方法.

证明左边包含右边, 即 $t(R)$ 包含每个 R^n .

证明右边包含左边, 即 $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$ 具有传递的性质.

证

- (1) 由 $I_A = R^0 \subseteq R \cup R^0$ 可知 $R \cup R^0$ 是自反的, 且满足 $R \subseteq R \cup R^0$
- 设 R'' 是 A 上包含 R 的自反关系, 则有 $R \subseteq R''$ 和 $I_A \subseteq R''$
- 从而 $R \cup R^0 \subseteq R''$
- 综上所述 $R \cup R^0$ 满足闭包定义的三个条件, 所以
- $r(R) = R \cup R^0$.

(3) 先证 $R \cup R^2 \cup \dots \subseteq t(R)$ 成立.

方法: 用归纳法证明对任意正整数 n 有 $R^n \subseteq t(R)$
 $n=1$ 时有 $R^1=R \subseteq t(R)$.

假设 $R^n \subseteq t(R)$ 成立, 那么对任意的 $\langle x, y \rangle$ 有

$$\langle x, y \rangle \in R^{n+1} = R^n \circ R$$

$$\Rightarrow \exists t(\langle x, t \rangle \in R^n \wedge \langle t, y \rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \exists t(\langle x, t \rangle \in t(R) \wedge \langle t, y \rangle \in t(R))$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in t(R) \quad (\text{因为 } t(R) \text{ 是传递的})$$

这就证明了 $R^{n+1} \subseteq t(R)$. 由归纳法命题得证.

也可以从三个条件入手, $t(R)$ 可以看做A上任何包含R的传递关系 R'' :

- (1) $RUR^2U\ldots$ 是传递的
- (2) $R \subseteq RUR^2U\ldots$
- (3) 对A上任何包含R的传递关系 R'' 有 $RUR^2U\ldots \subseteq R''$.

再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \ldots$ 成立, 为此只须证明 $R \cup R^2 \cup \ldots$ 是传递的.

任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$, 则

$$\langle x, y \rangle \in R \cup R^2 \cup \ldots \wedge \langle y, z \rangle \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

$$\Rightarrow \exists t(\langle x, y \rangle \in R^t) \wedge \exists s(\langle y, z \rangle \in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t \exists s(\langle x, z \rangle \in R^{t \circ R^s})$$

$$\Rightarrow \exists t \exists s(\langle x, z \rangle \in R^{t+s})$$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

从而证明了 $R \cup R^2 \cup \ldots$ 是传递的.

依据定义, $t(R)$ 为包含R
且具有传递性的最小集合。

【例7.5.1】 设 $A=\{1, 2, 3\}$, $R_1=\{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \}$, $R_2=\{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$, $R_3=\{ \langle 1, 2 \rangle \}$, 求它们的闭包。

解 $r(R_1)=I_A \cup R$

$$=\{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle \}$$

$$s(R_1)=R \cup R^{-1}$$

$$=\{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \}$$

$$t(R_1)=\{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$$

$$r(R_2)=I_A \cup R$$

$$=\{ \langle 1, 1 \rangle , \langle 2, 2 \rangle , \langle 3, 3 \rangle , \langle 1, 2 \rangle , \langle 2, 1 \rangle \}$$

$$s(R_2)=R \cup R^{-1}=\{ \langle 1, 2 \rangle , \langle 2, 1 \rangle \}=R_2$$

$$t(R_2)=\{ \langle 1, 2 \rangle , \langle 2, 1 \rangle , \langle 1, 1 \rangle , \langle 2, 2 \rangle \}$$

$$r(R_3)=I_A \cup R=\{ \langle 1, 2 \rangle , \langle 1, 1 \rangle , \langle 2, 2 \rangle , \langle 3, 3 \rangle \}$$

$$s(R_3)=R \cup R^{-1}=\{ \langle 1, 2 \rangle , \langle 2, 1 \rangle \}$$

$$t(R_3)=\{ \langle 1, 2 \rangle \}=R_3$$

2. 矩阵表示和图表示

矩阵表示:

设关系 $R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系矩阵分别为 M, M_r, M_s 和 M_t , 则

$$M_r = M + E \quad M_s = M + M' \quad M_t = M + M^2 + M^3 + \dots$$

其中 E 是和 M 同阶的单位矩阵, M' 是 M 的转置矩阵.

注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

图表示方法:

设关系 $R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系图分别记为 G, G_r, G_s, G_t , 则 G_r, G_s, G_t 的顶点集与 G 的顶点集相等. 除了 G 的边以外, 以下述方法添加新的边.

考察 G 的每个顶点, 如果没有环就加上一个环. 最终得到的是 G_r . $r(R)$

考察 G 的每一条边, 如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i \neq j$, 则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边. 最终得到 G_s . $s(R)$

考察 G 的每个顶点 x_i , 找从 x_i 出发的所有 2 步, 3 步, ..., n 步长的路径 (n 为 G 中的顶点数). 设路径的终点为 $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jk}$, 如果没有从 x_i 到 x_{jl} ($l=1, 2, \dots, k$) 的边, 就加上这条边. 当检查完所有的顶点后就得到图 G_t . $t(R)$

因为在 R 的关系图中, 任意两个顶点之间不含回路的路径最多 n 步长, 而含有回路的路径不会产生新的路径.

【例7.5.2】 设 R 是集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 上的二元关系

$R=\{ \langle a, b \rangle , \langle b, a \rangle , \langle b, c \rangle , \langle c, d \rangle \}$ 。求 R 的闭包：

$r(R)$ 、 $s(R)$ 、 $t(R)$ ，并画出对应的关系图。

解 $r(R)=\{ \langle a, b \rangle , \langle b, a \rangle , \langle b, c \rangle , \langle c, d \rangle , \langle a, a \rangle ,$
 $\langle b, b \rangle , \langle c, c \rangle , \langle d, d \rangle \}$

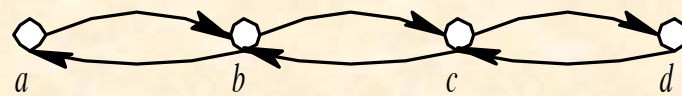
$s(R)=\{ \langle a, b \rangle , \langle b, a \rangle , \langle b, c \rangle , \langle c, d \rangle , \langle c, b \rangle ,$
 $\langle d, c \rangle \}$

$t(R)=\{ \langle a, b \rangle , \langle b, a \rangle , \langle b, c \rangle , \langle c, d \rangle , \langle a, a \rangle ,$
 $\langle a, c \rangle , \langle b, b \rangle , \langle b, d \rangle , \langle a, d \rangle \}$

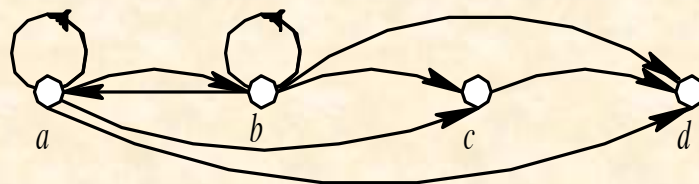
其对应的关系图分别如图7.5.1(a)、(b)、(c)所示。



(a)



(b)



(c)

图 7.5.1

练习 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,d>, <d,b>\}$,

R 和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图如下图所示.

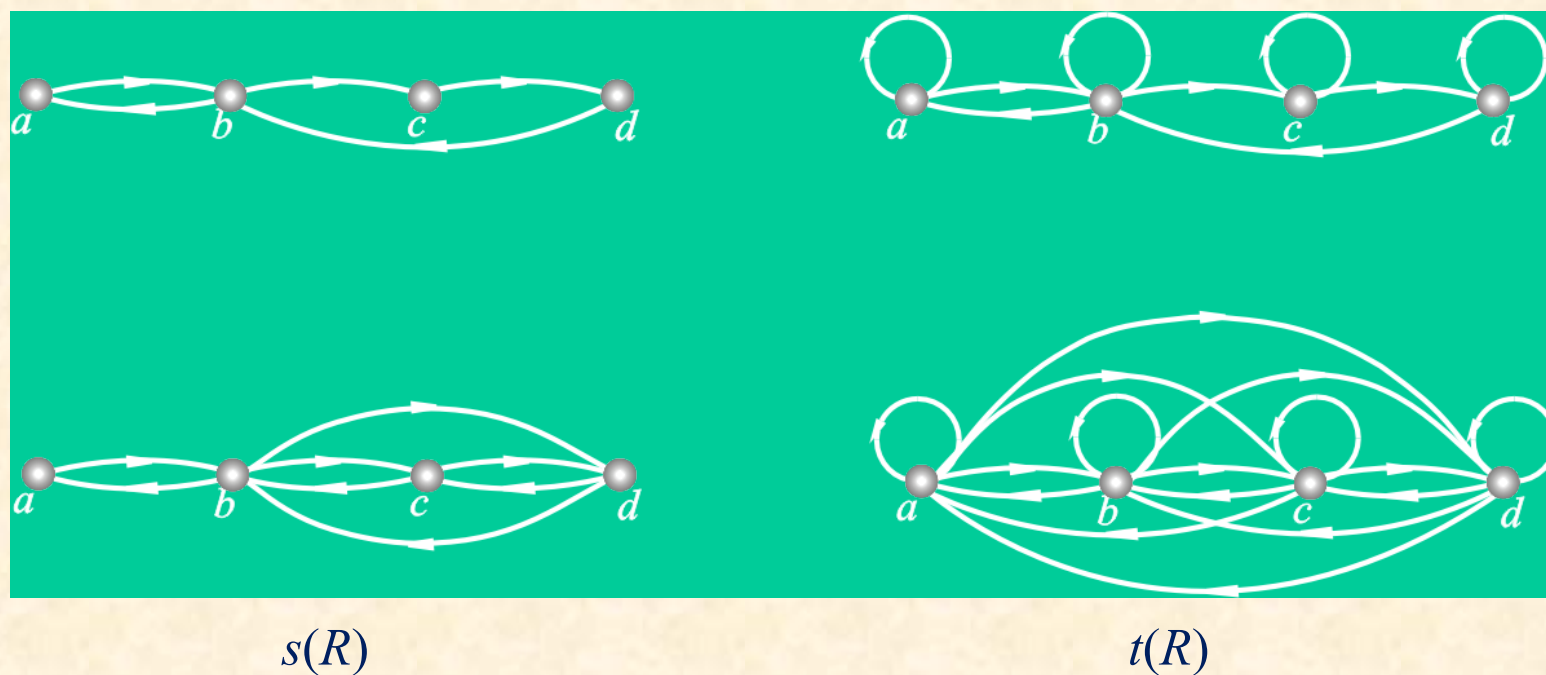


图 5

从以上讨论可以看出，传递闭包的求取是很复杂的。但是，当集合 A 为有限集时， A 上二元关系的传递闭包的求取便可大大简化。

推论 A 为非空有限集合， $|A|=n$ 。 R 是 A 上的关系，则存在正整数 $k \leq n$ ，使得

$$t(R) = R^+ = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^k$$

$$M_t = M + M^2 + \dots + M^k$$

因为在 R 的关系图中，任意两个顶点之间不含回路的路径最多 n 步长

补充：设 $A=\{1,2,3,4,5\}$ ， A 中关系 $R=\{<1, 2>, <2, 3>, <4, 5>, <5, 2>\}$ ，求 $t(R)$

$$\text{解： } R^2=\{<1, 3>, <4, 2>, <5, 3>\}$$

$$R^3=\{<4, 3>\}$$

$$R^4=\Phi$$

$$R^k=\Phi, k>4$$

$$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4$$

$$=\{<1, 2>, <2, 3>, <4, 5>, <5, 2>, <1, 3>, \\ <4, 2>, <5, 3>, <4, 3>\}$$

下列算法是求取 R^+ 的有效算法。

Warshall(沃夏尔) 算法：设 R 为有限集 A 上的二元关系， $|A|=n$ ， M 为 R 的关系矩阵，可如下求取 R^+ 的关系矩阵 W 。

(1) 置 W 为 M 。

(2) 置 $i=1$ 。

(3) 对所有 j ， $1 \leq j \leq n$ ， 做

① 如果 $W[j, i] = 1$ ，则对每一 $k=1, 2, \dots, n$ ，置 $W[j, k]$ 为 $W[j, k] \vee W[i, k]$ ，即当第 j 行、第 i 列为 1 时，对第 j 行每个分量重新置值，取其当前值与第 i 行的同列分量之析取。

把 i 看成纽带元素，当 $W[j, i] \cdot W[i, k] = 1$ 时，那么从 j 到 k 的路径可以经过 i ， $W[j, k] = 1$ ，即复合结果会包含序偶 $\langle j, k \rangle$ 。

② 否则对下一 j 值进行①。

(4) 置 i 为 $i+1$ （遍历所有“纽带”元素）。

(5) 若 $i \leq n$ ，回到步骤（3），否则停止。

即：

```
for i ← 1 to n do
  for j ← 1 to n do
    for k ← 1 to n do
      if W[j, i] == 1 then
        W[j, k] = W[j, k] ∨ W[i, k]
```

最后两行代码也等价于

```
W[j, k] = W[j, k] ∨ (W[j, i] · W[i, k])
```

- 原理

- 第 i 个循环中，将第 i 个结点看成**纽带**结点，对于任意两个结点(遍历 j, k)之间，统计关系图中只经过 $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ 中结点的路径。这些路径分为两类：

- (1) 只经过 $\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}$ 的路径，即 $W[j, k] = 1$ （已经为1）
- (2) 经过**纽带**结点 i ，即 $W[j, i] \cdot W[i, k]$

两类路径取并集： $W[j, k] = W[j, k] \vee (W[j, i] \cdot W[i, k])$

- 通过遍历 i ，从而统计关系图中**经过越来越大结点集合的路径**（**因此 i 是最外面的循环**），当遍历 $i=n$ 后，即得到所有可能的路径。

【例4.5.3】 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $R=\{ \langle 1, 1 \rangle ,$
 $\langle 1, 2 \rangle , \langle 2, 3 \rangle , \langle 3, 4 \rangle , \langle 4, 2 \rangle \}$, 则

$$R^2=\{ \langle 1, 1 \rangle , \langle 1, 2 \rangle , \langle 1, 3 \rangle , \langle 2, 4 \rangle ,$$
$$\langle 3, 2 \rangle , \langle 4, 3 \rangle \}$$

$$R^3=\{ \langle 1, 1 \rangle , \langle 1, 2 \rangle , \langle 1, 3 \rangle , \langle 1, 4 \rangle ,$$
$$\langle 2, 2 \rangle , \langle 3, 3 \rangle , \langle 4, 4 \rangle \}$$

$$R^4=\{ \langle 1, 1 \rangle , \langle 1, 2 \rangle , \langle 1, 3 \rangle , \langle 1, 4 \rangle ,$$
$$\langle 2, 3 \rangle , \langle 3, 4 \rangle , \langle 4, 2 \rangle \}$$

因此 $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}$

现用 $Warshall$ 算法求取 R^+ 。

显然，

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以下使用 *Warshall* 算法求

(1) W 以 M 为初值。

(2) 当 $i=1$ 时, 由于 W 中只有 $W[1, 1] = 1$, 故需将第一行各元素与其本身作逻辑和, 并把结果送第一行。即重新置值为 $W[1, k] \vee W[1, k] = W[1, k]$, 但 W 事实上无改变。

(3) 当 $i=2$ 时, 由于 $W[1, 2] = W[4, 2] = 1$, 故需将第一行和第四行各分量重新置值为 $W[1, k] \vee W[2, k]$ 和 $W[4, k] \vee W[2, k]$ 。于是有:

即:
for $i \leftarrow 1$ to n do
 for $j \leftarrow 1$ to n do
 for $k \leftarrow 1$ to n do
 if $W[j, i] == 1$ then
 $W[j, k] = W[j, k] \vee W[i, k]$
最后两行代码也等于
 $W[j, k] = W[j, k] \vee (W[j, i] \cdot W[i, k])$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(4) 当 $i=3$ 时, 由于 $W[1, 3] = W[2, 3] = W[4, 3] = 1$, 故需将第一、二、四行各分量重新置值, 分别为 $W[1, k] \vee W[3, k] = W[1, k]$, $W[2, k] \vee W[3, k] = W[2, k]$, $W[4, k] \vee W[3, k] = W[3, k]$ 。

于是有:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(5) 当 $i=4$ 时, 由于 $W[1, 4] = W[2, 4] = W[3, 4] = W[4, 4] = 1$, 故需将第一、二、三、四行各分量重新置值, 分别为 $W[1, k] \vee W[4, k] = W[1, k]$, $W[2, k] \vee W[4, k] = W[2, k]$, $W[3, k] \vee W[4, k] = W[3, k]$, $W[4, k] \vee W[4, k] = W[4, k]$ 。最终 W 为

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故 $R^+ = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}$ 。

下面几个定理给出了闭包的主要性质。

定理 7.11 设 R 是集合 A 上任一关系，那么

- (1) R 自反当且仅当 $R=r(R)$ 。
- (2) R 对称当且仅当 $R=s(R)$ 。
- (3) R 传递当且仅当 $R=t(R)$ 。

证明 (1)、(3) 的证明留给读者, 现证 (2)。

(2) 的充分性由 $s(R)$ 定义立得。

为证必要性, 设 R 对称, 那么 $R = R^{-1}$ 。另一方面,
 $s(R) = R \cup R^{-1} = R \cup R = R$, 故 $s(R) = R$ 。

定理7.12 对非空集合 A 上的关系 R_1 、 R_2 ，若
 $R_1 \subseteq R_2$ ，则

$$(1) \quad r(R_1) \subseteq r(R_2)$$

$$(2) \quad s(R_1) \subseteq s(R_2)$$

$$(3) \quad t(R_1) \subseteq t(R_2)$$

证明 (1) 和 (2) 的证明留作练习，下面仅证明 (3)。

因为 $t(R_2)$ 传递，且 $R_2 \subseteq t(R_2)$ ，但 $R_1 \subseteq R_2$ ，故 $R_1 \subseteq t(R_2)$

因 $t(R_1)$ 是包含 R_1 的最小传递关系，所以 $t(R_1) \subseteq t(R_2)$ 。

定理 对非空集合 A 上的关系 R_1 、 R_2 ，则

$$(1) \quad r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$$

$$(2) \quad s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$$

$$(3) \quad t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$

证明 (1) 和 (2) 的证明留作练习，下面仅证明 (3)。

因为 $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$ ，由定理7.12知

$$t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$

同理

$$t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$

所以

$$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$

定理7.13 设 R 是集合 A 上任意二元关系，则

(1) 如果 R 是自反的，那么 $s(R)$ 和 $t(R)$ 都是自反的。

(2) 如果 R 是对称的，那么 $r(R)$ 和 $t(R)$ 都是对称的。

(3) 如果 R 是传递的，那么 $r(R)$ 是传递的。

证明

(1) 是显然的。

(2) 由于

$r(R)^{-1} = (I_A \cup R)^{-1} = I_A^{-1} \cup R^{-1} = I_A \cup R = r(R)$, 故 $r(R)$ 是对称的。

另外, 由于对任意自然数 n ,

$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$, 又由于 R 对称, 故 $(R^n)^{-1} = R^n$ 。因此, 对任意 $\langle x, y \rangle \in t(R)$, 总有 i 使 $\langle x, y \rangle \in R^i$, 从而 $\langle y, x \rangle \in (R^i)^{-1} = R^i$, 即 $\langle y, x \rangle \in t(R)$ 。故 $t(R)$ 对称。

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \dots$$

(3) 本式证明留给读者。 请注意, R 传递并不保证 $s(R)$ 传递。 例如, $R=\{ \langle a, b \rangle \}$ 是传递的, 但是 $s(R)=\{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle \}$ 却不是传递的。

定理 7.14 设 R 为集合 A 上的任一二元关系，
那么

$$(1) \quad rs(R) = sr(R)$$

$$(2) \quad rt(R) = tr(R)$$

$$(3) \quad st(R) \subseteq ts(R)$$

证明

$$\begin{aligned} (1) \quad sr(R) &= s(I_A \cup R) = I_A \cup R \cup (I_A \cup R)^{-1} \\ &= I_A \cup R \cup R^{-1} = I_A \cup s(R) = rs(R) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \text{易证 } (I_A \cup R)^n = I_A \cup \bigcup_{i=1}^n R^i$$

可以采用数学归纳法证明

对一切正整数 n 均成立，于是

$$\begin{aligned} tr(R) &= t(I_A \cup R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_A \cup R)^i \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_A \cup \bigcup_{j=1}^i R^j) \\ &= I_A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \\ &= I_A \cup t(R) = rt(R) \end{aligned}$$

(3) 由定理7.12可知, 任一闭包运算 Δ 和任意二元关系 R_1 、 R_2 , 如果 $R_1 \subseteq R_2$, 那么 $\Delta(R_1) \subseteq \Delta(R_2)$; 又据闭包定义, 对任意二元关系 R 有 $R \subseteq s(R)$, 故 $t(R) \subseteq ts(R)$, $st(R) \subseteq sts(R) = ts(R)$ (由定理7.13, $ts(R)$ 是对称的, 所以 $sts(R) = ts(R)$ (定理7.11))。于是可得到

$$st(R) \subseteq ts(R)$$

【例7.5.4】 设 R 是集合 X 上的二元关系, $X=\{a, b, c\}$,
 $R=\{ \langle a, b \rangle , \langle b, c \rangle \}$ 。求 $st(R)$ 和 $ts(R)$, 并画出关系图。

解 $t(R)=\{ \langle a, b \rangle , \langle b, c \rangle , \langle a, c \rangle \}$

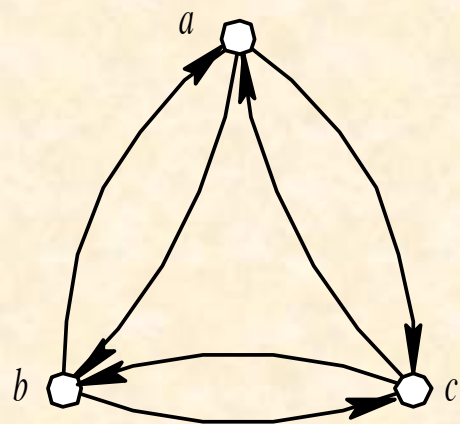
$$st(R)=\{ \langle a, b \rangle , \langle b, c \rangle , \langle a, c \rangle , \langle b, a \rangle , \\ \langle c, b \rangle , \langle c, a \rangle \}$$

$$s(R)=\{ \langle a, b \rangle , \langle b, c \rangle , \langle b, a \rangle , \langle c, b \rangle \}$$

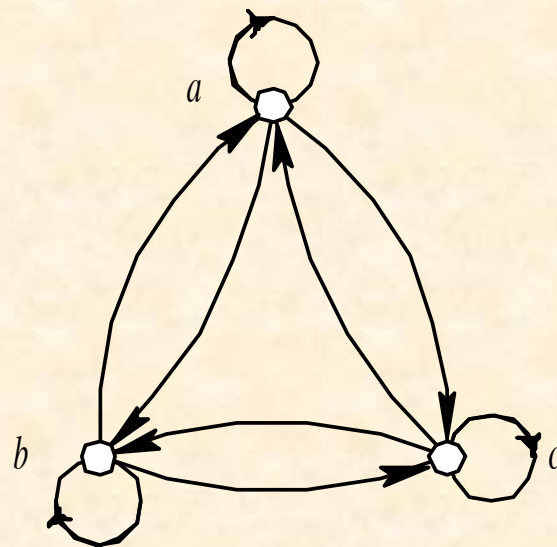
$$ts(R)=\{ \langle a, b \rangle , \langle b, c \rangle , \langle b, a \rangle , \langle c, b \rangle , \langle a, c \rangle , \\ \langle a, a \rangle , \langle b, b \rangle , \langle c, a \rangle , \langle c, c \rangle \}$$

$st(R)$ 和 $ts(R)$ 的关系图分别如图7.5.2(a)、(b)所示。

$$st(R) \subseteq ts(R)$$



(a)



(b)

图 7.5.2

课后作业

- 21
- 22
- 24 $R_1 - R_2$ 对自反性的封闭性、 $R_1 \cup R_2$ 对反对称性和传递性的封闭性分别给出反例。
- 25
- 29
- 30