图的顶点着色

(一)、相关概念

(二)、图的点色数的几个结论

(三)、四色与五色定理

(四)、顶点着色的应用

一、关于顶点着色的基本概念

一般针对无环的无向图而言

定义 18.8

（1）图 G 的一种着色——给图 G 的每个顶点涂上一种颜色，使相邻顶点具有不同颜色

（2）对 G 进行 k 着色（G 是 k-可着色的）——能用 k 种颜色给 G 的顶点着色

（3）G 的色数 $\chi(G)=k$——G 是 k-可着色的，但不是 $(k-1)$-可着色的.

一、地图与面着色

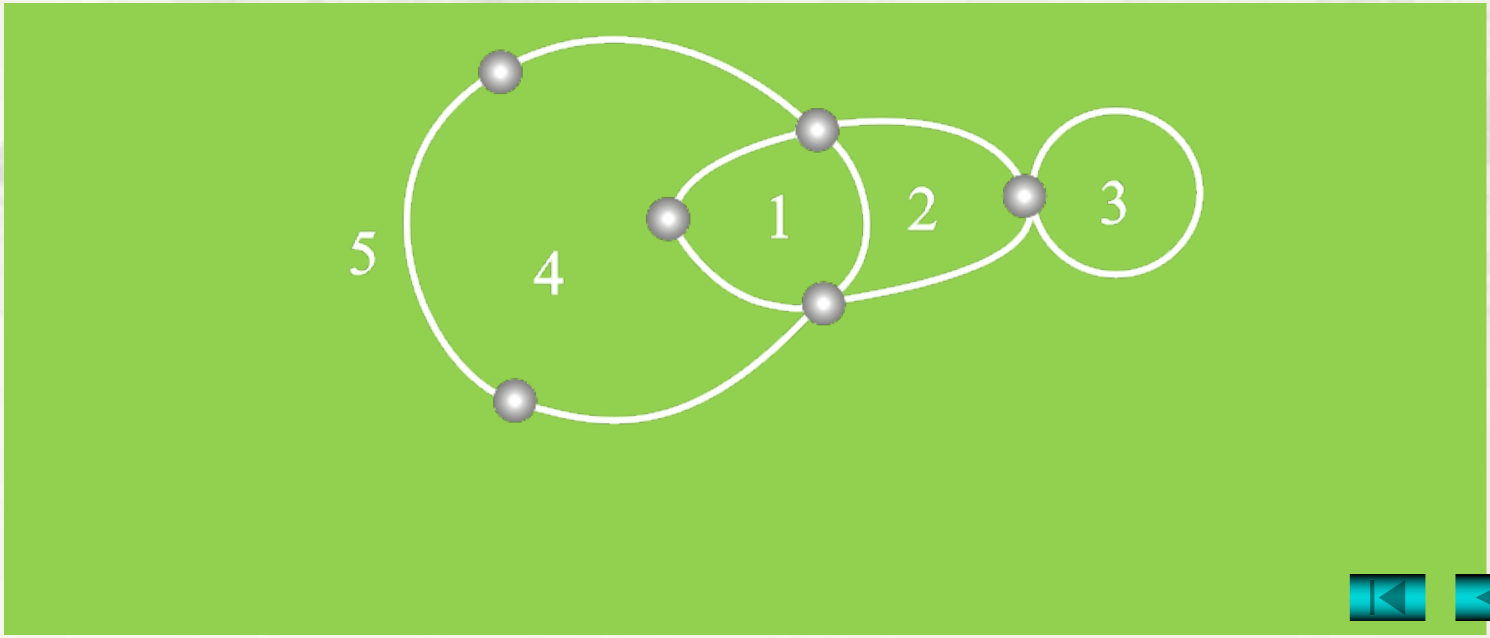
1．地图与国家

定义　　(1) 地图——连通无桥平面图（嵌入）与所有的面

(2) 国家——地图的面

(3) 两个国家相邻——它们的边界至少有一条公共边

在图 13 所示地图中，有 5 个国家，其中 1 与 2 相邻，1 与 4 相邻，2,3,4 均与 5 相邻.



2．地图的面着色

定义 18.9

（1）地图 G 的面着色——对 G 的每个国家涂上一种颜色，相邻国家涂不同颜色

（2）G 是 k-面可着色的——能用 k 种颜色给 G 的面着色

（3）G 的面色数 $\chi^*(G)=k$——最少用 k 种颜色给 G 的面着色.

二、地图的面着色转化成对偶图的点着色

定理 18.9　地图 G 是 k-面可着色的当且仅当它的对偶图 G^* 是 k-点可着色的.

证明简单

地图上的国家与它的对偶图的顶点一一对应，且两个国家相邻当且仅当对应的顶点相邻。
另外，地图无桥，所以对偶图无环。满足点着色条件。
因此，地图着色可归结于平面图的点着色。

图着色的应用

图着色的应用：
当试图在有冲突的情况下分配资源时，就会产生这个问题。
例如：有n项工作，每项工作需要一天的时间完成，有些工作需要相同的人员或者设备不能同时进行，问至少需要几天才能完成所有的工作？

用图描述：
用顶点表示工作，如果两项工作需要相同的人员或者设备，就用一条边连接对应的顶点。那么工作的时间安排对应于这个图的点着色：着同一种颜色的顶点对应的工作可以安排在同一天，所需要的最少天数正好是这个图的色数。

课程安排问题：某大学数学系要为这个夏季安排课程表。所要开设的课程为：图论(GT), 统计学(S), 线性代数(LA), 高等微积分(AC), 几何学(G), 和近世代数(MA)。现有10名学生(如下所示)需要选修这些课程。根据这些信息，确定开设这些课程所需要的最少时间段数，使得学生选课不会发生冲突。(学生用A_i表示）

A_1: LA, S ; A_2: MA, LA, G ; A_3: MA, G, LA;

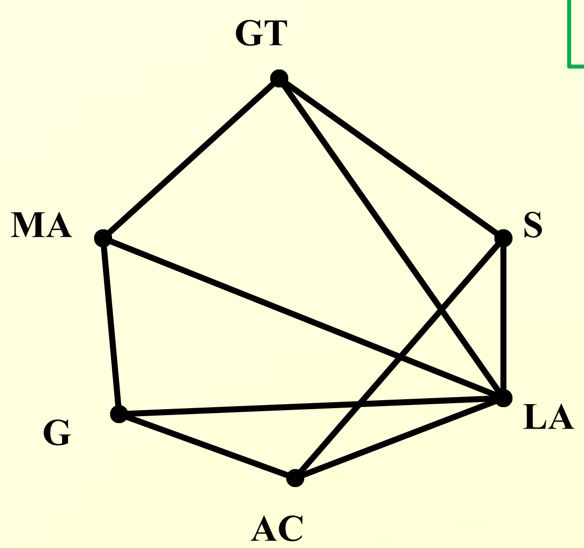
A_4: G, LA, AC ; A_5: AC, LA, S ; A_6: G, AC;

A_7: GT, MA, LA ; A_8: LA,GT, S ; A_9: AC, S, LA;

A_{10}: GT, S。

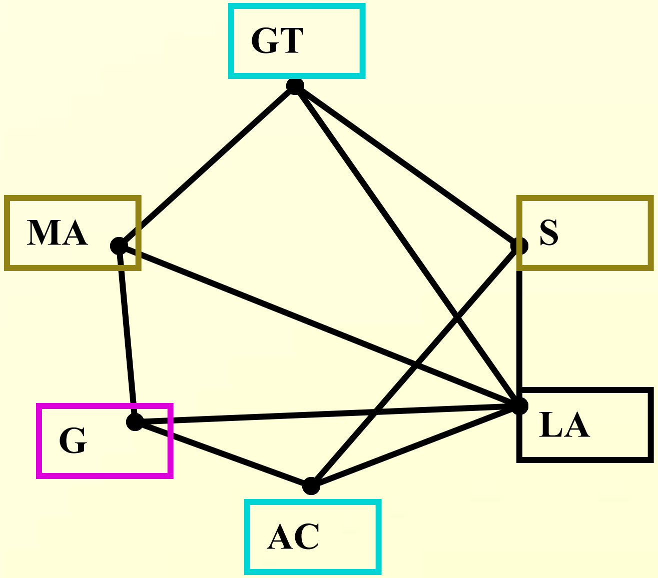
把课程模型为图G的顶点，两顶点连线当且仅当有某个学生同时选了这两门课程。

同一个学生选的不同课程不能在同一时段上课



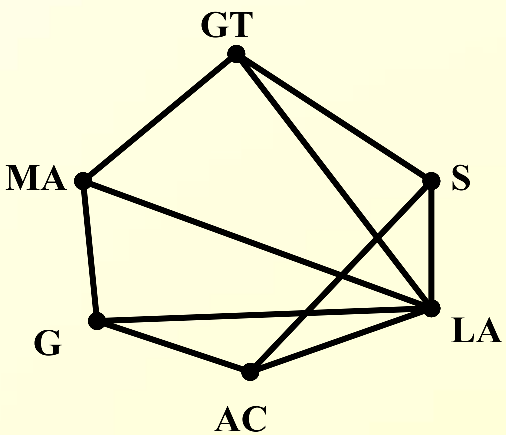
选课状态图

如果我们用同一颜色给同一时段的课程顶点染色，那么，问题转化为在状态图中求所谓的点色数问题。



选课状态图

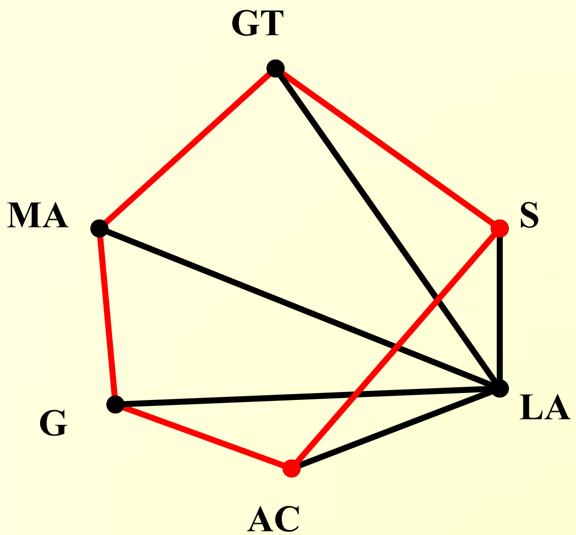
例1 说明下图的点色数是4。



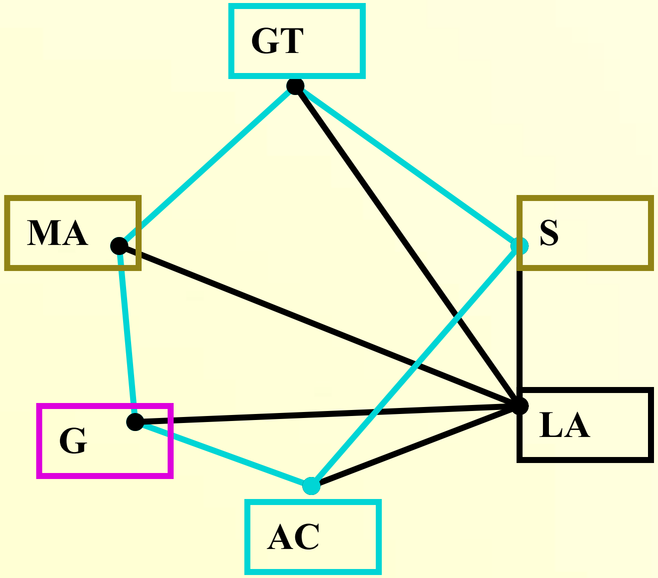
解：

一方面，因图中含有奇圈(红色边), 所以，点色数至少为3。又因为点LA与该圈上每一个点均邻接，所以，点色数至少为4：$\chi(G) \geq 4$

另一方面，通过具体着色，用4种颜色可以得到该图的一种正常点着色，则：$\chi(G) \leq 4$



选课状态图



所以，$\chi(G) = 4$

注：对图的正常顶点着色，带来的是图的顶点集合的一种划分方式。所以，对应的实际问题也是分类问题。属于同一种颜色的顶点集合称为一个色组，它们彼此不相邻接，所以又称为点独立集。用点色数种颜色对图G正常着色，称为对图G的最优点着色。

定义2 色数为k的图称为k色图。

色数为2，所有顶点按照着色分成两个子集，且所有的边都介于两个顶点子集之间，即构成了二部图。

二、关于顶点着色的几个简单结果

1） $\chi(G)=1$ 当且仅当 G 为零图

2）$\chi(K_n)=n$

偶圈+中心点　　奇圈+中心点

3） 偶圈的色数为 2，奇圈色数为 3， 奇阶轮图$\chi(G)=3$，偶阶轮图$\chi(G)=4$.

4） 若 G 的边集非空，则$\chi(G)=2$ 当且仅当 G 为二部图.

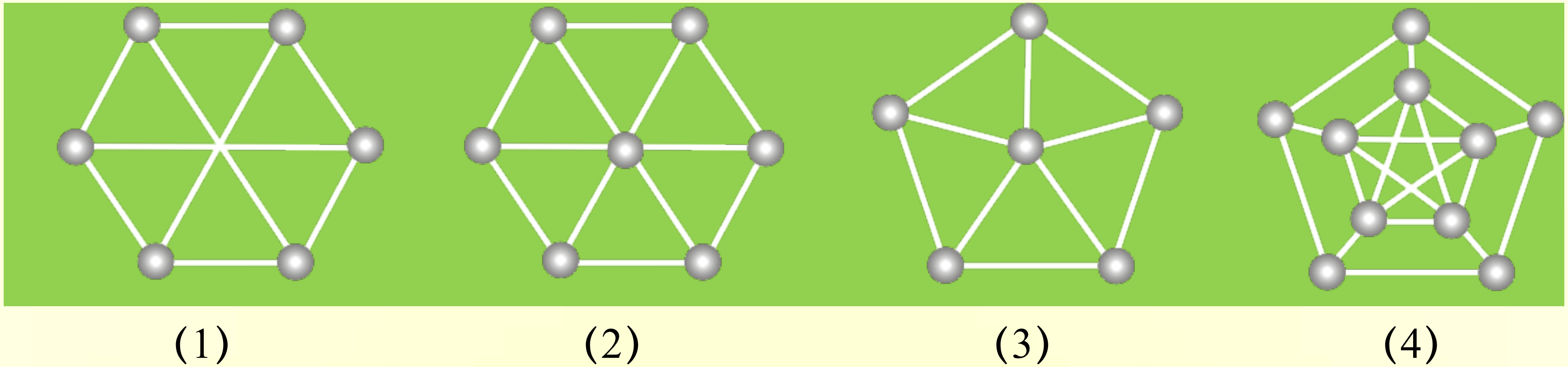


图 12

图 12 所示各图中，色数分别为 2，3，4，5，为什么?

三、色数的上界

定理 18.7　对于任意无环图 G，均有

$$\chi(G) \le \Delta(G)+1$$

分析：事实上，定理结论容易想到，因为任意一个顶点度数至多为Δ，因此，正常着色过程中，其邻点最多用去Δ种颜色，所以，至少还有一种色可供该点正常着色使用。

证明：我们对顶点数作数学归纳证明。

当n=1时，结论显然成立。

设对顶点数少于n的图来说，定理结论成立。考虑一般的n阶图G。

任取v ∈V(G), 令G_1=G-v， 由归纳假设：

$$\chi(G_1) \le \Delta(G_1)+1 \le \Delta(G)+1$$

V最多含有Δ(G)个邻点

设π是G_1的一种Δ(G)+1正常点着色方案，因为v的邻点在π下至多用去Δ(G)种色，所以给v染上其邻点没有用过的色，就把π扩充成了G的Δ(G)+1着色方案。

如果是奇圈或者完全图(n≥3)，χ(G)=Δ(G)+1

对于G来说，可以给出其Δ(G)+1正常点着色算法。

G的Δ(G)+1正常点着色算法（贪心算法）

设$G=(V, E)$, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,色集合$C=\{1,2,\ldots,\Delta+1\}$ ，着色方案为π。

(1) 令$\pi(v_1)=1$， $i=1$；

(2) 若$i=n$,则停止；否则令：

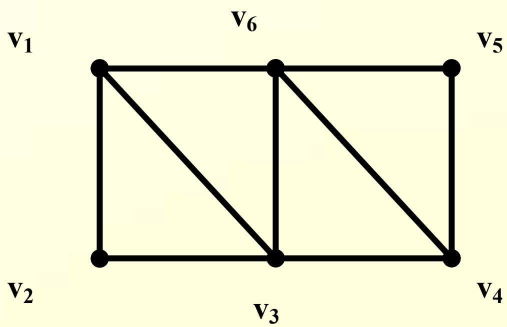
$$C(v_{i+1})=\left\{\pi(v_j)\middle|j\le i,\text{并且}v_j\text{与}v_{i+1}\text{相邻}\right\}$$

选择与v_{i+1}中的已着色的邻点的颜色不同的，且标号最小的颜色，作为v_{i+1}的颜色。

设k为$C-C(v_{i+1})$中的最小整数，令 $\pi(v_{i+1})=k$

(3) 令$i=i+1$,转(2)。

例2 给出下图的Δ+1正常点着色。



解：色集C=｛1, 2, 3, 4, 5｝

$(1), \pi(v_1)=1$

$(2), C(v_2)=\{1\}, C-C(v_2)=\{2,3,4,5\}, k=2$

$(1), \pi(v_2)=2$

$(2), C(v_3)=\{1,2\}, C-C(v_3)=\{3,4,5\}, k=3$

$(1), \pi(v_3)=3$

$(2), C(v_4)=\{3\}, C-C(v_4)=\{1,2,4,5\}, k=1$

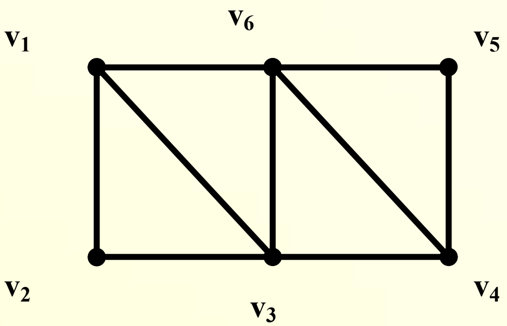
$(1), \pi(v_4)=1$

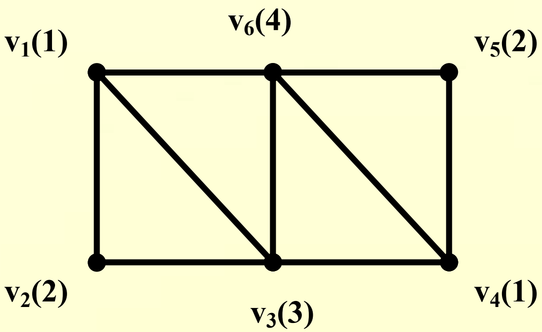
$(2), C(v_5)=\{1\}, C-C(v_5)=\{2,3,4,5\}, k=2$

$(1), \pi(v_5)=2$

$(2), C(v_6)=\{1,2,3\}, C-C(v_5)=\{4,5\}, k=4$

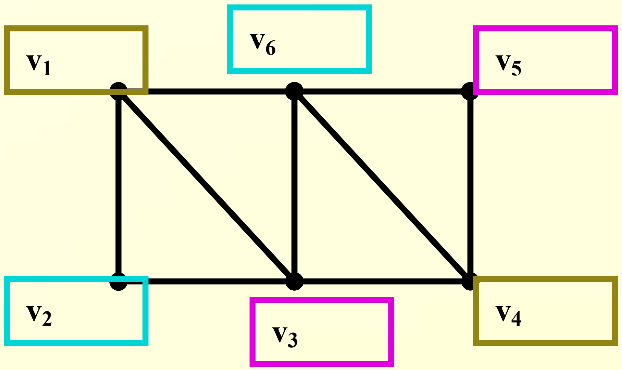
$(1), \pi(v_6)=4$





注意:

(1)不能通过上面算法求出色数，例如，根据上面算法，我们求出了一个**4**色方案，但**G**是**3**色图:



(2) Welsh—Powell稍微对上面算法做了一个修改，着色时按所谓最大度优先策略，即用上面算法时，按顶点度数由大到小的次序着色。这样的着色方案起到了对上面算法的一个改进作用。

对于简单图G来说，数学家布鲁克斯(Brooks)给出了一个对定理18.7的色数改进界。这就是下面著名的布鲁克斯定理。

如果是奇圈或者完全图（n≥3），$\chi(G)=\Delta(G)+1$

定理18.8 (Brooks 定理，1941) 若G是连通的简单图，并且它既不是奇圈，又不是完全图，$\chi(G) \leq \Delta(G)$

数学家罗瓦斯在1973年给出了如下证明。证明不要求掌握

证明：不失一般性，我们可以假设G是正则的，2连通的，最大度Δ≥3的简单图。原因如下：

(1) 容易证明：若G是非正则连通简单图，最大度是Δ，则

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

事实上，我们可以对G的顶点数作数学归纳证明：

当n=1时，结论显然成立；

设对于阶数小于n的简单非正则连通简单图来说，结论成立。下设G是阶数为n的非正则连通单图。

设u是G中顶点，且d(u)= δ < Δ，考虑G_1=G-u

若G_1是正则简单图，则Δ(G_1)=Δ(G)-1。于是G_1是可Δ(G)顶点正常着色的（定理18.7），从而，G是可Δ(G)正常顶点着色的；

减去顶点u，和u相连的点的度数必然减少1，如果G_1是正则图，说明最大度顶点的度数必然减少了1，否则其他顶点减少度数后，必然小于最大度的顶点度数。注意：此时不能用数学归纳法，因为G_1是正则简单图，而假设是非正则简单图。

若G_1是非正则简单图，则由数学归纳，G_1是可Δ(G1)顶点正常着色的，从而，G是可Δ(G)正常顶点着色的。

因为d(u)= δ < Δ(G)，因此u的邻点个数一定小于Δ(G)，因此可先对G_1着色，最后可用不同于u邻点的颜色对u进行着色。

(2) 容易证明：若G是1连通k正则简单图，最大度是Δ，则

$$\chi(G) \le \Delta(G)$$

设v是G的一个割点，设C为G-v的一个连通分量，则v在C中的度小于等于k-1，我们可使用之前的Δ(G)+1贪心着色算法对C∪{v}着色，并使得v是最后一个被着色的点，可以得到C∪{v}的k-着色（对于C中所有点，通过后面讲的深度优先遍历的逆序排序，都只有小于等于k-1个邻点排在它前面，而v的度小于等于k-1）。使用这种方法对G-v的每一个连通分量和v的并集进行着色，使得v在这些着色中使用同一种颜色，我们得到G的一个k-着色。

(3) $\Delta(G)<3$，且为正则简单图

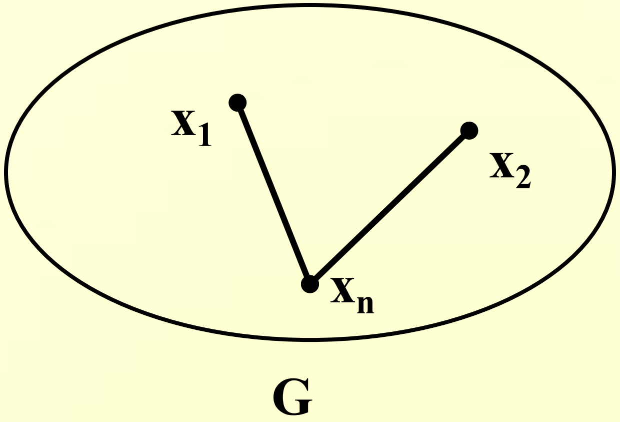
G只可能为K_2和圈。因G不是奇圈，且不能为完全图，所以定理结论显然成立。

所以，下面只需证明：假设**G**是正则的，**2**连通的，最大度$\Delta \geq 3$的简单图，且不是完全图或奇圈，有：

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

分两步完成证明。

1) 在上面条件下，我们证明：**G**中存在三点x_1, x_2, x_n,使得$G - \{x_1, x_2\}$连通，x_1与x_2不邻接，但x_1, x_2与x_n均邻接；



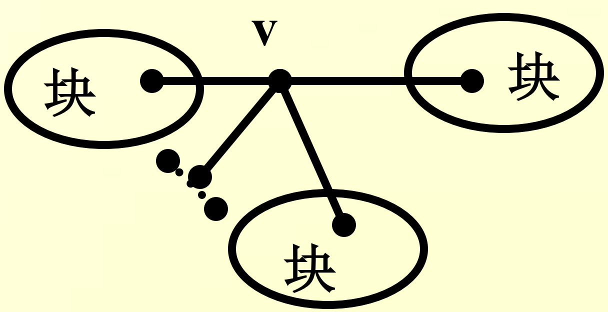
情形1 设G是3连通的正则非完全图。

对于G中点x_n，显然在其邻点中存在两个不邻接顶点x_1与x_2，使得G-｛x_1, x_2｝连通。

因为G是非完全图，所以一定存在距离为2的x_1和x_2点，经过x_n点。且因为G是3连通，所以G-｛x1，x2｝连通。

情形2 设G是连通度为2的正则非完全图。

此时，存在点x_n,使得G-x_n连通且有割点v, 于是G-x_n至少含有两个块。



G -x_n

即{x_n, v}是一个点割集

$\{x_n, v\}$是一个点割集

由于G本身2连通，所以$G\text{-}x_n$的每个仅含有一个割点的块中均有点与x_n邻接。设分属于H_1与H_2中的点x_1与x_2，它们与x_n邻接。由于x_1与x_2分属于不同块，所以x_1与x_2不邻接。又显然$G\text{-}\{x_1, x_2\}$连通。

定理B2 点v是图G的割点当且仅当v至少属于G的两个不同的块。

至此，我们已经证明：G中存在三点x_1, x_2, x_n，使得$G - \{x_1, x_2\}$连通，x_1与x_2不邻接，但x_1, x_2与x_n均邻接；

2) 对G中顶点进行如下排序（深度优先遍历的逆序）：

令$x_{n-1} \in V(G) - \{x_1, x_2, x_n\}$且与$x_n$邻接；

每个顶点度数≥3

$x_{n-2} \in V(G) - \{x_1, x_2, x_n, x_{n-1}\}$且与$x_n$或$x_{n-1}$邻接；

$x_{n-3} \in V(G) - \{x_1, x_2, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}\}$且与$x_n$或$x_{n-1}$或$x_{n-2}$邻接；

不断这样作下去，可得到G的顶点排序：$x_1, x_2, \ldots, x_n$

其实就是按照从x_n出发深度优先遍历算法的逆序排列，且x_1，x_2在最前面。
这样排序的效果：除x_n之外的其他所有点只有小于等于$\Delta(G)-1$个邻点排在它前面，因为至少有一个点排在它后面。

注意：x_1，x_2着色相同

把Δ(G)+1（贪心）着色算法用于G，按照上面顶点排序着色，容易知道，用Δ(G)种颜色可以完成G的正常点着色。

除x_n之外的点只有小于等于Δ(G)-1个邻点排在它前面，而x_n的邻点x_1，x_2着色相同，因此所有顶点都只需要Δ(G)中颜色。

对于简单图的点色数，还可以在定理18.8的基础上获得改进。

定义3 设G是至少有一条边的简单图，令

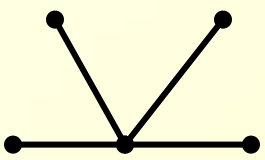
$$V_2(G)=\left\{v\middle|v\in V(G),N(v)\text{中存在点}u\text{，满足}d(u)\geq d(v)\right\}$$

其中N(v)为G中点v的邻域。

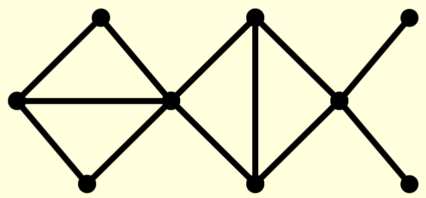
$$\Delta_2(G)=\max\left\{d(v)\middle|v\in V_2(G)\right\}$$

称$\Delta_2(G)$为G的次大度。

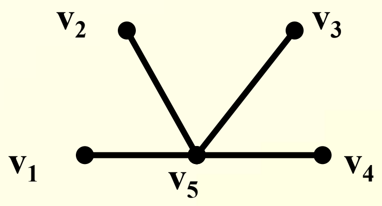
例如：求下面图的次大度$\Delta_2(G)$



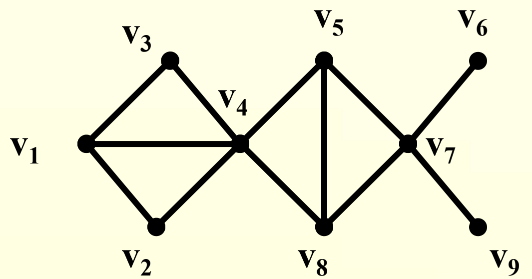
G_1



G_2



G1



G2

解：(1)

$$V_2(G_1)=\{v \mid v\in V(G_1), N(v)\text{中存在点}u,\ \text{满足}d(u)\geq d(v)\}$$

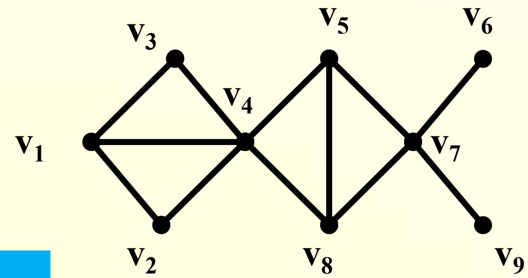
$$=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$$

$$\Delta_2(G)=\max\{d(v) \mid v\in V_2(G)\}=1$$

(2)

$$V_2(G_2)=\{v \mid v\in V(G_2), N(v)\text{中存在点}u,\ \text{满足}d(u)\geq d(v)\}$$

$$=\left\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8, v_6, v_9\right\}$$



G_2

$$\Delta_2(G)=\max\left\{d(v)\,\middle|\,v\in V_2(G)\right\}=3$$

次大度未必是第二大的度数

注：由次大度的定义知：$\Delta_2(G)\le\Delta(G)$

定理3 设G是非空简单图，则：

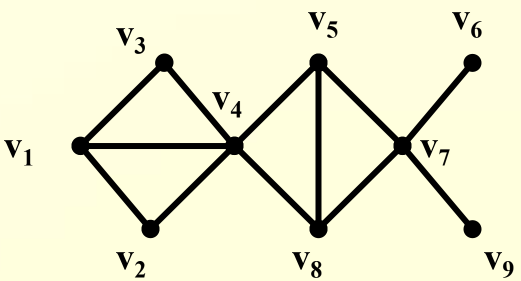
$$\chi(G)\le\Delta_2(G)+1$$

奇圈和完全图也满足

注：定理3是对定理18.8的一个改进！

例如：对下面简单图来说，由定理18.8得：$\chi(G_2) \le \Delta(G_2) = 5$

而由定理3得： $\chi(G_2) \le \Delta_2(G)+1=4$



G_2

推论：设G是非空简单图，若G中最大度点互不邻接，则有：

$$\chi(G) \le \Delta(G)$$

如果(两个或以上)最大度点邻接，那么次大度等于最大度，否则
$\Delta_2(G)+1 \le \Delta(G)$
注意：完全图最大度邻接

(三)、四色与五色定理

1、四色定理

1852年，刚毕业于伦敦大学的格斯里(1831—1899)发现：给一张平面地图正常着色，至少需要4种颜色。这就是著名的4色定理。

四色定理：任何平面图都是4-可着色的。

格斯里把他的证明通过他弟弟转交给著名数学家摩尔根，引起摩尔根极大兴趣并于当天给数学家哈密尔顿写了封相关信件。但没有引起哈密尔顿的注意。

直到1878年，在英国数学家会议上，数学家凯莱才再一次提到4色问题。

1879年7月，业余数学家肯普(1849---1922）在英国自然杂志上宣称证明了4色定理。肯普是凯莱在剑桥大学的学生。

1890年，英国数学家希伍德发表文章地图染色定理，通过构造反例，指出了肯普证明中的缺陷。后来，希伍德一直研究4色问题60年。

泰特在此期间也研究4色问题，但其证明被托特否定。

希伍德文章之后，4色问题研究进程开始走向停滞。

到了20世纪，美国数学家比尔荷夫提出可约性概念，在此基础上，德国数学家海斯(1906—1995)认为，可以通过寻找所谓的不可约构形来证明4色定理。

Heesch估计不可约构形集合可能包含10000个元素，手工验证是不太可能。于是他给出了一种可用计算机来验证的方法。

20世纪70年代，黑肯和他的学生阿佩尔着力用计算机方法证明4色定理，借助于Appel在编程方面的深厚功底。他们于1976年6月终于成功解决了寻找不可约构形集合中的元素，宣告4色定理的成功证明。数学家托特在图论顶级刊物《图论杂志》上写了一首诗：

Wolfgang Haken

重重打击着巨妖

一次！两次！三次！四次！

他说：“妖怪已经不存在了.”

如果四色定理不成立，则应该存在一个反例，这个反例大约有2000种可能，然后他们用计算机分析了所有这些可能，都没有导致反例，从而证明四色猜想成立。但是寻求相对短的、能被人阅读和检查的证明仍是数学家追求的目标。

2、五色定理

定理4 (希伍德) 每个平面图是5可着色的。

根据平面图和其对偶图的关系，上面定理等价于每个平面图是5可顶点正常着色的。

证明：我们对图的顶点作数学归纳证明。

当n=1时，结论显然。

设n=k时，结论成立。考虑n=k+1的平面图G。

因G是平面图，所以δ(G)≤5　　（否则2m>6n, G为非平面图）

设d(u)=δ(G)≤5。

定理17.10 设G是具有n个点m条边ϕ个面的简单平面图，则：

$$m \le 3n - 6$$

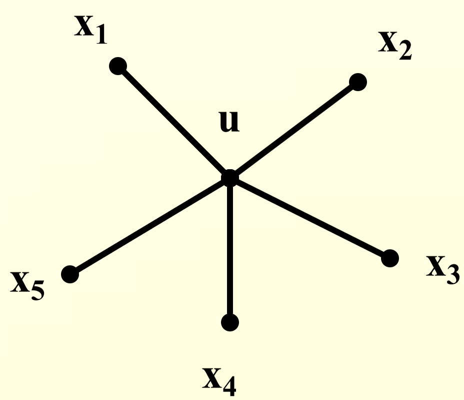
令$G_1=G-u$。由归纳假设，G_1是5可顶点正常着色的。设π是G_1的5着色方案。

(1) 如果$d(u)=\delta(G)<5$, 显然π可以扩充为G的5正常顶点着色;

(2) 如果$d(u)=\delta(G)=5$, 分两种情况讨论。

情形1 在π下，如果u的邻接点中，至少有两个顶点着相同颜色，则容易知道，π可以扩充为G的5正常顶点着色;

情形2 在π下，设u的邻接点中，5个顶点着了5种不同颜色。



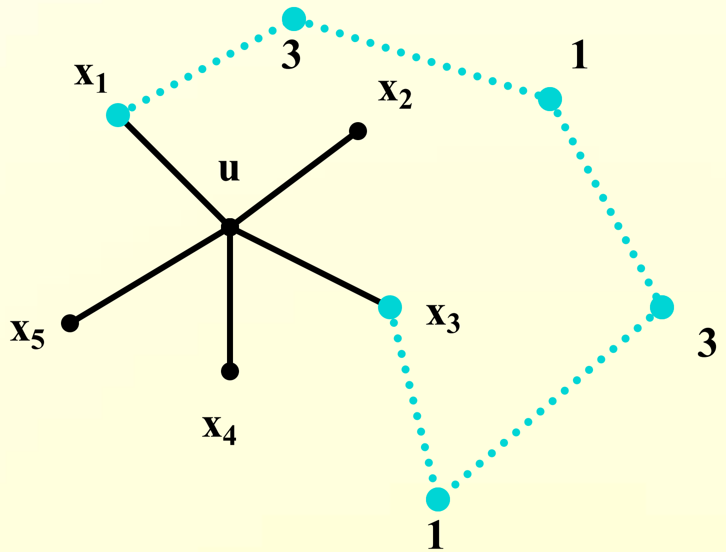
不失一般性，设$\pi(x_i)=i$（$1\leqq i\leqq 5$）。

设H (i, j)表示着i和j色的点在G_1中的点导出子图。

如果x_1与x_3属于H(1, 3) 的不同分支。则通过交换含x_1的分支中的着色顺序，可得到G_1的新正常点着色方案，使x_1与x_3着同色，于是由情形1，可以得到G的5正常顶点着色方案；

如果x1和x3是一个连通分支，那么调整x1必然会影响到x3，所以依然不能调整成相同的颜色。

设x_1与x_3属于H(1, 3) 的相同分支。



在上面假设下，x_2与x_4必属于H(2, 4) 的不同分支。否则，原图G中将会得到H(1, 3) 与H(2, 4) 的交叉点。因此，π可以扩充为G的5正常顶点着色。

同样通过调整，将x_2和x_4着相同的颜色。

(四)、顶点着色的应用

图的正常顶点着色对应的实际问题是“划分”问题。

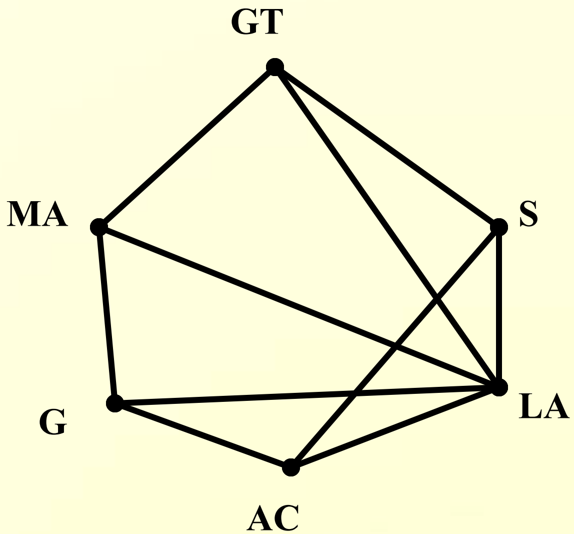
例1 课程安排问题：某大学数学系要为这个夏季安排课程表。所要开设的课程为：图论(GT), 统计学(S),线性代数(LA), 高等微积分(AC), 几何学(G), 和近世代数(MA)。现有10名学生(如下所示)需要选修这些课程。根据这些信息，确定开设这些课程所需要的最少时间段数，使得学生选课不会发生冲突。(学生用A_i表示）

A_1: LA, S ; A_2: MA, LA, G ; A_3: MA, G, LA;

A_4: G, LA, AC ; A_5: AC, LA, S ; A_6: G, AC;

A_7: GT, MA, LA ; A_8: LA,GT, S ; A_9: AC, S, LA;
A_{10}: GT, S。

解：把课程模型为图G的顶点，两顶点连线当且仅当有某个学生同时选了这两门课程。

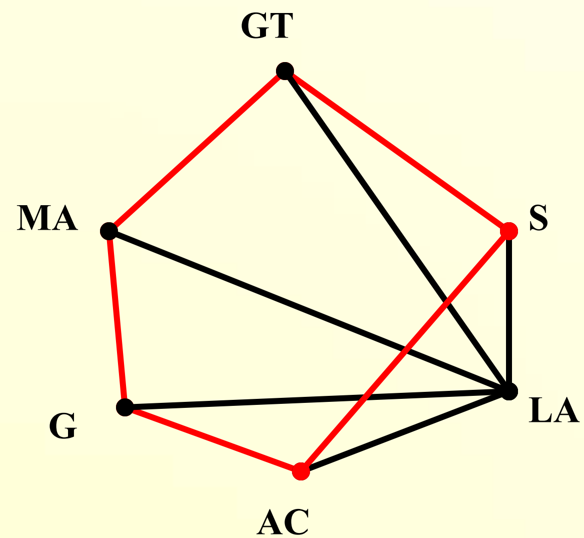


选课状态图

如果我们用同一颜色给同一时段的课程顶点染色，那么，问题转化为在状态图中求对应于点色数的着色。

(1) 求点色数

一方面，因图中含有奇圈(红色边), 所以，点色数至少为3。又因为点LA与该圈上每一个点均邻接，所以，点色数至少为4.

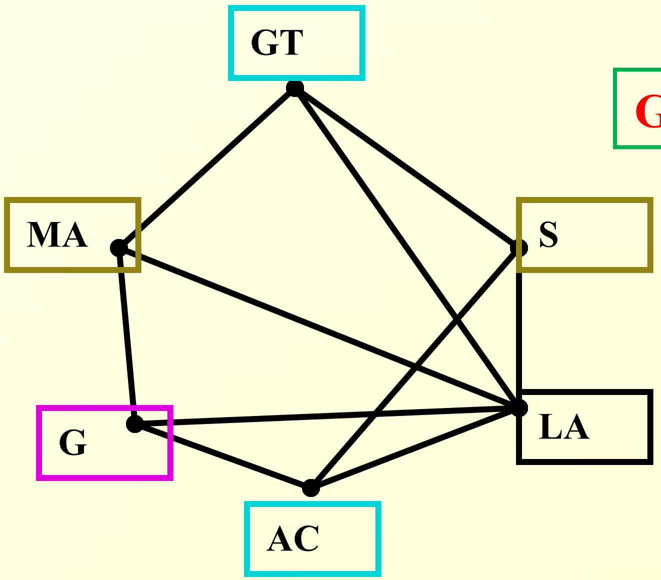


选课状态图

另一方面，我们用4种色实现了G的正常点着色，所以，图的点色数为4.

采用Brooks定理，色数小于等于5;
采用基于次大度的定理，色数小于等于4;

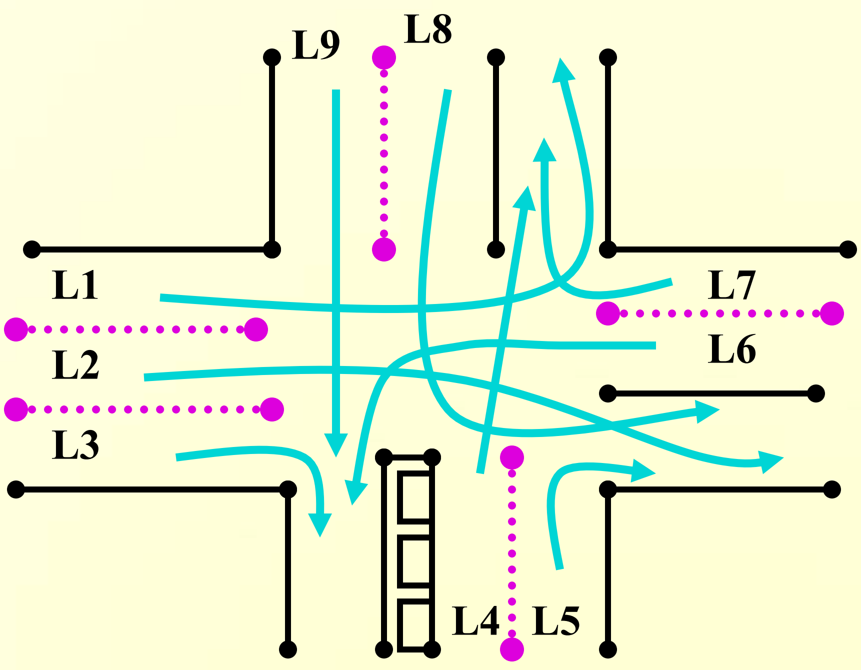
(2) 求安排----具体着色



选课状态图

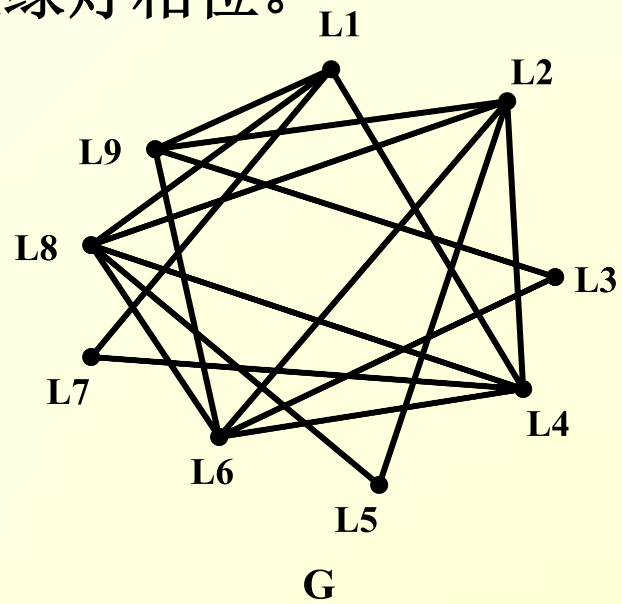
G的Δ(G)+1正常点着色算法（贪心算法）

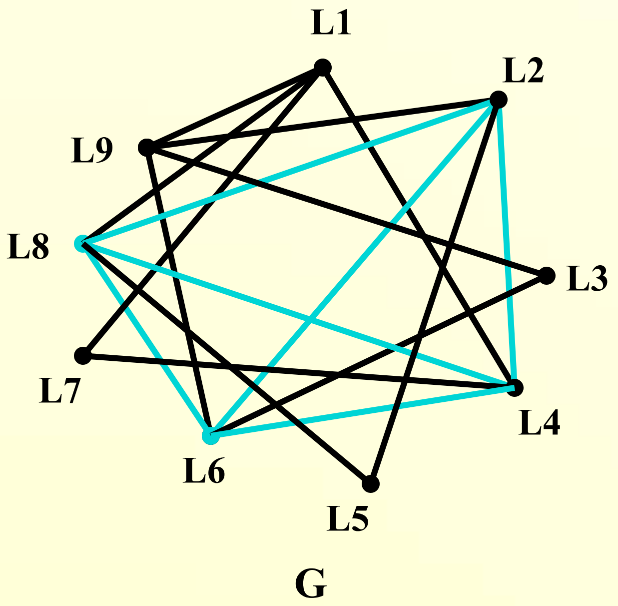
例2 交通灯的相位设置问题：如图所示，列出了繁华街道路口处的交通车道L1,L2,…,L9。在此路口处安置了交通灯。当交通灯处于某个相位时，亮绿灯的车道上的车辆就可以安全通过路口。为了(最终)让所有的车辆都能够安全通过路口，对于交通灯来说，所需要的相位的最小数是多少？



两个车道的车不能同时进入同一个车道；两个车道的路线不能有交叉

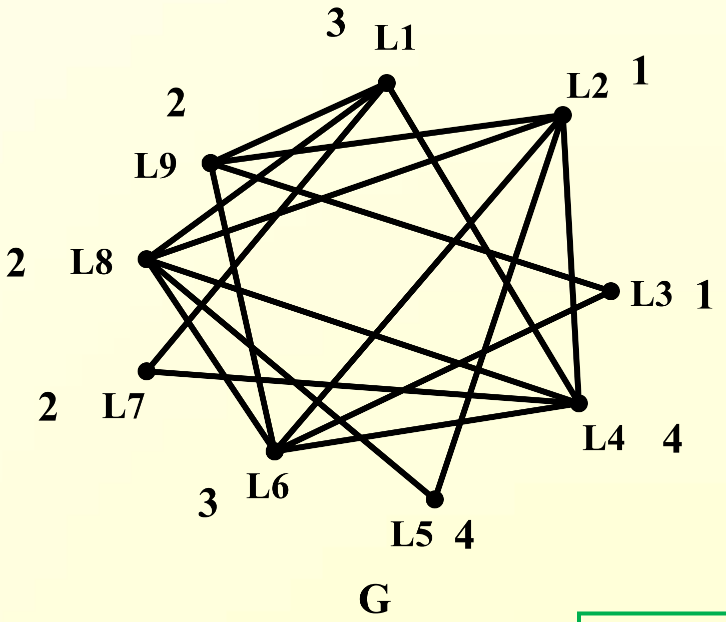
解：车道模型为顶点，两点连线当且仅当两个车道上的车不能同时安全地进入路口，而连线的两个车道不能使用同一红绿灯相位。





问题转化为求G的点色数。一方面，G中含有K_4, 所以，点色数至少为4;

另一方面，通过尝试，用4种色实现了正常点着色。



可用前述的贪心着色算法（或者改进版的贪心着色算法：着色时按所谓最大度优先策略，即用贪心算法时，按顶点度数由大到小的次序着色）。

注意：如果采用定理18.7或者18.8，并不能得到4，而是5.

所以，最小相位为4。

作业

21，22，25