1.(1)首先可以直接写出矩阵的二次型矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

使用初等行变换可以得到它的上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

显然矩阵的秩 $R = 3$

(2)首先可以直接写出矩阵的二次型矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

使用初等行变换可以得到它的上三角矩阵

$$r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{33}{10} \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{33}{10} \end{pmatrix} = 4$$

2.(1)配方得到一组标准型（不唯一）

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 \\ & = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\ & = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 - \frac{5}{3}(x_3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 + \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

得到变换矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)配方得到一组标准型（不唯一）

$$\begin{aligned}
&x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \\
&= \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3\right) - \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3\right) - \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

$$f = y_1y_2 - y_3^2 = \left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2\right)^2 - y_3^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ z_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 = x_2 \\ z_3 = y_3 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

得到变换矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

或者可以通过假设

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$f = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = y_1^2 - y_2^2 + (y_1 + y_3)^2 - y_1^2 - y_3^2$$

$$\begin{cases} z_1 = y_2 \\ z_2 = y_1 + y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.不唯一，举个例子

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \underset{r_2-2r_1}{\overset{c_2-2c_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3-2r_1}{\overset{c_3-2c_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3-\frac{2}{3}r_2}{\overset{c_3-\frac{2}{3}c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ & 1 & -\frac{2}{3} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

标准型为

$$f = y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{1}{3}y_3^2$$

合同变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ & 1 & -\frac{2}{3} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

4.计算过程略，可以参照以前作业答案给出的矩阵特征值和特征向量的求法以及正交化过程。这里直接给结果

标准型

$$f = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$$

对应的正交变换矩阵为

是正定二次型

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

5.(1)该二次型写成矩阵形式，通过其顺序主子式判断是否正定

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = |2| = 2 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 11 > 0$$

$$D_3 = |A| = 38 > 0$$

正定

(2) 该二次型写成矩阵形式，通过其顺序主子式判断是否正定

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 9 & -6 \\ 1 & -3 & -6 & 19 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = |1| = 1 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 9 & -6 \\ 1 & -3 & -6 & 19 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

是正定二次型

6.(1)写出二次型的矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 2 & -t & \frac{1}{2} \\ -t & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2-t^2>0 \\ \frac{7}{4}-t^2>0 \end{cases} \Rightarrow t\in\left(-\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

(2)通过配方将二次型化为标准型

$$y=Cx=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & & & \\ & 1 & a_2 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & & & & 1 \end{pmatrix}x$$

$$f=\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

当C为满秩矩阵时，可以得到二次型矩阵与单位阵E合同（这是正定二次型的充要条件）。

$$r(C)=r\begin{pmatrix} 1 & a_1 & & & \\ & 1 & a_2 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & & & & 1 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 1 & a_1 & & & \\ & 1 & a_2 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} \\ & -a_1a_n & & & 1 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-(-1)^n\prod_{i=1}^{n}a_i \end{pmatrix}$$

那么只需满足

$$\prod_{i=1}^{n}a_i\neq(-1)^n$$

7.(1) A 正定则存在正交矩阵U使得 $A=U^{-1}\Lambda U$,$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ 其中特征值 $\lambda_i>0$。$A^{-1}=U^{-1}\Lambda^{-1}U$，$\Lambda^{-1}=diag\left(\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\ldots,\lambda_n^{-1}\right)$ 其中对角阵元素 $\lambda_i^{-1}>0$。A^{-1}正定。

(2) $kA=U^{-1}(k\Lambda)U$，$k\Lambda=diag(k\lambda_1,k\lambda_2,\ldots,k\lambda_n)$ 其中对角阵元素$k\lambda_i>0$。kA正定。

(3) $2A+E=2U^{-1}\Lambda U+U^{-1}U=U^{-1}\left(2\Lambda+E\right)U$

$2\Lambda+E=diag\left(2\lambda_1+1,2\lambda_2+1,\ldots,2\lambda_n+1\right)$其中对角阵元素$2\lambda_i+1>0$。$2A+E$ 正定

8.正定矩阵，存在正交矩阵P使得$P^{-1}AP=\Lambda=diag\left(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\right)$。其中特征值$\lambda_i>0$

$$\left|A+kE\right|=\left|P^{-1}\left(A+kE\right)P\right|=\left|\Lambda+kE\right|=\prod_{i=1}^{n}\left(k+\lambda_i\right)>k^n$$

9.

充分性：显然对任意n维列向量x有$x^TA^TAx=\left\langle Ax,Ax\right\rangle\geq 0$，当且仅当$Ax=0$时等号成立。因为$r\left(A\right)=n$，$A$为列满秩矩阵，$Ax=0$不存在非零解。对任意$n$维非零列向量$x$有$x^TA^TAx=\left\langle Ax,Ax\right\rangle>0$。$A^TA$正定

必要性：A^TA正定则对任意n维非零列向量x有$x^TA^TAx=\left\langle Ax,Ax\right\rangle>0$。假设$r\left(A\right)<n$则必然存在$n$维非零列向量$x$使得$Ax=0$, 与$x^TA^TAx=\left\langle Ax,Ax\right\rangle>0$矛盾, 因此$r\left(A\right)=n$

10.使用配方法得到

$$y=Ax$$

对应的标准型和二次型$f=\sum_{i=1}^{n}y_i^2=y^TEy=x^TA^TAx$。之后参照第 9 题结论即可。

11.二次型矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}$$

经过正交变化得到的对角阵上的元素$0,1,2$为三个特征值，分别带入特征方程$\left|A-\lambda E\right|$得到

$$\begin{cases}2ab-a^2-b^2=0\\ 2ab=0 & \Rightarrow a=b=0\\ 2ab+a^2+b^2=0\end{cases}$$

12.(1)

$$P^T DP=\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -C^T A^{-T} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & -A^{-T}C \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B-C^T A^{-T}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & -A^{-T}C \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-C^T A^{-T}C \end{pmatrix}$$

(2)根据题设，对于任意非零矢量$x=\begin{pmatrix} x_m \\ x_n \end{pmatrix}$有

$$y^T Dy=x^T P^T DPx=x^T P^{-1}DPx=x_m^T Ax_m+x_n^T\left(B-C^T A^{-T}C\right)x_n>0$$

不妨设$x_m=0,x_n\neq 0$，则可以得到对于任意非零x_n都有$x_n^T\left(B-C^T A^{-T}C\right)x_n>0$。正定。

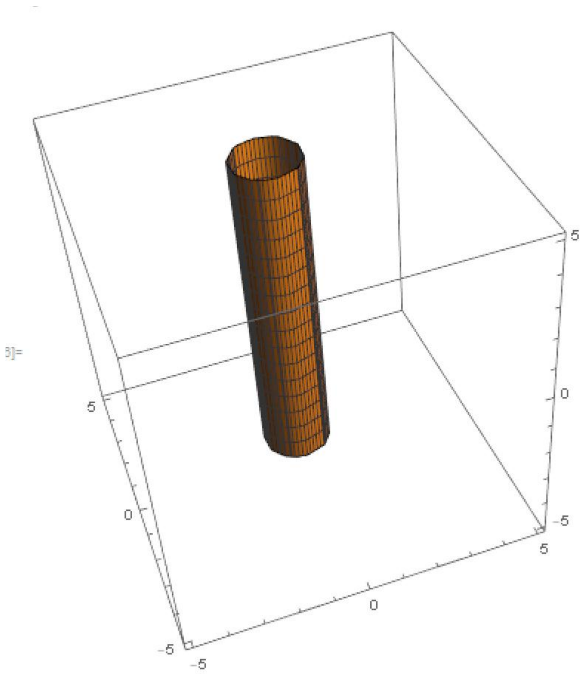
13.(1)二次型矩阵的秩

$$r\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{24}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & c-3 \end{pmatrix}$$

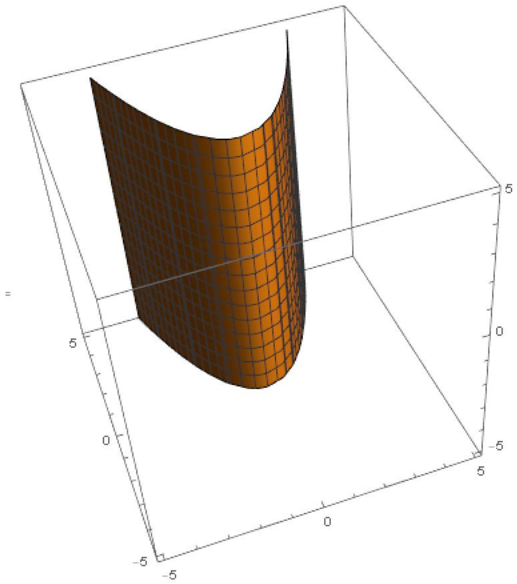
当$c=3$ 时$r=2$。

(2)通过正交变换将二次型化为标准型（也就是求特征值）$f=4y_2^2+9y_3^2=1$。这是典型的平面上内的椭圆方程，三维空间对应椭圆柱面。

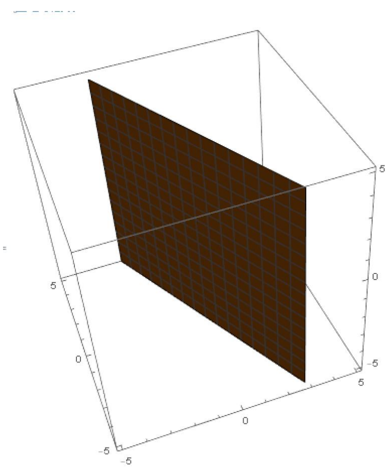
14.(1)圆，圆柱面



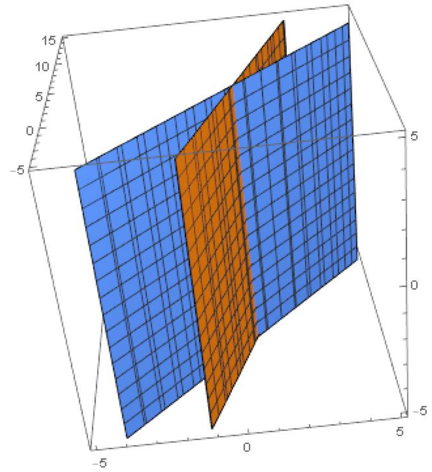
(2)抛物线，抛物柱面



(3)直线，平面



(4)两条直线交点，两平面交线



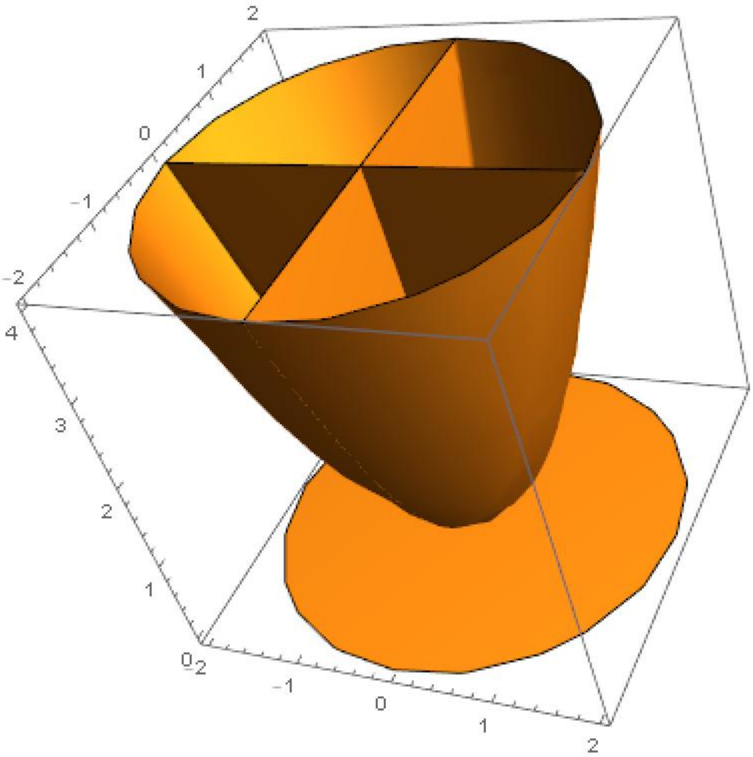
15.曲线消去 x 得到 $3y^2 - z^2 = 16$

16.yz 平面上的投影为抛物线 $z = y^2$ 与直线 $z = 4$ 围成的图形

xz 平面上的投影为抛物线 $z = x^2$ 与直线 $z = 4$ 围成的图形

xy 平面上的投影为圆 $x^2 + y^2 = 4$

Out[19]=



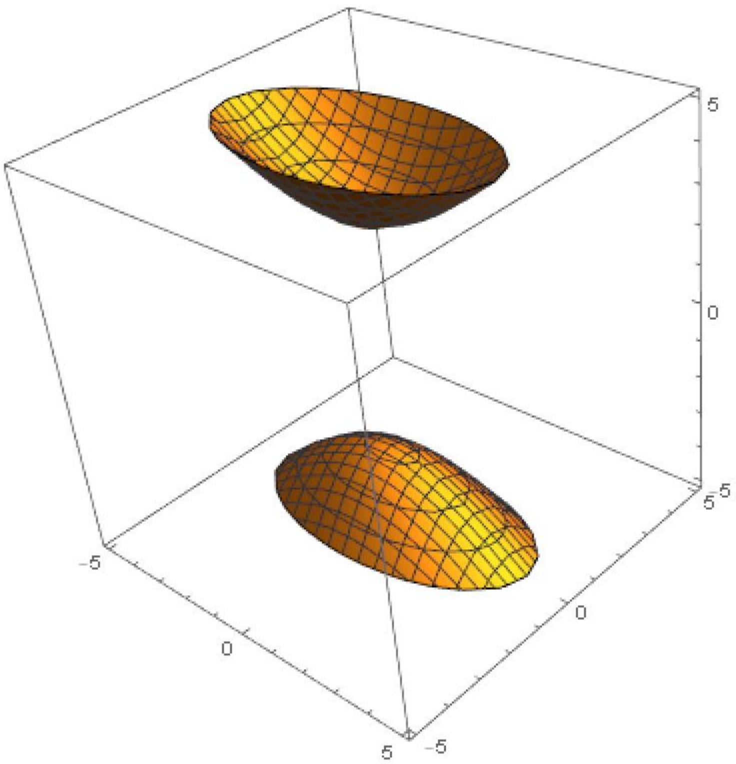
17.平面方程代入球面方程得到

$$x^2+y^2+(1-x)^2-9=2x^2-2x+y^2-8=0$$

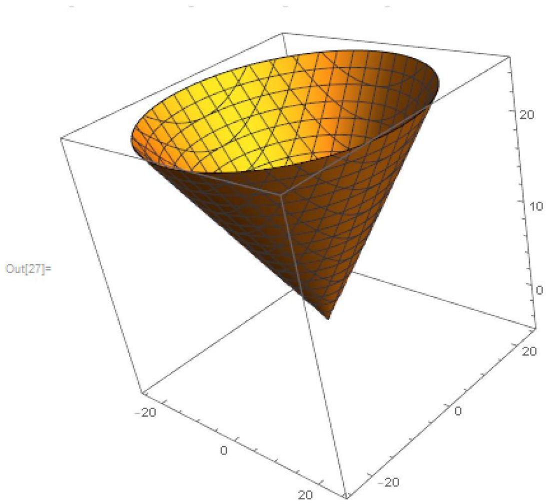
投影方程为

$$\begin{cases}2x^2-2x+y^2-8=0\\ z=0\end{cases}$$

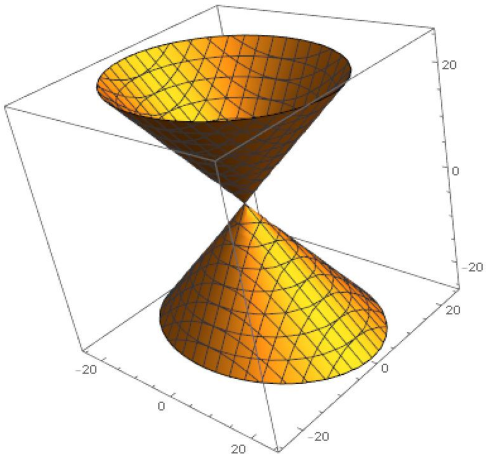
18.这题答案对二次曲面的命名是参考的 wikipedia 的总结
（https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BA%8C%E6%AC%A1%E6%9B%B2%E9%9D%A2）
(1)双叶双曲面（抛物线绕 Z 轴旋转后沿着 x 方向放大）



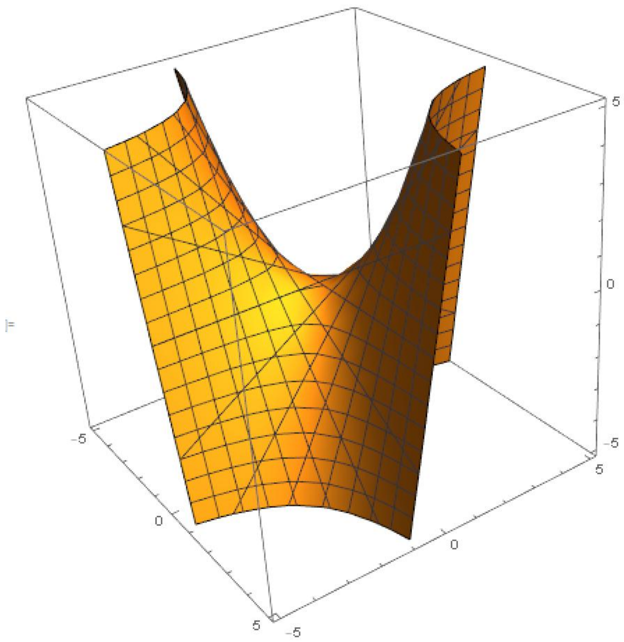
(2)圆锥



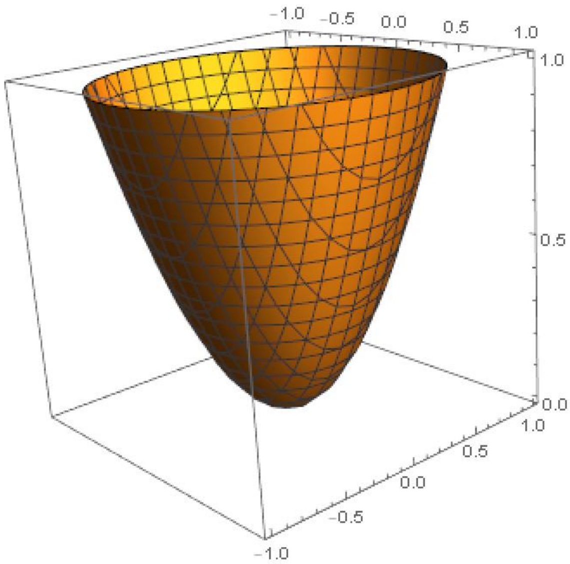
(3)椭圆锥面（圆锥面沿着 x 方向放大）



(4)双曲抛物面/马鞍面。($z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ 的曲面经过绕 z 轴转 $\pi/4$ 并且 $a=b=\sqrt{2}$ 时的特殊形式)



(5)圆抛物面



19.写出直线方程

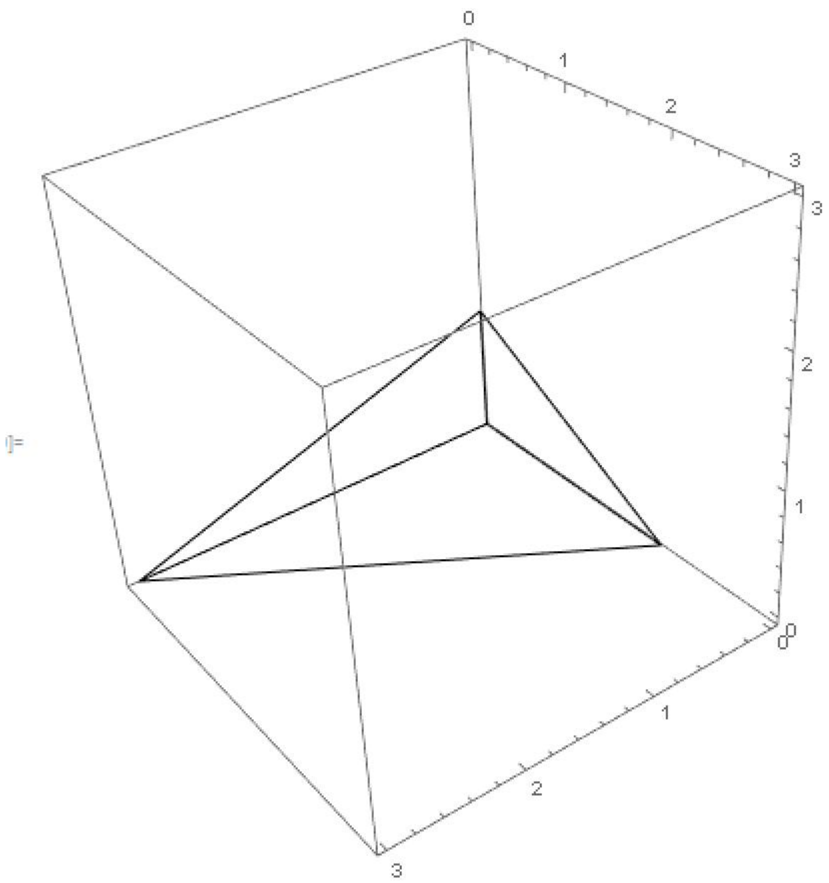
$$\begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$$

绕 z 旋转得到

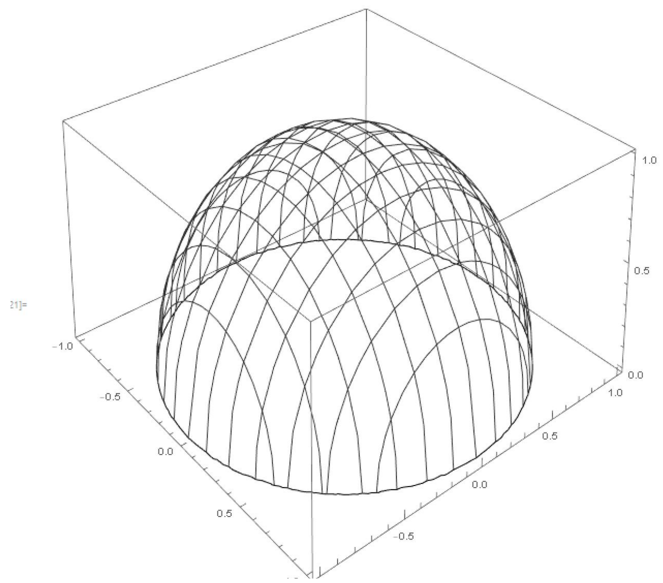
$$x^2+y^2=1^2+z^2 \Rightarrow x^2+y^2-z^2=1$$

20.这题判断过程比较简单，略。只给图

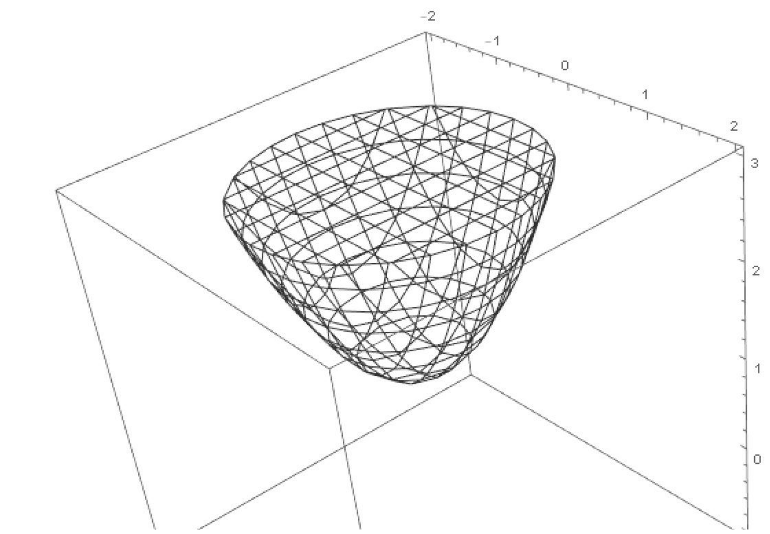
(1)



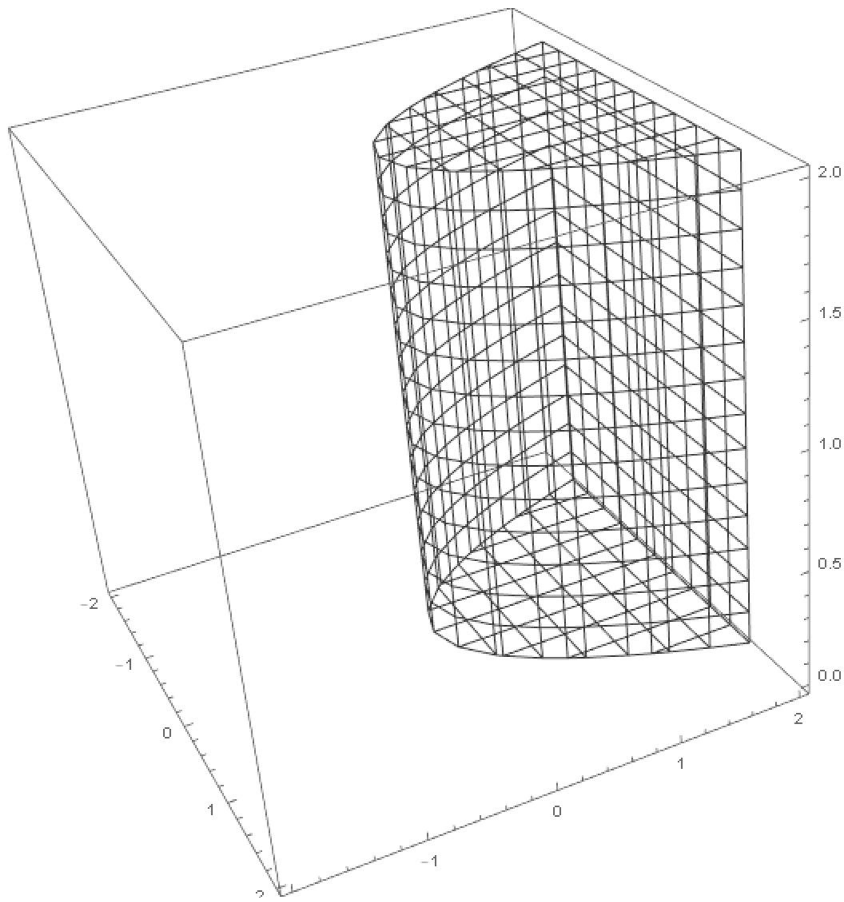
(2)



(3)



(4)



21. B　C　B　D　C

22.

(1)

1)F　全不为零→不全为零

2)F　反例：半正定矩阵
3)F　5.(2)就是反例
4)T　正交变换到对角矩阵就可以证明
(2)
1)T　这是正定矩阵的定义
2)T　正交变换到对角矩阵就可以轻易证明
3)T　充要条件（Sylvester 准则）
4)T　利用第 9.题的结论可以直接证明
(3)
1)T　标准型不唯一
2)F　不能这么说，反例可以参看 2.题
3)F　不唯一
4)F　不考虑顺序的情况下，特征值是唯一的，对应的标准型也是唯一的。
(4)
1)F　不一定，合同未必相似
2)T　等价只要求存在两个可逆方阵使得 $A=PBQ$。取 $P=Q^T$ 即可
3)T　$x^T Ax = x^T P^T BPx = y^T By$　x, y 取值的任意性可以证明
4)T　由于合同关系具有传递性，所以 B 与 E 合同。B 与 E 合同是 B 正定的充要条件。