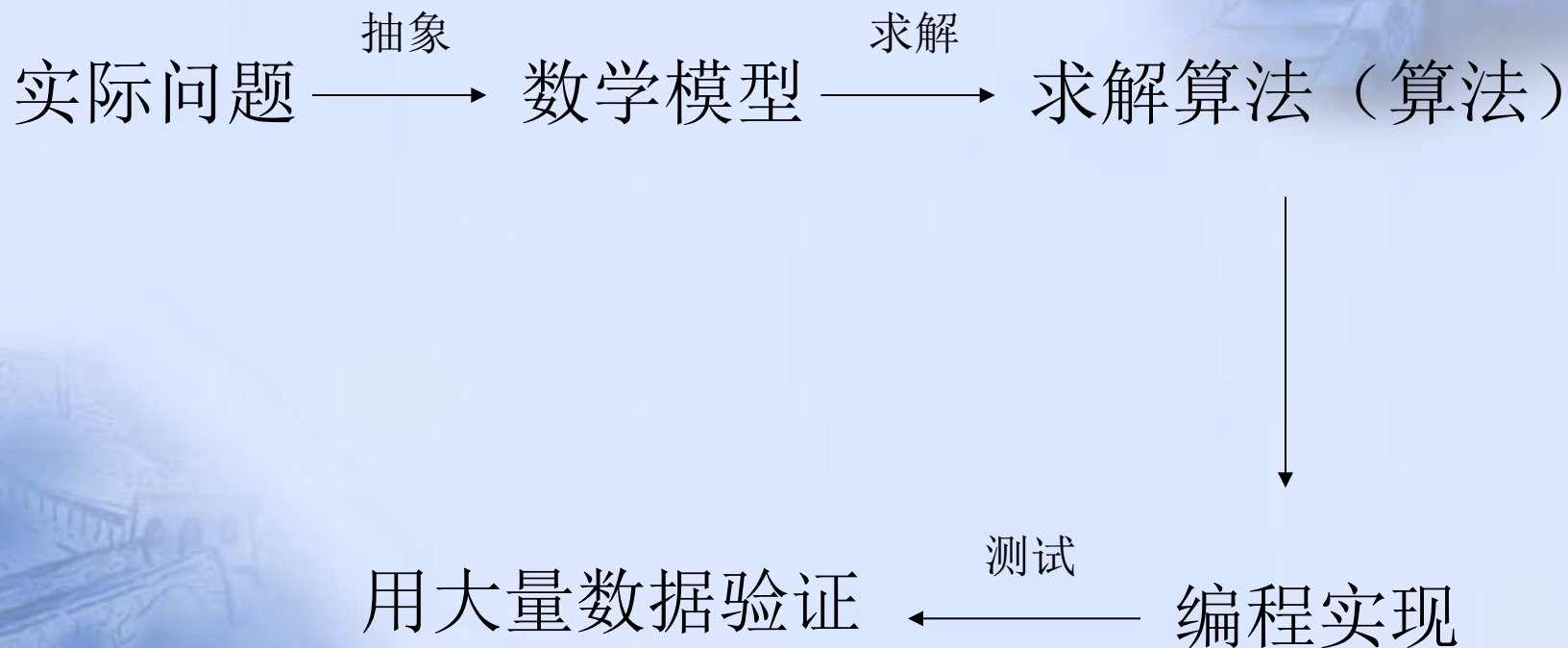


图论引论

■ 图论——计算机问题求解的描述工具。



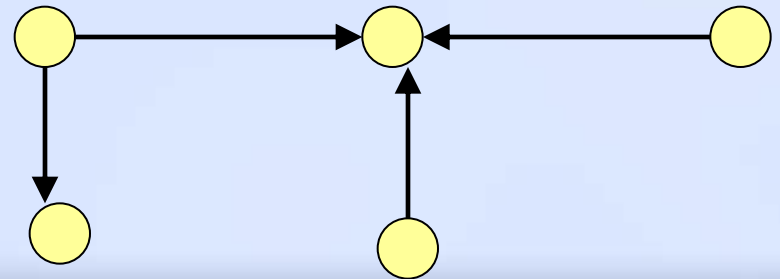
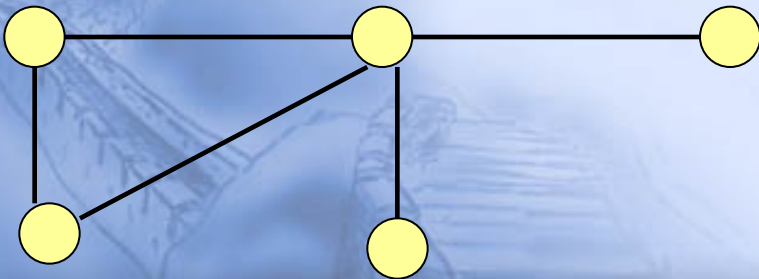
什么是图论？

- 图论是离散数学的分支：

图(graph):

是一个离散集和某些两元素子集的集合。

数学形象是：纸上画几个顶点，把其中一些点用曲线段或直线连起来。图显示的是点与点之间的二元关系。



图论的分支很多，例如：

- 图论
- 算法图论
- 极值图论
- 网络图论
- 模糊图论
- 代数图论
- 随机图论
- 超图论

为什么要学习图论？

- 可以采用图论的成果和方法；
- 最重要的是：
可以培养我们思考问题和解决问题的能力。

■ 图论诞生和孕育于民间游戏。

创生：1736年 瑞士数学家**欧拉**——图论之父；

进展：1847年，基尔霍夫(Kirchhoff)运用图论解决了电路理论中求解联立方程的问题，引进了“树”概念；

1857年，Cayley在有机化学领域发现了一种重要的图，称为“树”，解决了计算饱和氢化物同分异构体的数目；

1930年，波兰数学家**库拉托夫斯基**(Kuratowski)证明了平面图可以画在平面上；

里程碑：1936年，匈牙利数学家寇尼希
(D.Konig)发表名著《有限图和无限图理论》，
使得图论成为一门独立的数学学科；

蓬勃发展：1946年，随着世界上第一台计算机
的问世，使图论的发展突飞猛进。

其后，图论在现代数学、计算机科学、工程技术、
优化管理等领域有大用而得以大力发展。

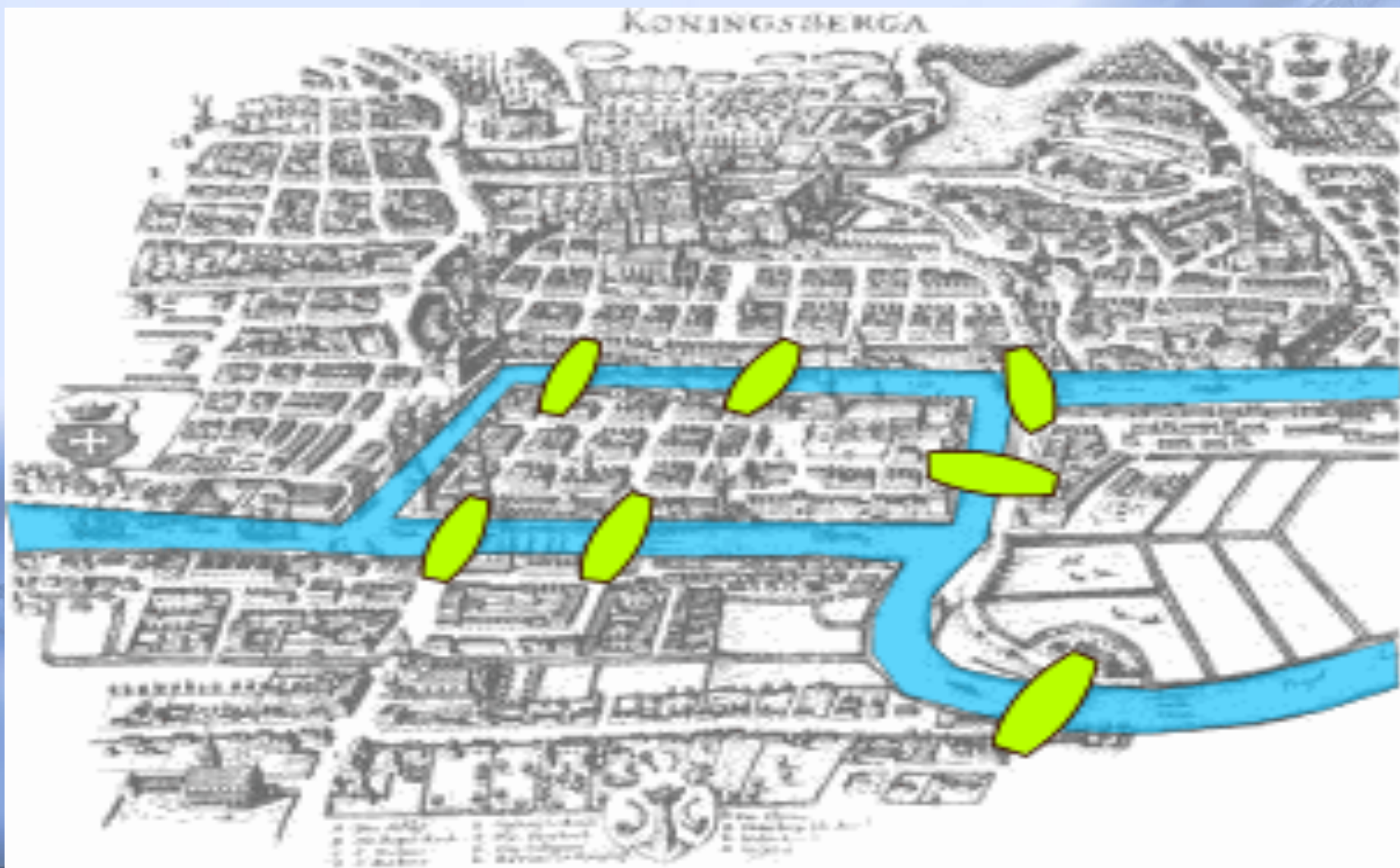
一、Konisberg七桥问题(Euler问题)

柯尼斯堡七桥问题是图论中的著名问题。

这个问题是基于一个现实生活中的事例：位于当时东普鲁士柯尼斯堡(今日俄罗斯加里宁格勒)有一条河，河中心有两个小岛。小岛与河的两岸有七条桥连接。如何才能在所有桥都恰巧只走一遍的前提下，回到原出发点？



如何才能在所有桥都恰巧只走一遍的前提下，回到原出发点？

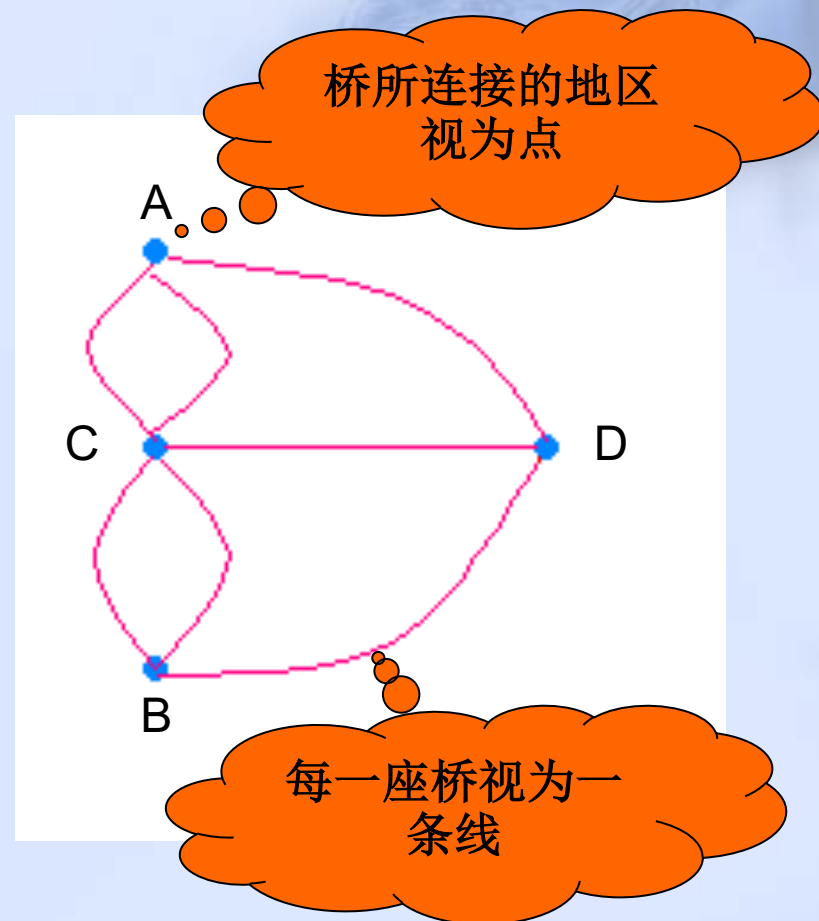
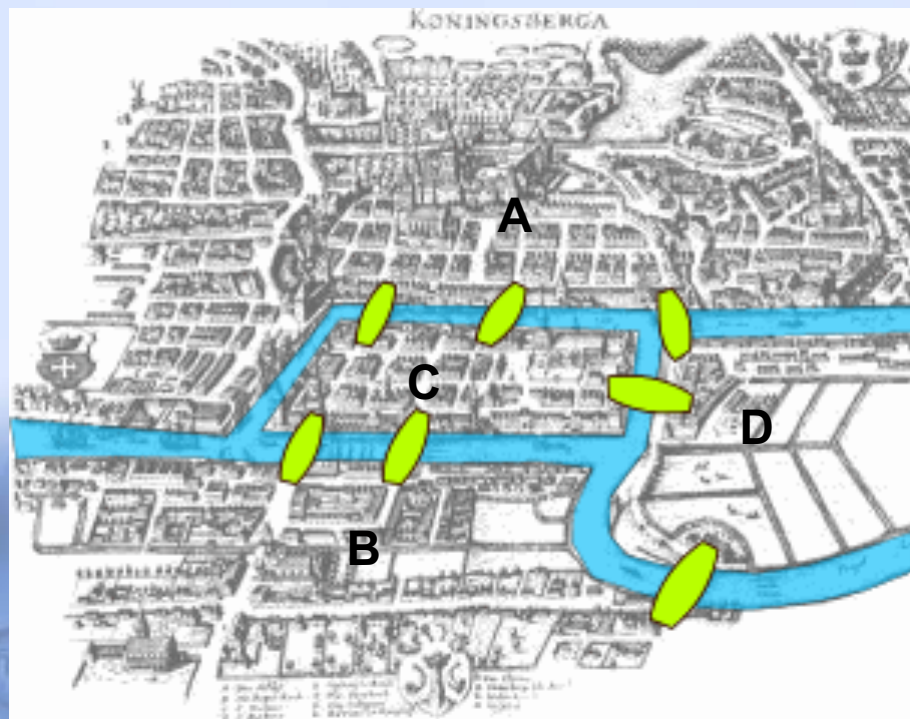


不少数学家都尝试去解析这个事例。而这些解析，最后发展成为了数学中的图论。

莱昂哈德·欧拉(Leonhard Euler)在1736年圆满地解决了这一问题，证明这种方法**并不存在**。他在圣彼得堡科学院发表了图论史上第一篇重要文献。欧拉把实际的问题抽象简化为平面上的**点**与**线**组合，每一座桥视为一条线，桥所连接的地区视为点。这样若从某点出发后最后再回到这点，则这一点的线数必须是**偶数**。

存在欧拉回路充要条件：连通且无奇度数顶点

如何才能在所有桥都恰巧只走一遍的前提下，回到原出发点？



求从图中任一点出发，通过每条边一次，最后回到起点。

如果通奇数座桥的地方**不止两个**，那么满足要求的路线便**不存在**了。

如果**只有两个**地方通奇数座桥，则可从**其中一地**出发可找到经过所有桥的路线。

存在欧拉通路充要条件：连通且仅有两个奇度数顶点

若**没有一个**地方通奇数座桥，则从**任何一地**出发，所求的路线都能实现。

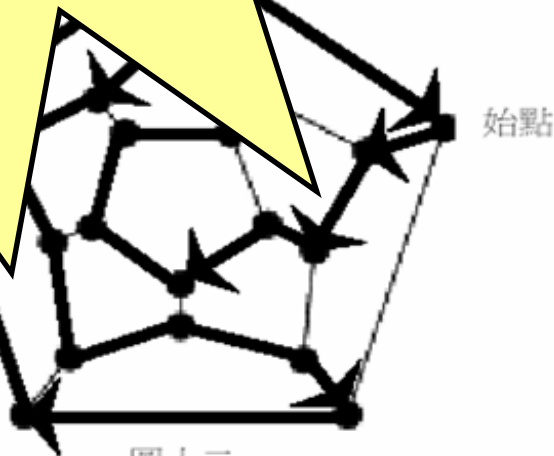
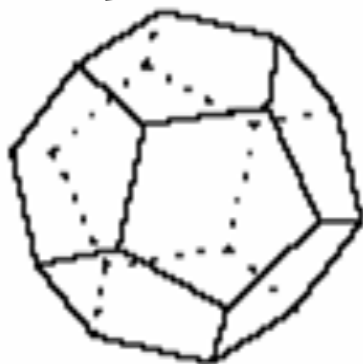
>>

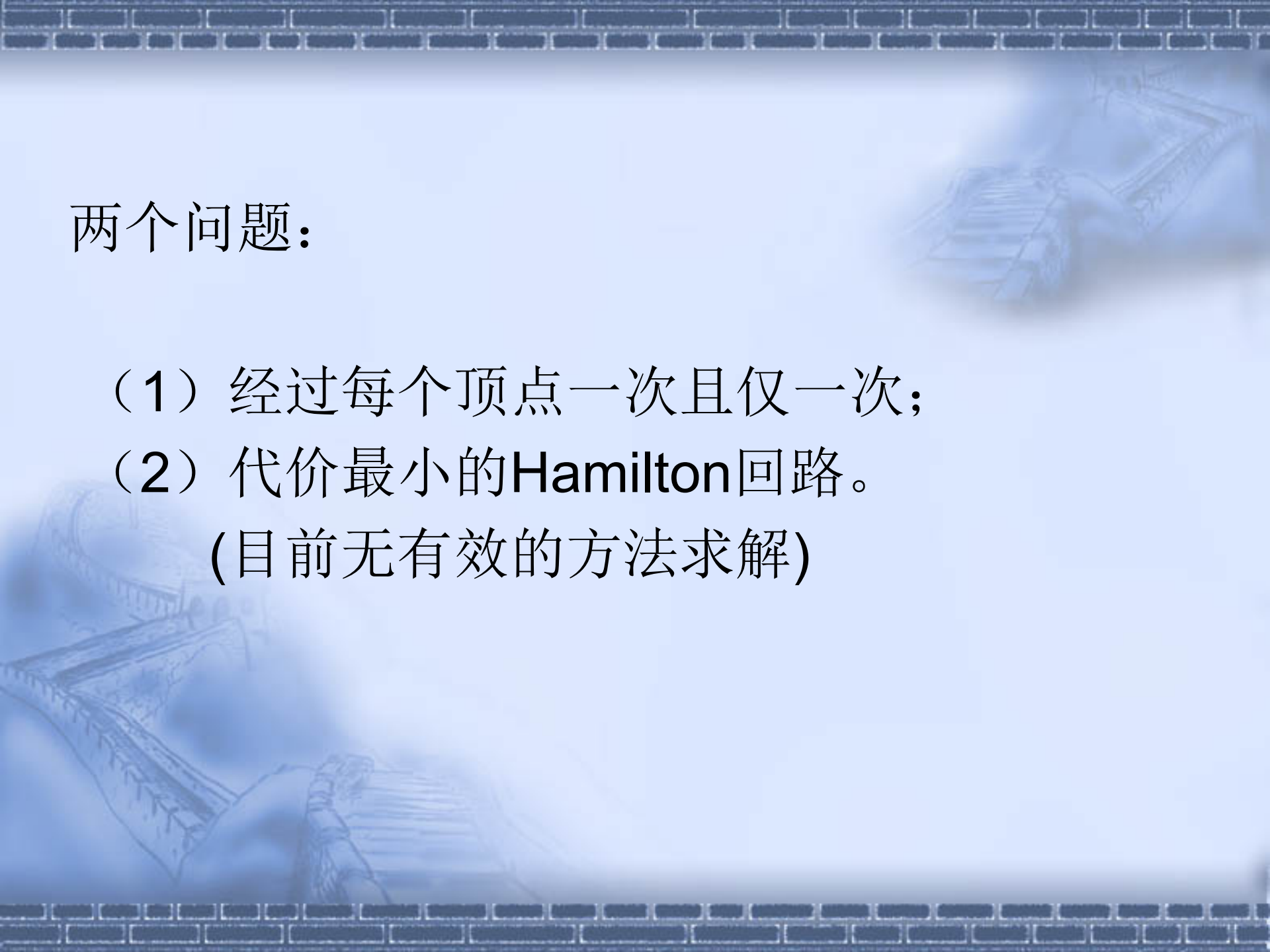
二、哈密顿回路问题到货郎问题

1859年，哈密顿（Hamilton）提出了所谓环球旅行问题。

在正12面体的每个顶点上都有一个城市，共有20个城市，旅行者从某个城市出发，经过每个城市一次，最后返回出发城市。

注意！！
不是所有图都能找到这样的路线！





两个问题：

(1) 经过每个顶点一次且仅一次；

(2) 代价最小的Hamilton回路。

(目前无有效的方法求解)

货郎问题（Traveling Salesman Problem）

一个货郎到各村去卖货，要求每个村子至少去一次，最后返回出发点，为其设计一种销售路线，使总耗时最短。

求解方法：把路线全排列，求其中最小的。

这类问题称为NPC问题

一个决定性问题C若是为NPC，则代表它对NP是完备的，这表示：

1. 它是一个NP问题
2. 其他属于NP的问题都可在多项式时间内归约成它。

----维基百科

哈密顿回路和七桥问题的区别

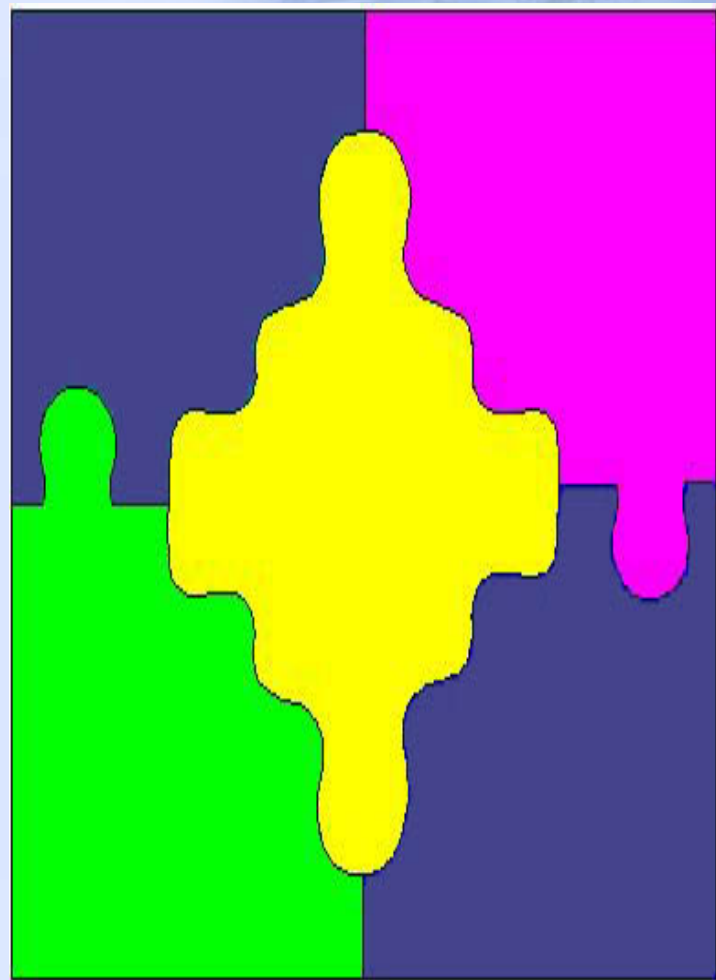
- Hamilton回路：
侧重**顶点**（一次行遍顶点）；
- 七桥问题：
侧重**边**（一次行遍桥/边）。
- 两者相似，但在难度上不是同一级别的问题。

三、四色问题

四色问题是世界近代三大数学难题之一。

四色问题的内容是：任何一张地图只用四种颜色就能使具有共同边界的国家着上不同的颜色。

它的提出来自英国。1852年，毕业于伦敦大学的弗南西斯·格思里(Guthrie)发现了一种有趣的现象：“看来，每幅地图都可以用四种颜色着色，使得有共同边界的国家都被着上不同的颜色。”这个现象能不能从数学上加以严格证明呢？



1872年，英国当时最著名的数学家凯利正式向伦敦数学学会提出了这个问题，于是四色猜想成了世界数学界关注的问题。

1878~1880年两年间，著名的律师兼数学家肯普和泰勒两人分别提交了证明四色猜想的论文，宣布证明了四色定理，大家都认为四色猜想从此也就解决了。

1890年，在牛津大学就读的年仅29岁的赫伍德以自己的精确计算指出了肯普在证明上的漏洞。不久，泰勒的证明也被人们否定了。后来，人们开始认识到，这个貌似容易的题目，其实是一个可与费马猜想相媲美的难题。

进入20世纪以来，科学家们对四色猜想的证明基本上是按照肯普的想法在进行。后来美国数学家富兰克林于1939年证明了22国以下的地图都可以用四色着色。1950年，有人从22国推进到35国。1960年，有人又证明了39国以下的地图可以只用四种颜色着色；随后又推进到了50国。

1976年6月，美国伊利诺大学哈肯与阿佩尔在两台不同的电子计算机上，用了1200个小时，作了100亿判断，终于完成了四色定理的证明，轰动了世界。

然而，真正数学上的严格证明仍然没有得到！数学家仍为此努力，并由此产生了多个不同的图论分支。

四、Ramsey问题

1928年，英国数学家Ramsey提出了Ramsey数与相关理论，直观的讲，就是：

任意6个人在一起，6人中要不是有3个人彼此相互认识，就必然有3个人相互不认识；即两种情况至少存在一种。

记作： $r(3,3)=6$

推广： $r(p,q)$ 是任给出的人群中必有p人彼此认识或有q人彼此不相识的**最小值**。

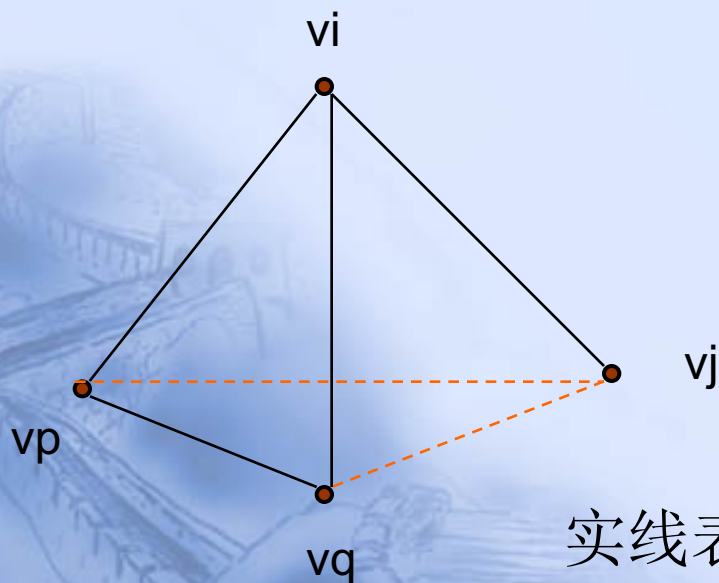
鸽巢原理

- 有 $n+1$ 只鸽子进入 n 个笼子，那么必然有至少两只鸽子在同一个笼子中。

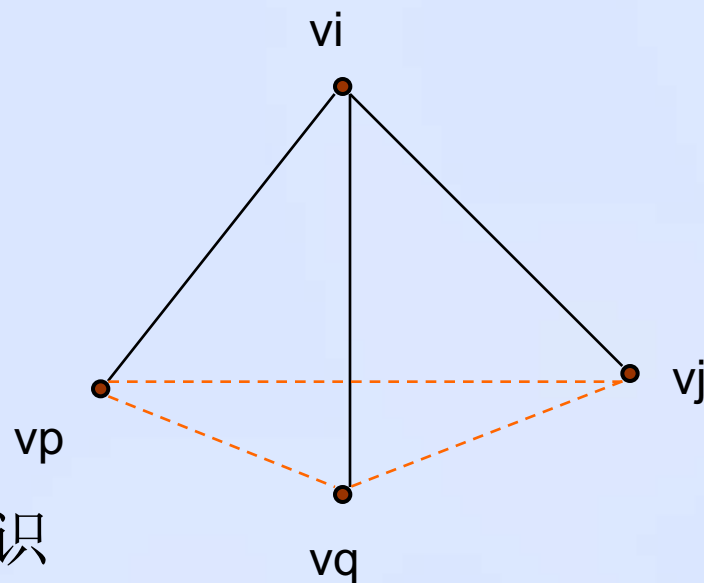
Ramsey问题的证明

证：设6个人分别用 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 表示。

任取一点 v_i ，它与其他5点连线中，至少有3条同为实线或3条同为虚线：



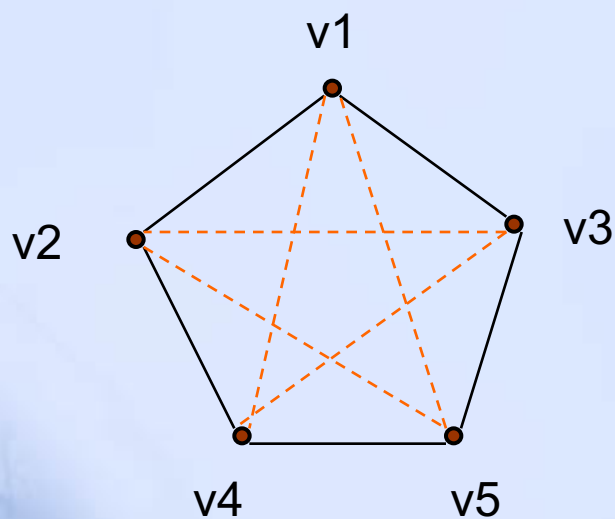
或



实线表示相互认识
虚线表示相互不认识

证毕。

而5个人的人群，可能出现既没有3个人彼此不认识，也没有3个人相互认识，如下图：



实线表示相互认识
虚线表示相互不认识

所以 $r(3,3) \geq 6$

练习思考题

1、试证明9人中必有3个人相互认识或4个人相互不认识，两者必居其一。

自Ramsey在1928年提出了Ramsey数与相关理论70多年以来，至今求得的Ramsey数仅仅9个，它们是：

$$r(3,3)=6, \quad r(3,4)=9, \quad r(3,5)=14,$$

$$r(3,6)=18, \quad r(3,7)=23, \quad r(3,8)=28,$$

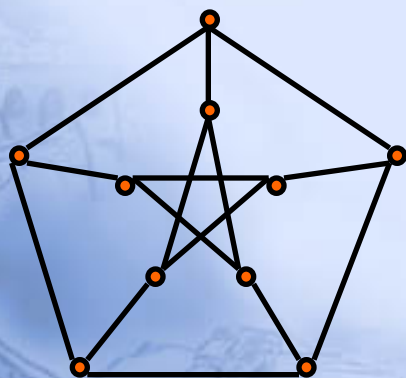
$$r(3,9)=36, \quad r(4,4)=18, \quad r(4,5)=25.$$

计算Ramsey数是一个NPC问题，匈牙利数学家厄尔多斯（Erdos）曾用下面的话比喻计算Ramsey数的艰巨性：

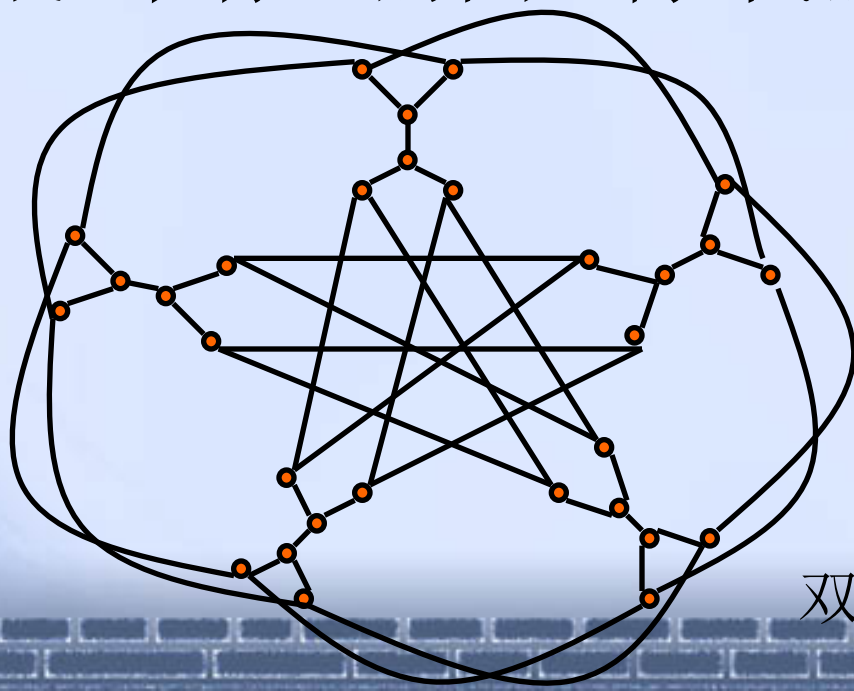
某年某月某日，一伙外星强盗入侵地球，并威胁到，若不能在一年内计算出 $r(5,5)$ ，他们便灭绝人类！面对危机，人类最好的选择是调动地球上所有的计算机、数学家、计算机专家，日以继夜的计算 $r(5,5)$ ，以求人类免于灭顶之灾；如果外星人威胁说要求得 $r(6,6)$ ，那我们别无选择，只能和外星人战斗到底了！

五、妖怪 (snark graph)

妖怪图每个点都关联着3条边，用4种颜色可以把每条边涂上颜色，使得有公共端点的边异色，而用3种颜色办不到，切断任意3条边不会使它断裂成2个有边的图（除单点）。



单星妖怪

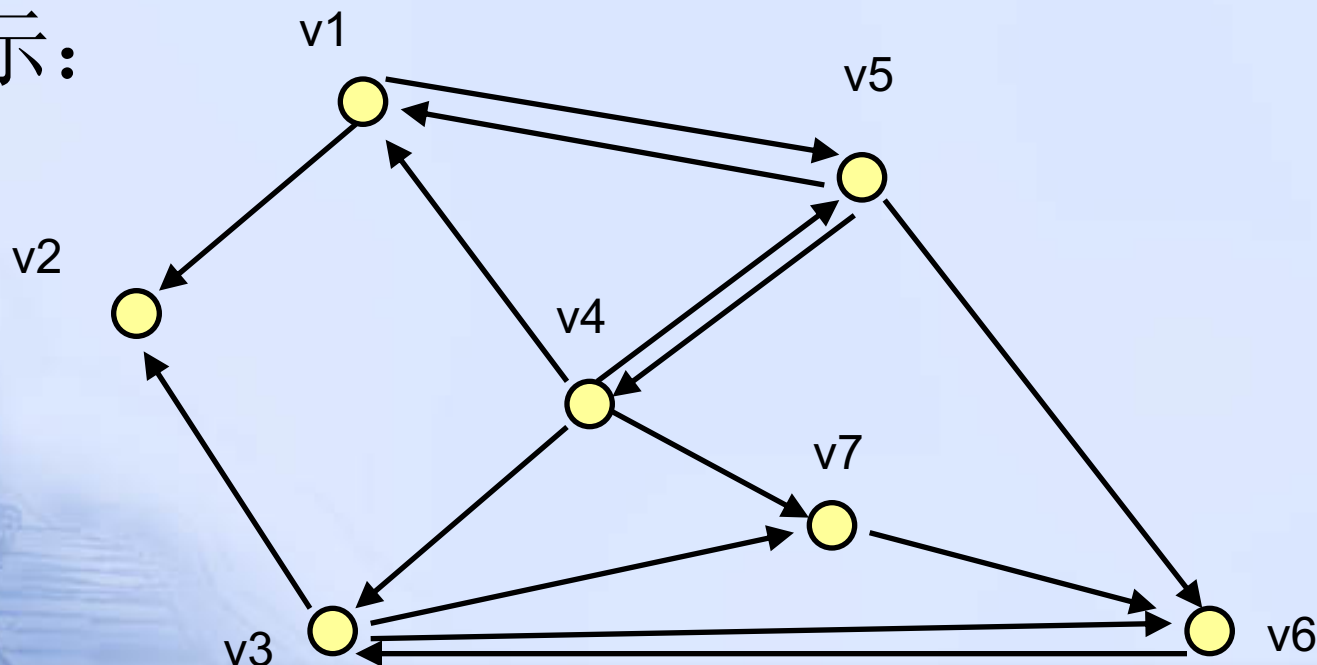


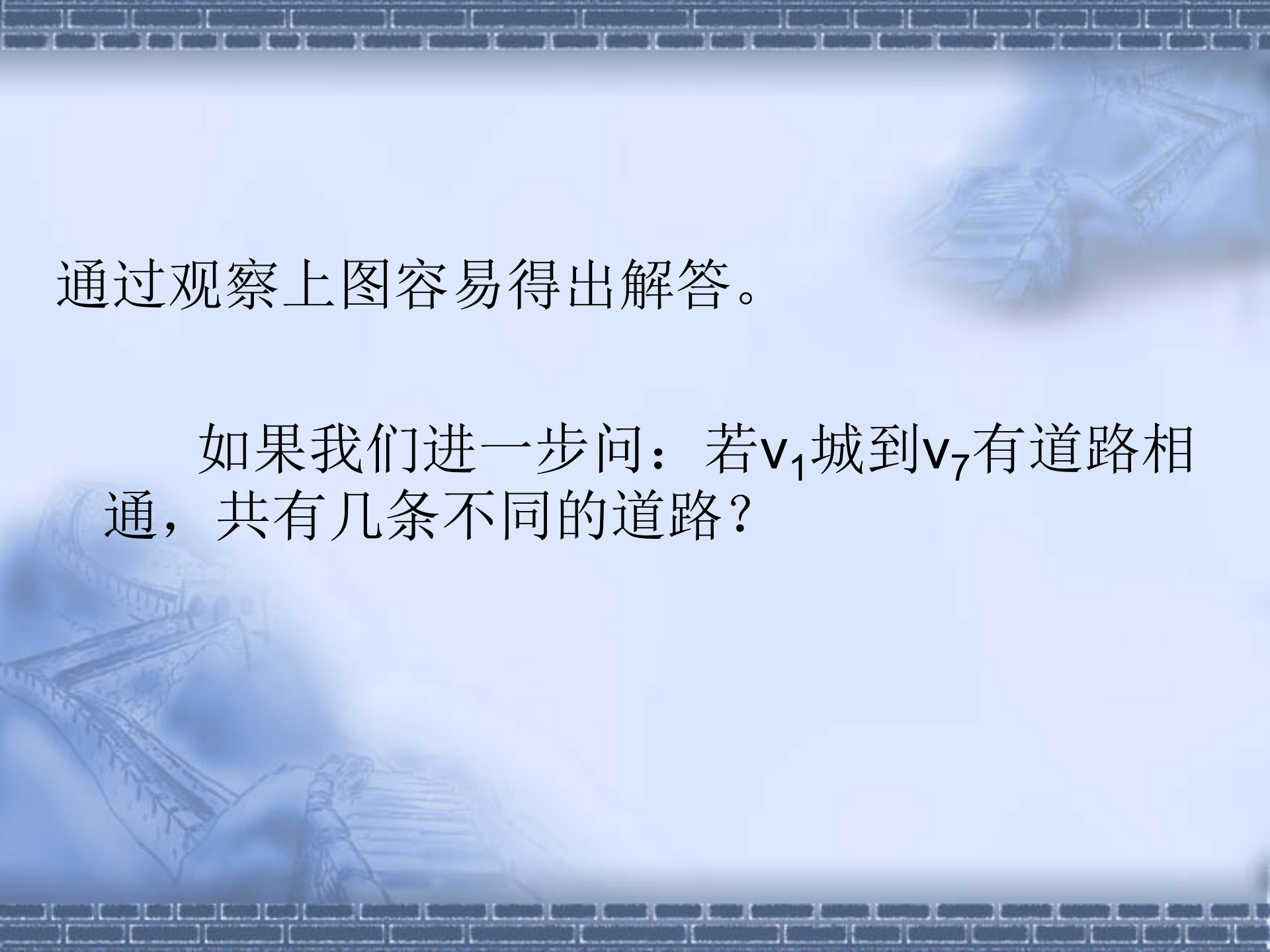
双星妖怪

七、路径问题

顶点 $v_1 \sim v_7$ 代表七座城市，有方向的边 $v_i v_j$ 表示从 v_i 城到 v_j 城的单行车道，问从 v_1 城到 v_7 城有无道路相通？

如下图所示：





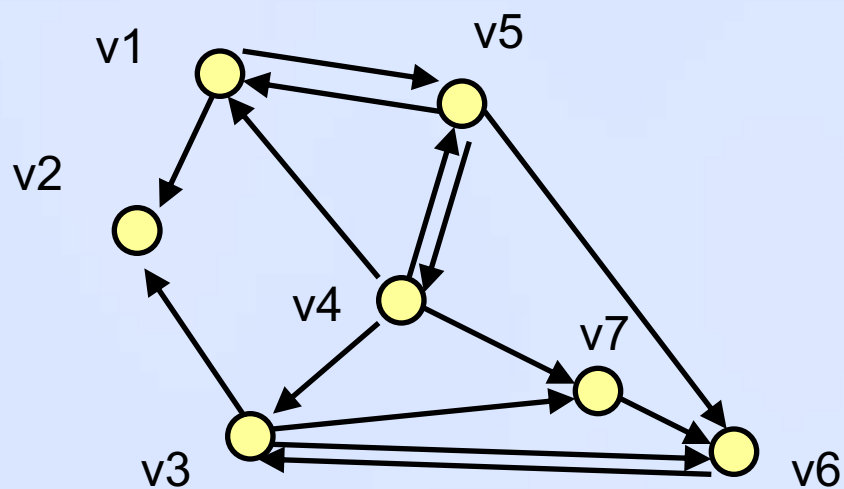
通过观察上图容易得出解答。

如果我们进一步问：若 v_1 城到 v_7 有道路相通，共有几条不同的道路？

为此引入矩阵：

$$A = (a_{ij})_{7 \times 7}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若从 } v_i \text{ 点到 } v_j \text{ 点有边 } (v_i, v_j) \text{ 相连;} \\ 0, & \text{若从 } v_i \text{ 点到 } v_j \text{ 点无边相连。} \end{cases}$$



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a_{ij}^{(2)})$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (a_{ij}^{(3)})$$

其中：

$$a_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^7 a_{ik}^{(2)} a_{kj} = \sum_{k=1}^7 a_{ik} a_{kj}^{(2)}$$

一般有：

$$A^k = (a_{ij}^{(k)})_{7 \times 7}$$

其中：

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{h=1}^7 a_{ih}^{(k-1)} a_{hj}$$

现在来看看 $a_{ij}^{(k)}$ 的值有什么实际意义。以 $a_{ij}^{(2)}$ 为例：

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^7 a_{ik} a_{kj} = a_{i1} a_{1j} + a_{i2} a_{2j} + \dots + a_{i7} a_{7j}$$

$$a_{il} \cdot a_{lj} \neq 0 \text{ 当且仅当 } a_{il} = a_{lj} = 1$$

表示从 v_i 出发两步到达 v_j 的路径数目

同理

$a_{ij}^{(k)}$ 表示从 v_i 出发 k 步到达 v_j 的路径数目

若要追问这一路径是什么？
途经哪几个点？
只要回溯 $a_{ij}^{(k)}$ 是如何形成即可求得

例如 $a_{17}^{(3)}$ ，我们来看一下它的形成过程：

$$A_1^{(1)} =$$

$$(0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$$

15

$$A_1^{(2)} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)$$

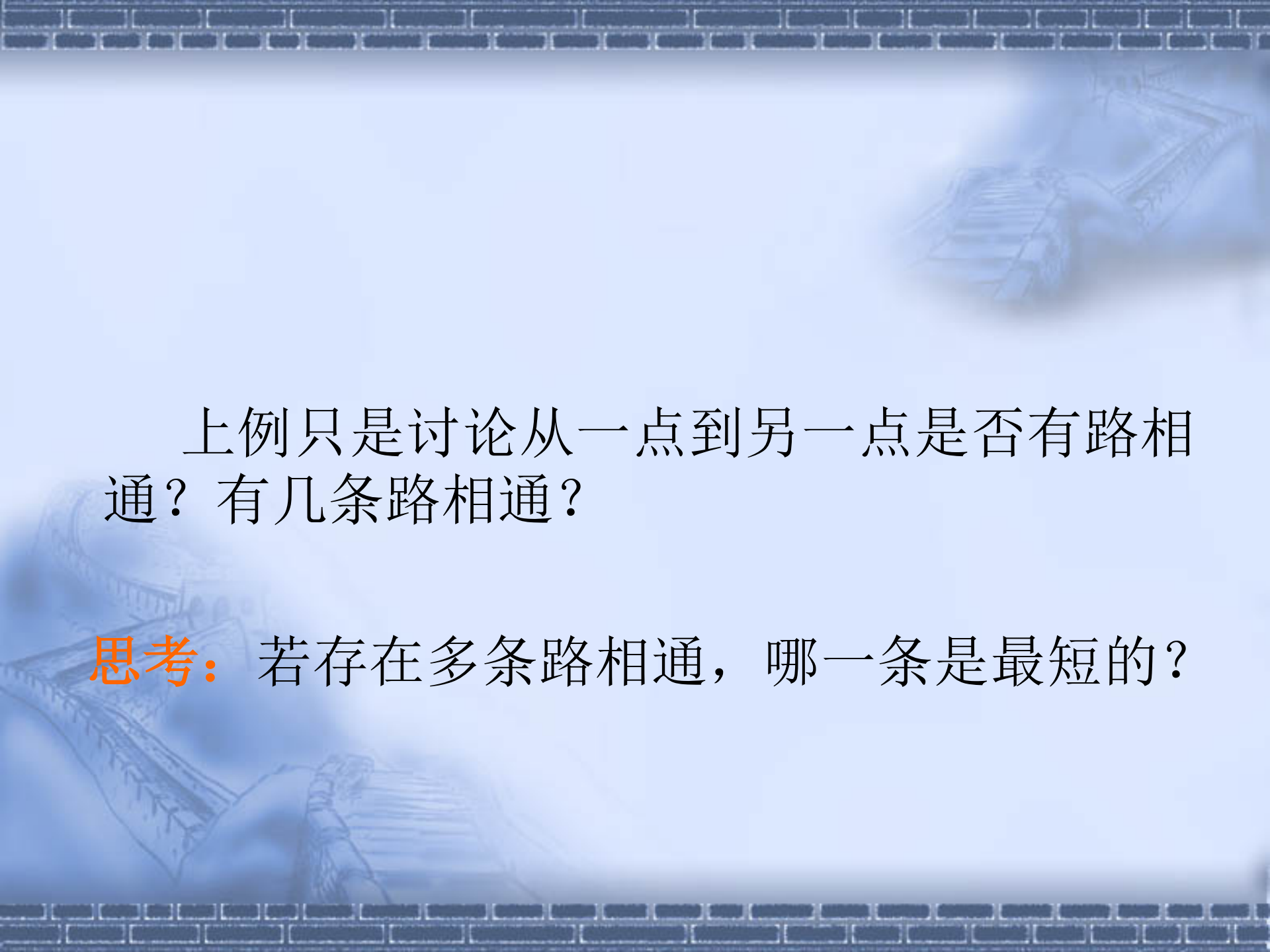
15 54 154

$$= A_1^{(1)} \times A$$

$$A_1^{(3)} = (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1)$$

154 47 1547

$$= A_1^{(2)} \times A$$



上例只是讨论从一点到另一点是否有路相通？有几条路相通？

思考：若存在多条路相通，哪一条是最短的？

由此可见

图论中蕴含着强有力的思想、漂亮的图形和巧妙的理论，即使是非常困难尚未解决的问题，它的表述也可以是非常平易的。图论是最接近百姓生活、最容易阐述的一门数学分支，具有实质性的难度又有简朴的外表是很多图论问题的特点之一。

莱昂哈德·欧拉(Leonhard Euler, 1707.4.5~1783.9.18)

瑞士的数学家和物理学家。他被称为历史上最伟大的两位数学家之一（另一位是卡尔·弗里德里克·高斯）。欧拉出生于瑞士，在那里受教育。他是一位数学神童。作为数学教授，他先后任教于圣彼得堡(1727-1741)和柏林，尔后再返圣彼得堡(1766)。

欧拉的一生很虔诚。然而，那个广泛流传的传说却不是真的。传说中提到，欧拉在叶卡捷琳娜二世的宫廷里，挑战德尼·狄德罗：“先生， $(a+b)^n/n = x$ ；所以上帝存在，这是回答！”

欧拉的离世也很特别：据说当时正是下午茶时间，正在逗孙儿玩的时候，被一块蛋糕卡在喉头窒息而死。

欧拉是第一个使用“函数”一词来描述包含各种参数的表达式的人，例如： $y = F(x)$ (函数的定义由莱布尼兹在1694年给出)。他是把微积分应用于物理学的先驱者之一。欧拉是有史以来最多产的数学家，他的全集共计**75**卷。欧拉实际上支配了**18**世纪的数学，对于当时新发明的微积分，他推导出了很多结果。在他生命的最后**7**年中，欧拉的双目完全失明，尽管如此，他还是以惊人的速度产出了生平一半的著作。

小行星欧拉**2002**是为了纪念欧拉而命名的。



莱昂哈德·欧拉

弗兰克·拉姆赛(Frank Ramsey 1904~1930),
英国剑桥的数学家、哲学家、经济学家。

是20世纪最显赫的两大经济学家之一约翰·梅纳德·凯恩斯的得意弟子。

1928年, 拉姆赛在伦敦数学会宣读了一篇数学奇文, 提出了Ramsey数的计算和相关理论。科学界一致认为, Ramsey理论是离散数学中最漂亮的成就。

1930年, Ramsey因腹部手术并发症不幸逝世, 年仅26岁。但他关于Ramsey数的遗产却永泽数学界。