内 容 简 介

本书为线性代数与空间解析几何的参考书，其内容包含行列式、矩阵、向量、线性方程组、相似矩阵、二次型的主要知识点与相关习题，并附有近十年考研真题.

本书适用于理工科大学本科生阅读参考，并可供考研学生参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何疑难解答/王春程，杨枫林，蒋卫华主编. —2版. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.9

ISBN 978－7－5603－6864－1

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①王…　②杨…　③蒋…　Ⅲ.①线性代数－高等学校－教学参考资料　②立体几何－解析几何－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.①O151.2　②O182.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第203284号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　钱辰琛
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　肇东市一兴印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张14.75　字数326千字
版　　次　2015年10月第1版　2017年9月第2版
　　　　　2017年9月第1次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－6864－1
定　　价　25.00元

⊙

目录

第　一　章

行　列　式

心得 体会 拓广 疑问

行列式起源于对线性方程组的研究，后来被广泛应用于线性代数以及其他数学分支中，成为一个重要的工具.行列式的计算是一个重要的问题，也是一个很麻烦的问题.在行列式计算中，行列式的性质起着十分重要的作用.

一、基本内容及基本方法提要

1. n 阶行列式的定义

2. n 阶行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等.

(2) 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

(3) 行列式的某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(4) 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，那么这个行列式等于两个行列式的和，例如

$$\begin{vmatrix} \cdots & a_{1j}+a_{1j}' & \cdots \\ \cdots & a_{2j}+a_{2j}' & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & a_{nj}+a_{nj}' & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j}' & \cdots \\ \cdots & a_{2j}' & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & a_{nj}' & \cdots \end{vmatrix}$$

(5) 把行列式的任一行(列)的元素乘以同一个数后，加到另一行(列)的对应元素上去，行列式不变.

(6) 行列式中任一行(列)中各元素与其代数余子式的乘积之和等于该行列式.

(7) 行列式中任一行(列)中各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

3. 几种特殊类型行列式

直接利用行列式的定义即可得到下面几类行列式的值.

(1) 一阶行列式

$$D=|\ a\ |=a$$

(2) 二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

(3) 三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

(4) 对角行列式

年 月 日

$$D=\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

(5) 上(下)三角行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & 0 & \\ & * & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

其中 $*$ 表示该位置的元素是任意的.

结合行列式的性质,还可得到下面几个行列式的计算公式.

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & 0 & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & * & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{i=1}^{n}a_{i,n-i+1}$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & 0 & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & 0 & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{i=1}^{n}a_{i,n-i+1}$$

4. 行列式乘法公式

设 $D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$.

记 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$, $D=\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{vmatrix}$.

则 $D=D_1D_2$.

5. 行列式的计算

行列式计算是本章的主要内容. 行列式的性质是行列式计算(证明)

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

的重要依据.计算行列式时常常利用行列式的性质、公式和定理,将其化为特殊行列式,有时还需用到递推法、升阶法、分拆法等技巧.

6.行列式的应用(克莱姆(Cramer)法则)

(1)推导克莱姆法则.

(2)利用克莱姆法则解方程组.

在以后几章中,还将利用行列式讨论方阵的逆,求矩阵的秩,求方阵的特征多项式及特征值等.

二、复习题及基础

1 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2-x&1&\cdots&1\\1&1&3-x&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&n-x\end{vmatrix}$$

解

$$D_n\xlongequal{r_i+(-1)r_1(i=2,\cdots,n)}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1-x&0&\cdots&0\\0&0&2-x&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1-x\end{vmatrix}=$$

$$(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)=\prod_{i=1}^{n-1}(i-x)$$

2 计算

$$D_4=\begin{vmatrix}a_1&&&b_1\\&a_2&b_2&\\&b_3&a_3&\\b_4&&&a_4\end{vmatrix}$$

解法一

$$D_4=a_1\begin{vmatrix}a_2&b_2&\\b_3&a_3&\\&&a_4\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}b_4\begin{vmatrix}&&b_1\\a_2&b_2&\\b_3&a_3&\end{vmatrix}=$$

$$a_1a_4\begin{vmatrix}a_2&b_2\\b_3&a_3\end{vmatrix}-b_4b_1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_2&b_2\\b_3&a_3\end{vmatrix}=$$

$$a_1a_4a_2a_3-a_1b_2b_3a_4-b_1a_2a_3b_4+b_1b_2b_3b_4=$$

$$(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

解法二

$$D_4 \xlongequal[c_2\leftrightarrow c_4]{r_2\leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_4 & a_4 & & \\ & & a_3 & b_3 \\ & & b_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} =$$

$$(a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3)$$

3 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

解

$$D_4 \xlongequal{r_1 + 1\cdot r_i (i=2,3,4)} \begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$8\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_i + (-1) r_1 (i=2,3,4)} 8\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 512$$

4 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & & \\ & x_2 & \ddots & \\ & & \ddots & y_{n-1} \\ y_n & & & x_n \end{vmatrix}$$

解 行列式按第 1 列展开，有

$$D_n = x_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & y_{n-1} \\ & & & x_n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y_n \begin{vmatrix} y_1 & & & \\ x_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x_{n-1} & y_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n} y_i$$

5 计算

$$D_3 = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

解 $D_3 \xlongequal{r_1 + 1\cdot r_i (i=2,3)} \begin{vmatrix} 2(x+y) & 2(x+y) & 2(x+y) \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} =$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+(-x-y)r_1]{r_2+(-y)r_1}$$

$$2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x-y \\ 0 & -y & -x \end{vmatrix} =$$

$$2(x+y)(-x^2+xy-y^2)=-2(x^3+y^3)$$

6 计算

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{\substack{c_4+(-1)c_1+(-1)c_2+(-1)c_3 \\ c_3+(-1)c_1 \\ c_2+(-1)c_1}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 4 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{c_3+(-1)c_4 \\ c_2+(-\frac{1}{4})c_4}}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2a & 4a & 4 \\ b^2 & 2b & 4b & 4 \\ c^2 & 2c & 4c & 4 \\ d^2 & 2d & 4d & 4 \end{vmatrix}=0$$

7 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$$

解

$$D_n \xlongequal{c_1+1\cdot c_i(i=2,3,\cdots,n)} \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-a & x_2-a & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-a & x_2 & x_3-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix} =$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2-a & x_3 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2 & x_3-a & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a\end{vmatrix}\xlongequal{r_i+(-1)r_1(i=2,3,\cdots,n)}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 0 & -a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a\end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{n-1}a^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-a\right)$$

8 计算

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ 2x_1^2-1 & 2x_2^2-1 & 2x_3^2-1 & 2x_4^2-1\\ 4x_1^3-3x_1 & 4x_2^3-3x_2 & 4x_3^3-3x_3 & 4x_4^3-3x_4\end{vmatrix}$$

解

$$D_4\xlongequal[r_4+3\cdot r_2]{r_3+1\cdot r_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ 2x_1^2 & 2x_2^2 & 2x_3^2 & 2x_4^2\\ 4x_1^3 & 4x_2^3 & 4x_3^3 & 4x_4^3\end{vmatrix}=8\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(x_i-x_j)$$

9 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

解

$$D_n\xlongequal{r_i+r_1(i=2,3,\cdots,n)}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}=n!$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

10 计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & b_1 & & & \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & & \\ & -1 & 1-b_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_n \\ & & & -1 & 1-b_n\end{vmatrix}$$

解

$$D_{n+1}\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1 & b_1 & & & \\ 0 & 1 & b_2 & & \\ & -1 & 1-b_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_n \\ & & & -1 & 1-b_n\end{vmatrix}\xlongequal[r_n+r_{n-1}]{r_3+r_2,\ \vdots}$$

$$\begin{vmatrix}1 & b_1 & & & & \\ 0 & 1 & b_2 & & & \\ & 0 & 1 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & b_n \\ & & & & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

11 计算

$$D_5=\begin{vmatrix}1-x & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-x & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-x & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-x & x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-x\end{vmatrix}$$

解　按第一行展开

$$D_5=(1-x)D_4-x\begin{vmatrix}-1 & x & & \\ 0 & 1-x & x & \\ & -1 & 1-x & x \\ & & -1 & 1-x\end{vmatrix}=(1-x)D_4+xD_3$$

得到递推公式

$$D_5-D_4=-x(D_4-D_3)=\cdots=-x^3(D_2-D_1)$$

由于 $$D_2=\begin{vmatrix}1-x & x \\ -1 & 1-x\end{vmatrix}=1-x+x^2,D_1=1-x$$

于是得

$$\begin{cases}D_5-D_4=-x^5 \\ D_4-D_3=x^4 \\ D_3-D_2=-x^3\end{cases}$$

容易推出

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$D_5=-x^5+x^4-x^3+D_2=-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$$

12 证明

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & & \\ 1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1}c_{n-1} \\ & & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

证 令

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ c_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}-$$

$$b_1\begin{vmatrix} c_1 & b_2 & & & \\ & a_3 & \ddots & & \\ & c_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=$$

$$a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ c_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}-b_1c_1\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & & \\ c_3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=$$

$$a_1D_{n-1}-b_1c_1D_{n-2}$$

$$B_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & & \\ 1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1}c_{n-1} \\ & & 1 & a_n \end{vmatrix}=$$

$$a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2c_2 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1}c_{n-1} \\ & & 1 & a_n \end{vmatrix}-b_1c_1\begin{vmatrix} a_3 & b_3c_3 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1}c_{n-1} \\ & & 1 & a_n \end{vmatrix}=$$

$$a_1B_{n-1}-b_1c_1B_{n-2}$$

当 $n=1$ 时，$D_1=B_1=a_1$；

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_2 \end{vmatrix}=a_1a_2-b_1c_1$，$B_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}=a_1a_2-b_1c_1$，结论成立.

假设 $n\leqslant k$ 时，$D_n=B_n$，往证 $n=k+1$，$D_{k+1}=B_{k+1}$ 时也成立

$$D_{k+1}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ c_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_k \\ & & c_k & a_{k+1} \end{vmatrix}-b_1c_1\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & & \\ c_3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_k \\ & & c_k & a_{k+1} \end{vmatrix}=$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$a_1D_k-b_1c_1D_{k-1}$$

$$B_{k+1}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2c_2 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_kc_k \\ & & 1 & a_{k+1} \end{vmatrix}-b_1c_1\begin{vmatrix} a_3 & b_3c_3 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_kc_k \\ & & 1 & a_{k+1} \end{vmatrix}=$$

$$a_1B_k-b_1c_1B_{k-1}$$

所以
$$D_{k+1}=B_{k+1}$$

由数学归纳法结论成立.

13 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 5 & 3 & & & \\ 2 & 5 & 3 & & \\ & 2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 3 \\ & & & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

解　由 $D_n=5D_{n-1}-6D_{n-2}$，有

$$D_n-3D_{n-1}=2(D_{n-1}-3D_{n-2})=\cdots=$$
$$2^{n-3}(D_3-3D_2)=2^{n-2}(D_2-3D_1)=2^n$$

所以

$$D_n-3D_{n-1}=2^n$$
$$D_{n-1}-3D_{n-2}=2^{n-1}$$
$$\vdots$$
$$D_3-3D_2=2^3$$
$$D_2-3D_1=2^2$$

容易得到

$$D_n=2^n+3\cdot 2^{n-1}+\cdots+3^{n-3}\cdot 2^3+3^{n-2}\cdot 2^2+3^{n-1}\cdot D_1$$

于是

$$D_n=2^n+3\cdot 2^{n-1}+\cdots+3^{n-3}\cdot 2^3+3^{n-2}\cdot 2^2+3^{n-1}\cdot 2+3^n=$$
$$3^{n+1}-2^{n+1}$$

14 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}\quad (x_i\neq a, i=1,2,\cdots,n)$$

解法一

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a-x_1 & x_2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x_1 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}\xlongequal{r_1+\frac{-a}{x_i-a}r_i(i=2,\cdots,n)}$$

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{vmatrix} x_1-(a-x_1)\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a}{x_i-a} & 0 & \cdots & 0 \\ a-x_1 & x_2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x_1 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}=$$

$$(x_2-a)\cdots(x_n-a)[x_1-a(a-x_1)(\frac{1}{x_2-a}+\cdots+\frac{1}{x_n-a})]=$$

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a})$$

解法二

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1 & a & \cdots & a \\ 0 & a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix} \xlongequal{r_i+(-1)r_1(i=2,3,\cdots,n+1)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x_1-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x_2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+(\frac{1}{x_i-a})c_{i+1}(i=1,\cdots,n)}$$

$$\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a} & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}=$$

$$(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a})\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)$$

15 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -a & \cdots & \cdots & -a \\ a & x & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & x & -a \\ a & \cdots & \cdots & a & -a \end{vmatrix}$$

解

$$D_n \xlongequal{c_i+1\cdot c_n(i=1,2,\cdots,n-1)}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{vmatrix} x-a & -2a & -2a & \cdots & -a \\ 0 & x-a & -2a & \cdots & -a \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a \end{vmatrix} =$$

$$-a(x-a)^{n-1}$$

16 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

解　有

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix} =$$

$$c\begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + (a-c)\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & \ddots & & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix} =$$

$$c(a-b)^{n-1} + (a-c)D_{n-1} \tag{1}$$

又

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 \\ c & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a-b \end{vmatrix} =$$

$$b(a-c)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} \tag{2}$$

由$(a-b)\times(1)-(a-c)\times(2)$，得

$$(c-b)D_n = c(a-b)^n - b(a-c)^n$$

$$D_n = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b} \quad (c \neq b)$$

而 $c=b$ 时

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} =$$

$$(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

17 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$$

其中 A_{ij} 为右边第一个行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式.

证

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & x & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & x & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & x \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n} xA_{i1} +$$

$$\sum_{i=1}^{n} xA_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} xA_{in} =$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$$

18 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

解　因为

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}^{T} =$$

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & & & \\ & a^2+b^2+c^2+d^2 & & \\ & & a^2+b^2+c^2+d^2 & \\ & & & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix} =$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

所以　　$D_4 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

19 证明 $n(n \geqslant 3)$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix} = 0$$

解

$$D_n = \left| \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \cdots & \sin\beta_n \end{pmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \cdots & \sin\beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \right| =$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \cdots & \sin\beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha_1-\beta_1) & n=1 \\ \sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\beta_1-\beta_2) & n=2 \\ 0 & n\geqslant 3 \end{cases}$$

20 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$$

解法一 有

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ -b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ a_2 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & -b_2 & \cdots & -b_n \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}b_2\cdots b_n\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=$$

$0\quad(n\geqslant 3)$

而 $n=1$ 时

$$D_1=a_1-b_1$$

$n=2$ 时

$$\begin{aligned} D_2 &=(a_1-b_1)(a_2-b_2)-(a_2-b_1)(a_1-b_2)= \\ & a_1a_2-a_1b_2-a_2b_1+b_1b_2-a_1a_2+a_2b_2+a_1b_1-b_1b_2= \\ & a_2b_2+a_1b_1-a_1b_2-a_2b_1= \\ & (a_1-a_2)(b_1-b_2) \end{aligned}$$

解法二

$$D_n=\left|\begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\right|=$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\left|\begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}\right| =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{cases} a_1 - b_1 & n=1 \\ (a_1-a_2)(b_1-b_2) & n=2 \\ 0 & n\geqslant 3 \end{cases}$$

21 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

解

$$D_n = \left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}\right| =$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right| =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{cases} 1+x_1y_1 & n=1 \\ (x_1-x_2)(y_1-y_2) & n=2 \\ 0 & n\geqslant 3 \end{cases}$$

年　月　日

22 计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n\\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^n\end{vmatrix}$$

解 根据范德蒙行列式计算公式

$$D_{n+1}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(i-j)=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=j}^{n+1}(i-j)=$$
$$\prod_{j=1}^{n}(n+1-j)!\ =n!\ (n-1)!\ \cdots 2!$$

23 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1\\ (-1)^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}$$

解 行列式按第一列展开,得到

$$D_n=a\begin{vmatrix}a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1\\ & & & a\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}(-1)^n\begin{vmatrix}1 & & & \\ a & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & 1\end{vmatrix}=a^n-1$$

24 计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0\\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1\\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & x\end{vmatrix}$$

解法一 行列式按第一列展开,得

$$D_{n+1}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

解法二 当 $x\neq 0$ 时,化为三角形行列式,即

心得 体会 拓广 疑问

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_k}{x^k} & & & & & \\ \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{x^k} & x & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ a_{n-2}+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\dfrac{a_n}{x^2} & \cdots & \cdots & x & & \\ a_{n-1}+\dfrac{a_n}{x} & \cdots & \cdots & \cdots & x & \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & \cdots & x\end{vmatrix}=x^n\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}=\sum_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}$$

若 $x=0$ 时，直接计算可知 $D_{n+1}=a_n$.

25 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1}+x/a_1\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1}+x/a_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}+x/a_n\end{vmatrix}$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & x/a_1\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & x/a_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & x/a_n\end{vmatrix}=$$

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)+\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}x\begin{vmatrix}a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & 1\\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & 1\end{vmatrix}=$$

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)+(-1)^{n-1}x\frac{1}{a_1\cdots a_n}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)=$$

$$\left(1+(-1)^{n-1}x\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

26 计算

$$D_4=\begin{vmatrix}-x & a & b & c\\ a & -x & c & b\\ b & c & -x & a\\ c & b & a & -x\end{vmatrix}$$

解

$$D_4\xlongequal{r_1+1\times r_i(i=2,3,4)}(a+b+c-x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & -x & c & b\\ b & c & -x & a\\ c & b & a & -x\end{vmatrix}=$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$(a+b+c-x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -x-a & c-a & b-a\\ 0 & c-b & -x-b & a-b\\ 0 & b-c & a-c & -x-c\end{vmatrix}=$$

$$(a+b+c-x)\begin{vmatrix}-x-a & c-a & b-a\\ c-b & -x-b & a-b\\ b-c & a-c & -x-c\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+(-1)c_1+1\times c_2}$$

$$(a+b+c-x)(x-a+b+c)\begin{vmatrix}-x-a & c-a & 1\\ c-b & -x-b & -1\\ b-c & a-c & -1\end{vmatrix}=$$

$$(a+b+c-x)(x-a+b+c)\begin{vmatrix}-x-a & c-a & 1\\ c-b & -x-b & -1\\ -x-a+b-c & 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$(a+b+c-x)(x-a+b+c)(-x-a+b-c)(x+a+b-c)=$$

$$(x-a-b-c)(x-a+b+c)(x+a-b+c)(x+a+b-c)$$

27 计算

$$D_4=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}$$

解 当 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$ 时

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}\xlongequal{r_i+(-1)r_1(i=2,3,4,5)}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & & & \\ -1 & & -x & & \\ -1 & & & y & \\ -1 & & & & -y\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y} & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x & & & \\ 0 & & -x & & \\ 0 & & & y & \\ 0 & & & & -y\end{vmatrix}=$$

$$x^2y^2\quad(x\neq 0,y\neq 0)$$

当 $x=0$ 或 $y=0$ 时，$D_4=0$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

28 解方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\ \vdots\\2\end{pmatrix}$$，且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同

解法一 因 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同，知 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，那么方程

$$\begin{pmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\ \vdots\\2\end{pmatrix}$$

有唯一解，显然

$$\begin{pmatrix}2\\2\\ \vdots\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}+\cdots+0\begin{pmatrix}a_1^{n-1}\\a_2^{n-1}\\ \vdots\\a_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

所以
$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

解法二 因 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$，故

$$D_1=\begin{vmatrix}2 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 2 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2 & a_n & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=2|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=2\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & 2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=0$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & a_1 & 2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & 2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & 2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=0$$

$$\vdots$$

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & 2\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & 2\end{vmatrix}=0$$

年 月 日

由克莱姆法则，方程解唯一，为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2, x_2=\frac{D_2}{D}=0, x_3=\frac{D_3}{D}=0, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}=0$$

即

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

29 设曲线 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 经过点(1,0),(2,0),(3,0),(4,1)，求 a_0,a_1,a_2,a_3.

解 由题中条件知

$$\begin{cases}a_0+a_1+a_2+a_3=0\\a_0+2a_1+2^2a_2+2^3a_3=0\\a_0+3a_1+3^2a_2+3^3a_3=0\\a_0+4a_1+4^2a_2+4^3a_3=1\end{cases} \qquad (*)$$

方法一：令

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&2^2&2^3\\1&3&3^2&3^3\\1&4&4^2&4^3\end{vmatrix}=$$

$$(2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3)=$$

$$12\neq 0$$

所以，方程组(*)的解唯一

$$D_1=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\0&2&2^2&2^3\\0&3&3^2&3^3\\1&4&4^2&4^3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2^2&2^3\\3&3^2&3^3\end{vmatrix}=-12$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&0&1&1\\1&0&2^2&2^3\\1&0&3^2&3^3\\1&1&4^2&4^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2^2&2^3\\1&3^2&3^3\end{vmatrix}=22$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&0&1\\1&2&0&2^3\\1&3&0&3^3\\1&4&1&4^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2^3\\1&3&3^3\end{vmatrix}=-12$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&2&2^2&0\\1&3&3^2&0\\1&4&4^2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2^2\\1&3&3^2\end{vmatrix}=2$$

由克莱姆法则

$$a_0=\frac{D_1}{D}=-1,a_1=\frac{D_2}{D}=\frac{11}{6},a_2=\frac{D_3}{D}=-1,a_3=\frac{D_4}{D}=\frac{1}{6}$$

方法二：根据题意，有

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\1&2&2^2&2^3&0\\1&3&3^2&3^3&0\\1&4&4^2&4^3&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&3&7&0\\0&1&5&19&0\\0&1&7&37&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&3&7&0\\0&0&2&12&0\\0&0&2&18&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&3&7&0\\0&0&1&6&0\\0&0&0&3&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&0&-\frac{1}{6}\\0&1&3&0&-\frac{7}{6}\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&\frac{1}{6}\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&\frac{5}{6}\\0&1&0&0&\frac{11}{6}\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&\frac{1}{6}\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&\frac{11}{6}\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&\frac{1}{6}\end{array}\right)$$

所以

$$a_0=-1,a_1=\frac{11}{6},a_2=-1,a_3=\frac{1}{6}$$

30 设 $\boldsymbol{A}$ 为奇数阶反对称阵(即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$)，则 $|\boldsymbol{A}|=0$.

解　设 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 n，n 为奇数，由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，有

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$$

所以 $|\boldsymbol{A}|=0$.

31 设 $f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1\\3-x&5-3x^2&3x^3-1\\2x^2-1&3x^5-1&7x^3-1\end{vmatrix}$，证明：存在 $\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\zeta)=0$.

证　显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微. 又由

$$f(0)=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&5&-1\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=0$$

心得 体会 拓广 疑问

$$f(1)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&2&6\end{vmatrix}=0$$

由罗尔定理，$\exists\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\zeta)=0$.

32 设

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&0&3\\1&2&3&12\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\0&1&6&15\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&3&4&5\\1&2&3&12\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}=0$$

求 x.

解 因为

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&0&3\\1&2&3&12\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\0&1&6&15\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&3&4&5\\1&2&3&12\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&2&3&12\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\0&1&6&15\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}=$$

$$(2-1)(3-1)(3-2)(x-1)(x-2)(x-3)=$$

$$2(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

于是 $x=1,2,3$.

33 解方程

$$\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}=0$$

解 因为

$$\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}\overset{C_1+1\times C_2+(-1)C_4}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix}x&x-1&x-2&x-3\\2x&2x-1&2x-2&2x-3\\3x&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}\overset{C_i+(-1)C_1(i=2,3,4)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -2 & -3 \\ 2x & -1 & -2 & -3 \\ 3x & -2 & x-5 & -5 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} = -x\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & x-5 & -5 \\ 4 & 3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[C_4+3\times C_2]{C_3+2\times C_2}$$

$$-x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & x-1 & 1 \\ 4 & 3 & x-1 & 6 \end{vmatrix} = -x(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

所以 $x=0$ 或 $x=1$.

34 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} =$$

$$[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} =$$

$$[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} =$$

$$[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

35 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

其中 $x_2x_3\cdots x_n\neq 0$.

解法一 按第 1 行展开(或按第 1 列展开),得

$$D_n=xx_2\cdots x_n-a_2b_2x_3\cdots x_n-a_3x_2b_3x_4\cdots x_n-\cdots-$$
$$a_{n-1}x_2x_3\cdots x_{n-2}b_{n-1}x_n-a_nx_2x_3\cdots x_{n-1}b_n=$$
$$(x-\sum_{i=2}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i})x_2x_3\cdots x_n$$

解法二 设 $x_2x_3\cdots x_n\neq 0$,对 D_n 的第 $i(i\geqslant 2)$ 列乘 $\left(-\frac{b_i}{x_i}\right)$ 加到第 1 列上去得上三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}=$$

$$\left[x-\sum_{i=2}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i}\right]x_2x_3\cdots x_n$$

36 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & c_n \end{vmatrix}$$

解法一 按第 1 行展开得到

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & c_n \end{vmatrix}=$$

$$a_1\begin{vmatrix} c_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & c_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & c_n \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & c_n \end{vmatrix}+$$

$$a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & c_n \end{vmatrix}-a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & c_n \end{vmatrix}+\cdots+$$

年 月 日

$$(-1)^n a_{n-1}\begin{vmatrix} b_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{n+1} a_n\begin{vmatrix} b_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} D_n = & a_1c_2c_3\cdots c_n - b_1a_2c_3\cdots c_n + b_1b_2a_3c_4\cdots c_n - \\ & b_1b_2b_3a_4c_5\cdots c_n + \cdots + \\ & (-1)^n b_1b_2\cdots b_{n-2}a_{n-1}c_n + (-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n \end{aligned}$$

解法二　按第 n 列展开得

$$D_n = (-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} b_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \end{vmatrix} + c_nD_{n-1} =$$

$$(-1)^{n+1}b_1b_2b_3\cdots b_{n-1}a_n + c_nD_{n-1}$$

反复应用递推公式得

$$\begin{aligned} D_n = & (-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n + c_nD_{n-1} = \\ & (-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n + c_n[(-1)^n b_1b_2\cdots b_{n-2}a_{n-1} + c_{n-1}D_{n-2}] = \\ & (-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n + (-1)^n b_1b_2\cdots b_{n-2}a_{n-1}c_n + c_{n-1}c_nD_{n-2} = \cdots = \\ & (-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_{n-1}a_n + (-1)^n b_1b_2\cdots b_{n-2}a_{n-1}c_n + \cdots + \\ & b_1b_2a_3c_4\cdots c_n - b_1a_2c_3\cdots c_n + a_1c_2c_3\cdots c_n \end{aligned}$$

37 计算

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & 0 & & & b_n \\ & \ddots & & & & ⋰ & \\ & & a_1 & & b_1 & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & c_1 & & d_1 & & \\ & ⋰ & & & & \ddots & \\ c_n & & & 0 & & & d_n \end{vmatrix}$$

解　将 D_{2n} 按第一行展开

$$D_{2n}=a_n\begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\ 0 & & & & & & d_n \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{2n+1}b_n\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

上式右端的两个行列式均按最后一行展开，得

$$D_{2n}=a_nd_n(-1)^{(2n-1)+(2n-1)}D_{2n-2}+b_nc_n(-1)^{(2n+1)+(2n-1)+1}D_{2n-2}=$$
$$(a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)}$$

利用上述递推公式，可得

$$D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})D_{2(n-2)}=\cdots=\prod_{i=2}^{n}(a_id_i-b_ic_i)D_2$$

而 $D_2=a_1d_1-b_1c_1$，所以

$$D_{2n}=\prod_{i=1}^{n}(a_ib_i-b_ic_i)$$

38 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ a_2a_1 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_{n-1} & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \cdots & (n-1)+a_{n-1}^2 & a_{n-1}a_n \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_{n-1}a_n & n+a_n^2 \end{vmatrix}$$

解法一 把行列式 D_n 增加一行、增加一列变成一个与 D_n 等值的 $n+1$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ a_2a_1 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_{n-1} & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \cdots & (n-1)+a_{n-1}^2 & a_{n-1}a_n \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_{n-1}a_n & n+a_n^2 \end{vmatrix}=$$

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ 0 & a_2a_1 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_{n-1} & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \cdots & (n-1)+a_{n-1}^2 & a_{n-1}a_n \\ 0 & a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_na_{n-1} & n+a_n^2 \end{vmatrix}$$

将第 1 行元素分别乘 $(-a_1),(-a_2),\cdots,(-a_n)$ 加到第 2 行，第 3 行，……，第 $n+1$ 行上去，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

将第 $2,3,4,\cdots,n+1$ 列分别乘 $a_1,\dfrac{a_2}{2},\dfrac{a_3}{3},\cdots,\dfrac{a_n}{n}$ 加到第 1 列上去，得上三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2}{i} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=n!\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{i}\right)$$

解法二　将第 n 列视为两项和，把 D_n 拆成两个行列式的和，可得递推公式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ a_2a_1 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_{n-1} & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \cdots & (n-1)+a_{n-1}^2 & a_{n-1}a_n \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_na_{n-1} & n+a_n^2 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ a_2a_1 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_{n-1} & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \cdots & (n-1)+a_{n-1}^2 & a_{n-1}a_n \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_na_{n-1} & a_n^2 \end{vmatrix}+$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_{n-1} & 0 \\ a_2a_1 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \cdots & (n-1)+a_{n-1}^2 & 0 \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_na_{n-1} & n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ a_2a_1 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_{n-1} & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \cdots & (n-1)+a_{n-1}^2 & a_{n-1}a_n \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_na_{n-1} & a_n^2 \end{vmatrix} + nD_{n-1}$$

在第一个行列式中，将第 n 列分别乘以 $(-a_1),(-a_2),\cdots,(-a_{n-1})$，依次加到第 1 列，第 2 列，……，第 $n-1$ 列，得三角行列式，故

$$D_n = a_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} + nD_{n-1} =$$

$$a_n^2(n-1)!\ + nD_{n-1} = \frac{a_n^2}{n}n!\ + nD_{n-1}$$

即
$$D_n = \frac{a_n^2}{n}n!\ + nD_{n-1}$$

反复运用此递推公式，得

$$D_n = \frac{a_n^2}{n}n!\ + n\left[\frac{a_{n-1}^2}{n-1}(n-1)!\ + (n-1)D_{n-2}\right] =$$

$$n!\ \left[\frac{a_n^2}{n} + \frac{a_{n-1}^2}{n-1}\right] + n(n-1)D_{n-2} = \cdots =$$

$$n!\ \left[\frac{a_n^2}{n} + \frac{a_{n-1}^2}{n-1} + \cdots + \frac{a_2^2}{2}\right] + n!\ D_1 = n!\ \left(1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{i}\right)$$

39 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

解

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+x_1 & \cdots & 1+x_1^n \\ 0 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1+x_n & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} \xlongequal{r_{i+1}\ r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ -1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} =$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{vmatrix} 2-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0-1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0-1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} =$$

$$2x_1x_2\cdots x_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} -$$

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)=$$

$$\left[2x_1x_2\cdots x_n-\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\right]\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

40 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

其中 $n>2$.

解 把第 1 行的 $(-x)$ 倍分别加到第 $2,3,\cdots,n$ 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}$$

当 $x\neq 0$ 时，再把第 j 列的 $\frac{1}{x}$ 倍加到第 1 列 $(j=2,\cdots,n)$，就把 D_n 化成了上三角行列式

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$D_n=\begin{vmatrix}\frac{n-1}{x} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$$

当 $x=0$ 时，显然有 $D_n=0$，所以总有

$$D_n=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$$

41 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}-ab & ac & ae\\ bd & -cd & de\\ bf & cf & -ef\end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}-ab & ac & ae\\ bd & -cd & de\\ bf & cf & -ef\end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix}-b & c & e\\ b & -c & e\\ b & c & -e\end{vmatrix}=$$

$$adfbce\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=adfbce\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=$$

$$-adfbce\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=4abcdef$$

年　　月　　日

第 二 章

矩 阵

心得 体会 拓广 疑问

矩阵的理论和方法贯穿于行列式、线性方程组、二次型、线性空间、线性变换等各方面.线性代数中的许多问题可以转化为矩阵问题来处理，矩阵的理论和方法在数学及其他领域特别是工程技术中有着广泛的应用.在处理问题时，要求必须熟练掌握矩阵的运算，特别是矩阵乘法及求逆运算.矩阵分块是为了简化矩阵的运算或为了处理问题方便.矩阵的初等变换在矩阵理论中占有重要的地位.初等变换、初等方阵与矩阵乘积有着密切的关系.矩阵的秩是矩阵的一个重要数字特征，矩阵的许多问题都需要用秩来刻画.矩阵的秩在初等变换下是一个不变量.

一、基本内容及基本方法提要

1.特殊矩阵及有关概念

特殊矩阵包括：行矩阵、列矩阵、零矩阵；方阵（一阶方阵可看作一个数）、上（下）三角阵、对角阵、数量阵、单位阵；对称阵、反对称阵、可逆阵、正交阵和正定阵；行阶梯形矩阵，行最简阶梯形阵和矩阵的标准形.

与矩阵有关的几个概念：子矩阵、子方阵、r 阶子式和顺序主子式，元素的余子式及代数余子式，伴随阵、矩阵的迹.

2.矩阵运算的基本性质

(1) 加法

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$$

(2) 数乘

$$1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A},0\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$$

$$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$$

$$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$$

$$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$$

若 $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，则 $k=0$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

(3) 乘法

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$$

$$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$$

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$$

一般情况下

$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$$

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}\not\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}\not\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}\text{ 或 }\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}\not\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$$

但当 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩时，有

年　月　日

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$
$$AB = 0 \Rightarrow B = 0$$

当 A 为方阵时

$$AB = 0 \Rightarrow |A| = 0 \text{ 或 } B = 0$$

(4) 转置

$$(A^T)^T = A$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$(kA)^T = kA^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$

(5) 逆矩阵

$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (\text{其中 } A, B \text{ 都是可逆阵})$$
$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \quad (\text{其中 } k \neq 0)$$
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

一般情况

$$(A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$$

(6) 方阵的行列式

$$|A^T| = |A|$$
$$|kA| = k^n |A| \quad (\text{其中 } n \text{ 为 } A \text{ 的阶数})$$
$$|AB| = |A||B| \quad (\text{其中 } A, B \text{ 都是同阶方阵})$$

但一般说

$$|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$$

(7) 方阵的幂

$$A^k A^l = A^{k+l} = A^l A^k \quad (k, l \in \mathbf{N})$$
$$(A^k)^l = A^{kl} \quad (k, l \in \mathbf{N})$$
$$(A^m)^T = (A^T)^m$$

当 A 可逆时，还可定义方阵的负整数次幂

$$A^0 = E, (A^m)^{-1} = (A^{-1})^m = A^{-m} \quad (m \in \mathbf{N})$$

一般来说

$$(AB)^m \neq A^m B^m$$

但有：

(a) $AB = BA \Leftrightarrow (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;

(b) $AB = BA \Leftrightarrow (A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$;

(c) 当 $AB = BA$ 时，$(A + B)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B^{m-k}$;

特别地

$$(E + A)^m = E + C_m^1 A + C_m^2 A^2 + \cdots + C_m^m A^m = E + \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^k$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

(d) 当 $R(\boldsymbol{A})=1$ 时,存在 $n\times 1$ 阵 $\boldsymbol{B}$ 及 $1\times n$ 阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$,且 $\boldsymbol{A}^m=(\boldsymbol{CB})^{m-1}\boldsymbol{A}$;

(e) 除用定义及以上方法求 A^m,还可利用相似矩阵法.

3. 判定 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的方法(这里假定 $\boldsymbol{A}$ 是方阵)

(1)$\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(2)$\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$).

(3)n 阶数字阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=n$.

方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 可逆的等价条件还有:

(4) 不存在非零矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$(或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$).

(5)$\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量组线性无关.

(6)$\boldsymbol{A}$ 与单位阵 $\boldsymbol{E}_n$ 等价($\boldsymbol{A}$ 的标准形为 $\boldsymbol{E}_n$,即存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{E}_n$).

(7)$\boldsymbol{A}$ 经初等行变换可化成 $\boldsymbol{E}_n$($\boldsymbol{A}$ 的行最简阶梯形是 E_n).

(8)$\boldsymbol{A}$ 可表示为有限个初等方阵的乘积.

(9)$\boldsymbol{A}$ 的特征值不等于零.

(10)$\boldsymbol{A}^*$ 可逆.

4. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的方法

(1) 用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

其中 $\boldsymbol{A}^*=(\boldsymbol{A}_{ji})_{n\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵,$\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的关系

$$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

应用广泛.

(2) 用初等变换法

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{A}^{-1})\text{ 或 }\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \cdots\\ \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}$$

(3) 若方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$),则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

(4) 用分块阵求逆.

此外,若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})\xrightarrow{\text{行}}(\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{C})$,则 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 若 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \cdots\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \cdots\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BA}^{-1}$.

5. 矩阵的秩的定义

矩阵的秩可用行列式定义,也可用向量组相关性理论来定义. 还可用矩阵在初等变换下的标准形来定义.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

6. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩的方法

(1) 用行列式求 $R(\boldsymbol{A})$：若 $\boldsymbol{A}$ 中存在一个 r 阶子式 $D\neq 0$，而含 D 的所有 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)全为 0，则 $R(\boldsymbol{A})=r$.

(2) 用矩阵的初等变换求 $R(\boldsymbol{A})$：$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初}}\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}$ 为行阶梯形矩阵，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$ 中的非零行数.

7. 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的秩的性质

(1) $0\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant \min\{m,n\}$.

(2) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=0$.

(3) $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$.

(4) $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

(5) $R(k\boldsymbol{A})=\begin{cases}0 & \text{当 } k=0\\ R(\boldsymbol{A}) & \text{当 } k\neq 0\end{cases}$.

(6) $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})-n\leqslant R(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$.

特别地，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$，其中 n 为 $\boldsymbol{A}$ 的列数.

(7) $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

(8) $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

(9) $R(\boldsymbol{A}_1)\leqslant R(\boldsymbol{A})$，其中 $\boldsymbol{A}_1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个子阵.

(10) 若 $\boldsymbol{P}$ 是 m 阶可逆方阵，$\boldsymbol{Q}$ 是 n 阶可逆方阵，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{PA})=R(\boldsymbol{AQ})=R(\boldsymbol{PAQ})$.

8. 矩阵的初等变换及初等方阵

矩阵的初等变换(行变换和列变换)有三种，三种初等变换分别对应三种初等方阵 $\boldsymbol{E}(i,j)$，$\boldsymbol{E}(i(k))$ 和 $\boldsymbol{E}(i,j(k))$

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{c_i\leftrightarrow c_j}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AE}(i,j)$$

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\times k}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{c_i\times k}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AE}(i(k))$$

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i+kr_j}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{c_j+kc_i}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AE}(i,j(k))$$

$$[\boldsymbol{E}(i,j)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}(i,j),[\boldsymbol{E}(i,j)]^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$$

$$[\boldsymbol{E}(i(k))]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}(i(k)),[\boldsymbol{E}(i(k))]^{-1}=\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))$$

$$[\boldsymbol{E}(i,j(k))]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}(j,i(k)),[\boldsymbol{E}(i,j(k))]^{-1}=\boldsymbol{E}(j,i(-k))$$

以可逆阵左(右)乘矩阵相当于对 $\boldsymbol{A}$ 作相应的初等行(列)变换，即

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{行}}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow \text{存在可逆阵 } \boldsymbol{P}\text{，使 } \boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{列}}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow \text{存在可逆阵 } \boldsymbol{Q}\text{，使 } \boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$A \xrightarrow{初} B \Leftrightarrow \text{存在可逆阵 } P, Q, \text{使 } PAQ = B$$

$$R(A) = r \Leftrightarrow \text{存在可逆阵 } P, Q, \text{使 } PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换在矩阵理论中起着重要作用,具有广泛应用,必须熟练掌握.

9. 分块矩阵及其运算

将矩阵表示成分块阵时,需根据该矩阵的具体特点及处理问题的需要适当进行分块,分块阵的运算和普通矩阵的运算基本一致.

10. 分块阵的性质及应用

(1) 设 A 为 n 阶方阵,记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $|A| = a$,则

$$|\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_2, \alpha_1| = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a$$

(2) 设 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_n)$ 为 $m+n$ 阶方阵, $|A| = b$,则

$$|\beta_1, \cdots, \beta_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_m| = (-1)^{mn} b$$

(3) 设 n 阶方阵 A 可分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & * \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ii} 为方阵, $*$ 表示任意子块,则

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & & & \\ & A_{22}^{\mathrm{T}} & & \\ *^{\mathrm{T}} & & \ddots & \\ & & & A_{ss}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \prod_{i=1}^{s} |A_{ii}|$$

$$|A^{\mathrm{T}}| = \prod_{i=1}^{s} |A_{ii}^{\mathrm{T}}| = \prod_{i=1}^{s} |A_{ii}|$$

特别地,若 A, B 分别为 m 阶, n 阶方阵,则有

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \\ & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} F & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & A \\ B & \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|$$

(4) 设 A, B 为 n 阶方阵,则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$$

(5) 设 A, D 为方阵(不一定同阶),若 A 可逆,则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$$

年　月　日

若 $\boldsymbol{D}$ 可逆，则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{D}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|$$

特别地，若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均为同阶方阵，$\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，则有

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|$$

（6）设方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{B}_1 \\ & & \boldsymbol{B}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{B}_t & & & \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$，$\boldsymbol{B}_j(j=1,2,\cdots,t)$ 均为方块，则

$$\boldsymbol{A}^m=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^m & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^m \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{s}|\boldsymbol{A}_i|$$

进一步，若 $|\boldsymbol{A}_i|\neq 0$，$|\boldsymbol{B}_j|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \end{pmatrix},\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{B}_t^{-1} \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{B}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{B}_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

二、复习题及基础

1 求矩阵的逆

$$(1)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

解　有

心得 体会 拓广 疑问

$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E})=$

$$\left(\begin{array}{ccccccc:ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc:cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc:cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)$$

则
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix}$；

解　有

$(\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{E})=$

$$\left(\begin{array}{cccccc:cccccc}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right) \to$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$\left(\begin{array}{cccccc:cccccc}1&1&1&\cdots&1&1&1&0&0&\cdots&0&0\\0&-1&0&\cdots&0&0&-1&1&0&\cdots&0&0\\0&0&-1&\cdots&0&0&-1&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&0&-1&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&-1&-1&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc:cccccc}1&0&0&\cdots&0&0&2-n&1&1&\cdots&1&1\\0&1&0&\cdots&0&0&1&-1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0&1&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0&1&0&0&\cdots&-1&0\\0&0&0&\cdots&0&1&1&0&0&\cdots&0&-1\end{array}\right)$$

则
$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}2-n&1&1&\cdots&1&1\\1&-1&0&\cdots&0&0\\1&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&-1&0\\1&0&0&\cdots&0&-1\end{pmatrix}$$

(3)$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0&0&2&-3\\0&0&0&-5&7\\2&0&0&0&0\\1&-3&5&0&0\\0&1&-2&0&0\end{pmatrix}$.

解 根据题意,得

$$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix}\begin{matrix}0&0\\0&0\\0&0\end{matrix}&\begin{pmatrix}2&0&0\\1&-3&5\\0&1&-2\end{pmatrix}^{-1}\\\begin{pmatrix}2&-3\\-5&7\end{pmatrix}^{-1}&\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&-2&-5\\0&0&\frac{1}{2}&-1&-3\\-7&-3&0&0&0\\-5&-2&0&0&0\end{pmatrix}$$

❷ 求方阵的 m 次幂

(1)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\-3&2&0\\4&1&2\end{pmatrix}$;

解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}_3$,其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-3&0&0\\4&1&0\end{pmatrix},有\ \boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-3&0&0\end{pmatrix}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

则

$$\boldsymbol{A}^m=(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}_3)^m=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_m^k\boldsymbol{B}^k\cdot(2\boldsymbol{E}_3)^{m-k}=$$

$$\mathrm{C}_m^0\cdot\boldsymbol{B}^0\cdot(2\boldsymbol{E}_3)^m+\mathrm{C}_m^1\cdot\boldsymbol{B}^1\cdot(2\boldsymbol{E}_3)^{m-1}+\mathrm{C}_m^2\cdot\boldsymbol{B}^2\cdot(2\boldsymbol{E}_3)^{m-2}=$$

$$2^m\cdot\boldsymbol{E}_3+m\cdot 2^{m-1}\cdot\boldsymbol{B}+\frac{m(m-1)}{2}\cdot 2^{m-2}\cdot\boldsymbol{B}^2=$$

$$\begin{pmatrix}2^m & 0 & 0\\ -3m\cdot 2^{m-1} & 2^m & 0\\ m(19-3m)\cdot 2^{m-3} & m\cdot 2^{m-1} & 2^m\end{pmatrix}$$

(2)$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2 & 3\\ -4 & 2 & 4 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 6 & -3 & -6 & 9\end{pmatrix}$.

解 用数学归纳法证明:$\boldsymbol{B}^m=13^{m-1}\cdot\boldsymbol{B}$.

当 $m=1$ 时,显然成立;

假设当 $m=k$ 时,有 $\boldsymbol{B}^k=13^{k-1}\cdot\boldsymbol{B}$,则:

当 $m=k+1$ 时,有

$$\boldsymbol{B}^{k+1}=\boldsymbol{B}^k\cdot\boldsymbol{B}=13^{k-1}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}=13^{k-1}\cdot 13\boldsymbol{B}=13^k\cdot\boldsymbol{B}$$

结论成立.

3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^m$.

解 根据题意,得

$$\boldsymbol{A}^m=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}^m & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^m\end{pmatrix}$$

由于$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}^2=5^2\cdot\boldsymbol{E}_2$,所以

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}^m=\begin{cases}5^m\cdot E_2 & m=2k,k\in\mathbf{Z}^+\\ 5^{m-1}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix} & m=2k+1\end{cases}$$

又由于 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^m=\begin{cases}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^m\end{pmatrix} & m=2k\\ \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2^m\end{pmatrix} & m=2k+1\end{cases}$

所以

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$A^m=\begin{cases}\begin{pmatrix}5^m&0&0&0\\0&5^m&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2^m\end{pmatrix} & m=2k\\ \begin{pmatrix}3\cdot 5^{m-1}&4\cdot 5^{m-1}&0&0\\4\cdot 5^{m-1}&-3\cdot 5^{m-1}&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&2^m\end{pmatrix} & m=2k+1\end{cases}$$

4 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，求 X.

解 由于 $A\cdot A^*X=A\cdot A^{-1}+2AX$，得

$$|A|\cdot E_3X=E_3+2AX$$

又由于 $|A|=4$，所以 $4E_3X=E_3+2AX$，即

$$X=(4E_3-2A)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

5 已知 A,B 为 3 阶方阵满足 $2A^{-1}B=B-4E$，(1) 证明 $A-2E$ 可逆，并求 $(A-2E)^{-1}$；(2) 若 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

解 (1) 由于 $2A^{-1}B=B-4E$，所以 $B-2A^{-1}B=4E$，即

$$A\cdot A^{-1}B-2A^{-1}B=4E$$

于是

$$(A-2E)\cdot\frac{1}{4}A^{-1}B=E$$

故 $A-2E$ 可逆且 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{4}\cdot A^{-1}B$.

(2) 由于 $2A^{-1}B=B-4E$，所以 $2B=AB-4A=A\cdot(B-4E)$，于是

$$A=2B\cdot(B-4E)^{-1}$$

又由于 $B-4E=\begin{pmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，有

$$(B-4E)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

于是

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

6 求矩阵的秩

(1) $A=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}$；

解 $A\to\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\0&-1-2\lambda&\lambda+2&1\\0&10-\lambda&-5&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\0&1&\lambda+2&-1-2\lambda\\0&0&\lambda-3&9-3\lambda\end{pmatrix}$

于是

$$r(A)=\begin{cases}2 & \lambda=3\\3 & \lambda\neq 3\end{cases}$$

(2) $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}$.

解 $r(B)=\begin{cases}1 & a=b=c\\2 & a=b\neq c \text{ 或 } a=c\neq b \text{ 或 } b=c\neq a.\\3 & a\neq b \text{ 且 } a\neq c \text{ 且 } b\neq c\end{cases}$

7 设 A,B 为三阶方阵且 $A^2-AB=E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$，求 B.

解 由于 $|A|=-1$，所以 A 可逆.

又由于 $A^2-AB=E$，即 $A\cdot(A-B)=E$，则 $A-B=A^{-1}$. 于是

$$B=A-A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

8 设三阶方阵 A,B 满足 $A^{-1}BA=6A+BA$，其中 $A=\mathrm{diag}(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{7})$，求 B.

解 由于 $|A|=\frac{1}{84}\neq 0$，所以由 $A^{-1}BA=6A+BA$，有

$$A^{-1}B=6E+B,\text{即}(A^{-1}-E)B=6E$$

得

$$B=6\cdot(A^{-1}-E)^{-1}$$

又由于 $A^{-1}=\mathrm{diag}(3,4,7)$，所以 $A^{-1}-E=\mathrm{diag}(2,3,6)$.

于是 $B=\mathrm{diag}(3,2,1)$.

9 设 A,B 为 n 阶方阵，P 为 n 阶可逆阵. 证明：$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$，$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(A)$.

证 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$，由于 $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，则

$$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki})=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik})=\mathrm{tr}(BA)$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

进一步，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AP}^{-1}\boldsymbol{P})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AE})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

10 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，证明：不存在矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.

证 由第 9 题，知 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$，而

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}+(-1)\boldsymbol{BA})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})+\mathrm{tr}((-1)\boldsymbol{BA})=$$
$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})+(-1)\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})-\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})=0$$

但 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}_n)=n>0, n\neq 0$. 故不存在矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.

11 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，A_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，且 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{A}$. 证明：$|\boldsymbol{A}|=0$；当 $a_{ij}=A_{ij}$ 时，如果 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证 由 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{A}$，有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 由第 9 题，知 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$，即 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 的主对角线元素的和一定是 0，即 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})=n|\boldsymbol{A}|=0$，而故 $|\boldsymbol{A}|=0$.

进一步，由行列式展开定理，则

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

当 $a_{ij}=A_{ij}$ 时，有 $|\boldsymbol{A}|=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}^2$.

由于 $|\boldsymbol{A}|=0$，又由于 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵，所以 $a_{ij}=0$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

12 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 3)$ 阶非零实阵，A_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则有下列结论：

(1) $a_{ij}=A_{ij}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 且 $|\boldsymbol{A}|=1$；

(2) $a_{ij}=-A_{ij}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 且 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

证 (1) 当 $a_{ij}=A_{ij}$ 时，有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{E}$$

于是

$$|\boldsymbol{A}|^{n-2}=1\quad(n\geqslant 3)$$

由于 $|\boldsymbol{A}|=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}^2\geqslant 0$，因此

$$|\boldsymbol{A}|=1 \text{ 且 } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$$

反之，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 且 $|\boldsymbol{A}|=1$，由于 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$，于是，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

因此，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$，即 $a_{ij}=A_{ij}$.

(2) 当 $a_{ij}=-A_{ij}$ 时，有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^*$，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

于是

$$(-1)^n\cdot|\boldsymbol{A}|^{n-2}=1\quad(n\geqslant 3)$$

由于 $|\boldsymbol{A}|=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=-\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}^2\leqslant 0$，因此

$$|\boldsymbol{A}|=-1 \text{ 且 } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

反之,若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 且 $|\boldsymbol{A}|=-1$,由于 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$. 于是,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 因此,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^*$ 即 $a_{ij}=-A_{ij}$.

13 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有解,则对任意向量 $\boldsymbol{\beta}$,$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 均有唯一解.

证 由于 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有解,故 $r(\boldsymbol{A})=n$,即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

而 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 即

$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\neq 0$$

因此,由克莱姆法则,$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解.

14 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$ 且 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

证 由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$,所以 $|\boldsymbol{A}|^2=1$, $|\boldsymbol{B}|^2=1$.

又由于 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$,因此 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=-1$.

于是

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{EB}|=|\boldsymbol{AB}^2+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}|=&\\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}|=&\\|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&\end{aligned}$$

故 $$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$$

15 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$, $|\boldsymbol{A}|=-1$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

证 根据题意,有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})|=&\\|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|&\end{aligned}$$

故 $$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$$

16 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}+\boldsymbol{BA}^3=\boldsymbol{A}^2$.

证 由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^2\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})=&\\\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\cdot\boldsymbol{A}=&\\(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})\cdot\boldsymbol{A}^2=&\\\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{BA}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{BA}^3&\end{aligned}$$

所以,$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}+\boldsymbol{BA}^3=\boldsymbol{A}^2$.

17 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为对称阵,对任意向量 $\boldsymbol{x}$,均有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

证 取 $\boldsymbol{x}_1=(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_2=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{x}_n=(0,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

由于 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}_i$,所以

$$a_{ii}=b_{ii}\quad(i=1,\cdots,n)$$

又由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$,所以

$$a_{ij}=a_{ji},b_{ij}=b_{ji}\quad(i,j=1,\cdots,n)$$

再取 $\boldsymbol{X}_1=(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2=(1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{X}_n=(1,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

由于 $\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i$，所以 $a_{ij}=b_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

18 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反对称阵，证明：对任何向量 $\boldsymbol{x}$，均有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}\geqslant 0$.

证 由于对任何向量 $\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 为一阶方阵，因此

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\cdot x=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$$

于是，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$.

因此

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqslant 0$$

19 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反对称阵，证明：$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 为正交阵 $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E})$.

证 根据题意，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=&[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}]^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}]=\\&[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}]^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\\&[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}]^{-1}\cdot(E-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\\&(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\\&(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{B}$ 为正交阵.

20 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阵，$r(\boldsymbol{A})=r<\min(m,n)$，则 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=0$.

证 由于 $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{A})=r<\min(m,n)$，故 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=0$.

21 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

证 根据题意，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=&(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\\&|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*\end{aligned}$$

22 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则有 $|\boldsymbol{A}^*|=|(-\boldsymbol{A})^*|\ (n\geqslant 2)$.

证 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$|\boldsymbol{A}|$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij}，则 $|-\boldsymbol{A}|$ 的元素 $-a_{ij}$ 的代数余子式为 $B_{ij}=(-1)^{n-1}A_{ij}$，于是

$$(-\boldsymbol{A})^*=((-1)^{n-1}A_{ji})=(-1)^{n-1}(A_{ji})=(-1)^{n-1}\boldsymbol{A}^*$$

所以

$$|(-\boldsymbol{A})^*|=|(-1)^{n-1}\boldsymbol{A}^*|=[(-1)^{n-1}]^n|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^*|$$

23 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，证明：$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}\ (n>2)$.

证 (1) 当 A 为非奇异矩阵时，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$$

故

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^*=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}|\boldsymbol{A}^*|=$$

$$\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}|\boldsymbol{A}|^{n-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$$

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵时：

当 $n>2$ 时，$r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$，于是 $r[(\boldsymbol{A}^*)^*]=0$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

故$(\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{0}$,因此

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$$

24 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵,且$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,则对任意$m\in\mathbf{N}$,均有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^m=\boldsymbol{E}+(2^m-1)\boldsymbol{A}$$

证 用归纳法.

$m=1$时,显然等式成立.

假设$m=k$时成立,下面证$m=k+1$时也成立.有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{k+1}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=[\boldsymbol{E}+(2^k-1)\boldsymbol{A}](\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=$$
$$\boldsymbol{A}+(2^k-1)\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}+(2^k-1)\boldsymbol{A}\xlongequal{\text{由}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}}$$
$$\boldsymbol{E}+(2^{k+1}-1)\boldsymbol{A}$$

从而对任意$m\in\mathbf{N}$,均有$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^m=\boldsymbol{E}+(2^m-1)\boldsymbol{A}$.

25 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为$n$阶可逆阵,且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$,则$r(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E})=n$.

证 由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{E}$.即

$$(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E})=0$$

从而
$$r(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E})\leqslant n$$

又
$$r(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E})\geqslant r(2\boldsymbol{E})=n$$

所以
$$r(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E})=n$$

26 若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为同阶方阵,则$r(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})\leqslant r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})$.

证 由

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2+c_1]{\boldsymbol{A}r_2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}$$
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}\end{pmatrix}$$

得

$$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=$$
$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\geqslant r(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})$$

27 设n阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,证明$\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}$可逆.

证 由$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow4\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{E}$.

所以$\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}$可逆.

28 若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}$均为可逆阵,证明:$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}$,$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$均可逆.

证 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{-1}$$

因为$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^{-1}$可逆,所以$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}$可逆.

由

年 月 日

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}]=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{AB})^{-1}$$

因为$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$,$(\boldsymbol{AB})^{-1}$ 可逆,所以$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆.

29 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 可逆 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆.

证 将 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 恒等变形,得到

$$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}$$

对上式求逆得

$$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$$

即

$$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\text{ 可逆}\Leftrightarrow \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\text{ 可逆}$$

30 若 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 均为 n 阶可逆方阵,求$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3\end{pmatrix}$的逆矩阵.

解 根据题意,有

$$\left(\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\end{array}\right)\xrightarrow{\boldsymbol{A}_1^{-1}r_1}\left(\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-\boldsymbol{A}_3r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 & -\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{E}_n\end{array}\right)\xrightarrow{\boldsymbol{A}_2^{-1}r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\end{array}\right)$$

所以
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\end{pmatrix}$$

对$\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3\end{pmatrix}$互换 $r_1\leftrightarrow r_2$ 后与上方法相同.

31 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$$

证明:$\boldsymbol{M}$ 可逆 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆.当 $\boldsymbol{M}$ 可逆时,求其逆.

证 由

$$|\boldsymbol{M}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{vmatrix}\overset{C_2-C_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

知 $|\boldsymbol{M}|\neq 0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\neq 0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$.

所以 $\boldsymbol{M}$ 可逆 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆.

当 $\boldsymbol{M}$ 可逆时

$$\left(\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{array}\right)$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

所以 $$M^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1}CA^{-1} & -B^{-1} \\ A^{-1}-B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{pmatrix}$$

32 设 A,B 为 n 阶方阵且 $AB=A+B$，则 $AB=BA$.

证　由

$$AB=A+B\Rightarrow(A-E)(B-E)=E$$

即 $A-E$ 与 $B-E$ 互为逆矩阵，从而

$$(A-E)(B-E)=(B-E)(A-E)$$

即有 $$AB=BA$$

33 证明：任一 n 阶方阵均可表为一个对称阵与一反对称阵之和.

证　根据题意，有

$$A=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}A^{\mathrm{T}}=$$

$$\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})=$$

$$B+C$$

由 $$B^{\mathrm{T}}=[\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(A^{\mathrm{T}}+A)=B$$

得 B 是对称阵.

又由

$$C^{\mathrm{T}}=[\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(A^{\mathrm{T}}-A)=-\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})=-C$$

得 C 是反对称阵.

因此，任一 n 阶方阵都可表为一个对称矩阵 $\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})$ 与一反对称矩阵 $\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})$ 之和.

34 设 A 为 $m\times n$ 阵，B 为 $n\times m$ 阵，则 $|E_m-AB|=|E_n-BA|$.

证　构造分块矩阵 $\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n\end{pmatrix}$，由分块阵的第 3 类初等变换不改变行列式的值，得

$$\begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n-BA\end{vmatrix}=|E_n-BA|$$

$$\begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E_m-AB & A \\ 0 & E_n\end{vmatrix}=|E_m-AB|$$

于是

$$|E_m-AB|=|E_n-BA|$$

35 设 A,B 均为 n 阶正交阵，D 为 $r(r\leqslant n)$ 阶可逆阵，且

$$A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}A=B^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}B$$

则

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$A^{T}\begin{pmatrix}D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}A=B^{T}\begin{pmatrix}D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}B$$

证 由 $A^{T}\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}A=B^{T}\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}B\Rightarrow BA^{T}\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}BA^{T}$

记
$$C=BA^{T}=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}$$

则
$$\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}C_{11}D=DC_{11}\\ C_{12}=0,C_{21}=0\\ D^{-1}C_{11}=C_{11}D^{-1}\end{cases}$$

而
$$C\begin{pmatrix}D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11} & 0\\ 0 & C_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11}D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}D^{-1}C_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以
$$C\begin{pmatrix}D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}C$$

即
$$A^{T}\begin{pmatrix}D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}A=B^{T}\begin{pmatrix}D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}B$$

36 设 A 为 $m\times n$ 阵，$r(A)=m$，则存在列满秩阵 B，使 $AB=E_m$.

证 因为 A 行满秩，所以存在 A 的 m 个列构成的 m 阶可逆子方阵 A_1 及可逆阵 P，使

$$AP=(A_1\quad A_2)$$

令 $B=P\begin{pmatrix}A_1^{-1}\\ 0\end{pmatrix}$，则

$$AB=AP\begin{pmatrix}A_1^{-1}\\ 0\end{pmatrix}=(A_1\quad A_2)\begin{pmatrix}A_1^{-1}\\ 0\end{pmatrix}=E_m$$

37 设 A,B^{T} 均为列满秩阵，证明：

(1) 如果 $AC=AD$，则 $C=D$.

(2) 如果 $CB=DB$，则 $C=D$.

证 (1) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵. 由

$$AC=AD\Rightarrow A(C-D)=0$$

因为 $r(A)=n$. 所以 $AX=0$ 只有零解 $\Rightarrow C-D=0$，即 $C=D$.

同理可证(2).

38 设 α 为 3 维列向量，α^{T} 是 α 的转置. 若 $\alpha\alpha^{T}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，求 $\alpha^{T}\alpha$.

解 设 $\alpha^{T}\alpha=k$，有 $(\alpha\alpha^{T})(\alpha\alpha^{T})=\alpha(\alpha^{T}\alpha)\alpha^{T}=k\alpha\alpha^{T}$. 即

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}3&-3&3\\-3&3&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=3\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$$

所以
$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=k=3$$

39 设三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{B}|$.

解　由
$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$$
由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆知
$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$$
又由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 可逆，得
$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$$
故
$$|\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}|=\frac{1}{2}$$

40 设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第1列与第2列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第2列加到第3列得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为(D).

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

41 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有(D).

(A) 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=a$

(B) 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=-a$

(C) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$

(D) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$

42 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩等于1，则必有(C).

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$　　(B) $a=b$ 或 $a+2b\neq0$

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$　　(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq0$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

43 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵，则

$$\boldsymbol{B}^{2\,004}-2\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

44 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵，则 $|\boldsymbol{B}|=\dfrac{1}{9}$.

45 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&&&\\&3&1&&\\&&3&&\\&&&3&-1\\&&&-9&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 对 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^n&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}^n\end{pmatrix}$.

又
$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&1&\\&3&1\\&&3\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3&-1\\-9&3\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}$，于是

$$\boldsymbol{B}^n=(3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J})^n=3^n\boldsymbol{E}+\mathrm{C}_n^1 3^{n-1}\boldsymbol{J}+\mathrm{C}_n^2 3^{n-2}\boldsymbol{J}^2$$

而
$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}(3\quad -1),\boldsymbol{C}^2=6\boldsymbol{C},\cdots,\boldsymbol{C}^n=6^{n-1}\boldsymbol{C}$$

所以
$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}3^n&\mathrm{C}_n^1 3^{n-1}&\mathrm{C}_n^2 3^{n-2}&&\\&3^n&\mathrm{C}_n^1 3^{n-1}&&\\&&3^n&&\\&&&3\cdot 6^{n-1}&-6^{n-1}\\&&&-9\cdot 6^{n-1}&3\cdot 6^{n-1}\end{pmatrix}$$

46 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$，其中列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-1,2)^{\mathrm{T}}$，试求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$，得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

令
$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

则由于 $|\boldsymbol{P}|\neq 0$,所以 $\boldsymbol{P}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{pmatrix}$$

47 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B},(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,证明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$.

证　由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$$

得

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}\tag{1}$$

对式(1)分别用 $\boldsymbol{A}$ 左乘与右乘,并把 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 代入,得

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{ABA}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$$

两式相减,有

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}\tag{2}$$

(1)+(2),得

$$2\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$$

所以

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$$

48 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为四阶单位矩阵,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解　由所给矩阵方程,得

$$\boldsymbol{ABA}^{-1}-\boldsymbol{BA}^{-1}=3\boldsymbol{E}$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}^{-1}=3\boldsymbol{E}\tag{1}$$

对式(1)两边右乘 $\boldsymbol{A}$,得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{A}\tag{2}$$

对式(2)两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,得

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{E}$$

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{E}$$

$$(\boldsymbol{E}-\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|})\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{E}\tag{3}$$

又由 $|\boldsymbol{A}^*|=8=|\boldsymbol{A}|^{4-1}=|\boldsymbol{A}|^3$,得 $|\boldsymbol{A}|=2$,代入式(3)得

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E}$$

而 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{pmatrix}$ 可逆，故

$$\boldsymbol{B}=6(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}$$

下面求 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，有

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*\ \vdots\ E)=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\-1&0&1&0&0&0&1&0\\0&3&0&-6&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3-r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&-6&0&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{r_4}{6}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{array}\right)$$

因此 $\boldsymbol{B}=6(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$.

49 设有两个非零矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$.

(1) 计算 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$ 的秩 $r(\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})$；

(3) 设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵. 证明 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=1$.

解 (1) $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

(2) 因 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$ 各行(或列)是第1行(列)的倍数，又 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 皆为非零矩阵，故 $r(\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})=1$.

(3) 由于

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})=$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

故

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-1)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$$

即

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-1)\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$$

因为 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$,所以 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$.

故 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=1$.

50 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶实矩阵,且存在自然数 k 使 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^k=0$,试证 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证 因 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是实对称阵. 存在正交阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} \qquad (1)$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由式(1) 及 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^k=0$,得

$$\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{0} \qquad (2)$$

进而

$$\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

故 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$,从而由式(1) 知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & & & *\\ & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{0} \qquad (3)$$

由式(3) 得 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=0,\boldsymbol{\alpha}_i\in\mathbf{R}^n,i=1,2,\cdots,n$.

从而 $\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0},i=1,2,\cdots,n$. 所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

年 月 日

第三章

向量

心得 体会 拓广 疑问

向量组的相关性理论既是本章的重点又是本章的难点，它的概念抽象，理论严谨. 通过本章的学习，要有意识地培养自己的逻辑思维能力，论证过程中的表达能力. 学习中，必须逐字琢磨，准确地把握定理、定义的含义. 要注意"不全为零"与"全不为零"、"至少有一个"与"每一个"、"存在一个"与"任意一个"的区别. 要弄清四个命题（原命题、否命题、逆命题、逆否命题）之间的关系. 要明确数学术语"充分条件""必要条件""充要条件"的准确定义.

一、基本内容及基本方法提要

1. n 维向量

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow a_i=b_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\Leftrightarrow a_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}\Leftrightarrow a_1,a_2,\cdots,a_n\text{ 中至少有一个不为零}$$

当 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ 时，有类似的结论.

2. 线性组合

对于 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

3. 线性相关

对于 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，否则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

4. 线性相关的判定及一些基本结论

(1) 只有一个向量的向量组 $\boldsymbol{\alpha}$：

线性相关 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$；

线性无关 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.

(2) 仅含有两个向量的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$：

线性相关 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 成比例（即存在数 k 使 $\boldsymbol{\alpha}_1=k\boldsymbol{\alpha}_2$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2=k\boldsymbol{\alpha}_1$）；

线性无关 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 不成比例.

(3) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\,(m\geqslant 2)$ 线性相关的充分条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

(4) 设

年　月　日

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m),\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

则：

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})<m \Leftrightarrow$ 齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解；

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=m \Leftrightarrow$ 齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

同样，$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数(即 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩阵).

(5) 若向量组的一个部分组线性相关，则该向量组线性相关.

(6) 含有零向量的向量组线性相关.

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维列向量组，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n \text{ 线性相关} \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n \text{ 线性无关} \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$$

(8) 任意 $m(m>n)$ 个 n 维向量构成的向量组线性相关.

(9) 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir})$，令

$$\boldsymbol{\beta}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir},a_{i,r+1},\cdots,a_{in}) \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

其中 $a_{i,r+1},\cdots,a_{in}$ 为任取的 $n-r$ 个数，则：

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，那么 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

(10) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，若存在方阵 $\boldsymbol{C}$，使

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{C}$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{C})<m$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{C})=m$.

5. 向量组等价

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s;\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 为两个 n 维列向量组，若存在 $s\times t$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，使

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\boldsymbol{A}$$

称向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示. 进一步若还有 $t\times s$ 阵 $\boldsymbol{B}$，使

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\boldsymbol{B}$$

则称这两个向量组等价.

注意 向量组等价与矩阵等价之间的关系：

(1) 若两个 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 等价，当 $s=t$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 与 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$ 等价. 当 $s\neq t$ 时，结论不成立.

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 $m\times n$ 矩阵，若存在 m 阶可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价；列向量及其对应部分列向量组有相同的相关

心得 体会 拓广 疑问

性.

若存在 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价；行向量组及其对应部分行向量组有相同的相关性.

6. 极大无关组

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 T 的一个部分组（即 $\boldsymbol{\alpha}_i\in T, i=1,2,\cdots,r$），满足：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

(2) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in T$，向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关.

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 T 的一个极大无关组.

条件(2) 还可改为：

(2) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in T$，$\boldsymbol{\alpha}$ 均可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

7. 极大无关组的性质

(1) 一般情况下，向量组的极大无关组不唯一.

(2) 向量组与它的任意一个极大无关组等价.

(3) 同一向量组的任意两个极大无关组等价.

(4) 同一向量组的任意两个极大无关组含的向量个数相等.

(5) 向量组中任一向量都可由其极大无关组唯一地线性表示.

8. 向量组的秩

(1) 向量组的任意一极大无关组内含的向量个数称为该向量组的秩.

(2) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 其秩为 m.

(3) 秩为 r 的向量组内任意 r 个线性无关的向量都是该向量组的一个极大无关组.

(4) 若向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示，则

$$\text{秩(Ⅰ)}\leqslant\text{秩(Ⅱ)}$$

从而，等价的两个向量组的秩一定相等.

9. 向量空间

(1) 设 V 是 n 维向量构成的集合，若 V 关于向量的加法与数乘运算封闭，则称 V 是一个向量空间.

(2) 称向量空间 V 的极大无关组为 V 的基.

(3) 称向量空间 V 的基所含向量的个数为 V 的维数，记为 $\dim V$，规定 $\dim\{\boldsymbol{0}\}=0$.

(4) 设 L 是向量空间 V 的子集，若 L 在 V 的运算下也是向量空间，则称 L 是 V 的子空间.

10. 基变换与坐标变换

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$（假设它们均为列向量）为向量空间 V 的两组基，则存在 r 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{P}$$

称此式为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的基变换公式，$\boldsymbol{P}$ 为相应的

年　月　日

过渡阵.

设 $\boldsymbol{\alpha} \in V$,且 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 下的坐标分别为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_r)^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_r)^{\mathrm{T}}$,则有坐标变换公式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$$

或

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$$

二、复习题及基础

1 下列结论是否成立

(1) 秩相等的两个向量组等价.

(2) 秩相等的两个线性无关向量组等价.

(3) 若向量组中有两个向量成比例,则该向量组一定线性相关.

(4) 若只有当 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 全为 0,等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$$

才成立,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 均线性无关.

(5) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

(6) 若 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

(7) 当 $k_1,\cdots,k_m$ 不全为 0 时,$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(8) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩等于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩,则 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(9) 有限维向量空间中仅有有限多个向量.

(10) 两个秩相等的向量组分别生成的向量空间相同.

分析 (1) 等价的向量组的秩必相等,但反之不真.故不成立.

(2) 与(1)的道理一样,仍不成立.

(3) 部分相关,必整体相关.故成立.

(4) 等式可写为

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m)=\mathbf{0}$$

这说明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.故不成立.

(5) 不成立.例如 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 线性相关,$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ 线性相关.

但 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 线性无关.

(6) 不成立.因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可能会线性相关.

(7) 不成立.若改为:对任意 $k_1,\cdots,k_m$ 不全为零时,……,则结果成立.

(8) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 比向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 多一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$,但秩并不增加,这说明 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

心得 体会 拓广 疑问

(9) 除一个特殊的向量空间$\{\mathbf{0}\}$外，所有向量空间一定会有无穷多个向量. 故结论不成立.

(10) 不成立. 如$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$与$\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$的秩均为2，但它们分别生成$xOy$平面与$yOz$平面.

综合以上分析，可知只有(3)，(8)成立，其余均不成立.

❷ 选择

(1) 下列结论哪个正确(　　).

(A) 线性无关向量组的极大无关组唯一. 反之，极大无关组唯一的向量组线性无关

(B) 所含向量个数相同的两个线性无关的向量组等价

(C) 向量在基下的坐标向量属于该向量所在空间

(D) 矩阵的秩与其行(列)向量组的秩相等

(2) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，则向量组(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关

(3) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则向量组(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关

(4) 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的秩为$r$，则下列结论哪个不成立(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个含$r$个向量的向量组线性无关

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意$r$个线性无关的向量组与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$等价

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意$r$个向量都线性无关

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中$r+1$个向量均线性相关

(5) 设向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，但不能由向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$线性表示，记向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$，则(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_m$不能由(Ⅰ)线性表示，也不能由(Ⅱ)线性表示

(B)$\boldsymbol{\alpha}_m$不能由(Ⅰ)线性表示，但可由(Ⅱ)线性表示

(C)$\boldsymbol{\alpha}_m$可由(Ⅰ)线性表示，也可由(Ⅱ)线性表示

(D)$\boldsymbol{\alpha}_m$可由(Ⅰ)线性表示，但不可由(Ⅱ)线性表示

(6) 设向量组$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性无关，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$线性相关，则(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}$必可由$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$线性表示

(B)$\boldsymbol{\beta}$必不可由$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$线性表示

年　月　日

(C)$\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

(D)$\boldsymbol{\delta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

(7) 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m<n)$ 线性无关,则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件为(　　).

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示

(B) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 等价

解　(1)(A) 不对. 例如 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 就是一个极大无关组唯一,但不是线性无关的例子.

通常一个线性无关的向量组再加上一个零向量,所形成的向量组就是一个极大无关组唯一,但不是线性无关的向量组.

(B) 不对. 例如若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{2m}$ 线性无关,分成两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{2m}$,这就是两个个数相同的线性无关的向量组,但不等价.

(C) 向量与其坐标的向量通常不是一码事,故不对.

(D) 矩阵的秩与其对应向量组的秩就是一码事. 综上,故只有(D) 正确.

(2) 这里有一个很有用的结论:若向量组 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 可由线性无关的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,即可写为 $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{P}_{r\times m}$,则 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{P})=m$. 即 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的线性相关性可由表示矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列秩来判断. 容易看出,(A),(B),(C),(D) 四个向量组中的表示矩阵分别为

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_4=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

容易算得,只有 $|\boldsymbol{P}_3|\neq 0$. 即 $\boldsymbol{P}_3$ 列满秩,故(C) 成立.

(3) 思路和方法与(2) 一样. 容易看出

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-3&-4\\1&1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\\0&3&1\end{pmatrix}$$

年　　月　　日

容易算得 $|P_4| \neq 0$，即 P_4 列满秩，故(D) 成立.

(4) 向量组的秩的通俗说法，就是线性无关向量的最大个数. 向量组的秩为 r，就是说这里至少有 r 个向量线性无关，但任意 $r+1$ 个向量均不会线性无关. 所以只有(C) 不成立.

(5) 第一个已知条件："向量 $\boldsymbol{P}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示"是说存在数 $k_1,\cdots,k_m$，使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m \tag{$*$}$$

成立.

第二个已知条件："但不能由向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示"，可推出 $k_m \neq 0$. 从而可得

$$\boldsymbol{\alpha}_m=\frac{1}{k_m}\boldsymbol{\beta}-\frac{k_1}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-\frac{k_{m-1}}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$$

这说明 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示. 故(A)，(D) 不成立. 若(C) 成立，由式($*$)即知，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，这与第二个已知条件矛盾. 故只有(B) 成立.

(6) 已知条件："$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关"，说明这里面有一个向量可以被线性表示. 另一个已知条件："$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关"，说明 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\delta}$ 可以被向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示. 这就是由已知条件可以得到的结论. (A)，(B)，(C)，(D) 四个答案中，只有(C) 指出了这个结论，其余的答案均为错误或无法判断，故只有(C) 成立.

(7) 由(1) 中(B) 知，个数相同的两个线性无关的向量组无法判断其线性表示关系. 故(A)，(B)，(C) 均错，故只能选(D).

3 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，求 t 的值.

解 $$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&-4\\-1&t&5\\1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-4&-4\\0&t+2&5\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&t+2&5\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&3-t\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $$t=3$$

4 判定向量组的相关性，求其一极大无关组，并将其余向量由极大无关组线性表示.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\-2\\8\\-9\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\7\end{pmatrix}$；

心得 体会 拓广 疑问

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\7\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\\-8\end{pmatrix}$.

解 (1) $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}\to$

$$\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&2&-7&4\\0&4&-14&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1\\0&1&-\frac{7}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为极大无关组，$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{7}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(2) $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&7&-8\end{pmatrix}\to$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&0&-1\\0&1&-1&0&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为其一极大无关组

$$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_4$$

年 月 日

5 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$，

心得 体会 拓广 疑问

$\boldsymbol{\alpha}_2$ 成比例.

证 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关知,存在 k_1,k_2,k_3 不全为零,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示,立知 $k_3=0$(否则矛盾).

由 k_1,k_2 不全为 0,知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 成比例.

6 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),i=1,2,\cdots,m,m\leqslant n$,且 $|a_{jj}|>\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{m}|a_{ij}|$,证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

证 反证法.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.故有不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_m$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$,即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

取 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 中绝对值最大的,不妨设 $|k_j|\geqslant|k_i|,i\neq j$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$$a_{1j}k_1+\cdots+a_{jj}k_j+\cdots+a_{mj}k_m=0$$

故

$$|a_{jj}k_j|=|a_{jj}||k_j|=\left|\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m}a_{ij}k_i\right|\leqslant\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m}|a_{ij}||k_i|\leqslant\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m}|a_{ij}||k_j|$$

所以 $|a_{jj}|\leqslant\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m}|a_{ij}|$.矛盾.

7 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性无关,令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_m,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\lambda_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_m$$

则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1}$ 线性无关.

证 根据题意,得

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_{m-1}\end{pmatrix}_{m\times(m-1)}$$

显然 $\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\\\lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_{m-1}\end{pmatrix}$ 列满秩,故 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1}$ 线性无关.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

8 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则存在 m 个不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使对任意向量 $\boldsymbol{\beta}$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_1\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_2\boldsymbol{\beta},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_m\boldsymbol{\beta}$ 线性相关.

证 因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，故有不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

考虑方程

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m=0$$

因 $k_1,\cdots,k_m$ 不全为 0，故有非零解 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使 $k_1\lambda_1+\cdots+k_m\lambda_m=0$，则对任意向量 $\boldsymbol{\beta}$，有

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_1\boldsymbol{\beta})+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_2\boldsymbol{\beta})+\cdots+k_m(\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_m\boldsymbol{\beta})=$$
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+\cdots+k_m\lambda_m)\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$$

这表示向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_1\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_2\boldsymbol{\beta},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_m\boldsymbol{\beta}$ 线性相关.

9 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

证 因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

故有数 k_1,k_2,k_3，使得

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

显然有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)\begin{pmatrix}1&0&0&-k_1\\0&1&0&-k_2\\0&0&1&-k_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，而表示矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0&-k_1\\0&1&0&-k_2\\0&0&1&-k_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 显然列满秩，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

10 证明：n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{vmatrix}\neq 0$$

证 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，而

$$D=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\right|=$$
$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0 \Leftrightarrow D\neq 0$.

11 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩相等,则两向量组等价.

证　显然向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组(Ⅱ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,故只需证向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅰ)线性表示即可.

不妨记 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为向量组(Ⅰ)的极大无关组,注意列向量组(Ⅱ)的秩为 n,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 也为向量组(Ⅱ)的极大无关组. 即向量组(Ⅱ)可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示. 从而向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅰ)线性表示.

12 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r,$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$ $(s<r)$ 为其一无关组,则在原向量组中,存在 $r-s$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_{s+1}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$,使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s},\boldsymbol{\alpha}_{i_{s+1}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组.

证　因向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 $r>s$,故在此向量组中存在一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_{s+1}}$,使得 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s},\boldsymbol{\alpha}_{i_{s+1}}$ 线性无关(否则与 $r>s$ 矛盾). 以此类推,存在 $\boldsymbol{\alpha}_{i_{s+1}},\boldsymbol{\alpha}_{i_{s+2}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s},\boldsymbol{\alpha}_{i_{s+1}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关. 故 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s},\boldsymbol{\alpha}_{i_{s+1}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组.

13 若 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的部分组,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中每个向量都可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 唯一地线性表示,则 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为其一极大无关组.

证　因向量可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 唯一地线性表示,故 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关. 又每一个向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示,故 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为一极大无关组.

14 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,但其中任意三个向量线性无关,则存在一组全不为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$,使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$.

证　因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,故有不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$,使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$$

下面证明 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 全不为 0. 否则,不妨设 $\lambda_4=0$,则 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,由假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则有 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 均为 0,从而 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 全为 0. 此为矛盾.

15 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,证明 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

证　必要性显然,下证充分性.

若 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,要证 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 设有一组数 $k_0,k_1,\cdots,k_r$,使得

$$k_0\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{0}$$

由 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示知 $k_0=0$. 从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{0}$$

年　月　日

由已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，故 $k_1,\cdots,k_r$ 均为 0. 即 $k_0,k_1,\cdots,k_r$ 全为 0，这表示 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

16 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为向量组，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m(m>1)$，证明向量组 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

证 因为我们有

$$(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{pmatrix}\triangleq$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{P}$$

而 $|\boldsymbol{P}|=(m-1)(-1)^{m-1}\neq 0$. 即 $\boldsymbol{P}$ 可逆，而且 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}^{-1}$ 均列满秩. 故当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关时，向量组 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关. 反之亦然.

17 下列向量组是否构成向量空间，若是，求其一组基及维数.

(1) $V=\{(a,a,a,b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}$.

(2) $V=\{(1,a,b,c)\mid a,b,c\in\mathbf{R}\}$.

(3) $V=\{(a,2a,3a,4a)\mid a\in\mathbf{R}\}$.

(4) $V=\{(0,a,b,c)\mid a,b,c\in\mathbf{R}\}$.

(5) $V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0\}$.

(6) $V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1\}$.

(7) $V=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in\mathbf{R},x_1-x_2+x_3=0\}$.

(8) $V=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1=\frac{1}{2}x_2=\frac{1}{3}x_3,x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}\}$.

解 (1) 因为对加法和数乘封闭，故是向量空间. 因为只有 2 个独立变量，故 $\dim V=2$，基可取为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,0,1)$$

(2) 不是. 因为 $2(1,a,b,c)=(2,2a,2b,2c)\overline{\in}V$，即对数乘不封闭，故不是.

(3) 因对加法和数乘封闭，故是向量空间. 因只有一个独立变元，故 $\dim V=1$. 基可取为

$$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3,4)$$

(4) 是. 有 3 个独立变元，故 $\dim V=3$，基可取为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,0,1)$$

(5) 是. 此空间即为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的超平面，故 $\dim V=n-1$. 而方程组 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$ 的基础解系即可作为基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1,0,\cdots,0),\cdots,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(1,0,\cdots,0,-1)$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

(6) 对加法和数乘均不封闭,故不是.

(7) 是. 此即为三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的平面,故 $\dim V=2$. 方程组 $x_1-x_2+x_3=0$ 的基础解系即可作为基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)$.

(8) 是. 此即为三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的直线,故 $\dim V=1$,方程组 $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}x_2\\ x_1=\dfrac{1}{3}x_3\end{cases}$ 的基础解系即可作为基

$$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$$

18 设由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 生成的向量空间为 $\mathbf{V}_1$,由 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,3,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 生成的向量空间为 $\mathbf{V}_2$,证明 $\mathbf{V}_1=\mathbf{V}_2$.

证 只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价即可.

容易看出

$$\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$$

即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

显然矩阵 $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ 可逆,故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价.

19 设 $\mathbf{R}^3$ 中两组基分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix};\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\8\\27\end{pmatrix}$$

求由前一组基到后一组基的过渡阵.

解 令 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}$ 即为所求的过渡矩阵,故

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\vdots\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 2 & 4 & 8\\ 2 & -2 & 1 & 3 & 9 & 27\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & \dfrac{11}{9} & 3 & \dfrac{71}{9}\\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-2}{9} & -\dfrac{4}{3} & -\dfrac{44}{9}\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{9} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{13}{9}\end{array}\right)$$

故所求过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\dfrac{11}{9} & 3 & \dfrac{71}{9}\\ \dfrac{-2}{9} & \dfrac{-4}{3} & -\dfrac{44}{9}\\ \dfrac{1}{9} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{13}{9}\end{pmatrix}$$

年 月 日

20 设向量空间 V 的两组基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

已知向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在前一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为(1,2,3),求此向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在后一组基下的坐标.

解 令$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{P}$,即 $\boldsymbol{P}$ 为由基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\ \vdots\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1&1&1\\0&1&1&-1&0&0\\-2&-3&-1&0&-1&0\\1&0&0&0&0&-1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&1&1&1\\0&1&1&-1&0&0\\0&1&-1&2&1&2\\0&-2&0&-1&-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&3&1&1\\0&1&1&-1&0&0\\0&0&-2&3&1&2\\0&0&2&-3&-1&-2\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&0&-1\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\0&0&1&-\frac{3}{2}&\frac{-1}{2}&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

故过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\\frac{-3}{2}&\frac{-1}{2}&-1\end{pmatrix}$,所以

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\\frac{2}{9}\\-\frac{11}{2}\end{pmatrix}$,即为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在后一组基下的坐标.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

21 已知 $\mathbf{R}^2$ 的两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$，求一个非零向量 $\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^2$，使 $\boldsymbol{\beta}$ 关于这两组基有相同的坐标，并求这个 $\boldsymbol{\beta}$ 关于基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 的坐标，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix};\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

解　根据题意，得

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

注意到 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\boldsymbol{E}$，解线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，有无穷多解，可取解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$，再解线性方程组 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 得唯一解为 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

故 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

22 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$，$a<0$；$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$，求 a 的值.

解　由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 有

$$\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$$

即

$$\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{1}{a}\cdot 2a^2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$$

注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，故有 $\frac{1}{a}-1-2a=0$ 解得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=-1$，由已知 $a<0$ 知 $a=-1$.

23 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,0,c)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(b,c,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,a,b)$ 线性无关，则 a，b，c 必满足关系式________.

解　$abc\neq 0$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq 0$.

$$\begin{vmatrix}a&0&c\\b&c&0\\0&a&b\end{vmatrix}=2abc\neq 0.$$ 即 $abc\neq 0$.

24 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 均为 n 维向量，那么下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

(B) 若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 k_1，

年　月　日

$k_2, \cdots, k_m$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \neq \mathbf{0}$.

(D) 若 $0\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

解 (B) 正确.

因(A) 中未说 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 不全为零，故错误.

当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关时，存在一组不全为零的数，而不是对任意一组不全为零的数，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \neq \mathbf{0}$，故(C) 错误.

不论 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是线性相关，还是线性无关，总有 $0\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$，故(D) 错误.

(B) 的等价说法是只有当 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 全为零时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 才等于零，这正是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的定义，故选(B).

25 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 是 k 个 n 维列向量，试证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关.

证 “$\Rightarrow$”. 若有数 $l_1, l_2, \cdots, l_k$ 使得

$$l_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0}$$

上式两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，则有 $l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_k\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0}$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 的线性无关性知 $l_1 = l_2 = \cdots = l_k = 0$，这表示 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关.

“$\Leftarrow$”. 设有数 $l_1, l_2, \cdots, l_k$ 使得

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_k\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0}$$

上式两边乘 $\boldsymbol{A}$，则有 $l_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0}$，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_k$ 的线性无关性知 $l_1 = l_2 = \cdots = l_k = 0$，这表明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关.

26 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则对于任意常数 k，必有(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, k\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, k\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1 + k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1 + k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

解 (A) 正确.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以线性相关；$\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

取 $k = 0$，说明(B)，(C) 不对，而仅当 $k = 0$ 时，(D) 才成立，故(D) 不对，现证(A) 正确.

易见 $k\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合，如若不然，存在常数 l_1, l_2, l_3，使

$$k\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + l_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

则

$$\boldsymbol{\beta}_2 = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + l_3\boldsymbol{\alpha}_3 - k\boldsymbol{\beta}_1 \tag{1}$$

而 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即存在常数 k_1, k_2, k_3，使

$$\boldsymbol{\beta}_2 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 \tag{2}$$

(2) 代入(1)：$\boldsymbol{\beta}_2 = (l_1 - kk_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (l_2 - kk_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (l_3 - kk_3)\boldsymbol{\alpha}_3$.

这与 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示矛盾. 可见 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, k\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ 线

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

性无关,当然也可以用线性无关的定义来证明结论.

27 已知 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维向量,满足 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$. 证明:$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证　用反证法,设有不全为零的数 k_1,k_2,k_3,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

式(1)左乘 $\boldsymbol{A}$,并代入已知条件,得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

式(2)−(1),得

$$k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0} \tag{3}$$

式(3)左乘 $\boldsymbol{A}$,并代入已知条件得

$$k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0} \tag{4}$$

式(4)−(3),得

$$k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$,得 $k_3=0$,代入式(3),得 $k_2=0$,将 $k_2=k_3=0$ 代入式(1),得 $k_1=0$.

这和假设矛盾,故 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

28 设有任意两个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$,若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,\cdots,k_m$,使 $(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{0}$,则(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性相关

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关

解　(D) 正确.

由已知条件

$$(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{0}$$

故

$$\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1)+\cdots+\lambda_m(\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m)+k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m)=\boldsymbol{0}$$

因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m,k_1,\cdots,k_m$ 不全为零.

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关,因此(C)不对,(D)正确.

(A),(B)不正确可从下面的例子中看出.

令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关;$\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

取 $\lambda_1=1$,$\lambda_2=1$;$k_1=1$,$k_2=1$,于是有

$$(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+(\lambda_2-k_2)\boldsymbol{\beta}_2=$$
$$2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\beta}_1+0\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$$

年　　月　　日

心得 体会 拓广 疑问

可见(A),(B) 都不正确.

29 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是某向量组的一个极大无关组，且 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为该向量组的向量，证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也是该向量组的极大无关组.

证 由题意可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \tag{1}$$

令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix},\ |\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，从而有

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix} \tag{2}$$

由式(1)与式(2)可知，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可以互相线性表示，因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价，从而秩$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}=$秩$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}=3$，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关. 又原向量组中任一向量可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，从而任一向量可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是该向量组的极大无关组.

30 已知 m 个向量线性相关，但其中任意 $m-1$ 向量都线性无关，证明：

(1) 如果存在等式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，则这些系数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 或者全为 0，或者全不为 0.

(2) 如果存在两个等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$
$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

其中 $\lambda_1\neq 0$，则 $\dfrac{k_1}{\lambda_1}=\dfrac{k_2}{\lambda_2}=\cdots=\dfrac{k_m}{\lambda_m}$.

证 (1)1° 若有某个 $k_i=0$，则有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，所以 $k_1=k_2=\cdots=k_{i-1}=k_{i+1}=\cdots=k_m=0$，于是系数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 全为 0.

2° 若有某个 $k_i\neq 0$，则 $k_1,k_2,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_m$ 全不为 0，事实上，若它们中有一个 $k_j=0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中有 $m-1$ 个向量线性相关，与题设矛盾，于是 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 全不为 0.

(2) 因为 $\lambda_1\neq 0$，所以由(1) 知 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 全不为零，又因为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0} \tag{1}$$
$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

年 月 日

将式(1)乘 λ_1，式(2)乘 k_1 得

$$\lambda_1 k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_1 k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_1 k_m \boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

$$k_1 \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_1 \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_1 \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

式(3)-(4)，得

$$(\lambda_1 k_2 - k_1 \lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (\lambda_1 k_3 - k_1 \lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + (\lambda_1 k_m - k_1 \lambda_m)\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，所以有

$$\lambda_1 k_i - k_1 \lambda_i = 0 \quad (i=2,3,\cdots,m)$$

即
$$\frac{k_1}{\lambda_1} = \frac{k_2}{\lambda_2} = \cdots = \frac{k_m}{\lambda_m}$$

31 确定数 a，使向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

的秩为 n

解　记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，而

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} =$$

$$(a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a-1 & & & \\ & & a-1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a-1 \end{vmatrix} =$$

$$(a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

所以取 $a \neq 1$ 且 $a \neq 1-n$ 即可.

32 设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,r;r<n)$ 是 n 维实向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 已知 $\boldsymbol{\beta} = (b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

的非零解向量，试判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性.

解法一　设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r + k\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$$

成立，因为 $\boldsymbol{\beta} = (b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解，且 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$，故有

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

即

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

于是，由

$$k_1\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_r + k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$$

得 $k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$，但 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \neq 0$，故 $k = 0$. 因此，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

解法二 （反证法）若 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关知 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，记

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

于是

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r) = \sum_{i=1}^{r} k_i(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0$$

与 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ 矛盾，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

33 已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ 具有相同的秩，且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，求 a, b 的值.

解法一 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，且秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是它的一个极大线性无关组.

由于向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 具有相同的秩，故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，从而

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

由此解得 $a = 3b$.

又 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，从而可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1$ 线性相关. 于是

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

解之得 $2b - 10 = 0$. 于是得

心得 体会 拓广 疑问

$$a=15, b=5$$

解法二　因 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

有解.

对增广矩阵的行施行初等变换

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 10 & 20 & 3b \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & 1 & 2 & \dfrac{2b-1}{6} \\ 0 & 1 & 2 & \dfrac{3b}{10} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & 1 & 2 & \dfrac{2b-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{3b}{10}-\dfrac{2b-1}{6} \end{array}\right)$$

由非齐次线性方程组有解的条件知 $\dfrac{3b}{10}-\dfrac{2b-1}{6}=0$，得 $b=5$.

又 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2. 由题设知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的秩也是 2，从而 $\begin{vmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$，解之得 $a=15$.

年　月　日

第四章

线性方程组

线性方程组的解的问题与向量组的相关性有着密切的关系. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关等价于方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$ 有非零解. 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示的系数，就是方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$ 的解."基础解系"是本章中最重要的概念，它有三个要素：(1) $n-R(\boldsymbol{A})$ 个，(2) 解向量，(3) 线性无关. 不能忽视其中任何一个要素.

一、基本内容及基本方法提要

1. $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则上面的方程组可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$$

令

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

则上面的方程组又可写成

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$$

特别地，若 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，称之为齐次线性方程组，否则称之为非齐次线性方程组.

2. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$

(1) 记 $S=\{\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{AX}=\mathbf{0},\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n\}$，则 S 为 $n-r(r=R(\boldsymbol{A}))$ 维向量空间.

(2) 任意齐次线性方程组均有解.

(3) $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 只有零解(唯一解) $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=n$ ($\boldsymbol{A}$ 为方阵时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$)，此时 $S=\{\mathbf{0}\}$.

(4) $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解(有无穷多解) $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=r<n$ ($\boldsymbol{A}$ 为方阵时，$|\boldsymbol{A}|=0$).

设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为 S 的一组基，称之为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}\quad(k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in\mathbf{R})$$

是方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的通解.

(5) 当 $R(\boldsymbol{A})=m<n$ 时，$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解.

(6) 齐次线性方程组的解的任意线性组合仍为其解.

3. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$(其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$)

(1) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow$

心得 体会 拓广 疑问

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 等价 $\Leftrightarrow$

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})$.

(2) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 无解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})$,$(R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})-1)$.

(3) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=n$($\boldsymbol{A}$ 为方阵时,$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,唯一解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$).

(4) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=r<n$.

(5) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的任意两个解之差是其导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解. $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解与其导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解之和仍为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解.

(6) 当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=r<n$ 时,设 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个解(特解)为 η^*,其导出组的基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$,则

$$X=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}\quad(k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in\mathbf{R})$$

是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阵,$R(\boldsymbol{A})=m$,则对任意向量 $\boldsymbol{\beta}$,方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 均有解.

(8) 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解,对任意实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,当 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$ 时,$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解. 当 $k_1+k_2+\cdots+k_s=0$ 时,$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

注意 当 $\boldsymbol{A}$ 为方阵时,$|\boldsymbol{A}|=0$ 不是 $\boldsymbol{AX}=\beta$ 有无穷多解的充要条件.

4. 解方程组的方法

(1) 用初等行变换(消元法)解方程组.

(2) 当系数阵为可逆方阵时,可用克莱姆法则求解,也可利用公式 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$ 求解.

(3) 当系数阵、增广阵中含有待定参数时,需逐一讨论.

二、复习题及基础

1 设齐次方程组 $\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=0\\ ax_1+x_2+x_3=0\\ x_1-x_2+3x_3=0\end{cases}$ 有非零解,求 a 及其通解.

解 因为此方程组有非零解,故系数矩阵的行列式为零

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&1\\a&1&1\\1&-1&3\end{vmatrix}=3-a+a-1-3a^2+1=3-3a^2=0$$

所以

$$a^2=1,\text{即 } a=\pm 1$$

(1) 当 $a=1$ 时,对此方程组的系数矩阵进行行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

原方程组等价于$\begin{cases}x_1+2x_2=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1=-2x_2\\x_3=x_2\end{cases}$. 取 $x_2=1$，得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$为方程组的基础解系.则方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\xi}_1=k(-2,1,1)^{\mathrm{T}}\quad(k\in\mathbf{R})$$

(2) 当 $a=-1$ 时

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

原方程组等价于$\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_3=0\end{cases}$.

取 $x_2=1$,得 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 为方程组的基础解系.故通解为

$$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\xi}_2=k(1,1,0)^{\mathrm{T}}\quad(k\in\mathbf{R})$$

2 解齐次方程组

(1)$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3-x_4=0\\2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0\\x_1+x_2+2x_3-x_4=0\end{cases}$.

(2)$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0\\3x_1+x_2+2x_3-7x_4=0\\4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0\\x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0\end{cases}$.

(3)$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0\\3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0\end{cases}$.

(4)$\begin{cases}3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0\\4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0\\7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0\\2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0\end{cases}$.

解 (1) 对此线性方程组的系数矩阵进行初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\2&2&1&2\\1&1&2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&-1&-3&1\\0&0&-3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&3\\0&0&3&-4\end{pmatrix}$$

原方程组等价于

$$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2+3x_4=0\\3x_3-4x_4=0\end{cases}$$

年 月 日

即
$$\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=-\dfrac{9}{4}x_3\\ x_4=\dfrac{3}{4}x_3\end{cases}$$

取 $x_3=4$，得 $\xi=(4,-9,4,3)^{\mathrm{T}}$ 为原方程组的基础解系. 故通解为
$$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\xi}\quad (k\in\mathbf{R})$$

(2) 对线性方程组的系数矩阵进行初等行变换
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&-1&5\\3&1&2&-7\\4&1&-3&6\\1&-2&4&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3&-1&5\\1&-2&3&-12\\1&0&-5&13\\1&-2&4&-7\end{pmatrix}\to$$
$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-12\\0&7&-7&29\\0&2&-8&25\\0&0&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-12\\0&1&17&-46\\0&0&1&5\\0&0&0&327\end{pmatrix}$$
故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以此方程组只有零解，即 $\boldsymbol{X}=(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

(3) 对线性方程组的系数矩阵进行初等行变换
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\5&10&1&-5\\3&6&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
原方程组等价于
$$\begin{cases}x_1=x_4-2x_2\\ x_3=0\end{cases}$$
取
$$\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
得 $\boldsymbol{\xi}_1=(-2,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 为方程组的基础解系.

所以，原方程组的通解为
$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2\quad (k_1,k_2\in\mathbf{R})$$

(4) 对方程组的系数矩阵进行初等行变换
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4&-5&7\\4&11&-13&16\\7&-2&1&3\\2&-3&3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&7&-8&9\\1&7&-8&9\\0&-17&19&-20\\2&-3&3&-2\end{pmatrix}\to$$
$$\begin{pmatrix}1&7&-8&9\\0&-17&19&-20\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
原方程组等价于

年 月 日

$$\begin{cases}x_1+7x_2-8x_3+9x_4=0\\ -17x_2+19x_3-20x_4=0\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{17}x_3-\dfrac{13}{17}x_4\\ x_2=\dfrac{19}{17}x_3-\dfrac{20}{17}x_4\end{cases}$$

取
$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\17\end{pmatrix}$$

得 $\boldsymbol{\xi}_1=(3,19,17,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-13,-20,0,17)^{\mathrm{T}}$ 为方程组的基础解系.故通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2\quad(k_1,k_2\in\mathbf{R})$$

3 解非齐次方程组

(1) $\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3=10\\4x_1+2x_2-x_3=2\\11x_1+3x_2=8\end{cases}$.

(2) $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=4\\3x_1+8x_2-2x_3=13\\4x_1-x_2+9x_3=-6\\x_1-2x_2+4x_3=-5\end{cases}$.

(3) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\3x_1-3x_2+x_3-3x_4=4\\x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2\end{cases}$.

解 (1) 对此方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}3&-1&2&10\\4&2&-1&2\\11&3&0&8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}3&-1&2&10\\1&3&-3&-8\\-1&-3&3&2\end{array}\right)\to$$
$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&0&0&-6\end{array}\right)$$

因为
$$r(\boldsymbol{A})=2\neq 3=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$$
所以，此方程组无解.

(2) 对此方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}2&3&1&4\\3&8&-2&13\\4&-1&9&-6\\1&-2&4&-5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&-2&4&-5\\0&7&-7&14\\0&14&-14&28\\0&7&-7&14\end{array}\right)\to$$
$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&-2&4&-5\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

此方程组对应的导出组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi} = (-2,1,1)^{\mathrm{T}}$$

此方程组的特解为

$$\boldsymbol{\eta}_0 = (-1,2,0)^{\mathrm{T}}$$

故方程组的通解为

$$\boldsymbol{X} = k\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}_0 \quad (k \in \mathbf{R})$$

(3) 对此方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & -15 & 10 & -18 & 10 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -9 & 5 \end{array}\right)$$

原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 5x_4 = -2 \\ x_2 = 0 \\ 5x_3 - 9x_4 = 5 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{5}x_4 + 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \dfrac{9}{5}x_4 + 1 \end{cases}$$

此方程组对应导出组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi} = (2,0,9,5)^{\mathrm{T}}$$

特解为

$$\boldsymbol{\eta}_0 = (1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$$

故通解为

$$\boldsymbol{X} = k\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}_0 \quad (k \in \mathbf{R})$$

4 求解非齐次方程组

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$.

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t \end{cases}$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

解　(1) 对此非齐次线性方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&1&1&a\\0&1&2&2&6&b\\3&2&1&1&-3&0\\5&4&3&3&-1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&1&1&a\\0&1&2&2&6&b\\0&-1&-2&-2&-6&-3a\\0&-1&-2&-2&-6&2-5a\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&1&1&a\\0&1&2&2&6&b\\0&0&0&0&0&b-3a\\0&0&0&0&0&b+2-5a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&1&1&a\\0&1&2&2&6&b\\0&0&0&0&0&b-3\\0&0&0&0&0&1-a\end{array}\right)$$

① 当 $a\neq 1$ 或 $b\neq 3$ 时，方程组无解.

② 当 $a=1$ 且 $b=3$，方程组有无穷多解.

此时方程组等价于

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x_1=x_3+x_4+5x_5-2\\x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+3\end{cases}$$

取
$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

得对应的导出组的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-2,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,-2,0,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=(5,-6,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\eta}_0=(-2,3,0,0,0)^{\mathrm{T}}\text{ 为特解}$$

故通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\eta}_0\quad(k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R})$$

(2) 对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&P&7&-1\\1&-1&-6&-1&t\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&-1&P+6&-2&-1\\0&-2&-4&-4&t\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&P+8&0&0\\0&0&0&0&t+2\end{array}\right)$$

① 当 $t\neq -2$ 时，方程组无解.

② 当 $t=-2,P=-8$ 时，方程组有无穷多解.

此时，原方程组等价于

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=1\end{cases}$$

年　月　日

即
$$\begin{cases} x_1 = 4x_3 - x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{\xi}_1 = (4, -2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (-1, -2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ 为导出组的基础解系，$\boldsymbol{\eta}_0 = (-1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ 为方程组的一个特解，故通解为

$$\boldsymbol{X} = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\eta}_0 \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{R})$$

③$t = -2, p \neq -8$ 时，方程组有无穷多解.

此时，原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ (p + 8)x_3 = 0 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x_1 = -x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_4 + 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{\xi} = (-1, -2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ 为导出组的基础解系，$\boldsymbol{\eta}_0 = (-1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ 为方程组的一个特解. 故方程组的通解为

$$\boldsymbol{X} = k\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}_0 \quad (k \in \mathbf{R})$$

5 讨论方程组的解，并求解

$$\begin{cases} (a + 3)x_1 + x_2 + 2x_3 = -a \\ ax_1 + (a - 1)x_2 + x_3 = 2a \\ 3(a + 1)x_1 + ax_2 + (a + 3)x_3 = 3 \end{cases}$$

解 线性方程组的系数矩阵的行列式为

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 2 \\ a & a-1 & 1 \\ 3(a+1) & a & a+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+3 & 2 \\ a-1 & a & 1 \\ a & 3a+3 & a+3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a+3 & 2 \\ -1 & -2a-3 & -a-2 \\ a & 3a+3 & a+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+3 & 2 \\ 0 & -a & -a \\ 0 & 3-a^2 & -a+3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a-a^2 & -a+3 \end{vmatrix} = a^2(1-a)$$

令 $|\boldsymbol{A}| = 0$，则 $a = 0$ 或 $a = 1$.

(1)$a = 0$ 时，线性方程组的增广矩阵为

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

因为 $r(\boldsymbol{A}) = 2 \neq 3 = r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b})$，所以，此时方程组无解；

(2) 当 $a = 1$ 时，$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，

心得 体会 拓广 疑问

方程组等价于$\begin{cases}x_1=-x_3+2\\x_2=2x_3-9\end{cases}$，$\boldsymbol{\xi}=(-1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 为导出组的基础解系，$\boldsymbol{\eta}_0=(2,-9,0)^{\mathrm{T}}$ 为方程组的一个特解. 故通解为

$$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_0\quad(k\in\mathbf{R})$$

(3) 当 $a\neq0$ 且 $a\neq1$ 时，方程组有唯一解

$$x_1=-\frac{a^2+9}{a^2},x_2=\frac{3a^2+3a+9}{a^2},x_3=\frac{3a+9}{a^2}$$

6 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置，求解方程 $2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

解　将 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$ 代入下式得

$$2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=2^4\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=2^3\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}=2^4\boldsymbol{x}$$

由 $2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$，得

$$2^4\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=2^3\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+2^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$$
$$2^3(2\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$$
$$2^3(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$$

又
$$\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

所以
$$2^3\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}&0\\2&-1&0\\1&\frac{1}{2}&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$$

即
$$\begin{pmatrix}-8&4&0\\16&-8&0\\8&4&-16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$$

对线性方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\left(\begin{array}{ccc:c}-8&4&0&0\\16&-8&0&0\\8&4&-16&8\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}-2&1&0&0\\0&1&-2&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}-2&0&2&-2\\0&1&-2&2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

方程组等价于 $\begin{cases}x_1+x_3=-1\\x_2-2x_3=2\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1=-x_3-1\\x_2=2x_3+2\end{cases}$，$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ 为导出

年　月　日

组的基础解系. $\boldsymbol{\eta}_0=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$为方程组的一个特解. 故通解为

$$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_0\quad(k\in\mathbf{R})$$

7 已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$具有相同的秩,且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,求 a, b 的值.

解 因为 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,所以,$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}_3$ 有解. 即

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\vdots\boldsymbol{\beta}_3)$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\vdots\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&10&20&3b\end{array}\right)\to$$

$$\begin{pmatrix}1&3&9&b\\0&1&2&\dfrac{2b-1}{6}\\0&0&0&\dfrac{5-b}{30}\end{pmatrix}$$

因为 $$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\vdots\boldsymbol{\beta}_3)$$

所以 $$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\vdots\boldsymbol{\beta}_3)=2$$

故 $$\frac{5-b}{30}=0,b=5$$

又 $$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&3&1\\0&a&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&3&1\\0&0&b-\dfrac{a}{3}\end{pmatrix}$$

因为 $$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$$

所以 $$b-\frac{a}{3}=0$$

$$a=3b=15$$

8 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda+1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda+1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda+1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

讨论λ取何值时,$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示. λ取何值时,$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示. λ 取何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且有无穷多种

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

表示形式.

解　$\boldsymbol{\beta}$ 是否能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,也即是:

非齐次线性方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 是否有解

$$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1 \vdots \boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda+1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & 1 & 1\\ \lambda+1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda+1 & 1\\ 0 & \lambda & -\lambda & 0\\ 0 & -\lambda & 1-(\lambda+1)^2 & -\lambda\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda+1 & 1\\ 0 & \lambda & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2-3\lambda & -\lambda\end{array}\right)$$

(1) 当 $\lambda=0$ 时,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta})=2$,则$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解.也即$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,并且有无穷多表示方法

$$\boldsymbol{\beta}=(1-k_1-k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3\quad(k_1,k_2\in\mathbf{R})$$

(2)$\lambda=-3$ 时,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2\neq 3=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta})$,故方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 无解,也即 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(3)$\lambda\neq 0,\lambda\neq -3$ 时,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta})$,则方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解.即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{\lambda+3}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$$

9 设四阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{b}(i=1,2,3,4)$,其中

$$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$$

求非齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解　因为 $r(\boldsymbol{A})=2$,故非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的导出组的基础解系含有 2 个向量.

又

$$\boldsymbol{\xi}_1=(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)-(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=(\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4)-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\2\end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 对应导出组的 2 个线性无关的解向量,即 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 导出组的基础解系,$\boldsymbol{\eta}_0=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解.

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

年　月　日

$$X = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\eta}_0 \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{R})$$

10 已知方程组(Ⅰ)的通解为

$$X = k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}} + k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}} \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{R})$$

设方程组(Ⅱ)为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

问方程组(Ⅰ),(Ⅱ)是否有非零公共解,若有,求其所有公共解.

解 由题意,(Ⅰ)的通解为

$$X = k_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k_2\\k_1+2k_2\\k_1+2k_2\\k_2\end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{R})$$

将 X 的表达式代入方程组(Ⅱ)得

$$\begin{cases} -k_2 + k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - k_2 = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad k_1 = -k_2$$

所以(Ⅰ)和(Ⅱ)有公共解,并且公共解为

$$X = (k, -k, -k, -k)^{\mathrm{T}} = k_1(1, -1, -1, -1)^{\mathrm{T}} \quad (k_1 \in \mathbf{R})$$

11 设四元齐次方程组(Ⅰ)为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

且已知另一四元齐次方程组(Ⅱ)的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, -1, a+2, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, 2, 4, a+8)^{\mathrm{T}}$,

(1) 求方程组(Ⅰ)的一个基础解系.

(2) 当 a 为何值时,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解?在有非零公共解时,求出全部非零公共解.

解 (1) 方程组(Ⅰ)$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

显然,系数矩阵的秩为 2.

对(Ⅰ)的系数阵进行初等行变换

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

故方程组(Ⅰ)与$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 = x_4 \end{cases}$等价

取
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

得 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,0,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = (0,1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 为(Ⅰ)的一个基础解系.

(2) 若(Ⅰ),(Ⅱ)有非零公共解,即存在不全为 0 的数 x_1, x_2, x_3, x_4,

使

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2=x_3\boldsymbol{\alpha}_1+x_4\boldsymbol{\alpha}_2 \tag{$*$}$$

即$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 有非零解.

故

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2)<4$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&1&-2\\2&3&-a-2&-4\\3&5&-1&-a-8\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&1&-2\\0&3&-a+2&-6\\0&5&5&-a-11\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&1&-2\\0&0&a+1&0\\0&0&0&a+1\end{pmatrix}$$

所以 $a=-1$ 时,方程组有非零解

此时 $\begin{cases}x_1-2x_3+x_4=0\\x_2+x_3-2x_4=0\end{cases}$

即 $\begin{cases}x_1=2x_3-x_4\\x_2=-x_3+2x_4\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 为($*$)的基础解系.

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 表示式代入($*$)得(Ⅰ),(Ⅱ)的全部解为 $\boldsymbol{X}=k_1(2,-1,1,1)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,4,7)^{\mathrm{T}}$($k_1,k_2$ 为不同时为 0 的常数).

12 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}$,求一秩为 2 的矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$.

解　先求 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 等价于

$$x_1+x_2+2x_3=0$$

$$x_1=-x_2-2x_3$$

得 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$r(\boldsymbol{B})=2$，并且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$.

13 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times 2n}$，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})^{\mathrm{T}}$，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{i,2n})^{\mathrm{T}}$，$i=1,2,\cdots,n$，求方程组

$$\begin{cases}b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0\\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0\\ \qquad\vdots\\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0\end{cases}$$

的通解.

解 将题中所求通解的线性方程组记为 $\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{0}$，由题意

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,2n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,2n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1}\\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{1,2n} & b_{2,2n} & \cdots & b_{n,2n}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

两边取转置

$$\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,2n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{n,2n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1,2n} & a_{2,2n} & \cdots & a_{n,2n}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的每一列为 $\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.

又 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 n 个向量，所以，$r(\boldsymbol{A})=2n-n=n$，则 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关. 又 $r(\boldsymbol{B})=n$，所以，$\boldsymbol{A}$ 的行向量组为 $\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

14 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解 因为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4$，则 $r(\boldsymbol{A})=3$. 所以，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含有 1 个向量.

又 $$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$$

所以 $$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

故 $\boldsymbol{\xi}=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

又 $$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$$

则 $$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}$$

所以 $\boldsymbol{\eta}_0=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解.

故 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_0\quad(k\in\mathbf{R})$$

15 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行向量组是某个齐次线性方程组的基础解系. 证明 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 的行向量组也是该方程组的基础解系 $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{m\times m}$,使

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{m}p_{ik}a_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$$

解 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的行向量组是 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,若 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$ 的行向量组也是 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,则 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

故存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$,所以

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{m}p_{ik}a_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$$

反之,若存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{m\times m}$,使得

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{m}p_{ik}a_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$$

则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$,故 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组是 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 所以,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组也是 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

16 设 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解 $\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

证 “$\Rightarrow$”. 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 具有相同的解空间,即

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B})$$

故 $n-r(\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{B})$,所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

“$\Leftarrow$”. 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$r(\boldsymbol{A})=r$,因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解. 所以,$\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的 $n-r$ 个线性无关的解向量.

又 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,所以,$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量的个数为

$$n-r(\boldsymbol{B})=n-r(\boldsymbol{A})=n-r$$

因此,$\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解.

17 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times p$ 阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $p\times n$ 阵,证明

$$\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}\text{ 与 }\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}\text{ 同解}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$$

证 “$\Rightarrow$”. 因为 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解,所以,$\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有相同的解空间,即

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B})$$

因此 $n-r(\boldsymbol{AB})=n-r(\boldsymbol{B})$,故 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$.

“$\Leftarrow$”. 设 $\boldsymbol{X}_1$ 是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解,$\boldsymbol{BX}_1=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{ABX}_1=\boldsymbol{A0}=\boldsymbol{0}$. 所以,$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

心得 体会 拓广 疑问

设 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$r(\boldsymbol{B})=r$，则 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 也是 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关解向量. 并且，$\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量的个数为

$$n-r(\boldsymbol{AB})=n-r(\boldsymbol{B})=n-r$$

所以 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，故 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解.

18 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times p$ 阵，证明

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}\text{ 有解}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$$

证 “$\Rightarrow$”. $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times p$ 阵，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{X}$ 为 $n\times p$ 阵.

令 $$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_p),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_p)$$

因为 $$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$$

所以 $$\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{AX}_p=\boldsymbol{b}_p$$

故 $$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}_1)=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}_2)=\cdots=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}_p)=r(\boldsymbol{A})$$

即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，所以

$$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$$

“$\Leftarrow$”. 若 $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$，又由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_p)$

有 $$r(\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}_i)\leqslant r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})\quad(i=1,\cdots,p)$$

所以 $$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}_i)=r(\boldsymbol{A})\quad(i=1,\cdots,p)$$

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}_p$ 有解.

设解分别为 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_p$，有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_p)=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_p)$$

即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解.

19 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $l\times n$ 阵，则

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\text{ 与 }\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}\text{ 同解}\Leftrightarrow r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$$

证 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解，则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 同解.

又 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解一定是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

由题 16 $$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})$$

同理 $$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{B})$$

故 $$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$$

反之，若 $$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$$

因为，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解. 所以，由题 16，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 同解.

又因为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同

年　月　日

解,故 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 同解.

20 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)^{\mathrm{T}}$,若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解.

证　因为　$r(\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})\leqslant r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$

所以
$$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})$$
故 $\boldsymbol{AX}=b$ 有解.

21 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times(n-1)$ 阵,$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$,若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解,则 $|\boldsymbol{B}|=0$.又当 $r(\boldsymbol{A})=n-1$ 时,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{B}|=0$.

证　(1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times(n-1)$ 阵,所以 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})\leqslant n-1$.故
$$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})\leqslant n-1<n$$
又 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$ 为 $n\times n$ 阵,故 $|\boldsymbol{B}|=0$.

(2) 若 $r(\boldsymbol{A})=n-1$,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解,则
$$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=n-1$$
所以 $|\boldsymbol{B}|=0$.

反之,若
$$|\boldsymbol{B}|=0,r(\boldsymbol{A})=n-1$$
故
$$r(\boldsymbol{B})=n-1$$
即
$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{B})=n-1$$
所以 $\boldsymbol{AX}=b$ 有解.

22 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为 0,则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的各行成比例.

证　因为 $|\boldsymbol{A}|=0$,所以 $r(\boldsymbol{A})\leqslant n-1$.

(1) 若 $r(\boldsymbol{A})=n-1$,则 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$.

故 $\boldsymbol{A}^*$ 的行向量组的秩为 1,不妨设第一行 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为行向量的极大无关组,则剩余行向量均可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表示,故各行成比例.

(2) 若 $r(\boldsymbol{A})<n-1$,则 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$,即 $\boldsymbol{A}^*=\mathbf{0}$,显然各行成比例.

23 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times(n+1)}$,$r(\boldsymbol{A})=n$,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的任意两解成比例.

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times(n+1)$ 阵,$r(\boldsymbol{A})=n$.

所以,$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系所含向量个数为 $(n+1)-n=1$.

设 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

则任意解 $\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\xi}$,$k\in\mathbf{R}$.所以,任意两解成比例.

24 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,且 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=0$,$i=1,2,\cdots,n$,则 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

证　由于 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=0$,故
$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

所以，$\boldsymbol{X}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

即齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，故 $|\boldsymbol{A}|=0$.

25 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 实矩阵，若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{X}$，均有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}>0$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

证 反证，若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

设 $\boldsymbol{X}_1$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解，则 $\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{0}=0$$

此与对任意 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}>0$ 矛盾.

26 设 $\boldsymbol{A}$ 为（实）反对称阵，$\boldsymbol{D}$ 为对角元全大于 0 的对角阵，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|\neq 0$，且还有 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|>0$.

证 (1) 反证，若 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|=0$. 则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，设为 $\boldsymbol{X}_1$，有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{0}$$

进而
$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{X}_1=0$$

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_1+\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DX}_1=0$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 为反对称阵，所以

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}_1=0$$

故
$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DX}_1=0$$

但
$$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)\quad(a_i>0)$$

所以 $\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DX}_1>0$，此为矛盾.

所以
$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|\neq 0$$

(2) 令 $f(x)=|x\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|$，$x\in[0,1]$，假设

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|<0$$

因为
$$f(0)=|\boldsymbol{D}|>0,\ f(1)=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|<0$$

由介值定理，知存在 $x_0\in(0,1)$ 使得

$$f(x_0)=|x_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|=0$$

$$|x_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|=\frac{1}{x_0}\left|\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{D}}{x_0}\right|=0\quad\left(\frac{\boldsymbol{D}}{x_0}\text{ 为对角元全大于 0 的对角阵}\right)$$

但由第(1)步 $\left|\boldsymbol{A}+\dfrac{\boldsymbol{D}}{x_0}\right|\neq 0$ 矛盾. 故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|>0$.

27 求出平面上 n 点 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,n(n\geqslant 3))$ 位于一条直线上的充要条件.

证 设 n 点所共直线为 $y=kx+b$，则关于 k,b 的方程组 $y_i=kx_i+b$ $(i=1,\cdots,n)$ 有解，从而矩阵 $\begin{pmatrix}x_1&1\\x_2&1\\\vdots&\vdots\\x_n&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_1&1&y_1\\x_2&1&y_2\\\vdots&\vdots&\vdots\\x_n&1&y_n\end{pmatrix}$ 的秩相等，故

心得 体会 拓广 疑问

$$r\begin{pmatrix} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & y_n \end{pmatrix} < 3$$

反之,若
$$r\begin{pmatrix} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & y_n \end{pmatrix} < 3$$

(1) 若 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$,则此 n 点共线.

(2) 否则,$r\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} = 2$,但 $r\begin{pmatrix} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & y_n \end{pmatrix} < 3$,故

$$r\begin{pmatrix} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & y_n \end{pmatrix} = 2$$

从而 $\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & y_n \end{pmatrix}$ 的秩相等.

方程组(未知量为 k,b)

$$\begin{cases} kx_1 + b = y_1 \\ kx_2 + b = y_2 \\ \qquad \vdots \\ kx_n + b = y_n \end{cases}$$

有解,于是 n 点共线,故平面上 n 点 (x_i, y_i) $(i=1,\cdots,n; y=1,\cdots,n)$ 共线的充要条件是

$$r\begin{pmatrix} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & y_n \end{pmatrix} < 3$$

即
$$r\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} < 3$$

28 求出平面内 n 条直线 $a_i x + b_i y + c_i = 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 共点的充分必要条件.

年　月　日

证 若平面内 n 条直线 $a_ix+b_iy+c_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 共点，则线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\\\quad\vdots\\a_nx+b_ny+c_n=0\end{cases}$$

有解，故矩阵 $\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\\vdots&\vdots\\a_n&b_n\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\\vdots&\vdots&\vdots\\a_n&b_n&c_n\end{pmatrix}$ 的秩相等.

反之，若矩阵 $\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\\vdots&\vdots\\a_n&b_n\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\\vdots&\vdots&\vdots\\a_n&b_n&c_n\end{pmatrix}$ 的秩相等，则线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\\\quad\vdots\\a_nx+b_ny+c_n=0\end{cases}$$

有解，即 n 条直线共点.

故 n 条直线 $a_ix+b_iy+c_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 共点的充要条件是矩阵 $\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\\vdots&\vdots\\a_n&b_n\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\\vdots&\vdots&\vdots\\a_n&b_n&c_n\end{pmatrix}$ 的秩相等.

29 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,r;r<n)$ 是 n 维实向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，已知 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\quad\vdots\\a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解向量，试判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性.

解 设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$$

成立，因为 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\quad\vdots\\a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

的解，且 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$，故有

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,r)$$

即
$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,r)$$

于是，由

$$k_1\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_r + k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$$

得 $k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$，但 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \neq 0$，故 $k = 0$.

从而
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$$

由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，所以有

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

因此，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

30 已知向量 $\boldsymbol{\eta}_1 = (1,-1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2 = (2,1,-1,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3 = (4,5,-3,11)^{\mathrm{T}}$ 是方程组

$$\begin{cases} a_1x_1 + 2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = d_1 \\ 4x_1 + b_2x_2 + 3x_3 + b_4x_4 = d_2 \\ 3x_1 + c_2x_2 + 5x_3 + c_4x_4 = d_3 \end{cases}$$

的三个解. 求该方程组的通解.

解　由已知有 $\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1 = (1,2,-1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1 = (3,6,-3,9)^{\mathrm{T}}$ 是相应的齐次方程组的两个线性无关解.

所以，系数矩阵的秩 $\leqslant 2$（因为 $4 - r(\mathbf{A}) \geqslant 2$）.

又系数矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & 2 & a_3 & a_4 \\ 4 & b_2 & 3 & b_4 \\ 3 & c_2 & 5 & c_4 \end{pmatrix}$ 有二阶子式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$.

所以，系数矩阵的秩 $\geqslant 2$.

于是，系数矩阵的秩为 2.

故齐次方程组的基础解系包含 2 个向量，即 $\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1$ 是齐次方程组的基础解系.

因此，该方程组的通解为

$$k_1(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) + k_2(\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1) + \boldsymbol{\eta}_1 \quad (k_1,k_2 \in \mathbf{R})$$

31 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ 的基础解系，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是 $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ 的解，试证向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

证　设有一组数 $k_0,k_1,\cdots,k_t$，得

$$k_0\boldsymbol{\beta} + k_1(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_1) + k_2(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_t(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_t) = \mathbf{0}$$

得

$$(k_0 + k_1 + k_2 + \cdots + k_t)\boldsymbol{\beta} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{0} \qquad (1)$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ 的基础解系，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是 $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ 的解，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 的线性组合，所以

$$k_0 + k_1 + \cdots + k_t = 0$$

因此式(1) 变为

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{0}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关，所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_t = 0$，进而 $k_0 = 0$，故向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

32 已知齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ ax_1 + a^2x_3 = 0 \\ ax_2 + a^2x_4 = 0 \end{cases} \tag{Ⅰ}$$

的解都满足方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$，求 a 和方程组(Ⅰ)的通解.

解 (Ⅰ)的解都满足 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 的充要条件是(Ⅰ)与方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ ax_1 + a^2x_3 = 0 \\ ax_2 + a^2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

同解，于是该方程组系数矩阵的秩等于方程组(Ⅰ)的秩，即

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{与} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

的秩相等，对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都施以行变换得

$$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 & a^2 - a \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2 - a \end{pmatrix}$$

因此，当 $a = 0$ 时，秩$(\boldsymbol{A}) = 1 \neq$ 秩$(\boldsymbol{B}) = 2$ 不满足题意.

当 $a \neq 0$ 时

$$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & a-1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}$$

使秩$(\boldsymbol{A}) =$ 秩$(\boldsymbol{B}) = 3$ 的充要条件是 $a = \dfrac{1}{2}$，此即 $a = \dfrac{1}{2}$ 为题意所求.

把 $a = \dfrac{1}{2}$ 代入方程组(Ⅰ)得系数矩阵

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}&0\\ 0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\ 0&1&0&\frac{1}{2}\\ 0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

所以　$x_1=-\frac{1}{2}x_4, x_2=-\frac{1}{2}x_4, x_3=x_4$

方程组(Ⅰ)的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,1)^{\mathrm{T}}$$

通解为

$$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\alpha}\quad(k\in\mathbf{R})$$

33 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}$,且方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系中含有两个解向量,求 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的通解.

解　因为 $n=4, n-r(\boldsymbol{A})=2$,所以 $r(\boldsymbol{A})=2$ 对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\0&t-2&-1&-1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\0&0&-(1-t)^2&-(1-t)^2\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1-2t&2-2t\\0&1&t&t\\0&0&-(1-t)^2&-(1-t)^2\end{pmatrix}$$

要使 $r(\boldsymbol{A})=2$,则必有 $t=1$,此时与 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3-x_4\end{cases}$$

得基础解系　$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2=(0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$

方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2\quad(k_1,k_2\in\mathbf{R})$$

34 讨论三个平面 $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \pi_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \pi_3: a_3x+b_3y+c_3z=d_3$ 的位置关系.

解　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}, \bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\end{pmatrix}$.

(1) 若 $r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}})=3$,则三平面交于一点,因为三平面的联立方程组仅有唯一解.

(2) 若 $r(\bar{\boldsymbol{A}})=3, r(\boldsymbol{A})=2$,则三平面不相交,因为此时三平面的联立

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

方程组无解.

由 $r(\boldsymbol{A})=2$，知 $\boldsymbol{A}$ 的3个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故存在3个不全为零的数 k_1,k_2,k_3 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，当 k_1,k_2,k_3 都不为零时，三平面中任意两平面的交线与另一平面平行；当 k_1,k_2,k_3 中有一个为零时，三平面中有两平面平行，另一平面与这两平面相交.

(3) 若 $r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}})=2$，则三平面相交于一直线，因为此时三平面联立方程组有无穷多解.

由于 $r(\bar{\boldsymbol{A}})=2$，则 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的3个行向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关. 故存在3个不全为零的数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，当 k_1,k_2,k_3 均不为零时，三平面互异；当 k_1,k_2,k_3 中有一个为零时，三平面中有两平面相重合.

(4) 若 $r(\bar{\boldsymbol{A}})=2,r(\boldsymbol{A})=1$，则三平面不交，因为此时三平面的联立方程组无解.

由 $r(\boldsymbol{A})=1$，故三平面平行，又因为 $r(\bar{\boldsymbol{A}})=2$，所以三平面中至少有两个互异.

(5) 若 $r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}})=1$，则三平面重合，因为此时三平面的方程实际上是一样的.

年　月　日

第五章

相似矩阵

心得 体会 拓广 疑问

方阵的特征值、特征向量是非常重要的概念.矩阵的相似,特别是方阵的相似对角化,在理论和实际中有着重要的应用.本章综合性强,结论较多,证明技巧高.需要对前面各章的理论和方法有着较为牢固的掌握和应用.

一、基本内容及基本方法提要

1. $\mathbf{R}^n$ 中向量的内积、长度、夹角及正交

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbf{R}^n$(或列向量).

(1) 称$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积.

(2) 称 $|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度.

特别:当 $|\boldsymbol{\alpha}|=1$ 时,称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量,$\boldsymbol{\alpha}$ 为零向量当且仅当 $|\boldsymbol{\alpha}|=0$.

(3) 称 $\varphi=\arccos\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角($\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$).

(4) 称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交,如果$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$.

(5) 称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为正交向量组,如果 $\boldsymbol{\alpha}_i\neq\mathbf{0}$,且$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=0,i\neq j$.正交向量组一定是线性无关向量组.

(6) 称 m 维向量空间的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为正交基,如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为正交向量组.

设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 下的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$,则

$$x_i=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i)/(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

(7) 称正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为标准正交基,若 $|\boldsymbol{\alpha}_i|=1$.向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在标准正交基下的坐标分量

$$x_i=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i)\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

(8) 称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵,若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

(a)$\boldsymbol{A}$ 为正交阵 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量组为标准正交组.

(b) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵,则 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

(c) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正交阵,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{AB},\boldsymbol{AB}^{-1}$ 均是正交阵.

(9) 线性变换.

(a) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,称 $y=\boldsymbol{A}x$ 为从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的一个线性变换.

(b) 若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆阵,称 $y=\boldsymbol{A}x$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的可逆线性变换.

(c) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵,称 $y=\boldsymbol{A}x$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的正交线性变换.正交变换不改变向量的长度及夹角.

(10) 施密特正交化,规范化(单位化).

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,令

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1\\
&\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\lambda_{12}\boldsymbol{\beta}_1\\
&\vdots\\
&\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m-\lambda_{1m}\boldsymbol{\beta}_1-\lambda_{2m}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\lambda_{m-1,m}\boldsymbol{\beta}_{m-1}
\end{aligned}$$

年　月　日

其中
$$\lambda_{ij}=\frac{(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i)}$$
则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 等价的标准(规范) 正交向量组. 令
$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_m|}\boldsymbol{\beta}_m$$
则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 等价的标准(规范) 正交向量组.

2. 特征值与特征向量

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,如果有数 λ 和 n 维非零列向量 $\boldsymbol{X}$,使得等式 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$ 成立,则称 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,非零向量 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量.

3. 特征值和特征向量的求法

(1) 特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的全部根就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

(2) 对每个不同的特征值 λ_i,齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$ 的全部非零解,就是 A 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量. 称 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$ 的解空间为 $\boldsymbol{A}$ 的关于 λ_i 的特征子空间.

4. 特征值和特征向量的性质

(1) 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$f(x)$ 是多项式,则 $f(\lambda)$ 是 $f(\boldsymbol{A})$ 的一个特征值.

(2) 若 λ 是可逆阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的一个特征值.

(3) 属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

(4) 若 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 r 重特征值,则 $R(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant n-r$,此时与 λ 相对应的线性无关的特征向量最多有 r 个.

(5) 若 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于同一特征值 λ_0 的特征向量,且 $k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{X}_m\neq\boldsymbol{0}$,则 $k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{X}_m$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量.

(6) 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则
$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$$

(7) 若 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量还有性质:

(a)$\boldsymbol{A}$ 的特征值一定为实数.

(b) 属于不同特征值对应的特征向量两两正交.

(c) 若 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 r 重特征值,则 $R(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-r$,此时与 λ 相对应的 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关特征向量有 r 个.

(8) 正交阵的特征值的绝对值(模) 为 1.

5. 相似矩阵

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，如果存在 n 阶逆阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$. 称 $\boldsymbol{T}$ 为从 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵.

6. 相似阵的性质

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则：

(1) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

(2) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$

(3) $\boldsymbol{A}$ 的特征值与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值完全相同.

(4) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$

(5) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$

(6) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(7) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.

(8) 若 $f(x)$ 是一多项式，则 $f(\boldsymbol{A})$ 与 $f(\boldsymbol{B})$ 相似.

(9) 对任意 $t\in\mathbf{R}$，$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似.

(10) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

7. 相似对角化

(1) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充要条件为 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

(2) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分条件(不是必要条件).

(3) 任意 n 阶实对称阵一定可以正交相似对角化，即存在正交阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

8. 当 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似对角化的步骤

当 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化时，可按如下步骤将 $\boldsymbol{A}$ 相似对角化.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 的每个不同的特征值 λ_i，分别求 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$ 的基础解系，得 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{T}_1,\cdots,\boldsymbol{T}_n$.

(3) 以 $\boldsymbol{T}_1,\cdots,\boldsymbol{T}_n$ 为列构造一个矩阵 $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{T}_1,\cdots,\boldsymbol{T}_n)$$

则 $\boldsymbol{T}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{T}_1,\cdots,\boldsymbol{T}_n$ 依次是 $\boldsymbol{A}$ 的与 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 对应的特征向量.

当 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵时，不仅可以将 $\boldsymbol{A}$ 相似对角化，而且还可以按如下步骤将 $\boldsymbol{A}$ 正交相似对角化.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值(都是实数).

(2) 对每个不同的特征值 λ_i，分别求 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$ 的标准正交的基

心得 体会 拓广 疑问

础解系(先求出$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$的基础解系,然后标准正交化)得$\boldsymbol{A}$的$n$个标准正交的特征向量,以这$n$个标准正交的特征向量为列,构造一个矩阵$\boldsymbol{P}$,则$\boldsymbol{P}$是正交阵,且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$依次为与$\boldsymbol{P}$的各列对应的特征值.

二、复习题及基础

1 在$\boldsymbol{R}^4$中求一单位向量,使其与$(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,$(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,$(2,1,1,3)^{\mathrm{T}}$都正交.

解 设所求为$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$,由题意

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=0\\ x_1-x_2-x_3+x_4=0\\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0\\ x_1^2+2x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\end{cases}$$

得

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-\dfrac{4}{\sqrt{26}}\\ 0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{26}}\\ \dfrac{3}{\sqrt{26}}\end{pmatrix}\quad 或\quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\dfrac{4}{\sqrt{26}}\\ 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{26}}\\ \dfrac{-3}{\sqrt{26}}\end{pmatrix}$$

2 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为向量空间$\boldsymbol{V}$的一组标准正交基,则$\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{\beta}_3=\dfrac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)$也是$\boldsymbol{V}$的一组标准正交基.

证 由题意有$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\begin{cases}0 & 当\ i\neq j\ 时\\ 1 & 当\ i=j\ 时\end{cases}$,于是

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=&\left(\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3),\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\right)=\\ &\frac{1}{9}[(\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_1)-(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_3)-\\ &(2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1)+(2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)-\\ &(2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3)-(2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1)+(2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)-(2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_3)]=\\ &\frac{1}{9}(2-0+0-0+2-0-0+0-4)=0\end{aligned}$$

同理

年 月 日

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=0$$
$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=1$$

所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也是 $\boldsymbol{V}$ 的一组标准正交基.

3 求由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 生成的向量空间的标准正交基.

解　将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 标准正交化. 令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$$

再令

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$$

则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 为所求.

4 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正交阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 及 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\\&\boldsymbol{B}\end{pmatrix},\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}\\-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}$ 都是正交阵.

证　由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正交阵，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$. 于是

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=$$
$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\\&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\\&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\\&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&\\&\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&\\&\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\\&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}\\-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}\\-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}\\-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=$$
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&\\&2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&\\&\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\\&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}$$

5 设 $\lambda=2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，求行列式 $|\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

解　由题意有 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0$. 于是

$$|\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=|(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})|=|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$$

6 设四阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=0,\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{E},|\boldsymbol{A}|<0$，求 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值.

解　对 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{E}$ 两边取行列式得

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2=|2\boldsymbol{E}|=16$$

由 $|\boldsymbol{A}|<0$，得 $|\boldsymbol{A}|=-4$，并且 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 知

$$\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=-4(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$$

再由 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=0$ 得

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$|3E-4(A^*)^{-1}|=0$$

即 $\left|\frac{3}{4}E-(A^*)^{-1}\right|=0$.

于是得 $\frac{3}{4}$ 是 $(A^*)^{-1}$ 的一个特征值,因此 $\frac{4}{3}$ 是 A^* 的一个特征值.

7 设 A,B 为同阶方阵,证明 AB 与 BA,$AB+B$ 与 $BA+B$ 均分别有相同的特征值.

证 设 λ 是 AB 的特征值,则有 $X\neq 0$,使 $ABX=\lambda X$.

两边同时再乘 B,有

$$BA(BX)=\lambda(BX)$$

若 $BX\neq 0$,则 λ 为 BA 的特征值.

若 $BX=0$,由 $\lambda X=0$,而 $X\neq 0$,知 $\lambda=0$,从而 $|AB|=0$,而 $|BA|=|AB|=0$,从而知 $\lambda=0$ 也是 BA 的特征值,所以 AB 与 BA 有相同的特征值.

因为

$$AB+B=(A+E)B$$

$$BA+B=B(A+E)$$

由上面证明过程可知 $AB+B$ 与 $BA+B$ 也有相同的特征值.

8 设 A 为 n 阶方阵,$|A|=0$,求 A^* 的特征值.

解 当 $r(A)<n-1$ 时,$A^*=0$. 所以 0 为 A^* 的 n 重特征值.

当 $r(A)=n-1$ 时,由 $A^*A=|A|E=0$,知 0 为至少 $n-1$ 重特征值. 另一特征值 $\operatorname{tr}(A^*)=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}$.

9 设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $\beta=(b_1,\cdots,b_n)^{T}$ 正交,求

$$A=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{pmatrix}$$

的 n 个特征值.

解 令

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix},C=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

则

$$A=BC$$

$$|\lambda E_n-BC|=\lambda^{n-2}|\lambda E_2-CB|=\lambda^{n-2}\begin{vmatrix} \lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i & -1 \\ 0 & \lambda-\sum_{i=1}^{n}b_i \end{vmatrix}=$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\lambda^{n-2}(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i)(\lambda-\sum_{i=1}^{n}b_i)$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 0($n-2$ 重)，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$.

10 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆阵，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量，证明以 λ 为未知数的方程 $|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}|=0$ 的一个根为 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$，其余根为 0.

证　对 $|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}|=0$ 两边同乘 $|\boldsymbol{A}^{-1}|$. 有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}|=0$$

而
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}|=\lambda^{n-1}|\lambda-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}|=\lambda^{n-1}(\lambda-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})$$

所以一个根为 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$，其余为 0.

11 证明：实对称正交阵的特征值为 1 或 -1.

证　设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称正交阵，λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 于是存在 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$. 有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}$，即 $\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}$，$(\lambda^2-1)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda^2=1$，即 $\lambda=\pm1$.

12 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交阵且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，证明：-1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

证　由

$$\begin{aligned}|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=|-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}|=\\&|\boldsymbol{A}||-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E}|=-|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\end{aligned}$$

于是有
$$|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$$

所以 -1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

13 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为三阶实方阵，且 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，则 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

证　由 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}=0\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

并且 $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}$，知 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

14 若任意 n 维非零向量均是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{A}$ 为数量阵 $k\boldsymbol{E}_n$.

证　因为任何非零向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都相等，设为 k. 否则，若 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同特征值 λ_1,λ_2，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 分别为 λ_1,λ_2 的特征向量，则 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 就不再是特征向量，而 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2\neq\boldsymbol{0}$，此与条件矛盾.

因此对

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$$

有
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=k\boldsymbol{\varepsilon}_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

于是
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=k(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=k\boldsymbol{E}_n$$

即
$$\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{E}_n$$

15 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似，则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\\&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\\&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 相似.

年　月　日

证 由条件,存在可逆的 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$,使 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B},\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{D}$.

令
$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \\ & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}$$
则
$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1^{-1} & \\ & \boldsymbol{P}_2^{-1}\end{pmatrix}$$
且
$$\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1^{-1} & \\ & \boldsymbol{P}_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \\ & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 & \\ & \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \\ & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$$

16 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足:$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},r(\boldsymbol{A})=r$,则 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化,写出对应的对角阵,并计算 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|$.

证 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,由 $r(\boldsymbol{A})=r$ 和 $\boldsymbol{A}$ 中有 r 个列向量线性无关,不妨设之为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$.

因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,即
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$$
所以
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{\alpha}_r=1\cdot\boldsymbol{\alpha}_r$$
则 $\lambda=1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为其线性无关的特征向量.

对于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,其基础解系中有 $n-r$ 个向量,这 $n-r$ 个向量为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 0 的特征向量.从而 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量,即 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

并且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$ 相似.

于是
$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -2\end{vmatrix}=$$
$$(-1)^r(-2)^{n-r}=(-1)^n2^{n-r}$$

17 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$,若存在正交阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}^2$.

证 由 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$,知 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 相似.

心得 体会 拓广 疑问

所以 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，即等式成立.

18 设 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 为实数，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}-a_{j-1} & i=n\\ 1 & i=j-1,j=2,3,\cdots,n\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$$

(1) 若 λ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，证明：$(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^{n-1})^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

(2) 若 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，求一个可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

证 $$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&-1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{pmatrix}$$

(1)λ 是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$，即

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&\cdots&0&0\\0&\lambda&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda&-1\\a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-2}&\lambda+a_{n-1}\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+\lambda c_2+\lambda^2c_3+\cdots+\lambda^{n-1}c}$$

$$\begin{vmatrix}0&-1&0&\cdots&0&0\\0&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&-1\\\lambda^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_i\lambda^2&a_1&a_2&\cdots&a_{n-2}&\lambda+a_{n-1}\end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{n+1}(\lambda^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_i\lambda^i)(-1)^{n-1}=0$$

即 $$\lambda^n+\sum_{i=1}^{n-1}a_i\lambda^i=0$$

令 $$\boldsymbol{\xi}=(1,\lambda,\cdots,\lambda^{n-1})^{\mathrm{T}}$$

有

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\vdots\\\lambda^{n-1}\end{pmatrix}=$$

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ -\sum_{i=0}^{n-1} a_i\lambda^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{pmatrix} = \lambda\xi$$

即得 ξ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

(2) 由(1) 知 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, \lambda_1, \cdots, \lambda_1^{n-1})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = (1, \lambda_2, \cdots, \lambda_2^{n-1})^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n = (1, \lambda_n, \cdots, \lambda_n^{n-1})^{\mathrm{T}}$ 都是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)$. 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆,并且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

19 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶上三角阵,有:

(1) 若 $a_{ii} \neq a_{jj}(i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$,则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

(2) 若 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$ 且至少有一个 $a_{i_0 j_0} \neq 0 (i_0 \neq j_0)$,则 $\boldsymbol{A}$ 不可以相似对角化.

证 (1) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = (\lambda - a_{11}) \cdots (\lambda - a_{nn})$$

即 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同特征值,则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

(2) 假设 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化,则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

其中 λ_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,并且 $\lambda_i = a_{ii} = a_{11}$,则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = a_{nn}\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A} = a_{nn}\boldsymbol{PEP}^{-1} = a_{nn}\boldsymbol{E}$$

与条件矛盾,故 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

20 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3,求 $|\boldsymbol{A}^3 - 3\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}|$.

解 存在可逆的 $\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}$$

所以

$$|\boldsymbol{A}^3 - 3\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| =$$

$$\left|\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 8 & \\ & & 27 \end{pmatrix}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 6 & \\ & & 9 \end{pmatrix}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}\right| =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & & \\ & 3 & \\ & & 19 \end{vmatrix} = -57$$

21 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2, 4, \cdots, 2n$,计算 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|$ 及 $|\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E}|$.

解 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = (\lambda - 2) \cdots (\lambda - 2n) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda - 2k)$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$|A-3E|=\begin{vmatrix}2-3 & & & \\ & 4-3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2n-3\end{vmatrix}=-(2n-3)!$$

22 若四阶矩阵 A 与 B 相似，矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，计算 $|B^{-1}-E|$ 的值.

解　B^{-1} 的特征值为 2，3，4，5，则

$$|B^{-1}-E|=\begin{vmatrix}2-1 & & & \\ & 3-1 & & \\ & & 4-1 & \\ & & & 5-1\end{vmatrix}=24$$

23 设 $\alpha=(1,0,-1)^T$，$A=\alpha\alpha^T$，n 为正整数，计算 $|aE-A^n|$ 的值.

解　因为

$$|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-\alpha^T\alpha)=\lambda^2(\lambda-2)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=0$. 存在可逆阵 P，使得

$$A=P\begin{pmatrix}2 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}P^{-1}$$

有　$$|\lambda E-aE+A^n|=\begin{vmatrix}\lambda-a+2^n & & \\ & \lambda-a & \\ & & \lambda-a\end{vmatrix}$$

于是 $aE-A^n$ 的特征值为 $a-2^n,a,a$，即有

$$|aE-A^n|=a^2(a-2^n)$$

24 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，计算 $A^n-2A^{n-1}(n\geqslant 2)$.

解　由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$. 则 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$. 由 A 为对称阵. A 可以对角化，即存在可逆阵 P. 使

使　$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix},A=P\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}P^{-1}$$

于是 $$A^n-2A^{n-1}=P\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2^n & \\ & & 2^n\end{pmatrix}P^{-1}-2P\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2^{n-1} & \\ & & 2^{n-1}\end{pmatrix}P^{-1}=\mathbf{0}.$$

25 已知 $\alpha=(1,k,1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵的一个特征向量，

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

求 k 的值.

解 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量,也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,设 $\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值为 λ,则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$. 即

$$b\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$$

得
$$\begin{cases}3+k=\lambda\\2+2k=k\lambda\\3+k=\lambda\end{cases}$$

有
$$2+2k=k(3+k)$$

所以 $k=1$ 或 $k=-2$.

26 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可相似对角化,求 x,y 之间关系.

解 因为
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$
$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$.

由 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化,有 $r(1\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$. 而

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-x&0&-y\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&x+y\\0&0&0\end{pmatrix}$$

于是得 $x+y=0$.

27 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&&\\&y&\\&&-1\end{pmatrix}$ 相似,求 x,y 及满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的正交阵 $\boldsymbol{P}$.

解 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,有 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$. 即

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-y&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}$$

所以 $(\lambda-2)(\lambda^2-x\lambda-1)=(\lambda-2)[\lambda^2+(1-y)\lambda-y]$.

比较系数得 $x=0,y=1$. 显然 $2,1,-1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

将其单位化得 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵. 并且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

28 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似，求 x,y 及满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆阵 $\boldsymbol{P}$.

解　由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$. 即

$$(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)]=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y)$$

令 $\lambda=0$ 得 $2(x-2)=2y$，即 $y=x-2$.

令 $\lambda=1$ 得 $y=-2$，从而 $x=0$.

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,2,-2$. 相应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

29 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&b\end{pmatrix}$ 相似，求一可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

解　由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\begin{cases}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\end{cases}$，即 $\begin{cases}5+a=4+b\\6(a-1)=4b\end{cases}$，得 $a=5$，$b=6$. $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,2,6$.

对应于 2 的两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

对应于 6 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

30 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$ 相似，求一正交阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

解　由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，有 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$. 可得 $a=b$. 再由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，又得 $a=b=0$. 显然 $0,1,2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

相应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

将其单位化得 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵，并且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

31 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，试求 x,y 的值及可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角形矩阵.

解 由题意 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$. 而

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix}$$

于是有
$$x=2,y=-2$$
这样
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$$
$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的两个线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

对应于 $\lambda_3=6$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$.

32 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i,i=1,2,3$. 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-1,2)^{\mathrm{T}}$. 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$.

即
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

故

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$A^n = P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}^n P^{-1} =$$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1+2^{n+2}+4\cdot 3^n & 2-2^{n+2}+2\cdot 3^n & 2+2^{n+1}-4\cdot 3^n \\ 2-2^{n+2}+2\cdot 3^n & 4+2^{n+2}+3^n & 4-2^{n+1}-2\cdot 3^n \\ 2+2^{n+2}-4\cdot 3^n & 4-2^{n+2}-2\cdot 3^n & 4+2^n+4\cdot 3^n\end{pmatrix}$$

33 设三阶实对称阵 A 的特征值为 $-1,1,1$，$\xi=(0,1,1)^T$ 为对应于 -1 的特征向量，求 A^n.

解　利用实对称阵属于不同特征值的特征向量正交，求出属于特征值 1 的两个线性无关的特征向量为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$，即

$$A=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$A^n=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}^n P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n \\ 0 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n\end{pmatrix}$$

34 设三阶实对称阵 A 的特征值为 $1,2,3$. 特征值 $1,2$ 对应的特征向量分别为 $\xi_1=(-1,-1,1)^T$，$\xi_2=(1,-2,-1)^T$. 求 A 及 A^n.

解　与上题同理可求出属于 3 的特征向量 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$. 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$，即 $A=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}P^{-1}$. 得

$$A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13\end{pmatrix}$$

$$A^n=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2+2^n+3^{n+1} & 2-2^{n+1} & -2-2^n+3^{n+1} \\ 2-2^{n+1} & 2+2^{n+2} & -2+2^{n+1} \\ -2-2^n+3^{n+1} & -2+2^{n+1} & 2+2^n+3^{n+1}\end{pmatrix}$$

年　月　日

35 设 A,B 为实对称阵，则 A,B 相似 $\Leftrightarrow A$ 与 B 的特征值相同.

心得 体会 拓广 疑问

证 "⇒". $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$.
于是

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}|=|\lambda\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}|=\\|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}||\boldsymbol{P}|=\\|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同.

"⇐". 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值.

由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为实对称阵,则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$. 使

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

即
$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$$
所以
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$$
令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$,则 $\boldsymbol{P}$ 可逆,并且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$,即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似.

36 证明:任意方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的特征多项式相同.

证 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$

37 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n\times n$ 阶实矩阵,如果 $\boldsymbol{A}$ 为可逆阵,$\boldsymbol{B}$ 为反对称阵,证明:$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|>0$.

证 设 λ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值,则存在 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$,使

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$$

两边同时左乘 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$,有 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}$. 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆,知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}\neq 0$. 而 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}=0$. 于是有 $\lambda\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}>0$,即 $\lambda>0$. 所以 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|>0$.

38 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}$,$|\boldsymbol{A}|=-1$,又 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 λ_0,属于 λ_0 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,求 a,b,c 和 λ_0 的值.

解 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$,有 $\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$. 即

$$\lambda_0\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

得
$$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1\\\lambda_0(-5-b+3)=1\\\lambda_0(-1+c-a)=-1\end{cases}$$

得
$$\lambda_0=-1,b=-3,a=c$$

由 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 和 $a=c$,有

年 月 日

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} = a-3=-1$$

故 $a=c=2$.

39 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 交换第 i 行和第 j 行，再交换第 i 列和第 j 列得到的矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，并求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

证　因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{AE}(i,j)$，而 $\boldsymbol{E}^{-1}(i,j)=\boldsymbol{E}(i,j)$. 所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j)$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

40 证明：实对称方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 P 次幂 $\boldsymbol{A}^P$（P 为自然数）的特征值为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的 P 次幂.

证　设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，存在正交阵 $\boldsymbol{T}$，使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\boldsymbol{T}$$

即

$$\boldsymbol{A}^P=\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^P & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^P \end{pmatrix}\boldsymbol{T}$$

即 $\lambda_1^P,\cdots,\lambda_n^P$ 为 $\boldsymbol{A}^P$ 的特征值.

41 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值，证明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的特征向量也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

证　"$\Rightarrow$". 设 $\boldsymbol{A}$ 有特征向量 $\boldsymbol{\xi}$，对应的特征值为 λ，即 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$. 将上式左乘 $\boldsymbol{B}$，有 $\boldsymbol{BA\xi}=\boldsymbol{AB\xi}=\lambda\boldsymbol{B\xi}$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\xi})=\lambda(\boldsymbol{B\xi})$. 若 $\boldsymbol{B\xi}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{B\xi}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的与 λ 对应的特征向量. 由于 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同特征值，特征值为单根，所以对应的线性无关的特征向量只有一个，故 $\boldsymbol{B\xi}$ 与 $\boldsymbol{\xi}$ 成比例，即得 $\boldsymbol{B\xi}=\mu\boldsymbol{\xi}$，所以 $\boldsymbol{\xi}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

若 $\boldsymbol{B\xi}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{B\xi}=0\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{\xi}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

"$\Leftarrow$". $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，存在可逆的 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{D}_1$（对角阵），由 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，所以 $\boldsymbol{B}$ 也有 n 个无关的特征向量，即有相同的 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{D}_2$（对角阵），从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PD}_1\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PD}_2\boldsymbol{P}^{-1}$$

即

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{PD}_1\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{PD}_2\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PD}_1\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PD}_2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PD}_2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{PD}_1\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{BA}$$

42 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 是一个 n 维实向量，其中 $a_1\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 可相似对角化，并求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

证　$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}|=\lambda^{n-1}|\lambda\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}|=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0（$n-1$ 重），$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$.

解$(0\cdot \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$得出0的$n-1$个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=(a_2,-a_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\xi}_2=(a_3,0,-a_1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(a_n,0,0,\cdots,-a_1)^{\mathrm{T}}$$

解$(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$得出$\sum_{i=1}^{n}a_i^2$的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_n=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$$

即$\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量,$\boldsymbol{A}$可以相似对角化.

令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)$,则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \sum_{i=1}^{n}a_i^2\end{pmatrix}$.

43 设n阶实对称阵$\boldsymbol{A}$的特征值全非负,证明:存在特征值均为非负实数的实对称阵$\boldsymbol{B}$,使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

证 设$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$\boldsymbol{A}$的特征值,则有正交阵$\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

令
$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{\frac{1}{2}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PDP}^{-1}$$

则$\boldsymbol{B}$为对称阵,并且

$$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{PDP}^{-1}\boldsymbol{PDP}^{-1}=\boldsymbol{PD}^2\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{A}$$

44 设n阶实对称阵$\boldsymbol{A}$的n个特征值$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$互异,$\boldsymbol{X}_1$为$\lambda_1$对应的单位特征向量,证明:方阵$\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}$的特征值为$0,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

证 设$\boldsymbol{A}$对应于$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的特征向量为$\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$.则有

$$\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_j=\boldsymbol{0}\quad(i\neq j)$$

于是当$i\neq 1$时

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{AX}_i-\lambda_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{AX}_i=\lambda_i\boldsymbol{X}_i$$

而
$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{AX}_1-\lambda_1\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{0}=0\cdot\boldsymbol{X}_1$$

所以$\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}$的特征值为$0,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

45 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶非零矩阵,且$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$,证明$\lambda=-1$必是$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的特征值,若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$分别是$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的对应于特征值$\lambda=-1$的特征向量,证明$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$线性无关.

证 因$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$,方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$有非零解,$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$,知$\lambda=-1$是$\boldsymbol{A}$的特征值,同理$\lambda=-1$也是$\boldsymbol{B}$的特征值.

心得 体会 拓广 疑问

因 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda=-1$ 的特征向量是 $\boldsymbol{\xi}_1$，故有

$$\boldsymbol{A\xi}_1=-\boldsymbol{\xi}_1$$

两边左乘 $\boldsymbol{B}$，得 $\boldsymbol{BA\xi}_1=-\boldsymbol{B\xi}_1=0\boldsymbol{\xi}_1$，即 $\boldsymbol{B\xi}_1=0\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{0}$，可见 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的对应于 $\lambda=0$ 的特征向量. 故 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的分别对应于 $\lambda=0$ 和 $\lambda=-1$ 的特征向量，从而得证 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关.

46 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，若

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的模小于 1，即

$$|\lambda_i|<1$$

证　设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=\lambda x_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=\lambda x_2\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=\lambda x_n\end{cases}$$

设 $|x_k|=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\}$，$|\lambda|=\left|\lambda\dfrac{x_k}{x_k}\right|=\left|\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}x_j}{x_k}\right|\leqslant\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{kj}|\dfrac{|x_j|}{|x_k|}\leqslant\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{kj}|$.

由已知条件得

$$|\lambda|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|<1$$

由 λ 的任意性，$|\lambda_i|<1$，$i=1,2,\cdots,n$.

47 证明 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&&&&\\&2&&&\\&&\ddots&&\\&&&n-1&\\&&&&n\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}n&&&&\\&n-1&&&\\&&\ddots&&\\&&&2&\\&&&&1\end{pmatrix}$$

并求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

证　由 $\boldsymbol{A}$ 知，$\boldsymbol{A}$ 的全部特征值是 $1,2,\cdots,n$，互不相同，故 $\boldsymbol{A}$ 相似于由其特征值组成的对角阵 $\boldsymbol{B}$.

由于 $\lambda_1=1$ 时，$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，有特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$；

年　月　日

$\lambda_2=2$ 时，$(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，有特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$；

$\vdots$

$\lambda_n=n$ 时，$(\lambda_n\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，有特征向量 $\boldsymbol{\xi}_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

故有 $\quad \boldsymbol{A\xi}_n=n\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{A\xi}_{n-1}=(n-1)\boldsymbol{\xi}_{n-1},\cdots,\boldsymbol{A\xi}_1=\boldsymbol{\xi}_1$

即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\xi}_{n-1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_1)=(n\boldsymbol{\xi}_n,(n-1)\boldsymbol{\xi}_{n-1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_1)=$$
$$(\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\xi}_{n-1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_1)\begin{pmatrix} n & & & \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

故得可逆阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\xi}_{n-1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_1)=\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & \iddots & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

48 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个非零的正交特征向量，证明 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，它们对应的特征向量分别是 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，已知它们相互正交，将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，则得正交阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，且

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$$
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵.

49 设 6,3,3 为实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{A}$ 的对应于 3 的特征向量为 $(-1,0,1)^{\mathrm{T}},(1,2,1)^{\mathrm{T}}$. 求：(1) 对应于 6 的特征向量；(2) $\boldsymbol{A}$.

解 (1) 由于实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值所对应的特征向量相互正交，故若设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 6 的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则应有

$$\begin{cases}-x_1+x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=-x_3\end{cases}$$

所以属于 6 的全部特征向量为 $(k,-k,k)^{\mathrm{T}}(k\neq 0)$.

(2) 显然 $(-1,0,1)^{\mathrm{T}},(1,2,1)^{\mathrm{T}},(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于特征值 3,3,6 的相互正交的特征向量，将它们分别单位化并以其作为正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的 3 个列向量，于是

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

心得 体会 拓广 疑问

则有

$$P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&6\end{pmatrix}$$

从而

$$A=P\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&6\end{pmatrix}P^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}4&-1&1\\-1&4&-1\\1&-1&4\end{pmatrix}$$

50 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵($n>1$),$r(\boldsymbol{A})=1$,试证:$\boldsymbol{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$.

证　因为 $r(\boldsymbol{A})=1$,$|\boldsymbol{A}|=0$,故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值为 0,且特征值为 0 的线性无关特征向量个数为 $n-r(\boldsymbol{A})=n-1$,因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 的重数 $\geqslant n-1$.

又由 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值除了 $n-1$ 重 0 以外,还有特征值 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$.

当 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$ 时,$\boldsymbol{A}$ 有 $n-1$ 重 0 与 1 重 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$ 的特征值,且有 $(n-1)+1=n$ 个线性无关的特征向量,故得 $\boldsymbol{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$.

显然,当 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0$ 时,$\boldsymbol{A}$ 有 n 重 0 特征值,有 $n-1$ 个线性无关的特征向量,$\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

51 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,证明 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角矩阵.

证　由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^2-3\lambda+2=0$,解得 $\lambda_1=2$,$\lambda_2=1$,又由　$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$,知

$$r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\leqslant n$$

$$r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{E})=n$$

于是 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$.

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$,知 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的每列均为 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,即 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关解(属于 $\lambda_1=2$ 的特征向量)的个数 $r_1\geqslant r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$;$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的每一列均为 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,即有 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 线性无关解(属于 $\lambda_2=1$ 的特征向量)的个数 $r_2\geqslant r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$. 因此

$$r_1+r_2\geqslant r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$$

再由 $r_1+r_2\leqslant n$ 知,$r_1+r_2=n$,即 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量,故 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角矩阵.

52 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵,$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$,$|\boldsymbol{A}|<0$,试求 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*$ 的一个特征值.

解　由于 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$,故可先算 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值,而这又只需算出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及 $|\boldsymbol{A}|$.

因为 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$,所以 $|\boldsymbol{A}|^2=1$,即 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$,又 $|\boldsymbol{A}|<0$,所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$. 而 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$,故

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$|A+E|=0$,即 $\lambda=-1$ 是 A 的一个特征值.

于是可得 A^* 的一个特征值$\frac{|A|}{\lambda}$,即为 1. 所以$(A^{-1})^*$ 即$(A^*)^{-1}$ 的一个特征值为 1.

53 设 A 为三阶实对称矩阵,且满足条件 $A^2+2A=0$,已知 A 的秩 $r(A)=2$.

(1) 求 A 的全部特征值;

(2) 当 k 为何值时,矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵,其中 E 为三阶单位矩阵.

解 (1) 设 λ 为 A 的一个特征值,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$,则

$$A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\quad(\boldsymbol{\alpha}\neq 0)$$

$$A^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$$

于是

$$(A^2+2A)\boldsymbol{\alpha}=(\lambda^2+2\lambda)\boldsymbol{\alpha}$$

由条件$(A^2+2A)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 推知

$$(\lambda^2+2\lambda)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

又由于 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$,故有

$$\lambda^2+2\lambda=0$$

解得

$$\lambda=-2,\lambda=0$$

因为实对称矩阵 A 必可对角化,且 $r(A)=2$,所以

$$A\sim\begin{pmatrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & 0\end{pmatrix}=\Lambda$$

因此,矩阵 A 的全部特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=0$$

(2) 矩阵 $A+kE$ 仍为实对称矩阵. 由(1) 知,$A+kE$ 的全部特征值为

$$-2+k,-2+k,k$$

于是,当 $k>2$ 时矩阵 $A+kE$ 的全部特征值大于 0. 因此,矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵.

54 设三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a & -5 & 8\\ 0 & a+1 & 8\\ 0 & 3a+3 & 25\end{vmatrix}=0$,而三阶矩阵 A 为 3 个特征值 $1,-1,0$,对应特征向量分别为 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\ 2a\\ -1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\ a+3\\ a+2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}a-2\\ -1\\ a+1\end{pmatrix}$,试确定参数 a,并求 A.

解 因为

$$\begin{vmatrix}a & -5 & 8\\ 0 & a+1 & 8\\ 0 & 3a+3 & 25\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & -5 & 8\\ 0 & a+1 & 8\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=a(a+1)=0$$

年 月 日

所以 $a=0$ 或 $a=-1$.

当 $a=-1$ 时

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 应线性无关. 而 $a=-1$ 时，得到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，故 $a\neq-1$.

当 $a=0$ 时

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

可以验证此时 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，故 $a=0$.

因为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_3=0\cdot\boldsymbol{\beta}_3$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,-\boldsymbol{\beta}_2,0\cdot\boldsymbol{\beta}_3)$$

即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,-\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{0})$$

于是

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,-\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{0})(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&3&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&4&-6\\-1&1&-1\\-3&2&-3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-5&4&-6\\3&-3&3\\7&-6&8\end{pmatrix}$$

55 已知 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&1&k\\4&k&-3\end{pmatrix}$ 的特征值，判断 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化，并说明理由.

解　因为 $\lambda=0$ 是特征值，故

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3&3&-2\\-k&1&k\\4&k&-3\end{vmatrix}=-(k-1)^2=0$$

$$k=1$$

由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\1&\lambda-1&-1\\4&-1&\lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)$$

年　月　日

知 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,而

$$r(0\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}3&2&-2\\-1&1&1\\4&1&-3\end{pmatrix}=2\neq n-n_i=3-2$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

第　六　章

二　次　型

心得 体会 拓广 疑问

二次型是线性代数必不可少的组成部分，它起源于解析几何中二次曲面的理论. 二次型与对称阵有着一一对应关系. 二次型理论是矩阵理论和方法的具体运用，有些矩阵问题也可转化为二次型问题来探讨. 本章综合性强，解题需要一些技巧.

本章在实数域内讨论问题.

一、基本内容及基本方法提要

1. 合同矩阵

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，或称 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$，称可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 为从 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的合同变换阵.

2. 合同矩阵的性质

(1) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与自身合同.

(2) 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同.

(3) 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同.

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，从而 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

(5) 若对方阵 $\boldsymbol{A}$ 施以“成对”的任何一种初等变换(行、列变换)得到 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

(6) 实方阵的正交相似是合同，即若存在正交阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似且合同.

(7) 任意实对称阵必(正交)合同于一对角阵.

(8) 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于一对角阵，则可通过下述初等变换方法求得合同变换阵.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵，对 $n\times 2n$ 阵 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})$ 施以行、列成对的初等变换(实际上对 $\boldsymbol{E}$ 仅需作相应行变换)化成 $(\boldsymbol{\Lambda}\,\vdots\,\boldsymbol{B})$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵，则 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 即为所求合同变换，即有

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Lambda}$$

也可对 $2n\times n$ 阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$ 施以行、列成对的初等变换(对 $\boldsymbol{E}$ 仅需作相应的初等列变换)化成矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}\\ \vdots\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为 n 阶对角阵，则

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Lambda}$$

即 $\boldsymbol{B}$ 为所求合同变换阵.

3. 实二次型及其矩阵

实二次型

年　月　日

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

的矩阵表示为

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为实对称阵,称 $\boldsymbol{A}$ 为 f 的矩阵. 二次型 f 与其矩阵 $\boldsymbol{A}$ 之间有一一对应关系.

称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为二次型 f 的秩.

4. 标准二次型及规范二次型

若 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(k_1,k_2,\cdots,k_n)$,称 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准二次型.

若对称阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 的对角线元素 $k_i\in\{0,1,-1\}(i=1,2,\cdots,n)$,则称二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{x}$ 为规范二次型.

5. 惯性定律

若实二次型 f 经过不同的可逆性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}$ 化成标准形

$$f=\sum_{i=1}^{n}k_iy_i^2$$

及

$$f=\sum_{i=1}^{n}l_iz_i^2$$

则 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中正数个数 p(正惯性指数)与 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 中正数个数相同,两组数中负数个数 q(负惯性指数)亦相同且 $R(\boldsymbol{A})=p+q$.

6. 化实二次型为标准形

(1) 任意实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 都可经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}$ 化成标准形

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

和规范形

$$f=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_{p+q}^2$$

其中 p 为正惯性指数,q 为负惯性指数,$p+q=r$ 为二次型 f 的秩.

(2) 二次型的规范形唯一,但标准形不唯一.

(3) 用配方法化二次型为标准形.

(4) 用初等变换化二次型为标准形.

设 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{成对初等变换}}(\boldsymbol{\Lambda}\,\vdots\,\boldsymbol{B}),\text{令 }\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

或

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \cdots\\ \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{成对初等变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \cdots\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix},\text{令 }\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$$

则二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过合同变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 可化成标准形

$$f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$$

(5) 用正交变换化二次型为标准形

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

对任意 n 元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，必存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$（其中 $\boldsymbol{P}$ 是正交阵），使

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y}=$$

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，步骤如下：

(a) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

(b) 求特征向量：不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$，对每个 λ_i $(i=1,2,\cdots,t)$，求 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系 $\boldsymbol{X}_{i_1},\boldsymbol{X}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{X}_{i_{s_i}}$.

(c) 正交化：将 $\boldsymbol{X}_{i_1},\boldsymbol{X}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{X}_{i_{s_i}}$ 正交化，得到正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_{s_i}}$ $(i=1,2,\cdots,t)$.

(d) 单位化 $\boldsymbol{\gamma}_{i_j}=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_{i_j}}{|\boldsymbol{\beta}_{i_j}|}$.

(e) 作正交阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_{1_1},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{1_{s_1}},\boldsymbol{\gamma}_{2_1},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{2_{s_2}},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{t_1},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{t_{s_t}})=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$$

(f) 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的与 $\boldsymbol{p}_i$ 对应的特征值.

7. 化二次型的标准形为规范形

设二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

不妨设 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中前 p 个数大于 0，随后的 q 个数小于 0，其余的 $n-(p+q)$ 个数等于 0.

令
$$z_i=\sqrt{|k_i|}\,y_i$$

或

$$y_i=\frac{1}{\sqrt{|k_i|}}z_i\quad(i=1,2,\cdots,r=p+q)$$

令

年　月　日

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{k_p}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-k_{p+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-k_r}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1\end{pmatrix}$$

则 f 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}$ 化成规范形

$$f=z_1^2+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$$

8. 二次型的正定性

设 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，若对任意非零列向量 $\boldsymbol{x}$，均有 $f(\boldsymbol{x})>0(f(\boldsymbol{x})<0)$，则称二次型 f 为正定(负定)二次型，称正定(负定)二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定(负定)矩阵.

设 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，若对任意非零列向量 $\boldsymbol{x}$，均有 $f(\boldsymbol{x})\geqslant 0(f(\boldsymbol{x})\leqslant 0)$，则称二次型 f 为半正定(半负定)二次型，称半正定(半负定)二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为半正定(半负定)矩阵.

9. 二次型及其矩阵正定性的等价结论

(1) 实二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定(负定)$\Leftrightarrow$ 实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 正定(负定).

实二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 半正定(半负定)$\Leftrightarrow$ 实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 半正定(半负定).

实二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 正定(负定)$\Leftrightarrow$ 实二次型 $-f(\boldsymbol{x})$ 负定(正定).

实二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 半正定(半负定)$\Leftrightarrow$ 实二次型 $-f(\boldsymbol{x})$ 半负定(半正定).

实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 正定(负定)$\Leftrightarrow$ 实对称阵 $-\boldsymbol{A}$ 负定(正定).

实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 半正定(半负定)$\Leftrightarrow$ 实对称阵 $-\boldsymbol{A}$ 半负定(半正定).

(2) 正定矩阵(正定二次型)的等价结论

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵，则

$\boldsymbol{A}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 存在 $m\times n$ 列满秩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\Leftrightarrow$

存在 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$($\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同)$\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全大于 $0\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式全大于 $0\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于 $0\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{A}$ 对应的二次型的标准形中 n 个变量系数全为正数(正惯

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

性指数 $p=n$，负惯性指数 $q=0$，秩为 n)

(3) 半正定阵(半正定二次型)的等价结论

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵，且 $R(\boldsymbol{A})=r$，则

$\boldsymbol{A}$ 半正定 $\Leftrightarrow$ 存在 $r\times n$ 行满秩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式都非负 $\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值非负 $\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{A}$ 对应的二次型的标准形中 n 个变量的系数全非负($q=0$)

二、复习题及基础

❶ 设方阵 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{B}_1$ 合同，$\boldsymbol{A}_2$ 与 $\boldsymbol{B}_2$ 合同，证明 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \\ & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \\ & \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$ 合同.

证　因为 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{B}_1$ 合同，所以存在可逆矩 $\boldsymbol{C}_1$，使 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_1$.

又因为 $\boldsymbol{A}_2$ 与 $\boldsymbol{B}_2$ 合同，所以存在可逆矩 $\boldsymbol{C}_2$，使 $\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}_2$.

令 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \\ & \boldsymbol{C}_2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}$ 可逆，于是有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \\ & \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_1 & \\ & \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \\ & \boldsymbol{C}_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \\ & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \\ & \boldsymbol{C}_2\end{pmatrix}=$$

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \\ & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\boldsymbol{C}$$

即 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \\ & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \\ & \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$ 合同.

❷ 设 $\boldsymbol{A}$ 对称，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同，则 $\boldsymbol{B}$ 对称.

证　由 $\boldsymbol{A}$ 对称，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

因 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，于是

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$$

即 $\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵.

❸ 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵，证明：存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 均为对角阵.

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$，使

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{E}$$

记 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}$，则显然 $\boldsymbol{B}_1$ 是实对称矩阵，于是存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)$$

其中 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 为 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}$ 的特征值.

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}$，则有

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}$$

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 同时合同对角阵.

❹ 设二次型 $f=\sum\limits_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n)^2$，令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则二次型 f

年　月　日

的秩等于 $r(\boldsymbol{A})$.

证法一 将二次型 f 写成如下形式

$$f=\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{in}x_n)^2$$

设 $$\boldsymbol{A}_i=(a_{i1},\cdots,a_{ij},\cdots,a_{in})\quad(i=1,\cdots,m)$$

则 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix}$$

于是 $$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{A}_m^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i$$

故

$$f=\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{in}x_n)^2=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left[(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{i1}\\ \vdots\\ a_{ij}\\ \vdots\\ a_{in}\end{pmatrix}\right]^2=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left[(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{i1}\\ \vdots\\ a_{ij}\\ \vdots\\ a_{in}\end{pmatrix}(a_{i1},\cdots,a_{ij},\cdots,a_{in})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right]=$$

$$(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)\left(\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i\right)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=$$

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$$

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 就是所求的二次型 f 的表示矩阵. 显然 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$,故二次型 f 的秩为 $r(\boldsymbol{A})$.

证法二 设 $y_i=a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n(i=1,\cdots,n)$. 记 $\boldsymbol{Y}=(y_1,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}}$, 于是 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,则

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$f=\sum_{i=1}^{m}y_i^2=y_1^2+\cdots+y_m^2=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$$

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 就是所求的二次型 f 的表示矩阵. 显然 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$，故二次型 f 的秩为 $r(\boldsymbol{A})$.

5 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称可逆阵，$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为实二次型，则 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵 $\Leftrightarrow$ 可用正交变换将 f 化成规范形.

证　"$\Rightarrow$" 设 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的任意的特征值，因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称可逆矩阵，所以 λ_i 是实数，且 $\lambda_i\neq 0, i=1,\cdots,n$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，故存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 下，f 化为标准形，即

$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_i,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{Y}=$$
$$\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_iy_i^2+\cdots+\lambda_ny_n^2 \qquad (*)$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，显然 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_i,\cdots,\lambda_n)$ 也是正交矩阵，由 $\boldsymbol{D}$ 为对角实矩阵，故 $\lambda_i^2=1$ 即知 λ_i 只能是 $+1$ 或 -1，这表明 $(*)$ 恰为规范形.

"$\Leftarrow$" 因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称可逆矩阵，故二次型 f 的秩为 n.

设在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 下二次型 f 化成规范形，于是

$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}=y_1^2+\cdots+y_r^2-y_{r+1}^2-\cdots-y_n^2=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y}$$

其中 r 为 f 的正惯性指数，$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1)$.

显然 $\boldsymbol{D}$ 是正交矩阵，由 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，且有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

6 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵，$|\boldsymbol{A}|<0$，则存在非零列向量 $\boldsymbol{\xi}$，使 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}<0$.

证法一　因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵，所以可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_i,\cdots,\lambda_n)$$

其中 $\lambda_i(i=1,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由 $|\boldsymbol{A}|<0$，故至少存在一个特征值 λ_k，使 $\lambda_k<0$，取 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$，则有

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=(0,\cdots,1,\cdots,0)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=$$

$$(0,\cdots,1,0,\cdots,0)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\lambda_k<0$$

年　月　日

证法二(反证法) 若 $\forall \boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$,都有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \geqslant 0$,由 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵,则 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵,故 $|\boldsymbol{A}| \geqslant 0$ 与 $|\boldsymbol{A}| < 0$ 矛盾.

7 设 n 元实二次型 $f = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,证明 f 在条件 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 下的最大值恰为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

解 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 f 的特征值,则存在正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$,使

$$f = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

设 λ_k 是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中最大值,当 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 时,有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1$$

因此

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \leqslant \lambda_k (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \leqslant \lambda_k$$

这说明在 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 的条件下 f 的最大值不超过 λ_k.

设 $\quad \boldsymbol{Y}_0 = (y_1, \cdots, y_k, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}} = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$

则

$$\boldsymbol{Y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_0 = 1$$

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = \lambda_k$$

令 $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}_0$,则

$$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{Y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = 1$$

并且

$$f(\boldsymbol{X}_0) = \boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{Y}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y}_0 = \lambda_k$$

这说明 f 在 $\boldsymbol{X}_0$ 达到 λ_k,即 f 在 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 条件下的最大值恰为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

8 设 $\boldsymbol{A}$ 正定,$\boldsymbol{P}$ 可逆,则 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 正定.

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 正定,所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$,于是 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}$,显然 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵,且 $(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,即 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是实对称阵,故 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 正定.

9 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件为存在实矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定.

证 先证必要性. 取 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$,因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}$$

当然 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

再证充分性,用反证法.

若 $\boldsymbol{A}$ 不是可逆阵,则 $r(\boldsymbol{A}) < n$,于是存在

$$\boldsymbol{X}_0 \neq \boldsymbol{0}, \text{使 } \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{0}$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是实矩阵,于是有

$$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_0 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0) = 0$$

这与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵矛盾.

10 设 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵,则 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A}^{-1}$ 仍为正定阵.

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵,故 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于 0,易

见 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{A}^{-1}$ 全是实对称矩阵，且它们的特征值全大于0，故 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{A}^{-1}$ 全是正定矩阵，$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^{-1}$ 为实对称阵.

对 $\forall \boldsymbol{X}\neq 0$，有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}>0$$

即 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^{-1}$ 的正定矩阵.

11 设 $\boldsymbol{A}$ 正定，$\boldsymbol{B}$ 为半正定，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 正定.

证　显然 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为实对称阵，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为实对称阵. 对 $\forall \boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0,\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\geqslant 0$，因 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}>0$，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

12 设 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于0，$\boldsymbol{A}$ 的特征向量都是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{AB}$ 正定.

证　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值分别为 $\lambda_i,\mu_i(i=1,\cdots,n)$.

由题设知 $\lambda_i>0,\mu_i>0(i=1,\cdots,n)$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_i,\cdots,\boldsymbol{P}_n)$，使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_i,\cdots,\lambda_n)$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i=\lambda_i\boldsymbol{P}_i$，$\boldsymbol{P}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，其中 $i=1,\cdots,n$.

由已知条件 $\boldsymbol{P}_i$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，故

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_i=\mu_i\boldsymbol{P}_i\quad(i=1,\cdots,n)$$

因此 $\boldsymbol{AB}\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{A}\mu_i\boldsymbol{P}_i=(\lambda_i\mu_i)\boldsymbol{P}_i$，这说明 $\lambda_i\mu_i$ 是 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值，且 $\lambda_i\mu_i>0$ $(i=1,\cdots,n)$.

又因为

$$\boldsymbol{ABP}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_i\mu_i,\cdots,\lambda_n\mu_n),\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{-1}$$

故 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_i\mu_i,\cdots,\lambda_n\mu_n)\boldsymbol{P}$，显然 $\boldsymbol{AB}$ 为实对称阵，因此 $\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵.

13 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定矩阵，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为非零实数，记

$$\boldsymbol{B}=(a_{ij}b_ib_j)_{n\times n}$$

则方阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

证法一　因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，即 $a_{ij}=a_{ji}$，所以 $a_{ij}b_ib_j=a_{ji}b_jb_i$，这说明 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵，显然

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}b_1^2 & a_{12}b_1b_2 & \cdots & a_{1n}b_1b_n\\ a_{21}b_2b_1 & a_{22}b_2^2 & \cdots & a_{2n}b_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}b_nb_1 & a_{n2}b_nb_1 & \cdots & a_{nn}b_n^2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}b_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$$

对任给的 n 维向量 $\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，因 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为非零实数，所以 $(b_1x_1,\cdots,b_nx_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，又因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，因此有

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\boldsymbol{X}=$$

$$(b_1x_1,\cdots,b_nx_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1x_1 \\ \vdots \\ b_nx_n \end{pmatrix}>0$$

即 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

证法二 记

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}b_1^2 & a_{12}b_1b_2 & \cdots & a_{1n}b_1b_n \\ a_{21}b_2b_1 & a_{22}b_2^2 & \cdots & a_{2n}b_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_nb_1 & a_{n2}b_nb_1 & \cdots & a_{nn}b_n^2 \end{pmatrix}$$

则因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,显然 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵.

$\boldsymbol{B}$ 的 k 阶顺序主子阵 $\boldsymbol{B}_k$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的阶顺序主子阵分别左、右相乘对角阵 $\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ 而得到,即

$$\boldsymbol{B}_k=\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_k \end{pmatrix}$$

计算 $\boldsymbol{B}_k$ 的行列式,有

$$|\boldsymbol{B}_k|=\prod_{i=1}^{n}b_i^2\,|\boldsymbol{A}_k|>0$$

故由正定矩阵的等价命题知结论正确.

14 设 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为实反对称矩阵,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|>0$.

证 因为 $\boldsymbol{M}$ 是 n 阶实矩阵,所以它的特征值若是复数,则必然以共轭复数形式成对出现;将 $\boldsymbol{M}$ 的特征值及特征向量写成复数形式,进一步可以证明对于 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{M}$,如果对任意非零列向量 $\boldsymbol{X}$,均有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}>0$$

可推出 $\boldsymbol{M}$ 的特征值(或者其实部)大于 0. 由于 M 的行列式等于它的特征值之积,故必有 $|\boldsymbol{M}|>0$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是反对称矩阵,显然对任意的非零向量 $\boldsymbol{X}$,均有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}>0$$

而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 显然是实矩阵,故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|>0$.

15 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵,则 $r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})$.

证 考虑线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,显然线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解一定是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

考虑线性方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，若 $\boldsymbol{X}_0$ 是线性方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的任一解，因此有 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{0}$.

上式两端左乘 $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}$ 有

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0)=0$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，因此必有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{0}$，故线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组，所以必有 $r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})$.

16 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵，则存在实数 k，使 $|\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}|>0$.

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_i,\cdots,\lambda_n)$$

其中 λ_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且为实数，$i=1,\cdots,n$. 于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_i,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$|\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{P}|\begin{vmatrix}\lambda_1+k & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i+k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n+k\end{vmatrix}|\boldsymbol{P}^{-1}|=$$

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+k)$$

取 $k=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\lambda_i|+1\}$，则 $\prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i+k)>0$，故 $|\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}|>0$.

17 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定阵，则对任意实数 $k>0$，均有 $|\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}|>k^n$.

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0(i=1,\cdots,n)$. 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

于是对任意 $k>0$，有

$$|\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{P}|\begin{vmatrix}\lambda_1+k & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i+k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n+k\end{vmatrix}|\boldsymbol{P}^{-1}|=$$

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+k)>\prod_{i=1}^{n}k=k^n$$

18 设 $\boldsymbol{A}$ 为半正定阵，则对任意实数 $k>0$，均有 $|\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}|>0$.

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i\geqslant 0(i=1,\cdots,n)$. 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

年　月　日

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_i,\cdots,\lambda_n),\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_i,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{P}^{-1}$$

于是对任意 $k>0$,有

$$|\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{P}|\ \mathrm{diag}(\lambda_1+k,\cdots,\lambda_i+k,\cdots,\lambda_n+k)\ |\boldsymbol{P}^{-1}|=$$
$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+k)\geqslant k^n>0$$

19 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵,λ 为正实数,记 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{B}$ 正定.

证 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,故 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵.

对 $\forall\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,有$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})>0$,$(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{AX})\geqslant 0$,因此有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=$$
$$\lambda(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})+(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{AX})>0$$

故 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

20 $\boldsymbol{A}$ 是$m\times n$实矩阵,若$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$是正定矩阵的充分必要条件为$\boldsymbol{A}$ 是列满秩矩阵.

证 先证必要性.

方法一:设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,故 $\forall\boldsymbol{X}_0\neq\boldsymbol{0}$,有

$$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_0=(\boldsymbol{AX}_0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX}_0)>0$$

由此 $\boldsymbol{AX}_0\neq\boldsymbol{0}$,即线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解,所以 $r(\boldsymbol{A})=n$,即 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩矩阵.

方法二:因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,故 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=n$,由于

$$n\leqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant n$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=n$. 即 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩矩阵.

再证充分性. 因 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩矩阵,故线性方程组仅有零解,$\forall\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{X}$ 为实向量,有 $\boldsymbol{AX}\neq\boldsymbol{0}$. 因此

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX})=(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{AX})>0$$

显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

21 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵,且满足 $\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵.

证 设λ为$\boldsymbol{A}$ 的任意特征值,$\boldsymbol{\xi}$为$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值λ 的特征向量,故 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$,则

$$\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}=\lambda^2\boldsymbol{\xi}$$

由
$$\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$$

有

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}-6\boldsymbol{A\xi}+4\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$$
$$(\lambda^2-6\lambda+4)\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$$

由 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$,故

$$\lambda^2-6\lambda+4=0$$
$$\lambda=3\pm\sqrt{5}>0$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,故 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵.

22 设三阶实对称阵$\boldsymbol{A}$的特征值为1,2,3,其中1,2对应的特征向量分别

心得 体会 拓广 疑问

为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，求一正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，将二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 化成标准形.

解　设 $\boldsymbol{\xi}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量，由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，故 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 满足正交条件

$$\begin{cases}1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=0\\0\cdot x_1+1\cdot x_2+1\cdot x_3=0\end{cases}$$

解之可取 $\boldsymbol{\xi}_3=(0,1,-1)$，将其单位化有

$$\boldsymbol{P}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{P}_2=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{P}_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$$

令
$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

则在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 下，将 f 化成标准形为

$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{Y}=y_1^2+2y_2^2+3y_3^2$$

23 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&a\\2&a&4\end{pmatrix}$$

二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 经正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 化成标准形 $f=9y_3^2$，求所作的正交变换.

解　由 f 的标准形为 $f=9y_3^2$，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=9$.

故
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-4&-a\\-2&-a&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)$$

令 $\lambda=0$，则

$$\begin{vmatrix}-1&2&-2\\2&-4&-a\\-2&-a&-4\end{vmatrix}=0$$

解之 $a=-4$.

由此
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 有

$$0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\2&-4&4\\-2&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可得 $\boldsymbol{A}$ 的两个正交的特征向量

年　月　日

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3=9$,可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$,将特征向量单位化得

$$\boldsymbol{P}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&1&-2\\1&2&2\end{pmatrix}$ 为正交矩阵,正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 为

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&1&-2\\1&2&2\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}$$

注:因特征向量选择的不同,正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 不唯一.

24 已知二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$ 正定,求 k.

解 二次型的表示矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&k&1\\k&2&0\\1&0&1-k\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{A}$ 正定,应有 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全大于 0. 故 $\begin{cases}\begin{vmatrix}1&k\\k&2\end{vmatrix}>0\\|\boldsymbol{A}|>0\end{cases}$,即

$$\begin{cases}k^2-2<0\\k(k^2-k-2)>0\end{cases}$$

解得 $-1<k<0$.

25 试问:三元方程 $3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3-x_1-x_2-x_3=0$,在三维空间中代表何种几何曲面.

解 记

$$f=3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3-x_1-x_2-x_3$$

则

$$f=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(-1,-1,-1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$$

则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^2(\lambda-5)$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

年 月 日

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，求得特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

由 Schmidt 正交化得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3=5$ 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，标准化得

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

令
$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

则在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 下

$$f=2y_1^2+2y_2^2+5y_3^2-\sqrt{3}\,y_3$$

于是 $f=0$ 为

$$2y_1^2+2y_2^2+5\left(y_3-\frac{\sqrt{3}}{10}\right)^2=\frac{3}{20}$$

为椭球面.

26 求出二次型 $f=(-2x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-2x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-2x_3)^2$ 的标准形及相应的可逆线性变换.

解　将括号展开，合并同类项有

$$\begin{aligned}f=&4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2x_2x_3+\\&x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3+\\&x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3=\\&6x_1^2+6x_2^2+6x_3^2-6x_1x_2-6x_1x_3-6x_2x_3=\\&6(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)=\end{aligned}$$

$$6[(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{3}{4}x_2^2+\frac{3}{4}x_3^2-\frac{3}{2}x_2x_3]=$$

$$6(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{9}{2}(x_2-x_3)^2$$

令
$$\begin{cases}y_1=x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\ y_2=x_2-x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

则可逆变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

在此可逆线性变换下，f 的标准形为

$$f=6y_1^2+\frac{9}{2}y_2^2$$

27 用初等变换和配方法分别将二次型：

(1) $f_1=-x_1^2-3x_2^2+2x_4^2+4x_1x_2-4x_1x_4+2x_2x_4$；

(2) $f_2=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$.

化成标准形和规范形，并分别写出所作的合同变换和可逆变换.

解 先用配方法求解.

(1) $f_1=(-x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_4)-3x_2^2+2x_4^2+2x_2x_4=$

$$-(x_1-2x_2+2x_4)^2+x_2^2+6x_4^2-6x_2x_4=$$

$$-(x_1-2x_2+2x_4)^2+(x_2-3x_4)^2-3x_4^2$$

令
$$\begin{cases}y_1=x_1-2x_2+2x_4\\ y_2=x_2-3x_4\\ y_3=x_3\\ y_4=x_4\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x_1=y_1+2y_2+4y_4\\ x_2=y_2+3y_4\\ x_3=y_3\\ x_4=y_4\end{cases}$$

令
$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&1&0&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

心得 体会 拓广 疑问

则二次型 f 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形

$$f_1=-y_1^2+y_2^2-3y_4^2$$

若再令
$$\begin{cases}z_1=y_1\\z_2=y_2\\z_3=y_3\\z_4=\sqrt{3}\,y_4\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}y_1=z_1\\y_2=z_2\\y_3=z_3\\y_4=\dfrac{\sqrt{3}}{3}z_4\end{cases}$$

令
$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

则原二次型 f_1 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}$ 化成规范形 $f_1=-y_1^2+y_2^2-y_4^2$.

(2) 先线性变换 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$,原二次型化成

$$\begin{aligned}f_2=&2(y_1^2-y_2^2)-6y_1y_3+6y_2y_3+2y_1y_3+2y_2y_3=\\&2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3=\\&2(y_1-y_3)^2-2y_2^2+8y_2y_3-2y_3^2=\\&2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}z_1=y_1-y_3\\z_2=y_2-2y_3\\z_3=y_3\end{cases}$,即 $\begin{cases}y_1=z_1+z_3\\y_2=z_2+2z_3\\y_3=z_3\end{cases}$.

令
$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则原二次型 f_2 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{z}$ 化成标准形

$$f_2=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$$

若再令
$$\begin{cases}w_1=\sqrt{2}\,z_1\\w_2=\sqrt{2}\,z_2\\w_3=\sqrt{6}\,z_3\end{cases}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

即
$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} w_1 \\ z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} w_2 \\ z_3 = \dfrac{\sqrt{6}}{6} w_3 \end{cases}$$

令
$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & & \\ & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \\ & & \dfrac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

则原二次型 f_2 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{Q} \boldsymbol{w}$ 化成规范形
$$f_2 = w_1^2 - w_2^2 + w_3^2$$

用初等变换法求解.

(1) 设
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E}_4) = \left(\begin{array}{cccc:cccc} -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[c_2 + 2 \times c_1]{r_2 + 2 \times r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[c_4 + (-2) \times c_1]{r_4 + (-2) \times r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[c_4 + 3 \times c_2]{r_4 + 3 \times r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{\sqrt{3}} \times c_3]{\frac{1}{\sqrt{3}} \times r_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dfrac{4\sqrt{3}}{3} & \sqrt{3} & 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right)$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

令
$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\4&3&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm T},P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{4\sqrt3}{3}&\sqrt3&0&\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}^{\mathrm T}$$

则原二次型 f_1 经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f_1=-y_1^2+y_2^2-3y_3^2$. 二次型经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{z}$ 化成规范形 $f_1=-z_1^2+z_2^2-z_4^2$.

(2) 设
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&-3&0&1&0\\1&-3&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_3+(-1)\times c_2]{r_3+(-1)\times r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&1&0&1&0&0\\1&0&-3&0&1&0\\0&-3&6&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_3+3\times c_1]{r_3+3\times r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&6&3&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_1+c_2]{r_1+r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&6&3&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_2+(-\frac12)\times c_1]{r_2+(-\frac12)\times r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&0&0&1&1&0\\0&-\frac12&0&-\frac12&\frac12&0\\0&0&6&3&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{\sqrt2\times r_2,\sqrt2\times c_2\\ \frac{\sqrt6}{6}\times r_3,\frac{\sqrt2}{6}\times c_3}]{\frac{1}{\sqrt2}\times r_1,\frac{1}{\sqrt2}\times c_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&-1&0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0&1&\frac{\sqrt6}{2}&-\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt6}{6}\end{array}\right)$$

令
$$P_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac12&\frac12&0\\3&-1&1\end{pmatrix}^{\mathrm T},P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{\sqrt6}{2}&-\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt6}{6}\end{pmatrix}^{\mathrm T}$$

则原二次型 f_2 经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{y}$ 化成标准形

年　月　日

$$f_2=2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+6y_3^2$$

二次型经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{z}$ 化成规范形

$$f_2=z_1^2-z_2^2+z_3^2$$

28 用三种不同方法化下列二次型为标准形和规范形.

(1) $f_1=2x_1^2+3x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$；

(2) $f_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

解 先用配方法求解.

(1)
$$f_1=2x_1^2+3(x_2^2+\frac{4}{3}x_2x_3)+3x_3^2=$$
$$2x_1^2+3\left(x_2+\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2$$

令
$$\begin{cases}y_1=x_1\\y_2=x_2+\dfrac{2}{3}x_3\\y_3=x_3\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x_1=y_1\\x_2=y_2-\dfrac{2}{3}y_3\\x_3=y_3\end{cases}$$

令
$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-\dfrac{2}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则二次型 f_1 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形

$$f_1=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$$

若再令
$$\begin{cases}z_1=\sqrt{2}\,y_1\\z_2=\sqrt{3}\,y_2\\z_3=\dfrac{\sqrt{15}}{3}y_3\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}z_1\\y_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}z_2\\y_3=\dfrac{\sqrt{15}}{5}z_3\end{cases}$$

令
$$Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & & \\ & \frac{\sqrt{3}}{3} & \\ & & \frac{\sqrt{15}}{5}\end{pmatrix}$$

原二次型 f_1 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{PQz}$ 化成规范形
$$f_1=z_1^2+z_2^2+z_3^2$$

(2) $f_2=(x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_4)+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_2x_3+2x_3x_4=$
$(x_1+x_2-x_4)^2+x_3^2-2x_2x_3+2x_3x_4+2x_2x_4=$
$(x_1+x_2-x_4)^2+(x_3-x_2+x_4)^2-(x_2-2x_4)^2+3x_4^2$

令
$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_4\\ y_2=x_2-2x_4\\ y_3=-x_2+x_3+x_4\\ y_4=x_4\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2-y_4\\ x_2=y_2+2y_4\\ x_3=y_2+y_3+y_4\\ x_4=y_4\end{cases}$$

令
$$P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则二次型 f_2 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 化成标准形
$$f_2=y_1^2-y_2^2+y_3^2+3y_4^2$$

若再令
$$\begin{cases}z_1=y_1\\ z_2=y_2\\ z_3=y_3\\ z_4=\sqrt{3}y_4\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}y_1=z_1\\ y_2=z_2\\ y_3=z_3\\ y_4=\frac{\sqrt{3}}{3}z_4\end{cases}$$

令
$$Q=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

原二次型 f_2 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{PQz}$ 化成规范形 $f_2=z_1^2-z_2^2+z_3^2+z_4^2$.

用初等变换法求解.

（1）设
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&0&0&1&0&0\\0&3&2&0&1&0\\0&2&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_3+(-\frac{2}{3})\times c_2]{r_3+(-\frac{2}{3})\times r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&0&0&1&0&0\\0&3&0&0&1&0\\0&0&\frac{5}{3}&0&-\frac{2}{3}&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{\frac{1}{\sqrt{3}}\times r_2,\frac{1}{\sqrt{3}}\times c_2\\ \frac{\sqrt{15}}{5}\times r_3,\frac{\sqrt{15}}{5}\times c_3}]{\frac{1}{\sqrt{2}}\times r_1\ \frac{1}{\sqrt{2}}\times c_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\0&0&1&0&-\frac{2\sqrt{15}}{15}&\frac{\sqrt{15}}{5}\end{array}\right)$$

令
$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\0&-\frac{2\sqrt{15}}{15}&\frac{\sqrt{15}}{5}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

则原二次型 f_1 经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f_1=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$. 二次型经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{z}$ 化成规范形 $f_1=z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

（2）设
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E}_4)=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&1&0&-1&1&0&0&0\\1&1&-1&0&0&1&0&0\\0&-1&1&1&0&0&1&0\\-1&0&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_2+(-1)\times c_1]{r_2+(-1)\times r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&-1&1&0&0&0\\0&0&-1&1&-1&1&0&0\\0&-1&1&1&0&0&1&0\\-1&1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_4+c_1]{r_4+r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&-1&1&-1&1&0&0\\0&-1&1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_3+c_2]{r_3+r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&-1&1&-1&1&0&0\\0&-1&-1&2&-1&1&1&0\\0&1&2&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_3+c_4]{r_3+r_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&-1&1&0&0\\0&0&3&2&0&1&1&1\\0&1&2&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_3+(-2)\times c_2]{r_3+(-2)\times r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&-1&1&0&0\\0&0&3&0&2&-1&1&1\\0&1&0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_2+c_4]{r_2+r_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&2&0&1&0&1&0&1\\0&0&3&0&2&-1&1&1\\0&1&0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_4+(-\frac{1}{2})\times c_2]{r_4+(-\frac{1}{2})\times r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&2&0&0&0&1&0&1\\0&0&3&0&2&-1&1&1\\0&0&0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{\frac{1}{\sqrt{3}}\times r_3,\frac{1}{\sqrt{3}}\times c_3\\ \sqrt{2}\times r_4,\sqrt{2}\times c_4}]{\frac{1}{\sqrt{2}}\times r_2\ \frac{1}{\sqrt{2}}\times c_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&1&0&\frac{2\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\0&0&0&-1&\sqrt{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right)$$

令
$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\2&-1&1&1\\1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\\sqrt{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

则原二次型 f_2 可经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f_2=y_1^2+2y_2^2+3y_3^2-\frac{1}{2}y_4^2$. f_2 可经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{z}$ 化成规范形

$$f_2=z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2$$

用正交变换法求解.

(1) f_1 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$,由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,5.

对 $\lambda_1=1$,解 $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$,取 $\boldsymbol{T}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$,单位化得 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$;对 $\lambda_2=2$,解 $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,取 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$;对 $\lambda_3=5$,解 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,取 $\boldsymbol{T}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,单位化得 $\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$. 令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵,经正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$,原二次型 f 化为 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

(2) f_2 的矩阵为

心得 体会 拓广 疑问

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$$

由
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0&1\\-1&\lambda-1&1&0\\0&1&\lambda-1&-1\\1&0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,3,1,1$.

对 $\lambda_1=-1$，解 $\begin{pmatrix}-2&-1&0&1\\-1&-2&1&0\\0&1&-2&-1\\1&0&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，取 $\boldsymbol{T}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，对 $\lambda_2=3$，解 $\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\-1&2&1&0\\0&1&2&-1\\1&0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$. 取 $\boldsymbol{T}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

对 $\lambda_3=\lambda_4=1$，解

$$\begin{pmatrix}0&-1&0&1\\-1&0&1&0\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}，得\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

年 月 日

取
$$\boldsymbol{T}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{T}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

再令
$$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_4=\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵，经正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，

原二次型 f 化为
$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2$$

29 判断下列二次型正定、负定还是不定.

(1) $f_1=-2x_2^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$.

解 二次型 f_1 的矩阵为
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式
$$-2<0,\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -6\end{vmatrix}=11>0,\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{vmatrix}=-38<0$$

所以二次型 f_1 是负定二次型.

(2) $f_2=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$.

解 二次型 f_2 的矩阵为
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & 0 & 9 & -6\\ 1 & -3 & -6 & 19\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$1>0,\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=2>0,\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{vmatrix}=6>0$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & 0 & 9 & -6\\ 1 & -3 & -6 & 19\end{vmatrix}=24>0$$

所以二次型 f_2 是正定二次型.

(3) $f_3=x_1^2+x_2^2+14x_3^2+7x_4^2+6x_1x_3+4x_1x_4-4x_2x_3$.

解　二次型 f_3 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 3 & -2 & 14 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式

$$1>0,\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1>0,\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 14\end{vmatrix}=1>0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 3 & -2 & 14 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 7\end{vmatrix}=-33<0$$

所以二次型 f_3 是不定二次型.

30 求一可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$，把二次型 $f_1=2x_1^2+5x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2-4x_1x_3$ 化成规范形 $f_1=y_1^2+y_2^2+y_3^2$，同时也把二次型

$$f_2=\frac{3}{2}x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-2x_1x_3-2x_1x_3-4x_2x_3$$

化成标准形 $f_2=k_1y_1^2+k_2y_2^2+k_3y_3^2$.

解　记 $f_1=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ -1 & 5 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ -1 & 5 & 0\\ -2 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_3+c_1\\ c_2+\frac{1}{2}c_1}]{\substack{r_3+r_1\\ r_2+\frac{1}{2}r_1}}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3+\frac{2}{9}c_2]{r_3+\frac{2}{9}r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{9} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{10}{9} \\ 0 & 1 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_1\times\frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_2\times\frac{\sqrt{2}}{3} \\ c_3\times\frac{3}{4}}]{\substack{r_1\times\frac{1}{\sqrt{2}} \\ r_2\times\frac{\sqrt{2}}{3} \\ r_3\times\frac{3}{4}}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

取 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$.

记 $f_2=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

则

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$B_1=P^TBP=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&0\\ \frac{\sqrt2}{6}&\frac{\sqrt2}{3}&0\\ \frac56&\frac16&\frac34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac32&0&-1\\0&3&-2\\-1&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{\sqrt2}{6}&\frac56\\0&\frac{\sqrt2}{3}&\frac16\\0&0&\frac34\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{2\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{\sqrt2}{4}&\sqrt2&-\frac{5\sqrt2}{6}\\ \frac12&-1&\frac13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{\sqrt2}{6}&\frac56\\0&\frac{\sqrt2}{3}&\frac16\\0&0&\frac34\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac34&\frac14&\frac{1}{2\sqrt2}\\ \frac14&\frac34&-\frac{\sqrt2}{4}\\ \frac{1}{2\sqrt2}&-\frac{\sqrt2}{4}&\frac12\end{pmatrix}=$$

$$\frac14\begin{pmatrix}3&1&\sqrt2\\1&3&-\sqrt2\\ \sqrt2&-\sqrt2&2\end{pmatrix}=\frac14B_2$$

其中
$$B_2=\begin{pmatrix}3&1&\sqrt2\\1&3&-\sqrt2\\ \sqrt2&-\sqrt2&2\end{pmatrix}$$

显然 B_1,B_2 都是实对称矩阵，它们的特征值为 $\frac14$ 倍的关系，特征向量相同

$$|\lambda E-B_2|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-\sqrt2\\-1&\lambda-3&\sqrt2\\-\sqrt2&\sqrt2&\lambda-2\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}0&(\lambda-3)^3-1&\sqrt2(\lambda-4)\\1&-(\lambda-3)&-\sqrt2\\0&-\sqrt2(\lambda-4)&\lambda-4\end{vmatrix}=$$

$$\lambda(\lambda-4)^2=0$$

则 B_2 的特征值为 $\lambda=0,\lambda_2=\lambda_3=4$，故 B_1 的特征值为 $0,1,1$.

以下求 B_2 的特征向量.

对于 $\lambda_1=0$，求得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\\1\end{pmatrix}$，单位化后 $\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{pmatrix}-\frac12\\ \frac12\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=4$，求得 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}\sqrt2\\0\\1\end{pmatrix}$.

年　月　日

由 Schmidt 标准正交化后得

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

令
$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，且有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP})\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PQ}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{2}}{6}&\frac{5}{6}\\0&\frac{\sqrt{2}}{3}&\frac{1}{6}\\0&0&\frac{3}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{2}{3}&\frac{7}{6\sqrt{2}}\\\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{6\sqrt{2}}\\\frac{3}{4\sqrt{2}}&0&\frac{3}{4\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

于是
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{APQ}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{EQ}=\boldsymbol{E}$$

即
$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

在可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$ 下

$$f_1=y_1^2+y_2^2+y_3^2$$

$$f_2=y_2^2+y_3^2$$

（注：经验算本题所得 $\boldsymbol{C}$ 是正确的，需要注意的是 $\boldsymbol{C}$ 并不唯一）

31 求一可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，将二次型 f 化成二次型 g.

$$f=2x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-10x_2x_3$$

$$g=2y_1^2+3y_2^2+6y_3^2-4y_1y_2-4y_1y_3+8y_2y_3$$

解 根据题意，有

$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&9&-5\\-2&-5&3\end{pmatrix}$$

心得 体会 拓广 疑问

$$g=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-2&3&4\\-2&4&6\end{pmatrix}$$

将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别作合同变换如下

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&9&-5\\-2&-5&3\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_2-2c_1\\c_3+c_1}]{\substack{r_2-2r_1\\r_3+r_1}}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\\1&-2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+c_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

在可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Z}$ 下

$$f=2z_1^2+z_2^2$$

其中

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-2&3&4\\-2&4&6\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_2+c_1\\c_3+c_1}]{\substack{r_2+r_1\\r_3+r_1}}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&2&4\\1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+c_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\1&1&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

在可逆线性变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{Z}$ 下 $g=2z_1^2+z_2^2$. 其中

$$\boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{Y}$ 得

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{Y}$$

令 $$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&-6\\0&0&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

在可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 下 $f=g=2z_1^2+z_2^2$.

32 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,$\boldsymbol{AB}$ 是实对称矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 是正定矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于 0.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

证 先证必要性.

设 λ 为 $\boldsymbol{B}$ 的任一特征值,对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}$,则 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,且有

$$\boldsymbol{BX}=\lambda\boldsymbol{X}$$

用 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 左乘上式有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$$

因为 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{A}$ 都是正定矩阵,故

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}>0,\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}>0$$

于是 $\lambda>0$,即 $\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于 0.

再证充分性.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 合同于单位矩阵,故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{E}\tag{1}$$

由 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵,知 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{P}$ 也是实对称矩阵,因此存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{P}]\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_i,\cdots,\mu_n)\tag{2}$$

即有

$$(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{PQ})=\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_i,\cdots,\mu_n)\tag{3}$$

其中 $\mu_1,\cdots,\mu_i,\cdots,\mu_n$ 是 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{P}$ 的特征值.

在(1) 的两端左乘 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$,右乘 $\boldsymbol{Q}$,有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$$

即

$$(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{PQ})=\boldsymbol{E}$$

这说明$(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ 与$(\boldsymbol{PQ})$ 互逆,也就是说

$$(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{PQ})^{-1}$$

将上式代入(3),说明矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与对角阵 $\boldsymbol{D}$ 相似,故它们的特征值相等;由条件知 $\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于 0,因此对角阵 $\boldsymbol{D}$ 的特征值也全大于 0. 由(2) 知 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 合同,因此 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于 0.

33 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实正定阵,证明:存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{E}$ 且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,其中 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n>0$ 为 $|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$ 的 n 个实根.

证 因 $\boldsymbol{A}$ 正定,故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1$,使

$$\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{E}$$

因 $\boldsymbol{B}$ 正定,故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_2$,使

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2$$

于是

$$\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}_1=\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)$$

易见 $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}_1$ 为正定矩阵,不妨设它的特征值为

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n>0$$

则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}_1|=|\lambda\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}_1|=|\boldsymbol{P}_1|^{\mathrm{T}}|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}||\boldsymbol{P}_1|$

故

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}_1|=0\Leftrightarrow|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$$

即 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n>0$ 为 $|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$ 的几个实根.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

由 $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1$ 为正定阵，知其为实对称矩阵，所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Q}$，则

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

34 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实正定阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实半正定阵，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\geqslant|\boldsymbol{A}|$.

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，所以存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶半正定阵，则 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 仍是实对称半正定阵，故存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_i,\cdots,\lambda_n)$$

其中 $\lambda_i\geqslant 0(i=1,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 的特征值，且有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$$

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}$，则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，于是

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}$$

上式两端取行列式，得

$$|\boldsymbol{P}|^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}|=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\geqslant 1=|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|$$

因
$$|\boldsymbol{P}|^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{P}|>0$$

故
$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\geqslant|\boldsymbol{A}|$$

35 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为实正定阵，证明：方程 $|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$ 的根全大于 0.

证　由第 33 题知 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1|=0\Leftrightarrow|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$. 其中 $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1$ 为正交矩阵，它的特征值 $\lambda_i>0(i=1,\cdots,n)$，故 $|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$ 的根全大于 0.

36 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，试证：存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以是实对称矩阵，于是存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，它们全大于 0.

令 $\delta_i=\sqrt{\lambda_i}(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_1^2&&&\\&\delta_2^2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n^2\end{pmatrix}=$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{pmatrix}\delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_n\end{pmatrix}$$

而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=$$

$$\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$$

令
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$$

显然 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵,且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

37 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆实方阵,证明:$\boldsymbol{A}$ 可表示为一个正定阵与一正交阵的乘积.

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆实方阵,故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,所以存在 n 阶正定矩阵 $\boldsymbol{B}$,使

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$$

于是有

$$(\boldsymbol{AB}^{-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB}^{-1})=(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}^{-1}=(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{E}$$

这说明 $\boldsymbol{AB}^{-1}$ 是正交阵.

令
$$\boldsymbol{AB}^{-1}=\boldsymbol{Q}$$

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QB}$,其中 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

38 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶正定矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 也为 n 阶正定矩阵的充分必要条件是:$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

证法一 先证必要性.

由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}$ 都是正定矩阵,所以知它们都是对称矩阵,因此有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B},(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$$

于是

$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

再证充分性.

由条件 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 得

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$$

因此 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵.

因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵,故它们皆为实对称矩阵,且有可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$$

于是

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$$

上式左乘 $\boldsymbol{Q}$,右乘 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 得

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})$$

这说明 $\boldsymbol{AB}$ 与对称矩阵 $(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})$ 相似;因为 $\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}$ 是可逆矩阵,故矩阵 $(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})$ 是正定矩阵,故它的特征值全大于 0,所以 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值也全大于 0.

综合上述知 $\boldsymbol{AB}$ 正定.

证法二　必要性同证法一,以下证明充分性.

由条件 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 得

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$$

因此 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵.

由于 $\boldsymbol{A}$ 正定,所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$$

于是

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|&=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QB}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}|=\\&|\lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}|=\\&|\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}}||(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}|=\\&|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}}|\end{aligned}$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=0\Leftrightarrow|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}}|=0$$

这说明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值.

因为 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵,易见 $\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}}$ 也是正定矩阵,故它的特征值全大于 0,所以 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值也全大于 0.

综合上述知 $\boldsymbol{AB}$ 正定.

39 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,证明:$\boldsymbol{AB}$ 的特征值全是实数.

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$,于是有

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|&=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QB}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}|=\\&|\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}}||(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}}|\end{aligned}$$

即 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=0\Leftrightarrow|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}}|=0$.

因为 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}}$ 也是实对称矩阵,因此它的特征值都是实数,故 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值也都是实数.

40 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是实反对称矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值的实部为 0.

年　月　日

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QB}|=|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}|=$$
$$|\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}|\,|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}}|\,|(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}|=|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}}|$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 是实反对称矩阵，所以 $\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}}$ 也是实反对称矩阵，因此它的特征值实部为 0，故 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值实部也为 0.

41 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是半正定的实对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值是非负的实数.

证 由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定的，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定的，于是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$，因此

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\ |\lambda \boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\ |\lambda \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{B}|=$$
$$|\boldsymbol{A}|\ |\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}|\,|\lambda \boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{BP}^{-1}|\,|\boldsymbol{P}|=$$
$$|\boldsymbol{A}|\ |\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}|\,|\boldsymbol{P}|\,|\lambda \boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{BP}^{-1}|=$$
$$|\boldsymbol{A}|\ |\boldsymbol{A}^{-1}|\,|\lambda \boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{BP}^{-1}|=$$
$$|\lambda \boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{BP}^{-1}|=|\lambda \boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}^{-1}|$$

即 $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=0\Leftrightarrow|\lambda \boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}^{-1}|=0$.

由于 $\boldsymbol{B}$ 是半正定的实对称矩阵，故 $(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}^{-1}$ 是半正定的实对称矩阵，因此 $|\lambda \boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}^{-1}|=0$ 的根是非负实数. 于是 $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=0$ 的根也是非负实数，即 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值是非负的实数.

42 求证实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{r=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}(krs+r+s)x_rx_s$ 的秩和符号差与 k 无关.

证 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k+2 & 2k+3 & 3k+4 & \cdots & nk+(n+1) \\ 2k+3 & 4k+4 & 6k+5 & \cdots & 2nk+(n+2) \\ 3k+4 & 6k+5 & 9k+6 & \cdots & 3nk+(n+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ nk+(n+1) & 2nk+(n+2) & 3nk+(n+3) & \cdots & n^2k+2n \end{pmatrix}$$

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作合同变换，即把 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 $(-2),(-3),\cdots,(-n)$ 倍加到第 $2,3,\cdots,n$ 行上；同时把 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列的 $(-2),(-3),\cdots,(-n)$ 倍加到第 $2,3,\cdots,n$ 列上，得到与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} k+2 & -1 & -2 & \cdots & -(n-1) \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 作合同变换，即把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行的 $\dfrac{k+2}{2},-2,\cdots,-(n-1)$ 倍依次加到第 $1,3,4,\cdots,n$ 行上；同时把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列的 $\dfrac{k+2}{2},-2,\cdots,-(n-1)$ 倍依次加到第 $1,3,4,\cdots,n$ 列上，得到与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 合同的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为

$$C=\begin{pmatrix}0&-1&0&\cdots&0\\-1&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

由合同变换的传递性，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同，于是原二次型可经可逆线性变换化简成

$$f(x_1,\cdots,x_n)=-2y_1y_2$$

再作可逆线性变换

$$\begin{cases}y_1=z_1+z_2\\y_2=z_1-z_2\\y_i=z_i\quad(i=3,\cdots,n)\end{cases}$$

于是二次型 f 化成规范形

$$f(x_1,\cdots,x_n)=-2z_1^2+2z_2^2$$

显然二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的秩为 2，符号差为 0，它们的值均与 k 无关.

43 设二次型 $f=a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i\neq n-i+1}^{n}x_ix_{n-i+1}$，其中 a,b 为实数，问 a,b 满足什么条件时，二次型 f 正定.

证　二次型 f 的矩阵$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式的值与它的阶数n 的奇偶性有关：

(1) 当 $n=2m+1$ 时，二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&&&&&&b\\&\ddots&&&&\iddots&\\&&a&&b&&\\&&&a&&&\\&&b&&a&&\\&\iddots&&&&\ddots&\\b&&&&&&a\end{pmatrix}$$

它的各阶顺序主子式为

$$a,\cdots,a^{m+1},a^m(a^2-b^2),a^{m-1}(a^2-b^2)^2,\cdots,a(a^2-b^2)^m$$

(2) 当 $n=2m$ 时，二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&&&&&b\\&\ddots&&&\iddots&\\&&a&b&&\\&&b&a&&\\&\iddots&&&\ddots&\\b&&&&&a\end{pmatrix}$$

它的各阶顺序主子式为

$$a,\cdots,a^m,a^{m-1}(a^2-b^2),a^{m-2}(a^2-b^2)^2,\cdots,(a^2-b^2)^m$$

综合(1),(2)可知:当 $a>0$ 且 $a^2>b^2$ 时,二次型 f 是正定的.

44 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵,$r(\boldsymbol{A})=n$,A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式($i,j=1,2,\cdots,n$),二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j$$

(1) 记 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式,并证明二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) 二次型 $g(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 的规范形是否相同?说明理由.

证法一

(1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,故 $\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{A}_{ji}$. 由 $r(\boldsymbol{A})=n$,故 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$$

二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵形式为

$$f(\boldsymbol{X})=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1}\\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

从而 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$. 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是实对称矩阵,因此二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) 因为 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同,于是二次型 $g(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 有相同的规范形.

证法二

(1) 同证法一.

(2) 对二次型 $g(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 作可逆线性变换,$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}$,其中 $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,则

$$g(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}=$$
$$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}$$

由此可知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同,二次型 $g(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 有相同的规范形.

45 试说明二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+$$
$$[ax_1+(a+d_1)x_2+(a+2d_1)x_3]^2+$$
$$\sum_{i=2}^{n}[(a+d_i)x_1+(a+2d_i)x_2+(a+3d_i)x_3]^2$$

当 $d_1\neq 0$ 时,无论 n 为何值,$f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩均为 2.

解 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$,其中

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a+d_1 & a+2d_1\\ a+d_2 & a+2d_2 & a+3d_2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a+d_n & a+2d_n & a+3d_n\end{pmatrix}$$

对矩阵 A 作行的初等变换,可得 $A\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & d_1 & 2d_1\\ 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

所以当 $d_1\neq 0$ 时,A 的秩为 2,这与 n 的取值无关,因此二次型 f 的秩为 2.

46 已知 A 是 n 阶正定矩阵,令二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX+x_n^2$ 的矩阵为 B,求证:(1)B 是正定矩阵;(2)$|B|>|A|$.

证　(1) 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},a_{ij}=a_{ji}$$

则
$$B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+1\end{pmatrix}$$

显然 B 为实对称矩阵,且 B 与 A 的前 $n-1$ 阶顺序主子式完全相同,由于 A 是正定矩阵,故它的各阶顺序主子式全大于 0,因此 B 的前 $n-1$ 阶顺序主子式也全大于 0. 现考虑 B 的第 n 阶顺序主子式即它的行列式,有

$$|B|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 1\end{vmatrix}=$$
$$|A|+|A_{n-1}|>0\qquad(*)$$

可见 B 是正定矩阵.

(2) 由(*)即知 $|B|>|A|$.

47 设 n 元实二次型 $f=X^{\mathrm{T}}AX$,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值,且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 证明:对于任一实 n 维列向量 X 有 $\lambda_1X^{\mathrm{T}}X\leqslant X^{\mathrm{T}}AX\leqslant\lambda_nX^{\mathrm{T}}X$.

证　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的特征值,则存在正交变换 $X=PY$,使

$$f=X^{\mathrm{T}}AX=Y^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)Y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

年　月　日

由已知条件 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$，有

$$\lambda_1 \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \leqslant f = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \leqslant \lambda_n \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{1}$$

又因为 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵，于是有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$$

将此结果代入式(1)，即为

$$\lambda_1 \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \leqslant \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \leqslant \lambda_n \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$$

48 证明：若二次型 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定二次型，则

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型.

证 因为 f 是正定二次型，故它的表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，因此 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，作可逆线性变换 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}$. 对上述行列式的列作消法变换，将第 j 列的 $-z_j (j=1,2,\cdots,n)$ 倍加入第 $n+1$ 列，其中 $\boldsymbol{Z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & -(y_1 z_1 + y_2 z_2 + \cdots + y_n z_n) \end{vmatrix} =$$

$$-|\boldsymbol{A}|(y_1 z_1 + y_2 z_2 + \cdots + y_n z_n) = -|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} =$$

$$-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} = -|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以 $-|\boldsymbol{A}| < 0$，可见 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是负定二次型.

49 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，则：

(1) $|\boldsymbol{A}| \leqslant a_{nn}|\boldsymbol{A}_{n-1}|$，其中 $|\boldsymbol{A}_{n-1}|$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶顺序主子式；

(2) $|\boldsymbol{A}| \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，故

$$
\boldsymbol{A}_{n-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}
$$

也是正定矩阵，于是由第 48 题知

$$
f_{n-1}(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & y_{n-1} \\ y_1 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{vmatrix}
$$

是负定二次型，因此由行列式的加法运算有

$$
|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=
$$

$$
f_{n-1}(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{n-1,n})+a_{nn}|\boldsymbol{A}_{n-1}|
$$

其中 $|\boldsymbol{A}_{n-1}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式.

1°　当 $a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{n-1,n}$ 中至少有一个不为 0 时，$f_{n-1}(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{n-1,n})<0$.

$$
|\boldsymbol{A}|<a_{nn}|\boldsymbol{A}_{n-1}|
$$

2°　当 $a_{1n}=a_{2n}=\cdots=a_{n-1,n}=0$ 时，则 $|\boldsymbol{A}|=a_{nn}|\boldsymbol{A}_{n-1}|$. 总之有 $|\boldsymbol{A}|\leqslant a_{nn}|\boldsymbol{A}_{n-1}|$.

(2) 由(1) 得

$$
|\boldsymbol{A}|\leqslant a_{nn}|\boldsymbol{A}_{n-1}|\leqslant a_{nn}a_{n-1,n-1}|\boldsymbol{A}_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant a_{nn}a_{n-1,n-1}\cdots a_{22}a_{11}
$$

50 设 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶可逆矩阵，求证：$|\boldsymbol{P}|^2\leqslant\prod_{j=1}^{n}(p_{1j}^2+p_{2j}^2+\cdots+p_{nj}^2)$.

证

$$
\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}=
$$

$$
\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}p_{i1}^2 & & & * \\ & \sum_{i=1}^{n}p_{i2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \sum_{i=1}^{n}p_{in}^2 \end{pmatrix}
$$

因为 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵，故 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 是正定矩阵，由第 49 题的结论(2)，有

心得 体会 拓广 疑问

$$|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}| \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}^{2}\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(p_{1j}^{2} + p_{2j}^{2} + \cdots + p_{nj}^{2}\right)$$

显然$|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}|^{2}$,所以有$|\boldsymbol{P}|^{2} \leqslant \prod_{j=1}^{n}(p_{1j}^{2} + p_{2j}^{2} + \cdots + p_{nj}^{2})$.

2008 ～ 2017 年代数考研试题详解

2008 年
数学(一)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$,则(　　).

(A)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆　　(B)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

(C)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　(D)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

解　(C) 正确.

由 $\boldsymbol{A}^3=0$,有 $\boldsymbol{E}^3-\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}^3$,故$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}$.

因为 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$ 为 n 阶方阵,所以 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆.

又有 $\boldsymbol{E}^3+\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}^3$,故$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}$,所以 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆,因此选(C),当然(A),(B),(D) 错误.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,如果二次曲面方程

$$(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$$

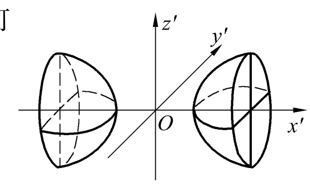

图 1

在正交变换下的标准方程的图形如图 1 所示,则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

解　(B) 正确.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,故存在 3 阶正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,由此二次曲面在正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ 下化成如下标准方程:$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2=1$,由所给图 1 为以 x' 轴为对称轴的双叶双曲面,故应有

$$\lambda_1>0,\lambda_2<0,\lambda_3<0$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值个数为 1,故选(B).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=0,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$. 则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

解　$\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 1.

设 λ_1,λ_2 为 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

由已知条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1$，故知 $\lambda_1=0,\lambda_2\neq 0$.

设 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_2 的特征向量，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda_2\boldsymbol{\xi}$.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，因此存在 k_1,k_2 使

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2 \tag{1}$$

于是

$$\lambda_2\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2)=k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=k_2(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$$

即

$$\lambda_2(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2)=2k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$$

$$(\lambda_2k_1-2k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2k_2-k_2)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故

$$\begin{cases}\lambda_2k_1-2k_2=0 & (2)\\ \lambda_2k_2-k_2=k_2(\lambda_2-1)=0 & (3)\end{cases}$$

由(3)得 $k_2=0$ 或 $\lambda_2-1=0$，但 $k_2\neq 0$，否则代入式(2)得 $k_1=0$，代回式(1)得 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$，矛盾.

因此 $\lambda_2-1=0$，即 $\lambda_2=1$.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分.

(20)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置.

证 (Ⅰ) 秩 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$；

(Ⅱ) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则秩 $r(\boldsymbol{A})<2$.

证 (Ⅰ) 由题意，得

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha})+r(\boldsymbol{\beta})\leqslant 2$$

(Ⅱ) 由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$. 于是

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=r((1+k^2)\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\beta})\leqslant 1<2$$

(21)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{pmatrix}_{n\times n},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

(Ⅰ) 证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

(Ⅱ) 当 a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1；

(Ⅲ) 当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

证 (Ⅰ) 方法一：记

$$D_n = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$$

以下用数学归纳法证明 $D_n = (n+1)a^n$.

当 $n=1$ 时，$D_1 = 2a$，结论成立. 当 $n=2$ 时，$D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$，结论成立.

假设结论对小于 n 的情况成立. 将 D_n 按第 1 行展开得

$$D_n = 2aD_{n-1} - \begin{vmatrix} a^2 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1} = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2} =$$

$$2ana^{n-1} - a^2(n-1)a^{n-2} = (n+1)a^n$$

故 $|\boldsymbol{A}| = (n+1)a^n$

方法二：有

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n \xlongequal{r_2 - \frac{1}{2}ar_1}$$

$$\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n \xlongequal{r_3 - \frac{2}{3}ar_2}$$

$$\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & & \\ & & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n = \cdots = \xrightarrow{r_n - \frac{n-1}{n}ar_{n-1}}$$

$$\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & 0 & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix}_n =$$

$$(n+1)a^n$$

(Ⅱ)当 $a \neq 0$ 时,方程组系数行列式 $D_n \neq 0$,故方程组有唯一解.

由克莱姆法则,将 D_n 第 1 列换成 $\boldsymbol{b}$,得行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1} =$$

$$D_{n-1} = na^{n-1}$$

所以,$x_1 = \dfrac{D_{n-1}}{D_n} = \dfrac{n}{(n+1)a}$.

(Ⅲ)当 $a=0$ 时,方程组为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为 $n-1$,所以方程组有无穷多解,其通解为 $\boldsymbol{x} = (0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}} + k(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

数学(二)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(7) 同数学(一)(5).

(8) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$,则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

解　(D) 正确. 因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=0$$

故 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$.

设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$,则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1|=(\lambda+2)^2-1=\lambda^2+4\lambda+3=0$$
$$\lambda_1=-3,\lambda_2=-1$$
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_2|=(\lambda-2)^2-1=\lambda^2-4\lambda+3=0$$
$$\lambda_1=3,\lambda_2=1$$
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_3|=(\lambda-2)^2-1=0$$
$$\lambda_1=3,\lambda_2=1$$
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_4|=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=0$$
$$\lambda_1=3,\lambda_2=-1$$

方法一:因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 都是 2 阶实对称矩阵,故它们都正交(合同) 相似对角阵,对角阵的对角元为其特征值,其中 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}_4$ 合同相似同一个对角阵 $\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}$,因此 $\boldsymbol{A}_4$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同,所以选(D).

方法二:由惯性定理知,两个实对称矩阵若合同,它们的特征值应具有相同的符号. 在 $\boldsymbol{A}_1$,$\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 中,仅 $\boldsymbol{A}_4$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值符号相同,为一正一负,(此题相等). 故只能 $\boldsymbol{A}_4$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同. 所以选(D).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(14) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,3,\lambda$. 若行列式 $|2\boldsymbol{A}|=-48$,则 $\lambda=$________.

解　$\lambda=-1$.

由 $|2\boldsymbol{A}|=-48$，则 $8|\boldsymbol{A}|=-48$. $|\boldsymbol{A}|=2\cdot 3\cdot\lambda=-6$.

故 $\lambda=-1$.

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(22) 同数学(一)(21).

(23)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

(Ⅱ) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

解 (Ⅰ) 设存在数 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 乘(1) 的两边，并由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，得

$$-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

式(1)－(2)，得

$$2k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0} \tag{3}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，从而

$$k_1=k_3=0$$

代入式(1)，得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2=0$，又由于 $\boldsymbol{\alpha}_2\neq 0$，所以 $k_2=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(Ⅱ) 由题设，可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=$$
$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

由(Ⅰ)，$\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，从而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

数学(三)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 同数学(一)(5).

(6) 同数学(二)(8).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,2$，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则 $|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$________.

解 $|4A^{-1}-E|=3$.

方法一：$|4A^{-1}-E|=|A^{-1}|\;|4E-A|=1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(4-1)(4-2)(4-2)=3$.

方法二：$|4A^{-1}-E|=(4\times1-1)(4\times\frac{1}{2}-1)(4\times\frac{1}{2}-1)=3$.

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(20) 同数学(一)(21).

(21) 同数学(二)(23).

数学(四)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 同数学(一)(5).

(6) 同数学(二)(8).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 设 3 阶矩阵 A 的特征值互不相同.若行列式 $|A|=0$,则 A 的秩为________.

解 A 的秩为 2.

设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,它们互不相同.

由 $|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=0$,知 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中有且仅有一个为 0,不妨设 $\lambda_1=0$,于是 $\lambda_2\neq0$, $\lambda_3\neq0$,故 A 的特征值互异,所以 A 相似对角阵 $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$.

因为 A 的秩与 D 的秩相同,故 A 的秩为 2.

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(20) 同数学(一)(21).

(21) 同数学(二)(23).

2009 年
数学(一)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基,则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

解　(A) 正确.

因为

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+2\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+2\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+3\cdot\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1=1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+3\cdot\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$$

故由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$,显然(A) 正确.

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵. 若 $|\boldsymbol{A}|=2$, $|\boldsymbol{B}|=3$,则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{B}^*\\2\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{A}^*\\3\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

解　(B) 正确.

方法一：由 $|A|=2\neq 0$，$|B|=3\neq 0$，故 A,B 可逆，记 E_n 为 n 阶单位阵.

由 $AA^*=|A|E_2$，得 $A^*=|A|A^{-1}=2A^{-1}$，同理 $B^*=|B|B^{-1}=3B^{-1}$.

于是

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|=2\times 3=6\neq 0$$

故 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆，且 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

因此

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} O & 6B^{-1} \\ 6A^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$$

所以(B) 正确.

方法二：两个分块反对角阵相乘得到分块对角阵，用 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 与(C)，(D)2 个矩阵相乘时，对角之处出现 $2A^*B$，$3B^*A$ 与 $3AB^*$，$2BA^*$，它们不等于 E_2，故(C)，(D) 错误，对于矩阵(A)，有

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2AA^* & O \\ O & 3BB^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4E_2 & O \\ O & 9E_2 \end{pmatrix}\neq 6E_4$$

对于矩阵(B)，有

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3AA^* & O \\ O & 2BB^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6E_2 & O \\ O & 6E_2 \end{pmatrix}=6E_4=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}E_4$$

故 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$，即(B) 正确.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(13) 若 3 维列向量 α,β 满足 $\alpha^T\beta=2$，其中 α^T 为 α 的转置，则矩阵 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为________.

解 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为 2.

由特征多项式降阶定理有

$$|\lambda E_3-\beta\alpha^T|=\lambda^{3-1}|\lambda E_1-\alpha^T\beta|=\lambda^2(\lambda-2)$$

故 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为 2.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$，$\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$；

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

解　（Ⅰ）对矩阵 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\xi}_1)$ 施以初等行变换

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\xi}_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

则

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

其中 k 为任意常数.

又 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$，对矩阵 $(\boldsymbol{A}^2\vdots\boldsymbol{\xi}_1)$ 施以初等行变换

$$(\boldsymbol{A}^2\vdots\boldsymbol{\xi}_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

则

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-a\\a\\b\end{pmatrix}$$

其中 a,b 为任意常数.

（Ⅱ）方法一：由（Ⅰ）知

$$|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3|=\begin{vmatrix}-1&-\frac{1}{2}+\frac{k}{2}&-\frac{1}{2}-a\\1&\frac{1}{2}-\frac{k}{2}&a\\-2&k&b\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq0$$

故 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

方法二：由题设可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{0}$. 设存在数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0}\tag{1}$$

等式两端左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0}$$

即

$$k_2\boldsymbol{\xi}_1+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0}\tag{2}$$

等式两端再左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0}$$

即
$$k_3\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$$
所以 $k_3=0$，代入式(2)，得 $k_2\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$，故 $k_2=0$. 将 $k_2=k_3=0$ 代入式(1)，得
$$k_1=0$$
故 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型
$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$$
(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

解 (Ⅰ)二次型 f 的矩阵
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}$$
由于
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a&0&-1\\0&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-(a+1))(\lambda-(a-2))$$
所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为
$$\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$$
(Ⅱ)方法一：由于 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，其秩为 2，故 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$，于是 $a=0$ 或 $a=-1$ 或 $a=2$.

当 $a=0$ 时，$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$，此时 f 的规范形为 $y_1^2-y_2^2$，不合题意.

当 $a=-1$ 时，$\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=-3$，此时 f 的规范形为 $-y_1^2-y_2^2$，不合题意.

当 $a=2$ 时，$\lambda_1=2,\lambda_2=3,\lambda_3=0$，此时 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$.

综上可知，$a=2$.

方法二：由于 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有 2 个为正数，1 个为 0.

又
$$a-2<a<a+1$$
所以 $a=2$.

数学(二)

一、选择题：1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

(7) 同数学(一)(6).

(8) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

解　(A) 正确. 因为

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{E}_{21}$$

即

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}$$

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1)]=\boldsymbol{E}_{12}(1)(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{E}_{21}(1)=$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

故选(A).

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(14) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置，若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$________.

解　$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$.

方法一：由矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为对角元 2，0，0.

而 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值相同，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 为数，仅有一个特征值，故 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$.

方法二：由 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，故它们的迹相等，即 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=2+0+0=2$，又 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})$，故 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=2$.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分.

(22) 同数学(一)(20).

(23) 同数学(一)(21).

数学(三)

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.

(5) 同数学(一)(6).

(6) 同数学(二)(8).

二、填空题:9～14小题,每小题4分,共24分.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$,若矩阵 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $k=$________.

解 $k=2$.

方法一:由 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于矩阵$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,故 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $3,0,0$.

又 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值相同,故 $1+k=3$,所以 $k=2$.

方法二:由 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 的迹相等,故

$$1+k=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=3+0+0$$

所以 $k=2$.

三、解答题:15～23小题,共94分.

(20) 同数学(一)(20).

(21) 同数学(一)(21).

2010 年
数学(一)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵.若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,则(　　).

(A) 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$　　(B) 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$

(C) 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$　　(D) 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$

解　(A) 正确.

由秩 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant$ 秩 $r(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}\leqslant m$,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,有 $m\leqslant$ 秩 $r(\boldsymbol{A})\leqslant m$,故 $r(\boldsymbol{A})=m$,同理秩 $r(\boldsymbol{B})=m$,所以选(A).

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

解　(D) 正确.

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,$\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量,于是 $(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}=(\lambda^2+\lambda)\boldsymbol{\xi}$.

因 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,且 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$.

故 $\lambda^2+\lambda=0$,因此 λ 只能为 -1 或 0,因 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶实对称矩阵,故 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似,该对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元恰为 $\boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值.

由 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,故与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的秩也为 3,因此 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元只能有 1 个 0,其余 3 个为 -1,在给出的 4 个矩阵中,仅(D) 满足此条件,故选(D).

注:对角元为 3 个 -1,1 个 0 的对角阵,随对角元位置变化的对角阵都是相似的.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$.若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2,则 $a=$________.

解　$a=6$.

令矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2,故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩也为 2,于是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因 $r(\boldsymbol{A})=2$，故 $a-6=0$，即 $a=6$.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分.

(20)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$.

已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同的解.

(Ⅰ) 求 λ，a；

(Ⅱ) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解 (Ⅰ) 设 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 2 个不同的解，则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解，故

$$|\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

于是 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$.

当 $\lambda=1$ 时，因为 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解，舍去.

当 $\lambda=-1$ 时，对 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵施以初等行变换

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&a+2\end{array}\right)=\boldsymbol{B}$$

因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，所以 $a=-2$.

(Ⅱ) 当 $\lambda=-1$，$a=-2$ 时

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

其中 k 为任意常数.

(21)（本题满分 11 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

（Ⅰ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$；

（Ⅱ）证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

解 （Ⅰ）由题设，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,0$，且 $(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的一个特征向量.

设 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量，因为 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量正交，所以 $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0$，即 $x_1+x_3=0$. 取 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$，$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的两个正交的单位特征向量.

令
$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

则有
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$$

故
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,0$，于是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $2,2,1$，又 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为实对称矩阵，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

数学(二)

一、选择题：1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

(7) 设向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示. 下列命题正确的是

(A) 若向量组 Ⅰ 线性无关，则 $r\leqslant s$ (B) 若向量组 Ⅰ 线性相关，则 $r>s$

(C) 若向量组 Ⅱ 线性无关，则 $r\leqslant s$ (D) 若向量组 Ⅱ 线性相关，则 $r>s$

解 (A) 正确.

方法一：因向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，故有 k_{ij}，使
$$\boldsymbol{\alpha}_j=k_{1j}\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_{ij}\boldsymbol{\beta}_i+\cdots+k_{sj}\boldsymbol{\beta}_s$$
其中 $i=1,2,\cdots,s$；$j=1,2,\cdots,r$，即
$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=k_{11}\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_{i1}\boldsymbol{\beta}_i+\cdots+k_{s1}\boldsymbol{\beta}_s\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_j=k_{1j}\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_{ij}\boldsymbol{\beta}_i+\cdots+k_{sj}\boldsymbol{\beta}_s\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_r=k_{1r}\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_{ir}\boldsymbol{\beta}_i+\cdots+k_{sr}\boldsymbol{\beta}_s\end{cases}$$

不妨将各向量视为列向量，于是有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_i,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{ir} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & \cdots & k_{sj} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix}$$

矩阵的秩

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\leqslant r\begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{ir} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & \cdots & k_{sj} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix}\leqslant s$$

因为向量组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$线性无关，由向量组线性无关的矩阵判别法知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=r$，所以 $r\leqslant s$，故选(A).

方法二：不妨设向量组 Ⅰ，Ⅱ 为 n 维向量组.

记
$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$$
$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_i,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$$
$$\boldsymbol{K}=(k_{ij})_{s\times r}$$

由向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示，故

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BK}$$

由矩阵乘积秩的公式有

$$r(\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{K})\leqslant \min\{r,s\}\leqslant s$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，所以 $r(\boldsymbol{A})=r$，于是 $r\leqslant s$，故选(A).

注：① 涉及两个向量组线性表示时，写成矩阵形式后，利用矩阵判别法或矩阵乘积秩的结论，就可使问题一目了然.

② 当向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示时，本题的另一种说法是若 $r>s$，则向量组 Ⅰ 必线性相关 .

附：2003 年试卷一、二，选择题(4)

设向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则

(A) 当 $r<s$ 时，向量组 Ⅱ 必线性相关 (B) 当 $r>s$ 时，向量组 Ⅱ 必线性相关

(C) 当 $r<s$ 时，向量组 Ⅰ 必线性相关 (D) 当 $r>s$ 时，向量组 Ⅰ 必线性相关

解 (D) 正确.(详细解答见 2003 年试卷一，选择题(4))

(8) 同数学(一)(6).

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(14) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

解 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=3$.

由 $|\boldsymbol{B}|=2$，故 $\boldsymbol{B}$ 可逆，且 $|\boldsymbol{B}^{-1}|=\dfrac{1}{2}$，设 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位阵.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}= \\ \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}= \\ \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} \end{aligned}$$

两端取行列式有

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{B}^{-1}||\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|$$

将行列式值代入得 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=3$.

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(22) 同数学(一)(20).

(23) 同数学(一)(21).

数学(三)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 同数学(二)(7).

(6) 同数学(一)(6).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 同数学(二)(14).

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(20) 同数学(一)(20).

(21) 同数学(一)(21).

2011 年
数学(一)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵,记

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}=$(　　).

(A)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　　　(B)$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$

(C)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$　　　　(D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

解　(D) 正确.

由题意 $\boldsymbol{AE}(2,1(1))=\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{B}$.

其中 $\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{E}(2,1(1))=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是第三种初等矩阵.

又 $\boldsymbol{E}(2,3)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

于是有 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{E}$.

故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}$,又

$$\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{E}^{-1}(2,3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}_2$$

于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$ 与所给的四个矩阵比较,则选(D).

(6) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,若$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$　　　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

解　(D) 正确.

因$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,故 $1=4-r(\boldsymbol{A})$,由此 $r(\boldsymbol{A})=3$.

又由 $r(\boldsymbol{A})$ 与 $r(\boldsymbol{A}^*)$ 的关系

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n & \text{当 } r(\boldsymbol{A})=n \text{ 时}\\1 & \text{当 } r(\boldsymbol{A})=n-1 \text{ 时}\\0 & \text{当 } r(\boldsymbol{A})\leqslant n-2 \text{ 时}\end{cases}$$

可得 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，于是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 3 个线性无关的解向量组成，即知(A)，(B) 错误.

另由 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，于是(C) 错误.

再由

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_4)=\boldsymbol{0}$$

即知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 全是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.

因 $r(\boldsymbol{A})=3$，又有

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\xrightarrow[c_1+c_3]{}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，所以(D) 正确.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$，经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$________.

解 $a=1$.

由题意存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

取行列式有

$$\begin{vmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{vmatrix}=0$$

解之 $a=1$.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 (Ⅰ)4 个 3 维向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i$ 线性相关($i=1,2,3$)，若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示($i=1,2,3$)，与题设矛盾. 于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，从而

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=a-5=0$$

于是 $a=5$.

（Ⅱ）令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 对 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)$$

从而

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$$

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 （Ⅰ）由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，故 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 由题设可得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以，-1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，且属于 -1 的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$k_1$ 为任意非零常数；

1 也是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，且属于 1 的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_2$ 为任意非零常数.

设 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 0 的特征向量，由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则

$$(1,0,-1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,(1,0,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

即

$$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_1+x_3=0\end{cases}$$

于是属于 0 的特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$k_3$ 为任意非零常数.

（Ⅱ）令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，于是

$$A=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

数学(二)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(7) 同数学(一)(5).

(8) 同数学(一)(6).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(14) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,则 f 的正惯性指数为________.

解 二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$,显然,二次型 f 的正惯性指数即为 A 的正特征值的个数,所以二次型 f 的正惯性指数为 2.

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(22) 同数学(一)(20).

(23) 同数学(一)(21).

数学(三)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 同数学(一)(5).

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解,k_1,k_2 为任意常数,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为(　　).

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$

(B) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$

(D) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$

解　(C) 正确.

因为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解,则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 至少有 2 个线性无关的解.

于是由 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵可得 $\dim N(\boldsymbol{A})=3-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$,故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$,另外必有 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$,于是 $r(\boldsymbol{A})=1$.

则 $\dim N(\boldsymbol{A})=2$,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 2 个线性无关的解构成,由此可知(A),(B) 错误. 显然$(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$,$(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,且有

$$(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

由矩阵$\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$列满秩知$(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$,$(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$ 线性无关,故构成 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

(D) 中的$\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}$ 不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的特解,于是(D) 错误;

(C) 中的$\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}$ 恰是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的特解,所以(C) 正确.

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的秩为 1,$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3,则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为________.

解　由 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3,故 3 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,由二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$

的秩为 1，故 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，因此 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且是二重特征值，否则与 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1 矛盾.

于是在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，$f=3y_1^2$.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分.

(20) 同数学(一)(20).

(21) 同数学(一)(21).

2012 年

数学(一)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的为(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

解　(C) 正确. 记

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&1&-1&1\\c_1&c_2&c_3&c_4\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_3-c_2r_2]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&1&0&0\\c_1&0&c_3&c_4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-c_3r_1}\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&1&0&0\\c_1&0&0&c_3+c_4\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$$

由于上述仅作行的初等变换,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 有相同的线性相关性.

因为 $|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\c_1&0&c_3+c_4\end{vmatrix}=0$,则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,所以选(C).

当 $c_1\neq 0$ 时,$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=-c_1\neq 0$,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,(A) 错误;$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4|=c_1\neq 0$,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,(B) 错误.

当 $c_3+c_4\neq 0$ 时,$|\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4|=-(c_3+c_4)\neq 0$,$\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,(D) 错误.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=$(　　).

(A)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(C)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(D)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解　(B) 正确.

由

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{E}(2,1(1))=\boldsymbol{PE}(2,1(1))$$

有

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{E}^{-1}(2,1(1))\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{E}(2,1(-1))\boldsymbol{P}^{-1}$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{E}(2,1(-1))\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APE}(2,1(1))=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

故选(B).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维单位列向量,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为________.

解 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 2.

方法一:考虑齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\tag{1}$$

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$$

故 $\boldsymbol{\alpha}$ 为(1) 的非零解.

设 $\boldsymbol{\beta}$ 为(1) 的任意解,于是

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$$

则 $\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\alpha}$,这表明 $\boldsymbol{\beta}$ 可表示成 $\boldsymbol{\alpha}$ 的线性组合,由此知 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $N(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})$ 的基,故 $\dim N(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=1$

$$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=3-\dim N(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=2$$

方法二:由特征多项式降阶公式有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})|=|(\lambda-1)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}|=(\lambda-1)^{3-1}|(\lambda-1)\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}|=\lambda(\lambda-1)^2$$

故矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$,对于二重特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 有 $\lambda_2\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$,其秩为 1.

故 $\dim \boldsymbol{N}(\lambda_2\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}))=3-1=2$,因此其几何重数等于代数重数,说明矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 与对角阵 $\mathrm{diag}(0,1,1)$ 相似,它们的秩相等,故 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 2.

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(Ⅱ)当实数 a 为何值时,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解.

解 (Ⅰ)$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1-a^4$.

(Ⅱ)若方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,应 $r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}})<4$,则 $|\boldsymbol{A}|=0$. 由(Ⅰ)可得 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{array}\right)$$

于是 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})$,故方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

当 $a=-1$ 时

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

于是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=3<4$,故方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,其通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

k 为任意常数.

(21)(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求实数 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 f 化为标准形.

解 (Ⅰ)因为 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$,对 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以,当 $a=-1$ 时,$r(\boldsymbol{A})=2$.

(Ⅱ)由于 $a=-1$,所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)$$

于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=2$ 时,由方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得属于 2 的一个单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$;

当 $\lambda_2=6$ 时,由方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得属于 6 的一个单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$;

当 $\lambda_3=0$ 时,由方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得属于 0 的一个单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $f=2y_1^2+6y_2^2$.

数学(二)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(7) 同数学(一)(5).

(8) 同数学(一)(6).

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=3$,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵

$\boldsymbol{B}$,则 $|\boldsymbol{BA}^*|=$________.

解　$|\boldsymbol{BA}^*|=-27$.

由所给条件有 $\boldsymbol{E}(1,2)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,则

$$|\boldsymbol{BA}^*|=|\boldsymbol{E}(1,2)\boldsymbol{AA}^*|=|\boldsymbol{E}(1,2)|\,||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=-|\boldsymbol{A}|^3=-27$$

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(22) 同数学(一)(20).

(23) 同数学(一)(21).

数学(三)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 同数学(一)(5).

(6) 同数学(一)(6).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 同数学(二)(14).

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(20) 同数学(一)(20).

(21) 同数学(一)(21).

2013 年
数学(一)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则(　　).

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

解　(B) 正确.

将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 按列分块,$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$.

由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,故

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$$

即 $\boldsymbol{\gamma}_1=b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n=b_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n$,即矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示.

由于 $\boldsymbol{B}$ 可逆,故可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}^{-1}$,同理可得,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表示.

故矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价,所以选(B).

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件是(　　).

(A) $a=0,b=2$　　　　(B) $a=0$,b 为任意常数

(C) $a=2,b=0$　　　　(D) $a=2$,b 为任意常数

解　(B) 正确. 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为三角矩阵,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值,故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $2,b,0$. 又因 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ a & \lambda-b & -a\\ -1 & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2]$$

且 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则有 $|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，所以 $-2a^2=0$，即 $a=0$.

当 $a=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)$，可见矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $2,b,0$，则 b 可为任意常数，所以选(B).

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(13) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+\boldsymbol{A}_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

由 $a_{ij}+\boldsymbol{A}_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，有 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，则有 $|\boldsymbol{A}^*|=|-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$，且已知 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$，$|-\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}|^2$，整理可得 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 或者 $|\boldsymbol{A}|=0$.

再根据 $a_{ij}+\boldsymbol{A}_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，有

$$|\boldsymbol{A}|=a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2}+a_{i3}\boldsymbol{A}_{i3}=-(a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2)\leqslant 0$$

又因 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵，所以至少有一个 $a_{ij}\neq 0$，从而 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解 设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，由于 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，则有

$$\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}\tag{1}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{C}$ 存在，故方程组(1) 有解.

下面我们对(1) 的增广矩阵进行初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc:c}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right)$$

因方程组有解，故 $a+1=0$，$b=0$，即 $a=-1$，$b=0$. 当 $a=-1$，$b=0$ 时，增广矩阵经过初等行变换后变为 $\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

假定 x_3，x_4 为自由变量，则可令 $x_3=1$，$x_4=0$，代入相应的齐次方程组，得 $x_2=-1$，$x_1=1$；令 $x_3=0$，$x_4=1$，代入相应的齐次方程组，得 $x_2=0$，$x_1=1$，故 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 令 $x_3=0$，$x_4=0$，得特解 $\boldsymbol{\eta}=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. 故方程组的通解为

$$x=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}=(k_1+k_2+1,-k_1,k_1,k_2)^{\mathrm{T}} \quad (k_1,k_2\text{ 为任意常数})$$

所以 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=2(a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+a_3\boldsymbol{x}_3)^2+(b_1\boldsymbol{x}_1+b_2\boldsymbol{x}_2+b_3\boldsymbol{x}_3)^2$，记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(Ⅰ) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；

(Ⅱ) 若 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

解 (Ⅰ) 因为

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2=$$

$$2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+$$

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=$$

$$(x_1,x_2,x_3)(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\text{，其中 }\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$$

所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(Ⅱ) 由于 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，故 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为单位向量，故 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}=1$，故 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$，同样 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1$. 则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$，由于 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=2$.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}$，由于 $\boldsymbol{\beta}\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_2=1$.

$r(\boldsymbol{A})=r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=1+1=2<3$.

所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，故 $\lambda_3=0$.

因此，f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

数学(二)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(7) 同数学(一)(5).

(8) 同数学(一)(6).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(14) 同数学(一)(13).

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(22) 同数学(一)(20).

(23) 同数学(一)(21).

数学(三)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 同数学(一)(5).

(6) 同数学(一)(6).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 同数学(一)(13).

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(20) 同数学(一)(20).

(21) 同数学(一)(21).

2014 年

数学(一)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (\quad)$.

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$

(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

解　(B) 正确.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 4 行展开}} c(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix} + d(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix} =$$

$$-cb\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + da\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$bc\cdot(ad-bc)-ad\cdot(ad-bc)=$$

$$(bc-ad)(ad-bc)=$$

$$-(ad-bc)^2$$

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量,则对任意常数 k,l,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的(　　).

(A) 必要非充分条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

解　(A) 正确.

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则存在 λ_1,λ_2,使得

$$\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=0$$

即

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+(k\lambda_1+l\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_3=0$$

可得 $\lambda_1=\lambda_2=k\lambda_1+l\lambda_2=0$,从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的必要条件,(B)(D) 错误.

反之不成立,若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关不一定有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

例如 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1,则 a 的取值范围是________.

解 a 的取值范围是

$$-2\leqslant a\leqslant 2$$

方法一:因为

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3=\\(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

则可令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$.

因为 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}|$,负惯性指数为 1.

所以设 $\lambda_1<0$,从而 $\lambda_2\lambda_3\geqslant 0$,所以 $|\boldsymbol{A}|\leqslant 0$.

① 若 $|\boldsymbol{A}|<0$,则 $\lambda_1<0,\lambda_2>0,\lambda_3>0$. 此时符合题意而 $|\boldsymbol{A}|=a^2-4$.

所以 $a^2-4<0$. 即 $-2<a<2$.

② 若 $|\boldsymbol{A}|=0$,则 $\lambda_1<0,\lambda_2>0,\lambda_3=0$,此时 $a=\pm 2$.

当 $a=2$ 时,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&2\\2&2&0\end{pmatrix}$,$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda+1&-2\\-2&-2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$,则可得 $\lambda_1=-3,\lambda_2=3,\lambda_3=0$,则 $a=2$ 时符合题意.

当 $a=-2$ 时,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&-1&2\\-2&2&0\end{pmatrix}$,$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&2\\0&\lambda+1&-2\\2&-2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$,则可得 $\lambda_1=-3,\lambda_2=3,\lambda_3=0$,则 $a=-2$ 时符合题意.

综上所述,a 的取值范围是 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

方法二:因为

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3=\\x_1^2+2ax_1x_3+a^2x_3^2-x_2^2+4x_2x_3-a^2x_3^2=\\(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2\triangleq\\y_1^2-y_2^2+(4-a^2)y_3^2$$

若负惯性指数为 1,则 $4-a^2\geqslant 0,-2\leqslant a\leqslant 2$.

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

（Ⅰ）求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

（Ⅱ）求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 （Ⅰ）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to$

$$\begin{pmatrix}1&-2&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$.

（Ⅱ）令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\\x_{10}&x_{11}&x_{12}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\\x_{10}&x_{11}&x_{12}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}x_1-2x_4+3x_7-4x_{10}&x_2-2x_5+3x_8-4x_{11}&x_3-2x_6+3x_9-4x_{12}\\x_4-x_7+x_{10}&x_5-x_8+x_{11}&x_6-x_9+x_{12}\\x_1+2x_4-3x_{10}&x_2+2x_5-3x_{11}&x_3+2x_6-3x_{12}\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，得

$$\begin{cases}x_1-2x_4+3x_7-4x_{10}=1\\x_4-x_7+x_{10}=0\\x_1+2x_4-3x_{10}=0\end{cases},\begin{cases}x_2-2x_5+3x_8-4x_{11}=0\\x_5-x_8+x_{11}=1\\x_2+2x_5-3x_{11}=0\end{cases},\begin{cases}x_3-2x_6+3x_9-4x_{12}=0\\x_6-x_9+x_{12}=0\\x_3+2x_6-3x_{12}=1\end{cases}$$

由

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\1&2&0&-3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\0&4&-3&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&-1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&0&5&4\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&-3&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&2\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&-3&-1\end{array}\right)$$

得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_4\\x_7\\x_{10}\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-k_1\\2k_1-1\\3k_1-1\\k_1\end{pmatrix}$$

由

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&1\\1&2&0&-3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&1\\0&4&-3&1&0\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&1\\0&0&1&-3&-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&6\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&-3&-4\end{array}\right)$$

得

$$\begin{pmatrix}x_2\\x_5\\x_8\\x_{11}\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-k_2\\2k_2-3\\3k_2-4\\k_2\end{pmatrix}$$

由

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\1&2&0&-3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\0&4&-3&1&1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&-1\\0&1&0&-2&1\\0&0&1&-3&1\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_6\\x_9\\x_{12}\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-k_3\\2k_3+1\\3k_3+1\\k_3\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2-k_1&6-k_2&-1-k_3\\2k_1-1&2k_2-3&2k_3+1\\3k_1-1&3k_2-4&3k_3+1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$(其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数).

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$相似.

解 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$$

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$;

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$ 得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$.

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化;对 $\boldsymbol{B}$,因为 $r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})=1$,所以 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系中有 $n-1$ 个线性无关的特征向量,故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有 n 个线性无关的特征向量,所以 $\boldsymbol{B}$ 可对角化. 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 特征值相同且都可对角化,所以 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

数学(二)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(7) 同数学(一)(5).

(8) 同数学(一)(6).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(14) 同数学(一)(13).

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(22) 同数学(一)(20).

(23) 同数学(一)(21).

数学(三)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 同数学(一)(5).

(6) 同数学(一)(6).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 同数学(一)(13).

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(20) 同数学(一)(20).

(21) 同数学(一)(21).

2015 年
数学(一)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$,若集合 $\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为(　　).

(A)$a\notin\Omega,d\notin\Omega$　　(B)$a\notin\Omega,d\in\Omega$

(C)$a\in\Omega,d\notin\Omega$　　(D)$a\in\Omega,d\in\Omega$

解　(D) 正确.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$$

由 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$,故 $a=1$ 或 $a=2$,同时 $d=1$ 或 $d=2$. 故选(D).

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$,若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$,则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为(　　).

(A)$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$

(B)$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C)$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

(D)$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

解　(A) 正确.

由 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$,故 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{y}=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. 由已知可得:$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{PC}$. 故有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所以 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ})\boldsymbol{y}=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$. 选(A).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13)n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ ________.

解 $2^{n+1}-2$.

按第一行展开得

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} + (-1)^{n+1}2(-1)^{n-1} =$$

$$2D_{n-1}+2 = 2(2D_{n-2}+2)+2 =$$

$$2^2D_{n-2}+2^2+2 = 2^n+2^{n-1}+\cdots+2 = 2^{n+1}-2$$

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基;

(Ⅱ)当 k 为何值时,存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同,并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

解 (Ⅰ)证明

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3)=$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

且 $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2k & k+1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

(Ⅱ)由题意知,$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\xi}\neq 0$.

即

$k_1(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\alpha}_3)=0 \quad (k_i\neq 0, i=1,2,3)$

$k_1(2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_3)=0$

$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)=0$ 有非零解

所以 $$|\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3|=0$$

即 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix}=0$，得 $k=0$.

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_1=0$$

所以

$$k_2=0, k_1+k_3=0$$

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_1\boldsymbol{\alpha}_3, k_1\neq 0$$

(21)（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 a,b 的值；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

解　（Ⅰ）根据题意，有

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})\Rightarrow 3+a=1+b+1$$

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\Rightarrow\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} a-b=-1 \\ 2a-b=3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$$

（Ⅱ）因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(1\quad -2\quad 3)$$

$\boldsymbol{C}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0, \lambda_3=4$.

$\lambda=0$ 时 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\xi}_2=(-3,0,1)^{\mathrm{T}}$.

$\lambda=5$ 时 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_A=1+\lambda_C$，即为 1,1,5.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$.

数学(二)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(7) 同数学(一)(5).

(8) 同数学(一)(6).

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(14) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵,则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$________.

解 $|\boldsymbol{B}|=21$.

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的三个特征值分别为 $3,7,1$,所以 $|\boldsymbol{B}|=21$.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}^3=0$.

(Ⅰ) 求 a 的值;

(Ⅱ) 若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵,求 $\boldsymbol{X}$.

解 (Ⅰ) 先计算 $\boldsymbol{A}$ 的行列式:$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1-a^2 & a \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3$,由于 $\boldsymbol{A}^3=0$,所以 $|\boldsymbol{A}|=0$,可得 $a=0$,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(Ⅱ) 由条件 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,可知 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}$.

所以 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}=((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2))^{-1}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}$.

由于 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

所以 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(23) 同数学(一)(21).

数学(三)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 同数学(一)(5).

(6) 同数学(一)(6).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 同数学(二)(14).

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(20) 同数学(二)(22).

(21) 同数学(一)(21).

2016 年
数学(一)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是(　　).

(A)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似　　(B)$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

(C)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似　　(D)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

解　(C) 正确.

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$,则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为(　　).

(A) 单叶双曲面　　(B) 双叶双曲面

(C) 椭球面　　(D) 柱面

解　(B) 正确.

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$______.

解　$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$.

令 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=D_4$.

由展开定理递推公式 $D_4=\lambda D_3+4$,$D_3=\lambda D_2+3$,$D_2=\lambda^2+\lambda+2$,故

$$D_4=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$$

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$,当 a 为何值时,方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解?在有解时,求此方程.

解 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{array}\right)$

当 $a=-2$ 时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解；

当 $a=1$ 时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&3\\-C_1-1&-C_2-1\\C_1&C_2\end{pmatrix}$，$\forall C_1,C_2\in\mathbf{R}$；

当 $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&\dfrac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}$.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}^{99}$；

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$，记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

解 (Ⅰ)$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$，$\lambda_1=-2$ 对应的特征向量为 $(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\lambda_2=-1$ 对应的特征向量为 $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $(3,2,2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$，则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{令}{=\!=}\boldsymbol{\Lambda}$$

$$\boldsymbol{A}^{99}=(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^{99}=\boldsymbol{P\Lambda}^{99}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(Ⅱ)$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}\Rightarrow\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{BA}^{99}$，即

$$\boldsymbol{\beta}_1=(-2+2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(-2+2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{200})\boldsymbol{\alpha}_2$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2$$

数学(二)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(7) 同数学(一)(5).

(8) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1,2,则(　　).

(A) $a>1$　　(B) $a<-2$　　(C) $-2<a<1$　　(D) $a=1$ 或 $a=-2$

解　(C) 正确.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(14) 设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价,则 $a=$________.

解　2.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$,且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

(Ⅰ) 求 a 的值;

(Ⅱ) 求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解　(Ⅰ) $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & a(2-a) & a-2 \end{array}\right)$

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解 $\Rightarrow a=0$.

(Ⅱ) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,其中 k 为任意常数.

(23) 同数学(一)(21).

数学(三)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 同数学(一)(5).

(6) 同数学(二)(8).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 同数学(一)(13).

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(20) 同数学(二)(22).

(21) 同数学(一)(21).

2017 年
数学(一)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则(　　).

(A)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　(B)$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

(C)$\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　(D)$\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

解　(A) 正确.

令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.

又令 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$,由$(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\lambda^2-\lambda=0$,$\lambda=0$ 或 $\lambda=1$. 因为 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$,所以得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$,$\lambda_n=1$,$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=1$,$\lambda_n=0$,从而 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|=0$,即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆,故选(A).

(6) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　(B)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

(C)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　(D)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

解　(B) 正确.

$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$,$\lambda_3=1$.

由

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

得 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$,则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化,从而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$;

由

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

得 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=2$,则 $\boldsymbol{B}$ 不可相似对角化,从而 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}$ 不相似,故选(B).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组,则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1$,$\boldsymbol{A\alpha}_2$,

$A\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为________.

解 向量组 $A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, A\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2.

由
$$(A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, A\boldsymbol{\alpha}_3) = A(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$$
又 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,所以$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$可逆.

从而 $r(A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, A\boldsymbol{\alpha}_3) = r(\boldsymbol{A})$. 由 $\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,得 $r(\boldsymbol{A}) = 2$.

因此向量组 $A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, A\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2.

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(20)(本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值,且 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅰ)证明 $r(\boldsymbol{A}) = 2$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$,求方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解 (Ⅰ)设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值,所以 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$
因为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 两两不同,所以 $r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$.

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,从而 $r(\boldsymbol{A}) < 3$,于是 $r(\boldsymbol{A}) = 2$.

(Ⅱ)因为 $r(\boldsymbol{A}) = 2$,所以 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中有一个线性无关的解向量,由
$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta} \end{cases}$$
得 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为
$$\boldsymbol{x} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{(}k\text{ 为任意常数)}$$

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$ 下的标准型为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$,求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解 由题意,有
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$$
因为 $\lambda_3 = 0$,所以 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

由
$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{vmatrix} = -3(a-2) = 0$$

得

$$a=2$$

由

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 4\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 4 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)=0$$

得

$$\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$$

由

$$-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 4\\ -1 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $\lambda_1=-3$ 对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

由

$$6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 4\\ -1 & 7 & -1\\ 4 & -1 & 4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $\lambda_2=6$ 对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

由

$$0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ -1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $\lambda_3=0$ 对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

单位正交化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

故正交矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

数学(二)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\quad)$.

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$

解　(B) 正确.

由

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

得

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{AP}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$$

故选(B).

(8) 同数学(一)(6).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(14) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,则 $a=$________.

解 $a=-1$.

由

$$\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 1 & 2 & a\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

得

$$\begin{cases}1=\lambda\\ 3+2a=\lambda\end{cases}$$

解得 $a=-1$.

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(22) 同数学(一)(20).

(23) 同数学(一)(21).

数学(三)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(5) 同数学(一)(5).

(6) 同数学(一)(6).

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(13) 同数学(一)(13).

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.

(20) 同数学(一)(20).

(21) 同数学(一)(21).