第7章 二元关系

7.1 序偶与笛卡尔积

7.2 关系及表示

7.3 关系的运算

7.4 关系的性质

7.5 关系的闭包

7.6 等价关系和划分

7.7 偏序关系

7.1 序偶与笛卡儿积

定义7.1(有序对(或序偶)， ordered pairs) 由两个元素x和y（允许$x=y$）按一定次序排列组成的二元组$<x, y>$称为一个有序对或序偶，记作$<x, y>$，其中x是它的第一元素，y是它的第二元素。注意，第一、 二元素未必不同。

如平面直角坐标系中的任意一点坐标（x, y）均是序偶，而全体这种实数对的集合 $\{(x, y) \mid x \in \mathrm{R} \wedge y \in \mathrm{R}\}$ 就表示整个平面。

有序对 $\langle x, y \rangle$ 具有以下性质：

(1) 当 $x \neq y$ 时，$\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$。

(2) $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ 的充要条件是 $x=u$ 且 $y=v$。

(3) $\langle x, x \rangle$ 也是序偶。

这些性质是二元集$\{x, y\}$所不具备的。例如当$x \neq y$时有$\{x, y\}=\{y, x\}$，原因是有序对中的元素是有序的，而集合中的元素是无序的。再例如，$\{x, x\}=\{x\}$，原因是集合中的元素是互异的。

由性质(2)可推出$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$的充要条件是$x=y$。有序对的概念可以进一步推广到多元有序组。

定义7.2(n元有序组) 若n∈N且n＞1，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是n个元素，则n元组〈$x_1, x_2, \ldots, x_n$〉定义为：

当n=2时， 二元组是有序对〈x_1, x_2〉；

当$n \neq 2$时， 〈$x_1, x_2, \ldots, x_n$〉可以看作是〈〈$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$〉, x_n〉， 但不相等。

本质上, n元有序组依然是序偶。

n元有序组有如下性质：

〈$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$〉 = 〈$y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n$〉的充要条件是

$x_1=y_1, x_2=y_2, \ldots, x_i=y_i, \ldots, x_n=y_n$。

前面提到，一个序偶〈x, y〉的两个元素可来自不同的集合，若第一元素取自集合A，第二元素取自集合B，则由A、B中的元素，可得若干个序偶，这些序偶构成的集合，描绘出集合A与B的一种特征，称为笛卡儿乘积。其具体定义如下：

定义7.3 设A, B 为集合，用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素构成有序对。**所有这样的有序对**组成的集合称为集合A和B的**笛卡儿积**(cartesia*n* produ*c*t)，又称作直积， 记作$A\times B$。

A和B 的笛卡儿积的符号化表示为

$$A\times B=\{\langle x, y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$$

定义7.4 (n阶笛卡儿积(cartesian product)) 若$n \in$N，且$n>1$， $A_1, A_2, \ldots, A_n$是n 个集合，它们的n 阶笛卡儿积记作$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, 并定义为:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

$$=\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}$$

当$A_1=A_2=\ldots=A_n=A$时，$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$简记为$A^n$。

【例7.1】 设$A=\{1, 2\}$，$B=\{a, b, c\}$，

$C=\{\varnothing\}$，R为实数集，则

（1） $A\times B=\{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 1, c\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 2, c\rangle\}$

$B\times A=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 2\rangle\}$

$\Phi\times A=\Phi$

$A\times\Phi=\Phi$

(2) $A \times B \times C =$

$$\{\langle 1, a, \Phi\rangle, \langle 1, b, \Phi\rangle, \langle 1, c, \Phi\rangle, \langle 2, a, \Phi\rangle, \langle 2, b, \Phi\rangle, \langle 2, c, \Phi\rangle\}$$

$$A \times (B \times C) = \{\langle 1, \langle a, \Phi\rangle\rangle, \langle 1, \langle b, \Phi\rangle\rangle, \langle 1, \langle c, \Phi\rangle\rangle, \langle 2, \langle a, \Phi\rangle\rangle, \langle 2, \langle b, \Phi\rangle\rangle, \langle 2, \langle c, \Phi\rangle\rangle\}$$

(3) $A^2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

(4) $B^2 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$

(5) R^2=｛$\langle x, y\rangle$ $|x$, y是实数｝， R^2为笛卡儿平面。

显然R^3为三维笛卡儿空间。

显然 $A\times B$与 $B\times A$所含元素的个数相同（A, B是有限集合）， 但$A\times B\neq B\times A$。

- $A=\{\varnothing\}$, $B=\varnothing$

  $P(A)\times A = \{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

  $P(A)\times B = \varnothing$

- 设 $A = \{1，2\}$, 求$P(A)\times A$？

定理7.1 若A, B是有穷集合， 则有

$$|A\times B|=|A|\cdot|B| \ (\cdot\text{为数乘运算})$$

该定理由排列组合的知识不难证明。

定理7.2 对任意有限集合A_1， $A_2, \ldots$， A_n， 有

$$|A_1\times A_2\times\ldots\times A_n|=|A_1|\cdot\ \ldots\ \cdot|A_n| \ (\cdot\text{为数乘运算})$$

这是十分直观的， 可用归纳法证明之。

定理7.4(笛卡儿积与$\subseteq$ 运算的性质1)

对任意的集合A, B 和C， 若$C\neq\Phi$， 则

$$(A\subseteq B)\Leftrightarrow (A\times C \subseteq B\times C)\Leftrightarrow (C\times A\subseteq C\times B)$$

该定理中的条件$C\neq\Phi$是必须的， 否则不能由$A\times C\subseteq B\times C$或$C\times A\subseteq C\times A$推出$A\subseteq B$。

定理7.5 (笛卡儿积与$\subseteq$ 运算的性质2)

对任意的集合A, B, C和D，有

$$(A\subseteq C\wedge B\subseteq D) \Rightarrow (A\times B\subseteq C\times D)$$

A= ∅， 而B≠ ∅?

思考： 定理7.5的逆命题是否成立？如果成立给出证明， 如果不成立请给出反例， 在什么条件下成立？

笛卡儿积的性质

（1）不适合交换律

$$A\times B \neq B\times A \qquad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$$

（2）不适合结合律

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \qquad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing,\ C\neq\varnothing)$$

（3）对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C) \qquad (B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C) \qquad (B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

（4）若 A 或 B 中有一个为空集，则 $A\times B$ 就是空集.

$$A\times\varnothing = \varnothing\times B = \varnothing$$

（5）若 $|A| = m, |B| = n$, 则 $|A\times B| = mn$

性质的证明方法

证明 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$<x,y>$

$$<x,y> \in A\times(B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \land y \in B\cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \land (y \in B \lor y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \land y \in B) \lor (x \in A \land y \in C)$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in A\times B \lor <x,y> \in A\times C$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in (A\times B)\cup(A\times C)$$

所以有 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

例

(1) 证明 $A=B, C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C = B\times D$ 是否推出 $A=B, C=D$? 为什么?

解 (1) 任取$\langle x,y\rangle$

$\langle x,y\rangle \in A\times C$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in C$

$\Leftrightarrow x\in B \wedge y\in D$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in B\times D$

经常关注空集

(2) 不一定.反例如下:

$A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C = D = \varnothing$, 则 $A\times C = B\times D$ 但是 $A \neq B$.

7.2 关 系 及 表 示

关系是客观世界存在的普遍现象，它描述了事物之间存在的某种联系。例如，人类集合中的父子、兄弟、同学、同乡等，两个实数间的大于、小于、等于关系，集合中二直线的平行、垂直等等，集合间的包含，元素与集合的属于……都是关系在各个领域中的具体表现。表述两个个体之间的关系，称为二元关系；表示三个以上个体之间的关系，称为多元关系。我们主要讨论二元关系。

一、二元关系的定义

1．定义 7.3　如果一个集合满足以下条件之一：

（1）集合非空，且它的元素都是有序对

（2）集合是空集

则称该集合为一个二元关系，简称为关系，记作 R.

如果 $\langle x,y\rangle \in R$，可记作 xRy；如果 $\langle x,y\rangle \notin R$，则记作 $x \not R y$

2．实例：$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle a,b\rangle\}$, $S=\{\langle 1,2\rangle,a,b\}$.

R 是二元关系，当 a,b 不是有序对时，S 不是二元关系

根据上面的记法，可以写 $1R2$, aRb, $a \not R c$ 等.

我们常用符号R表示关系，如个体a与b之间存在关系R，则记作aRb, 或$<a, b>\in R$, 否则$a \not R\ b$ 或$<a, b>\notin R$。R只是关系的一种表示符号，至于是什么关系，需要时需附注。

同时关系并不限于同一类事物之间，也存在于不同物体之间。如旅客住店，张、王、李、赵四人，1，2，3号房间，张住1号，李住1号，王住2号，赵住3号。若分别以a, b, c, d表示四人，R表示住宿关系，则有$R=\{<a, 1>, <c, 1>, <b, 2>, <d, 3>\}$。因此我们看到住宿关系$R$是序偶的集合。

任何序偶的集合，确定了一个二元关系，并称该集合为一个二元关系，记作R。二元关系也简称关系。对于二元关系R，如果$\langle x, y\rangle \in R$，也可记作$xRy$。

定义并不要求R中的元素$\langle x, y\rangle$中的x, y取自哪个个体域。因此，$R=\{\langle 2, a\rangle$，$\langle u,$ 狗$\rangle$，$\langle$钱币，思想$\rangle\}$也是一个二元关系。因为它符合关系的定义，但是无意义，显然对毫无意义的关系的研究也无甚意义。若规定关系R中序偶$\langle x, y\rangle$的$x \in A, y \in B$，如上面的住店关系，这样的序偶构成的关系R，称为从A到B的一个二元关系。由$A\times B$的定义知，从A到B的任何二元关系，均是$A\times B$的子集，因此有下面的定义。

二、从 A 到 B 的关系与 A 上的关系

1．定义 7.4

设 A,B 为集合,

$A\times B$ 的任何子集所定义的二元关系叫做从 A 到 B 的二元关系,

当 $A=B$ 时则叫做 A 上的二元关系.

例　　$A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$，那么

$R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$

R_1, R_2, R_3, R_4 是从 A 到 B 的二元关系,

R_3 和 R_4 同时也是 A 上的二元关系.

2. 计数

$|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$ 的子集有 2^{n^2} 个. 所以 A 上有 2^{n^2} 个不同的二元关系.

例如$|A|=3$，则 A 上有 $2^{3^2}=512$ 个不同的二元关系.

R称为集合A_1， A_2， …， $A_{n\text{-}1}$到A_n上的n元关系（n-array relations）, 如果R是$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n\text{-}1} \times A_n$的一个子集。 当$A_1 = A_2 = \ldots = A_{n\text{-}1} = A_n$时，也称$R$为$A$上的$n$元关系。

当n=2时，称R为A_1到A_2的二元关系。

n元关系也可视为$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n\text{-}1}$到$A_n$的二元关系。

由于关系是集合（只是以序偶为元素），因此，所有规定集合的方式均适用于关系的确定。

当A, B均是有限集合时，因为$|A\times B|=|A|\cdot|B|$，而其子集的个数是幂集$P(A\times B)$的元素个数，

$|P(A\times B)|=2^{|A|\cdot|B|}$，所以由$A$到$B$共有$2^{|A|\cdot|B|}$个不同的二元关系。

下面介绍一些特殊的二元关系:

$\Phi\subseteq A\times B$，称Φ为A到B的空关系。

$A\times B\subseteq A\times B$，称$A\times B$为$A$到$B$的全域关系。

$I_A=\{\langle x, x\rangle | x\in A\}$，称为$A$上的恒等关系。

$E_A=\{\langle x, y\rangle | x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$，称为$A$上的全域关系。

特定集合上的小于等于关系 L_A、整除关系 D_A、包含关系 $R_\subseteq$定义如下:

$L_A = \{<x,y>|\ x,y \in A \wedge x \le y\}$, 这里 $A \subseteq R$，R 为实数集合

$D_A = \{<x,y>|\ x,y \in A \wedge x$ 整除 $y\}$, 这里 $A \subseteq Z^*$, Z^*为非 0 整数集合

$R_\subseteq = \{<x,y>|\ x,y \in A \wedge x \subseteq y\}$, 这里 A 是集合族.

例如 $A = \{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 则

$L_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

$D_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

$C = P(B) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则 C 上的包含关系是

$R_\subseteq = \{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$
$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$

类似的还可以定义大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等.

关系的表示：集合表示法，关系图和关系矩阵

在此引入关系的表示法。

因为关系是一种特殊的集合，所以关系仍然能使用集合的表示方法。如集合的列举法和描述法。除此之外，有限集合的二元关系亦可用图形来表示，这就是关系图。

定义 设集合$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$到$B=\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$上的一个二元关系为$R$，以集合$A$、$B$中的元素为顶点，在图中用“。”表示顶点。若$x_i R y_j$，则可自顶点$x_i$向顶点$y_j$引有向边$\langle x_i, y_j \rangle$，其箭头指向$y_j$。用这种方法画出的图称为关系图（*graph of relation*）。

如关系R是定义在一个集合A上，即$R \subseteq A \times A$，只需要画出集合A中的每个元素即可。起点和终点重合的有向边称为环（*loop*）。

【例7.2.2】 求集合A=｛1，2，3，4 ｝上的恒等关系、空关系、全关系和小于关系的关系图。

解 恒等关系

$I_A=\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$

空关系$\Phi=\{\ \}$

全域关系E_A

$A\times A=\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle\}$

小于关系L_A={〈1, 2〉，〈1, 3〉，〈2, 3〉，〈1, 4〉，〈2, 4〉，〈3, 4〉}

其关系图分别见图7.2.2、图7.2.3、图7.2.4、图7.2.5。

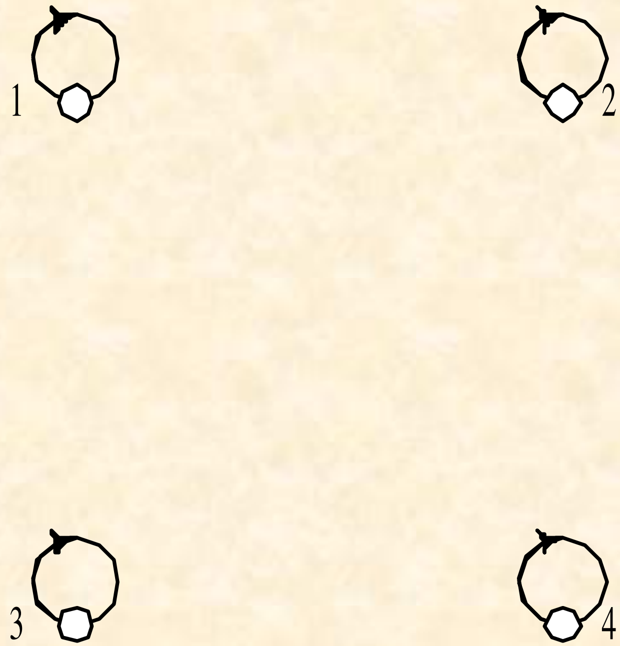


图 7.2.2

恒等关系I_A

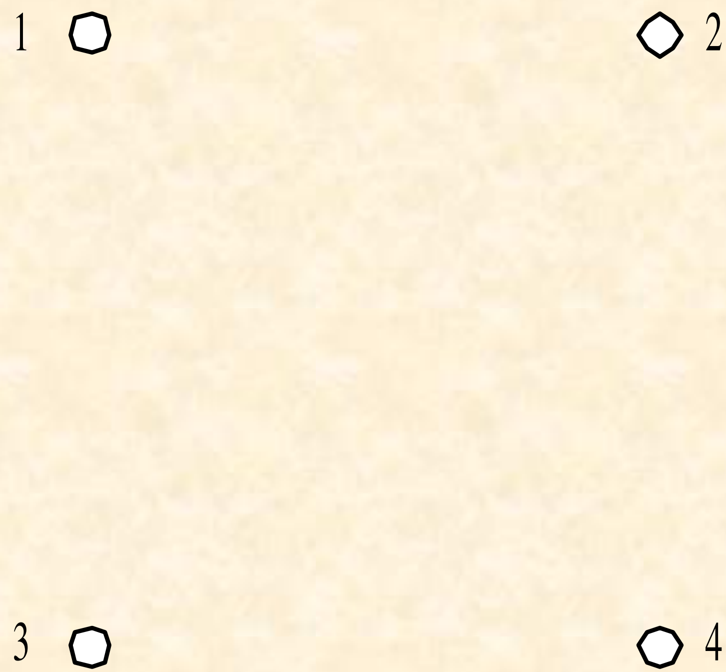


图 7.2.3

空关系Φ

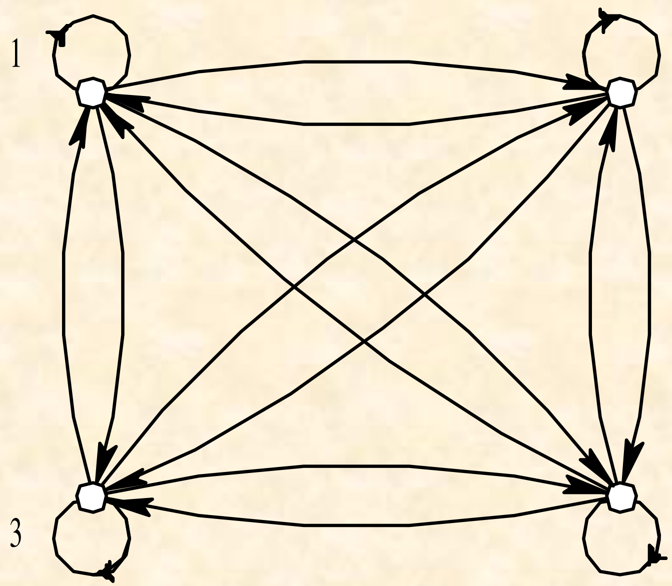


图 7.2.4

全域关系E_A

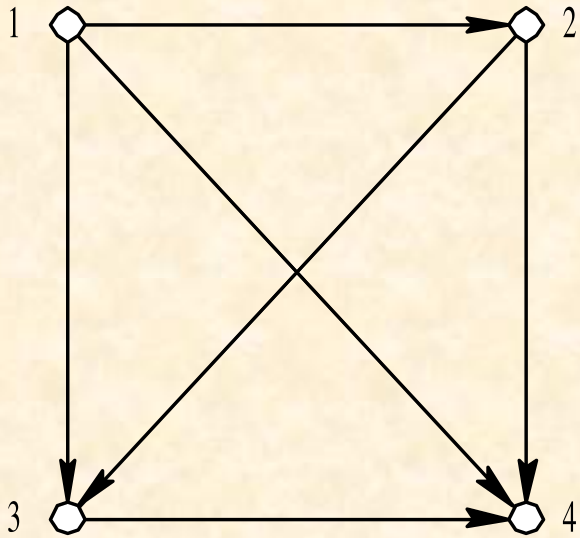


图 7.2.5

小于关系L_A

当A中元素的次序标定后，对于任何关系R，R的关系图与R的集合表达式是可以唯一相互确定的。我们也可看出关系图直观清晰，是分析关系性质的方便形式，但是**对它不便于进行运算**。关系还有一种便于运算的表示形式，称为关系矩阵（*matrix of relation*）。

定义7.2.5 设$R \subseteq A \times B$，$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，那么$R$的关系矩阵$M_R$为一$m \times n$矩阵，它的第$i,j$分量$r_{ij}$只取值0或1，而

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当且仅当 } a_i R b_j \\ 0 & \text{当且仅当 } a_i \not{R} b_j \end{cases}$$

例7.2.2中的图7.2.2、 图7.2.3、 图7.2.4、 图7.2.5所示关系的关系矩阵分别是

$$M_{I_A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{\varnothing} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{A\times A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{L_A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

关系R的集合表达式与R的关系矩阵也可以唯一相互确定，因此R的集合表达式、关系图、关系矩阵三者均可以唯一相互确定，并且它们各有各的特点，可以根据不同的需要选用不同的表达方式。

7.3 关 系 的 运 算

A到B的二元关系R是$A\times B$的子集，亦即关系是序偶的集合。故在同一集合上的关系，可以进行集合的所有运算。

定义 设R是A到B的二元关系。

（1） 用xRy表示 $\langle x, y\rangle \in R$，意为$x$，$y$有$R$关系（为使可读性好，我们将分场合使用这两种表达方式中的某一种）。

（2） 由$\langle x, y\rangle \in R$的所有$x$组成的集合称为关系$R$的定义域（*domain*）记作$Dom\ R$， 即

$$Dom\ R=\{x|x\in A\wedge\exists\ y(y\in B\wedge\langle x, y\rangle\in R)\}$$

（3）由 $\langle x, y\rangle \in R$的所有$y$组成的集合称为关系$R$的值域（*range*），记作$Ran\ R$，即

$$Ran\ R=\{y|y\in B\wedge \exists x(x\in A\wedge \langle x, y\rangle \in R)\}$$

（4）R的定义域和值域的并集称为R的域，记作$Fld\ R$。形式化表示为：

$$Fld\ R=Dom\ R\cup Ran\ R$$

**一般地，若R是A到B的二元关系，则有

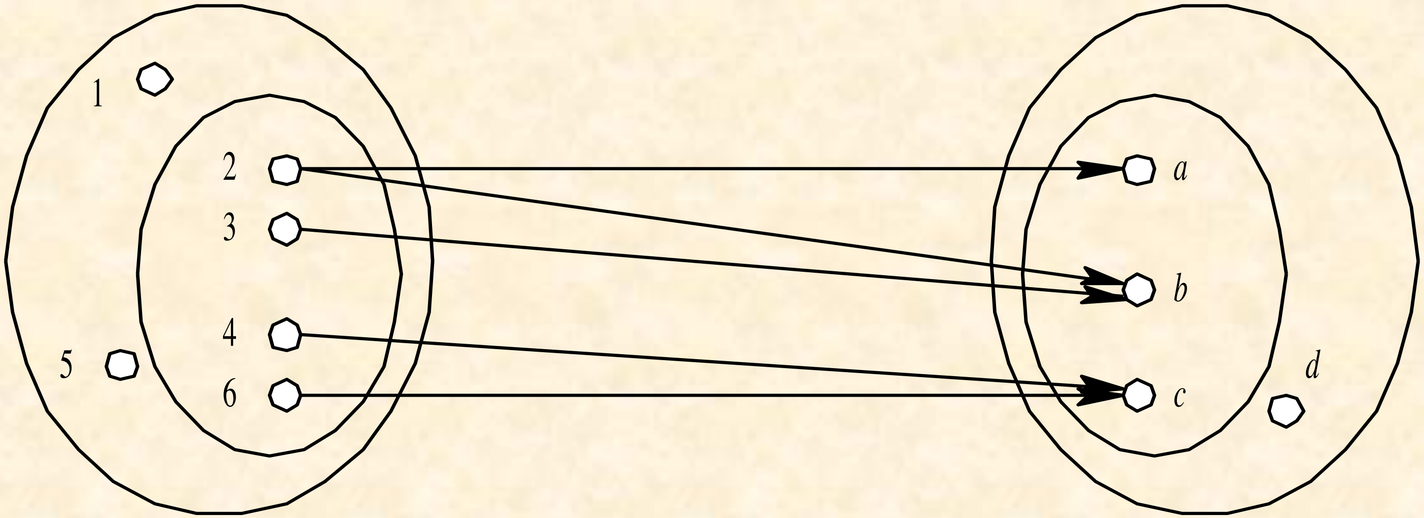
$$Dom\ R\subseteq A,\ Ran\ R\subseteq B。$$

【例】 设$A=\{1，2，3，4，5，6\}$，

$B=\{a，b，c，d\}$，则

$R=\{\langle 2，a\rangle，\langle 2，b\rangle，\langle 3，b\rangle，$

$\langle 4，c\rangle，\langle 6，c\rangle\}$



那么如图所示：

Dom R＝｛2，3，4，6｝，*Ran R*=｛*a*，*b*，*c*｝

Fld R=｛2，3，4，6，*a*，*b*，*c*｝

各箭头分别表示2*Ra*，2*Rb*，3*Rb*，4*Rc*，6*Rc*。

一、关系的运算

定义7.3.1 设R和S为A到B的二元关系，其并、交、差、对称差、补运算定义如下：

$$R\cup S=\{\langle x, y\rangle \mid x\,R\,y \vee x\,S\,y\}$$

$$R\cap S=\{\langle x, y\rangle \mid x\,R\,y\wedge x\,S\,y\}$$

$$R-S=\{\langle x, y\rangle \mid x\,R\,y\wedge \neg\, x\,S\,y\}$$

$$\sim R=A\times B-R=\{\langle x, y\rangle \mid \neg\, x\,R\,y\}$$

$$R\oplus S=(R\cup S)-(R\cap S)$$

【例7.3.1】 设$A=\{1, 2, 3, 4\}$，若$R=\{\langle x, y\rangle \mid (x-y)/2$是整数$, x, y\in A\}$，$S=\{\langle x, y\rangle \mid (x-y)/3$是正整数$, x, y\in A\}$，求$R\cup S$，$R\cap S$，$S-R$，$\sim R$，$R\oplus S$。

解

$R=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,4\rangle\}$

$S=\{\langle 4,1\rangle\}$

$R\cup S=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,1\rangle\}$

$R \cap S = \Phi$

$S - R = S = \{\langle 4,1 \rangle\}$

$\sim R = A \times A - R = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,3 \rangle\}$

$R \oplus S = (R \cup S) - (R \cap S)$

$= \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 4,1 \rangle\}$

定义7.3.2 设R是A到B的关系，R的**逆关系**或**逆**（*converse*）是B到A的关系，记为R^{-1}，规定

$$R^{-1} = \{ \langle y, x\rangle \mid x \in A, y \in B , x\,R\,y\}$$

由定义很显然，对任意$x \in A, y \in B$，有

$$x\,R\,y \Leftrightarrow y\,R^{-1}x$$

$$M_{R^{-1}} = M'_R \qquad \text{M}'\text{表示转置矩阵}$$

例如：$I_A^{-1}=I_A$，

"≤"的逆是"≥"，

$\Phi^{-1}= \Phi$,

$(A\times B)^{-1}=B\times A$

定义7.3.3 设R是A到B的二元关系，S是B到C的二元关系 ，$R \circ S$称为R与S的**复合，** 是A到C的关系，定义为：

$$R \circ S = \{ <x, z> \mid x \in A \land z \in C \land \exists y \, (y \in B \land xRy \land ySz) \}$$

【例7.3.3】 设R表示父子关系，即 $\langle x, y \rangle \in R$说明$x$是$y$的父亲，$R \circ R$就表示祖孙关系。

【例7.3.5】 设$A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{2, 4, 6\}$，$C=\{1, 3, 5\}$，$R\subseteq A\times B$，$S\subseteq B\times C$，且

$R=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 5, 6\rangle\}$，

$S=\{\langle 2, 1\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 6, 3\rangle\}$

$R\circ S=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 5, 3\rangle\}\subseteq A\times C$

用图表示$R\circ S$，如图7.3.1所示。

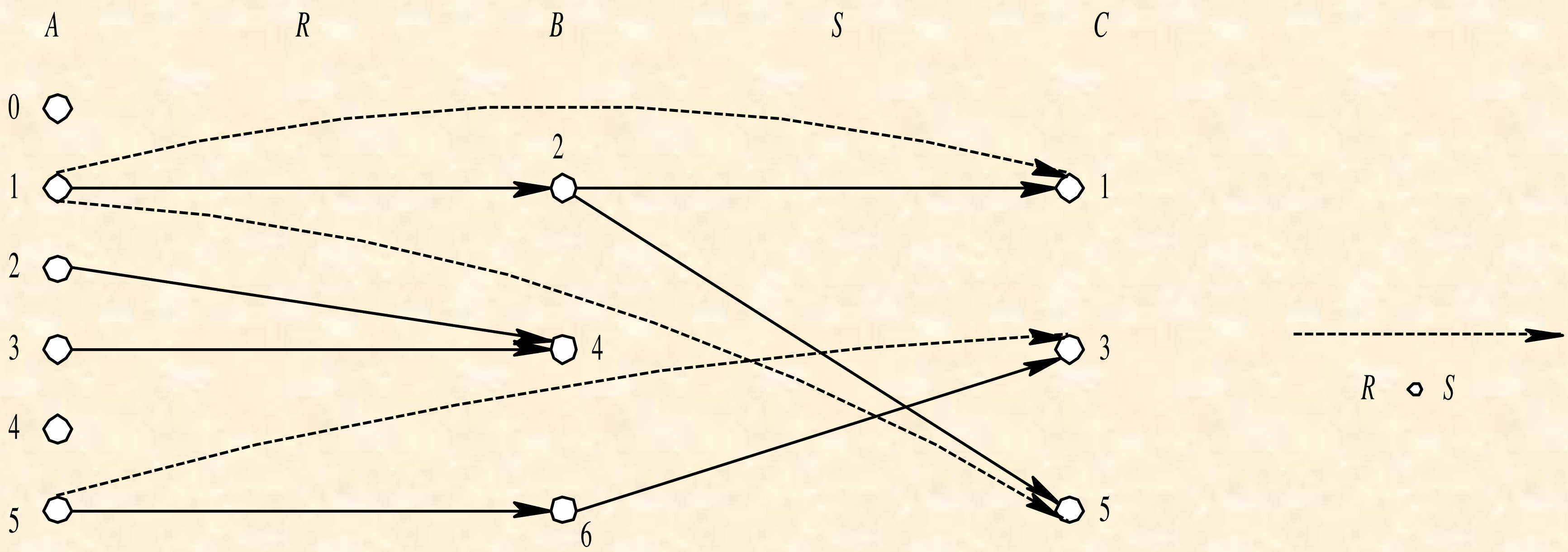


图 7.3.1

【例7.3.6】 设集合A＝{0, 1, 2, 3, 4, 5}，R，S均为A上的二元关系，且

$R = \{\langle x, y\rangle \mid x+y=4\} = \{\langle 0, 4\rangle, \langle 4, 0\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

$S = \{\langle x, y\rangle \mid y-x=1\} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 5\rangle\}$

求 $R\circ S$， $S\circ R$， $R\circ R$， $S\circ S$， $(R\circ S)\circ R$，$R\circ(S\circ R)$。

解 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x+y=4\}=\{\langle 0,4\rangle,\langle 4,0\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$S=\{\langle x,y\rangle \mid y-x=1\}=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,5\rangle\}$

$R\circ S=\{\langle 4,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 0,5\rangle\}$

$=\{\langle x,z\rangle \mid x+z=5, x<=4\}$

$S=\{\langle y,z\rangle \mid z-y=1\}$，

x+y=4和z−y=1组成方程组

$S\circ R=\{\langle 0,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,0\rangle\}$

$=\{\langle x,z\rangle \mid x+z=3\}$

$R\circ R=\{\langle 0,0\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$=\{\langle x,z\rangle \mid x-z=0,\ x<=4\}$

$S\circ S=\{\langle 0,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,5\rangle\}=\{\langle x,z\rangle \mid z-x=2\}$

$(R\circ S)\circ R=\{\langle 4,3\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$R\circ(S\circ R)=\{\langle 4,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,0\rangle\}$

从上例已可看出，一般地 $R\circ S\neq S\circ R$。

练习：(1)设定义在$A=\{1,2,3\}$中的二元关系：

$R_1=\{<1,2>,<2,3>,<1,1>\}$，$R_2=\{<2,2>,<2,3>,<1,3>\}$，

试求$R_1 \cup R_2$，$R_1 \cap R_2$，$R_1 - R_2$，$\sim R_1$，$R_1 \oplus R_2$，$R_1 \circ R_2$

(2)设关系R、S的关系矩阵为：

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

试求$R \cup S$，$R \cap S$，$R-S$，$\sim R$，$R \oplus S$，$R \circ S$的关系矩阵

3．限制与像

定义 7.9 设 R 为二元关系, A 是集合

（1）R 在 A 上的限制记作 $R \restriction A$，其中

$R \restriction A=\{<x,y> \mid xRy \wedge x \in A\}$

（2）A 在 R 下的像记作 $R[A]$，其中

$R[A]=\mathrm{ran}(R \restriction A)$

说明:

- R 在 A 上的限制 $R \restriction A$ 是 R 的子关系，即 $R \restriction A \subseteq R$
- 而 A 在 R 下的像 $R[A]$是 $\mathrm{ran}R$ 的子集，即 $R[A] \subseteq \mathrm{ran}R$

实例

例　设 $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$，则

$$R\restriction\{1\}=\{<1,2>,<1,3>\}$$

$$R\restriction\varnothing=\varnothing$$

$$R\restriction\{2,3\}=\{<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$$

$$R[\{1\}]=\{2,3\}$$

$$R[\varnothing]=\varnothing$$

$$R[\{3\}]=\{2\}$$

二、关系运算的性质

定理 7.1 设 F 是任意的关系，则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证（1）任取$\langle x,y\rangle$，由逆的定义有

$$\langle x,y\rangle\in(F^{-1})^{-1}\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in F^{-1}\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in F.$$

所以有$(F^{-1})^{-1}=F$.

（2）任取 x,

$$x\in\mathrm{dom}F^{-1}\Leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle\in F^{-1})\Leftrightarrow\exists y(\langle y,x\rangle\in F)\Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F$$

所以有 $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$.

同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

定理 7.2 设 F, G, H 是任意的关系，则

$$(1)\ (F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$$

$$(2)\ (F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$$

证 (1) 任取 $<x,y>$,

$$<x,y>\in(F\circ G)\circ H$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\circ G \land <t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(\exists s\,(<x,s>\in F \land <s,t>\in G) \land <t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,s>\in F \land <s,t>\in G \land <t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists s\,(<x,s>\in F \land \exists t\,(<s,t>\in G \land <t,y>\in H))$$

$$\Leftrightarrow \exists s\,(<x,s>\in F \land <s,y>\in G\circ H)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ(G\circ H)$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

命题演算法：

任取 x，

$$x\in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$$

$$x\in Y \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in X$$

或者

$$x\in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\in Y$$

（2）任取$<x,y>$,

$$<x,y> \in (F \circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <y,x> \in F \circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t\ (<y,t> \in F \land <t,x> \in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\ (<x,t> \in G^{-1} \land <t,y> \in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in G^{-1} \circ F^{-1}$$

所以 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

定理 7.3 设 R 为 A 上的关系，则

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

证 任取 $<x,y>$

$<x,y> \in R \circ I_A$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in R \wedge <t,y> \in I_A)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in R \wedge t=y \wedge y \in A)$

$\Leftrightarrow <x,y> \in R$

定理7.3.2 设I_A， I_B为集合A，B上的恒等关系，$R \subseteq A \times B$，那么

（1） $I_A \circ R = R \circ I_B = R$

（2） $\Phi \circ R = R \circ \Phi = \Phi$

证明（1）为证 $I_A \circ R \subseteq R$，设

$\forall \langle x, y \rangle \in I_A \circ R$。

$\langle x, y \rangle \in I_A \circ R \Leftrightarrow \exists u(u \in A \land \langle x, u \rangle \in I_A \land \langle u, y \rangle \in R)$

$\Rightarrow \exists u(u \in A \land x = u \land \langle u, y \rangle \in R)$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$

所以 $I_A \circ R \subseteq R$得证。

$\forall \langle x, y \rangle \in R$， $\langle x, x \rangle \in I_A \land \langle x, y \rangle \in R$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A \circ R$

所以 $R \subseteq I_A \circ R$得证。

（2) 显然$\Phi \subseteq \Phi\circ R$， 下证$\Phi\circ R \subseteq \Phi$。

设 $\forall \langle x, y\rangle \in \Phi\circ R$。

$\langle x, y\rangle \in \Phi\circ R \Rightarrow \exists u(u\in A \wedge \langle x, u\rangle \in \Phi \wedge \langle u, y\rangle \in R)$ 前件为假

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in \Phi$

命题的前件为假，整个蕴含式为真，所以

$\Phi\circ R \subseteq \Phi$。因此$\Phi\circ R=\Phi$。 同理可证$R\circ\Phi=\Phi$。

定理 7.4 设 F, G, H 是任意的关系，则

(1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G \cup F\circ H$

(2) $(G \cup H)\circ F = G\circ F \cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$ 不是等号

(4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$

只证 (3)

不相等反例：

F={<2, 3>, <2, 4>}

G={<3, 5>}

H={<4, 5>}

$F\circ(G\cap H)=\emptyset$

$F\circ G\cap F\circ H=\{\langle 2,5\rangle\}$

证 (3) 任取$<x,y>$,

$$<x,y> \in F\circ(G\cap H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in F \land <t,y> \in G\cap H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in F \land <t,y> \in G \land <t,y> \in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,((<x,t> \in F \land <t,y> \in G) \land (<x,t> \in F \land <t,y> \in H))$$

不是等价，因为前后的t可能不同

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,t> \in F \land <t,y> \in G) \land \exists t\,(<x,t> \in F \land <t,y> \in H)$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F\circ G \land <x,y> \in F\circ H$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F\circ G\cap F\circ H$$

所以有 $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$

定理 7.4 的结论可以推广到有限多个关系

$$R\circ(R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n) = R\circ R_1 \cup R\circ R_2 \cup \ldots \cup R\circ R_n$$

$$(R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n)\circ R = R_1\circ R \cup R_2\circ R \cup \ldots \cup R_n\circ R$$

$$R\circ(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n) \subseteq R\circ R_1 \cap R\circ R_2 \cap \ldots \cap R\circ R_n$$

$$(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n)\circ R \subseteq R_1\circ R \cap R_2\circ R \cap \ldots \cap R_n\circ R$$

定理 7.5 设 F 为关系, A, B 为集合, 则

(1) $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$

(2) $F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$

(3) $F \upharpoonright (A \cap B) = F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B$

(4) $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$ 不是等号

证 只证(1)和(4).

(1) 任取$<x,y>$

$$<x,y> \in F \upharpoonright (A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \land x \in A \cup B$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \land (x \in A \lor x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (<x,y> \in F \land x \in A) \lor (<x,y> \in F \land x \in B)$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \upharpoonright A \lor <x,y> \in F \upharpoonright B$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$$

所以有 $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$.

(4) 任取 y,

$$y \in F[A \cap B]$$

$$\Leftrightarrow \exists x\,(<x,y> \in F \wedge x \in A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\,(<x,y> \in F \wedge x \in A \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\,((<x,y> \in F \wedge x \in A) \wedge (<x,y> \in F \wedge x \in B))$$

$$\Rightarrow \exists x\,(<x,y> \in F \wedge x \in A) \wedge \exists x\,(<x,y> \in F \wedge x \in B)$$

不是等价，因为前后的x可能不同

$$\Leftrightarrow y \in F[A] \wedge y \in F[B]$$

$$\Leftrightarrow y \in F[A] \cap F[B]$$

所以有 $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$.

例子：A={2,3}， B = {2,4}，F = {<2,3>,<3,1>,<4,1>,<5,6>}

$F[A \cap B] = \{3\}$， $F[A] \cap F[B] = \{3,1\}$。

三、A 上关系的幂运算

定义 7.10

设 R 为 A 上的关系, n 为自然数, 则 R 的 n 次幂定义为:

（1） $R^0=\{<x,x>|x\in A\}=I_A$

（2） $R^{n+1}=R^n\circ R$

注意:

- 对于 A 上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1{}^0=R_2{}^0=I_A$
- 对于 A 上的任何关系 R 都有 $R^1=R$

关于复合运算的关系矩阵有下列结果。

设A是有限集合，$|A|=n$。关系R和S都是A上的关系，R和S的关系矩阵$\boldsymbol{M}_R=[r_{ij}]$和$\boldsymbol{M}_S=[s_{ij}]$都是$n\times n$的方阵。于是$R$与$S$的复合$R\circ S$的关系矩阵可以用下述的矩阵逻辑乘计算(类似于矩阵乘法)得到，

记作$\boldsymbol{M}_{R\circ S}=\boldsymbol{M}_R\cdot\boldsymbol{M}_S=[t_{ij}]\ n\times n$，其各分量$t_{ij}$可采用下式求取：

$$t_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n} r_{ik}s_{kj} \qquad (i=1,2,\ldots,\ n;\ j=1,2,\ldots,n)$$

这里，$\bigvee\limits_{k=1}^{n} f(k)=f(1)\vee f(2)\vee\ldots\vee f(n)$。$\vee$为真值析取运算。$\cdot$乘与普通矩阵乘的不同在于，各分量计算中用$\bigvee\limits_{k=1}^{n}$ 代替$\sum\limits_{k=1}^{n}$。

例如，例7.3.6中$R\circ S$的关系矩阵为

$$M_{R\circ S}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

【例7.3.7】 设$A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$， $R=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

解$R^2=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

$R^3=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

$R^4=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}=R^2$

R、R^2、R^3、R^4的关系图如图7.3.2所示。

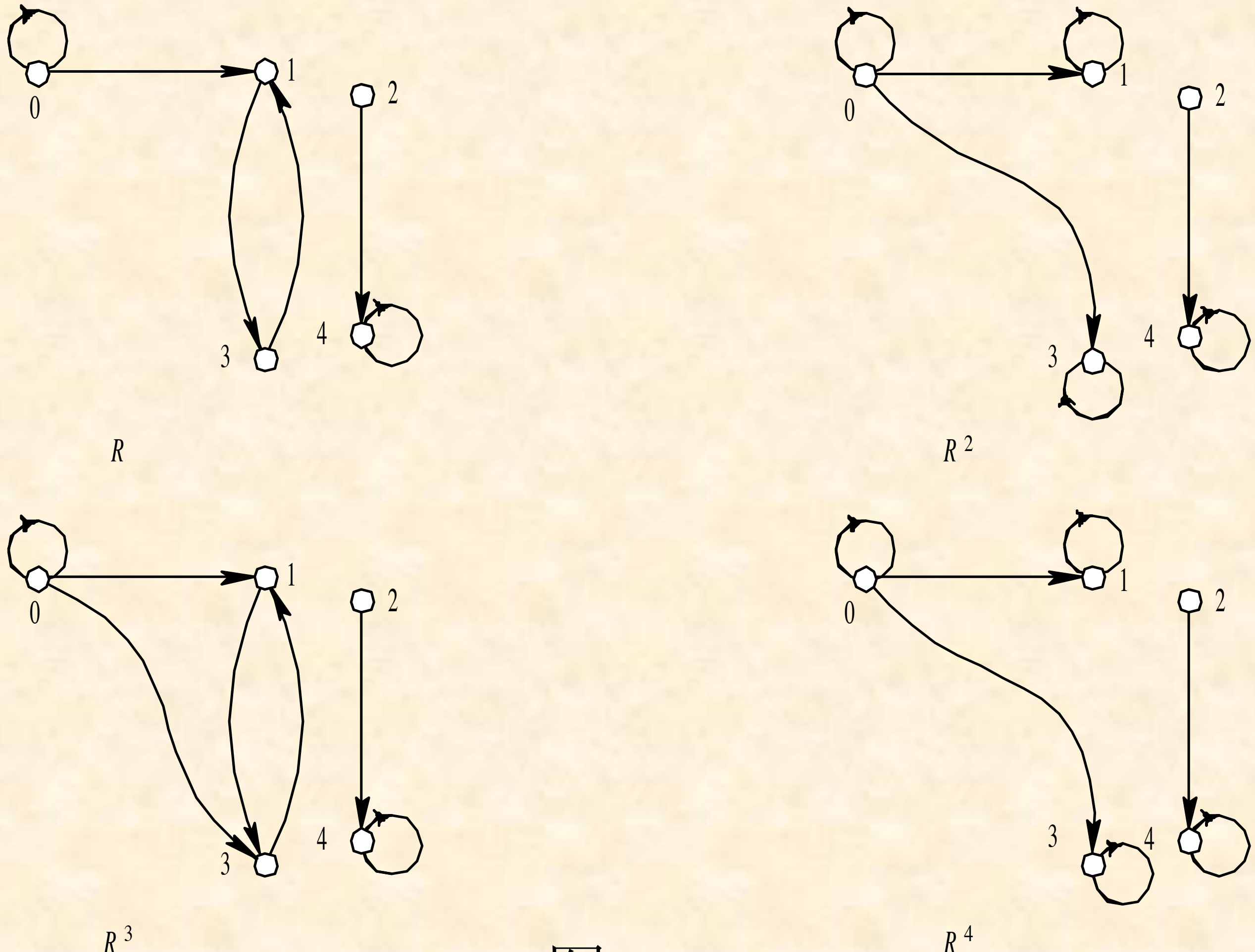


图 7.3.2

R、R^2、R^3、R^4所对应的关系矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$M^2=M\cdot M=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$M^3=M^2\cdot M=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$M^4=M^3\cdot M=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=M^2$$

练习　设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$,

求 R 的各次幂，分别用矩阵和关系图表示.

解　R 的关系矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则 R^2 的关系矩阵分别是

$$M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

同理 R^3 和 R^4 的矩阵是:

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此 $M^4=M^2$, 即 $R^4=R^2$. 因此可以得到

$$R^2=R^4=R^6=\ldots, \quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

而 R^0, 即 I_A 的关系矩阵是

$$M^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R^6 &= R^5 \circ R \\ &= (R^4 \circ R) \circ \mathrm{R} \\ &= (R^2 \circ R) \circ \mathrm{R} \\ &= R^3 \circ R \\ &= R^4 \end{aligned}}$$

用关系图的方法得到 $R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots$ 的关系图如下图所示.

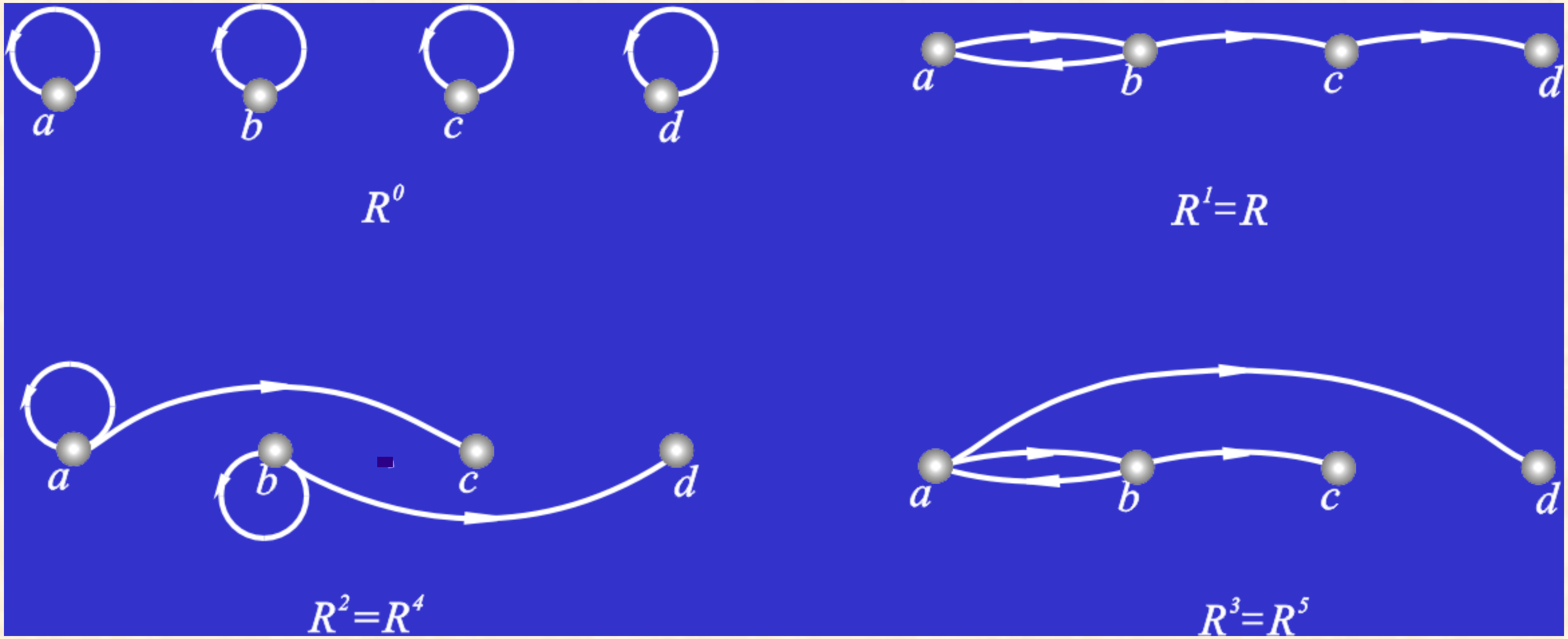


图3

对于任意自然数k，R^k都是A上的关系，都是$A\times A$的子集

四、幂运算的性质.

定理 7.6 设 A 为 n 元集, R 是 A 上的关系,

则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证 R 为 A 上的关系,

由于$|A|=n$, A 上的不同关系只有 2^{n^2} 个.

当列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, R^{2^{n^2}}, \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s=R^t$.

R^n满足下列性质。

定理7.7 设R为A上二元关系，m，n为自然数，那么

(1) $R^{n+1}=R^n\circ R=R\circ R^n=R^m\circ R^{n-m+1}$

(2) $R^m\circ R^n=R^{m+n}$

(3) $(R^m)^n=R^{mn}$

(4) $(R^{-1})^n=(R^n)^{-1}$

以下给出证明（2）和（3）。

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的 $m \in N$,施归纳于 n. $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

若 n=0, 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1},$$

所以对一切 $m,n \in N$ 有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

(2) 对于任意给定的 $m \in N$,施归纳于 n. $(R^m)^n = R^{mn}$

若 n=0, 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^m = R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切 $m,n \in N$ 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

定理 7.8 设 R 是 A 上的关系,

若存在自然数 s,t $(s<t)$ 使得 $R^s=R^t$, 则

(1) 对任何 $k\in N$ 有 $R^{s+k}=R^{t+k}$

(2) 对任何 $k,i\in N$ 有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$, 其中 $p=t-s$

(3) 令 $S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q\in N$ 有 $R^q\in S$

证 (1) $R^{s+k}=R^s\circ R^k=R^t\circ R^k=R^{t+k}$

(2) 对 k 归纳.

若 k=0, 则有 $R^{s+0p+i}=R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$, 其中 $p=t-s$, 则

$$R^{s+(k+1)p+i}=R^{s+kp+i+p}=R^{s+kp+i}\circ R^p$$
$$=R^{s+i}\circ R^p=R^{s+p+i}=R^{s+t-s+i}=R^{t+i}=R^{s+i}$$

由归纳法命题得证.

(3) 任取 $q\in N$, 若 $q<t$, 显然有 $R^q\in S$, 若 $q\geq t$,

则存在自然数 k 和 i 使得 $q=s+kp+i$, 其中 p=t-s, $0\leq i\leq p-1$.

于是

其实就是q-s除以(t-s)，整数商为k，余数为i

$$R^q=R^{s+kp+i}=R^{s+i}$$

而 $s+i\leq s+p-1=s+t-s-1=t-1$

这就证明了 $R^q\in S$.

课后作业

第七章习题

- 3
- 11
- 14
- 17
- 19