1.(1)$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 7 & 8\end{pmatrix}$ (2)$\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ (3)$\begin{pmatrix}18 & 18\\ 49 & 10\end{pmatrix}$

2.$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

3.(1)$\begin{pmatrix}35\\ 6\\ 49\end{pmatrix}$

(2)$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 12 & 8 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

(3)16

(4)$\begin{pmatrix}k_1a_{11} & k_1a_{12}\\ k_2a_{21} & k_2a_{22}\\ k_3a_{31} & k_3a_{32}\end{pmatrix}$

(5)$\begin{pmatrix}k_1a_{11} & k_2a_{12} & k_3a_{13}\\ k_1a_{21} & k_2a_{22} & k_3a_{23}\end{pmatrix}$

(6)$\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}$

(7)$\sum_i^3\sum_j^3 a_{ij}x_ix_j$

(8)$\begin{pmatrix}k_1^n & & \\ & k_2^n & \\ & & k_3^n\end{pmatrix}$

(9)$\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(10)$\begin{cases} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} & n=2k, \quad k\in N \\ 5^{n-1}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} & n=2k+1, \quad k\in N \end{cases}$

(11)$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -6 & -3 & -6 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -6 & -3 & -6 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(12)令 $A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则有$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E+A$，易得 $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n\geq 3$ 时 $A^n=0$ 。考虑 $EA=AE=A$

则原式=$(E+A)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i E^i A^{n-i}=C_n^0 E+C_n^1 A+C_n^2 A^2$

代入以后得到答案$\begin{pmatrix} 1 & na & nb+\frac{n(n-1)}{2}a^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(13) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ & -1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，$A^n=\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ & -1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} & (n=2k+1, k\in N) \\ E & (n=2k, k\in N) \end{cases}$

(14)原式=$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{2n} & \\ & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{2n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25^n & & & \\ & 25^n & & \\ & & 1 & \frac{4^n-1}{3} \\ & & & 4^n \end{pmatrix}$

提示：$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}^{2n}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 4 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 1 & a_n \\ & 4^n \end{pmatrix}$，其中 $a_1=1$，$a_n=1+4a_{n-1}$

4.(1) -1 (2) 1

(3)原式$=\left|\begin{pmatrix} -3 & 4 & & \\ 4 & 3 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & -3 & 2 \end{pmatrix}\right|^{2n}=25^{2n}=5^{4n}$

5.(1)$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2)$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(3)$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(4)$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. $a_{ij}^* = A_{ji}$ ，$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

7.构造增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & & & & 1 & \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

通过对增广矩阵进行初等行变换把左边变成单位阵右边自然就是逆矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ & 1 & & & & \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

8.解法很多，提一种简单的参考思路：

方程可以转写成$A^{-1}\cdot(A-E)\cdot B=E$ 则有$B=(A-E)^{-1}\cdot A$。然后分块求逆就完事了

答案是$B=\begin{pmatrix}\frac{11}{12}&\frac{1}{6}&0&0\\\frac{1}{6}&\frac{7}{6}&0&0\\0&0&2&-1\\0&0&3&-1\end{pmatrix}$

9.解法不唯一，参考思路

$|A|=4$,通过$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$ 改写方程得到$(4E-2A)X=E$。算就完事了。

答案$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

10.提示$A\left(E-C^{-1}B\right)^T C^T=C\left(E-C^{-1}B\right)A^T=(C-B)A^T=E$ 求逆

答案$A=\begin{pmatrix}1&&&\\-2&1&&\\1&-2&1&\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$

11.(1)$\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

(2)原式

$=\left(CB^T-E\right)B^{-T}A^T+\left(A^{-T}B^T\right)^{-1}$

$=CA^T-B^{-T}A^T+B^{-T}A^T$

$=CA^T$

$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

12. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ R=3

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{pmatrix}$分情况讨论 a+b+c=0 R=2; a+b+c≠0, R=3

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x-2 & 0 & 0 \\ 0 & y-6 & 0 \end{pmatrix}$ 分情况讨论 x=2 且 y=6 时 R=1。x=2, y≠6, R=2。x=2, y≠6 时 R=2;
其他情况 R=3
(4)方法不唯一，举个栗子构造非奇异矩阵

$$P = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|PQ| = \left|\begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ B^T & b \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & b-B^TA^{-1}B \end{pmatrix}\right| = b - B^TA^{-1}B$$

完事儿了。

13.(1)16 (2)16 (3)2 (4)1/16

14.$|A+B| = 8|(\alpha+\beta, X, Y, Z)| = 8|A| + 8|B| = 40$

15.略
16.略
17.略

18.略。提示：初等行变换可以用 $A_{m\times n} = P_{m\times m}B_{m\times n}$ 表示

19.$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) = E-A^k = E$

20.反证法，过程略

21.$|M| = |A||B| \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$

22.答案不唯一，例子：$R\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} E & B \\ CA^{-1} & D \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} E & 0 \\ CA^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

23.略。提示：$|A^2+AB| = |A||A+B| = |B^2+AB| = |A+B||B|$

24.(1)$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3)-4

(4)$\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}E$

(5)2

(6)0

(7)0

(8)$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 22 & 61 & 43 \end{pmatrix}$

(9)1

(10)$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(11)1

(12)0

(13)$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\frac{1331}{100}$

25.CDACB ACBAC C

26.

(1.) F $A^2-A=A(A-E)=0$

(2.) F 比如 $A=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

(3.) T $R(AB)\le n$ 显然不满秩

(4.) F 显然不能在一般的 ABCD 方阵成立

(5.) T $B=A^*A$ $C=AA^*$ $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ki}a_{kj}=|A|\delta_{ij}$ $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=|A|\delta_{ij}$.（某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于 0）

(6.) T 参考上一题结论 $AA^* = |A|E$

(7.) T 令 $P = BA^{-1}$

(8.) F 显然错误，不明白的话好好复习行列式的知识

(9.) F 反例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(10.) F 反例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(11.) T 对于 n 阶方阵来说，r < n–1 时伴随矩阵是 0 矩阵

(12.) F 参考上一题

(13.) T 题目条件可以直接导出 n 个列向量线性相关，矩阵奇异

(14.) T 注意 A 和 B 的行数和列数