第八章 函数

主要内容

- 函数的定义
- 函数的性质
- 函数的合成
- 函数的逆

与后面各章的关系

- 是代数系统的基础

函数的定义与性质

主要内容

一、函数定义与相关概念

- **函数定义**
- **函数相等**
- **从 A 到 B 的函数 $f:A\to B$**
- B^A
- **函数的像与完全原像**

二、函数的性质

- **单射、满射、双射函数的定义与实例**
- **构造双射函数**

三、某些重要的函数

函数概念是最基本的数学概念之一，也是最重要的数学工具。初中数学中函数定义为“对自变量每一确定值都有一确定的值与之对应的应变量"；高中数学中函数又被定义为两集合元素之间的映射。

现在，我们要把后一个定义作进一步的深化，用一个特殊关系来具体规定这一映射，称这个特殊关系为函数，因为关系是一个集合，从而又将函数作为集合来研究。离散结构之间的函数关系在计算机科学研究中也已显示出极其重要的意义。我们在讨论函数的一般特征时，总把注意力集中在离散结构之间的函数关系上，但这并不意味着这些讨论不适用于其它函数关系。

一、函数的定义与相关概念

1．函数定义

定义 8.1 设 F 为二元关系，若 $\forall x \in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的 $y \in \mathrm{ran}F$ 使 xFy 成立，则称 F 为函数

对于函数 F，如果有 xFy，则记作 $y=F(x)$，并称 y 为 F 在 x 的值.

例　$F_1=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_2>,<x_3,y_2>\}$

$F_2=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_2>\}$

F_1 是函数，F_2 不是函数

2. 函数相等

定义 8.2 设 F, G 为函数, 则

$$F=G \Leftrightarrow F\subseteq G \wedge G\subseteq F$$

如果两个函数 F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$ 都有 $F(x)=G(x)$

函数 $F(x)=(x^2-1)/(x+1)$, $G(x)=x-1$ 不相等, 因为

$$\mathrm{dom}F\subset\mathrm{dom}G.$$

3. 从 A 到 B 的函数

定义 8.3 设 A, B 为集合，如果

f 为函数， $\mathrm{dom}f=A$， $\mathrm{ran}f\subseteq B$，

则称 f 为从 A 到 B 的函数，记作 $f: A\to B$.

例 $f: N\to N, f(x)=2x$ 是从 N 到 N 的函数，

$g: N\to N, g(x)=2$ 也是从 N 到 N 的函数.

4．B^A

定义 8.4 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A，符号化表示为

$B^A=\{f \mid f: A\to B\}$

$|A|=m, |B|=n$，且 $m,n>0, |B^A|=n^m$.

A中每个元素都可能映射到B中的任意一个元素，根据排列组合可得。

$A=\varnothing$，则 $B^A=B^{\varnothing}=\{\varnothing\}$.

$A\neq\varnothing$ 且 $B=\varnothing$，则 $B^A=\varnothing^A=\varnothing$.

如果A=B=∅，那么B^A={∅}

f为X到Y的函数（*functions*），记为f：X→Y。当X=$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$时，称$f$为$n$元函数。函数也称映射（*mapping*）。

换言之，函数 f：X→Y是特殊的关系，它满足

（1）函数的定义域是X，而不能是X的某个真子集。

（2）若〈x, y〉$\in f$，〈x, y'〉$\in f$，则$y=y'$（单值性）。

由于函数的第二个特性，人们常把〈x, y〉$\in f$或xfy这两种关系表示形式，在f为函数时改为$y=f(x)$。这时称x为自变元，y为函数在x处的值；也称y为x的像点，x为y的源点。一个源点只能有唯一的像点，但不同的源点允许有共同的像点。注意，函数的上述表示形式不适用于一般关系。（因为一般关系不具有单值性。）

【例8.8.1】 设$A=\{a, b\}$，$B=\{1, 2, 3\}$，判断下列集合是否是A到B的函数。

$F_1=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$，

$F_2=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle\}$，

$F_3=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle\}$，

$F_4=\{\langle a, 3\rangle\}$

解

F_1，F_2是函数，F_3，F_4不是函数，但若不强调是A到B的函数，则F_4是函数，其定义域为$\{a\}$。

【例8.8.2】 下列关系中哪些能构成函数？

（1）$\{\langle x, y\rangle | x, y\in \mathrm{N}, x+y \langle 10\}$

（2）$\{\langle x, y\rangle | x, y\in \mathrm{N}, x+y=10\}$

（3）$\{\langle x, y\rangle | x, y\in \mathrm{R}, |x|=y\}$

（4）$\{\langle x, y\rangle | x, y\in \mathrm{R}, x=|y|\}$

（5）$\{\langle x, y\rangle | x, y\in \mathrm{N}, |x|=|y|\}$

由于函数归结为关系，因而函数的表示及运算可归结为集合的表示及运算，函数的相等的概念、包含概念，也便归结为关系相等的概念及包含概念。

例　设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 求 B^A.

解　$B^A=\{f_0,f_1,\ldots,f_7\}$, 其中

$f_0=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}$

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$

$f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$

$f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}$

$f_5=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$

$f_6=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}$

$f_7=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$

【例8.8.3】 设$A=\{a, b\}$，$B=\{1, 2, 3\}$。由$A \to B$能生成多少个不同的函数？由$B \to A$能生成多少个不同的函数？

解 设f_i：$A \to B(i=1, 2, ..., 9)$， $\boxed{3^2}$

g_i：$B \to A(i=1, 2, ..., 8)$ $\boxed{2^3}$

$f_1=\{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle\}$ $g_1=\{\langle 1,a\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 3,a\rangle\}$

$f_2=\{\langle a,1\rangle, \langle b,2\rangle\}$ $g_2=\{\langle 1,a\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 3,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle a,1\rangle, \langle b,3\rangle\}$ $g_3=\{\langle 1,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,a\rangle\}$

$f_4=\{\langle a,2\rangle, \langle b,1\rangle\}$ $g_4=\{\langle 1,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,b\rangle\}$

$f_5=\{\langle a,2\rangle, \langle b,2\rangle\}$ $g_5=\{\langle 1,b\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 3,a\rangle\}$

$f_6=\{\langle a,2\rangle, \langle b,3\rangle\}$ $g_6=\{\langle 1,a\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 3,b\rangle\}$

$f_7=\{\langle a,3\rangle, \langle b,1\rangle\}$ $g_7=\{\langle 1,b\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 3,b\rangle\}$

$f_8=\{\langle a,3\rangle, \langle b,2\rangle\}$ $g_8=\{\langle 1,b\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,b\rangle\}$

$f_9=\{\langle a,3\rangle, \langle b,3\rangle\}$

定理8.8.1 设$|A|=m$，$|B|=n$，那么$\{f\,|\,f\colon A\to B\}$的基数为 n^m，即共有n^m个A到B的函数。

证明 设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$，那么每一个f：$A\to B$由一张如下的表来规定：

a	a_1	a_2	…	a_{m}
$f(a)$	$b_{\mathrm{i}1}$	$b_{\mathrm{i}2}$	…	b_{im}

其中b_{i1}，b_{i2}，…，b_{im}为取自b_1，b_2，…，b_n的允许元素重复的排列，这种排列总数为n^m个。因此，上述形式的表恰有n^m张，恰对应全部n^m个A到B的函数。

由于上述缘故，当A，B是有穷集合时，我们以B^A记所有A到B的全体函数的集合：

$$B^A=\{f|f: A\to B\}$$

则$|B^A|=|B|^{|A|}$。

特别地A^A表示A上函数的全体。目前在计算机科学中，也用$A\to B$替代B^A。

5．函数的像和完全原像

定义 8.5 设函数 f: $A \to B$, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$.

□ （1）A_1 在 f 下的像 $f(A_1)=\{f(x)|x\in A_1\}$

当 $A_1= A$ 时，为函数的像 $f(A)$

（2）B_1 在 f 下的完全原像 $f^{-1}(B_1)=\{x|x\in A\wedge f(x)\in B_1\}$

注意:

- 函数值 $f(x)\in B$，而像 $f(A_1)\subseteq B$.
- 一般说来 $f^{-1}(f(A_1))\neq A_1$，但是 $A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1))$.

例　设 f: $N \to N$, 且

$$f(x)=\begin{cases} x/2 & \text{若}x\text{为偶数} \\ x+1 & \text{若}x\text{为奇数} \end{cases}$$

令 $A=\{0,1\}$, $B=\{2\}$, 那么有

$$f(A)=f(\{0,1\})=\{f(0),f(1)\}=\{0,2\}$$

$$f^{-1}(B)=f^{-1}(\{2\})=\{1,4\}$$

$A_1=\{1\}$
$f(A_1)=\{2\}$
$f^{-1}(f(A_1))=\{1,4\}$

定理8.8.2 设f：$X \to Y$，对任意$A \subseteq X$，$B \subseteq X$，有

（1）$f(A \cup B)=f(A) \cup f(B)$

（2）$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

（3）$f(A)-f(B) \subseteq f(A-B)$

证明 （1）对任一$y \in Y$

$$y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists x(x \in A \cup B \wedge y = f(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x((x \in A \wedge y = f(x)) \vee (x \in B \wedge y = f(x)))$$

$$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge y = f(x)) \vee \exists x(x \in B \wedge y = f(x))$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B)$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$$

因此$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$。

（2）、（3）的证明请读者完成。注意，（2）、（3）中的包含符号不能用等号代替。我们举例说明。

【例8.8.4】 设$X=\{a,b,c,d\}$，

$Y=\{1,2,3,4,5\}$，

f：$X\rightarrow Y$，如图8.8.1所示。那么，

$f(\{a\})=\{2\}$，

$f(\{b\})=\{2\}$，

$f(\{a\})\cap f(\{b\})=\{2\}$，

$f(\{a\})-f(\{b\})=\varnothing$，

$f(\{a\}\cap\{b\})=f(\varnothing)=\varnothing$，

$f(\{a\}-\{b\})=f(\{a\})=\{2\}$

$f(\{a\}\cap\{b\})\subset f(\{a\})\cap f(\{b\})$

$f(\{a\})-f(\{b\})\subset f(\{a\}-\{b\})$

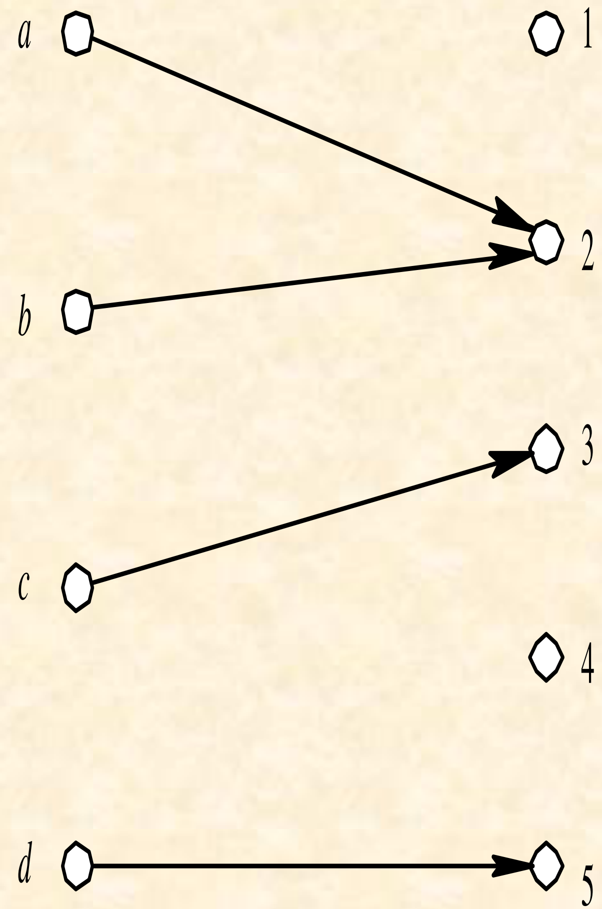


图 8.8.1

二．函数的性质

定义 8.6　设 f：$A \to B$,

（1）若 ran$f$=B，则称 f：$A \to B$ 是满射的.

（2）若$\forall y \in \mathrm{ran} f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$，则称 f：$A \to B$ 是单射的.

（3）若 f：$A \to B$ 既是满射又是单射的，则称 f：$A \to B$ 是双射的

例　判断下面函数是否为单射，满射，双射的，为什么？

（1）f：$R \to R, f(x)= -x^2+2x-1$

（2）f：$Z^+ \to R, f(x)=\ln x$, Z^+为正整数集

（3）f：$R \to Z, f(x)=\lfloor x \rfloor$

（4）f：$R \to R, f(x)=2x+1$

（5）f：$R^+ \to R^+, f(x)=(x^2+1)/x$，其中 R^+为正实数集.

解（1）f：$R \to R, f(x)=-x^2+2x-1$

在 $x=1$ 取得极大值 0．既不是单射也不是满射的.

（2）f：$Z^+ \to R, f(x)=\ln x$

是单调上升的，是单射的．但不满射, $\operatorname{ran} f=\{\ln 1, \ln 2, \ldots\}$.

（3）f：$R \to Z, f(x)=\lfloor x \rfloor$

是满射的，但不是单射的，例如 $f(1.5)=f(1.2)=1$.

（4）f：$R \to R, f(x)=2x+1$

是满射、单射、双射的，因为它是单调函数并且 $\operatorname{ran} f=R$.

（5）f：$R^+ \to R^+, f(x)=(x^2+1)/x$

有极小值 $f(1)=2$．该函数既不是单射的也不是满射的.

单调函数：意味着单射
有极小值或者极大值：且该极小值或极大值不是B
集合边界（如果函数从A到B），那么一定不是满射

例　对于给定的集合 A 和 B 构造双射函数 f：$A\to B$.

（1）$A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

（2）$A=[0,1]$, $B=[1/4,1/2]$

（3）$A=Z$, $B=N$

（4）$A=[\pi/2,3\pi/2]$, $B=[-1,1]$

解（1）$A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$B=\{f_0,f_1,\ldots,f_7\}$，其中

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$,

$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$.

令 f：$A\to B$,

$f(\varnothing)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$, $f(\{3\})=f_3$,

$f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$, $f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

不是唯一的

（2）令 f：$[0,1]\to[1/4,1/2]$, $f(x)=(x+1)/4$.

（3）将 Z 中元素以下列顺序排列并与 N 中元素对应：

$$
\begin{array}{cccccccc}
Z: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3\ \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ \ldots
\end{array}
$$

则这种对应所表示的函数是：

$$f: \mathrm{Z} \to N, f(x)=\begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x<0 \end{cases}$$

（4）令 f：$[\pi/2,3\pi/2]\to[-1,1]$

$f(x)=-\sin x$

由定义不难看出，如果f：$X\to Y$是满射的，则对于任意的$y\in Y$，都存在$x\in X$，使得$y=f(x)$；

如果f：$X\to Y$是单射的，则对于任意的$y\in Ran\ f$，都存在唯一的$x\in X$，使得$y=f(x)$。

图8.8.2说明了这三类函数之间的关系。

注意，既非单射又非满射的函数是大量存在的。

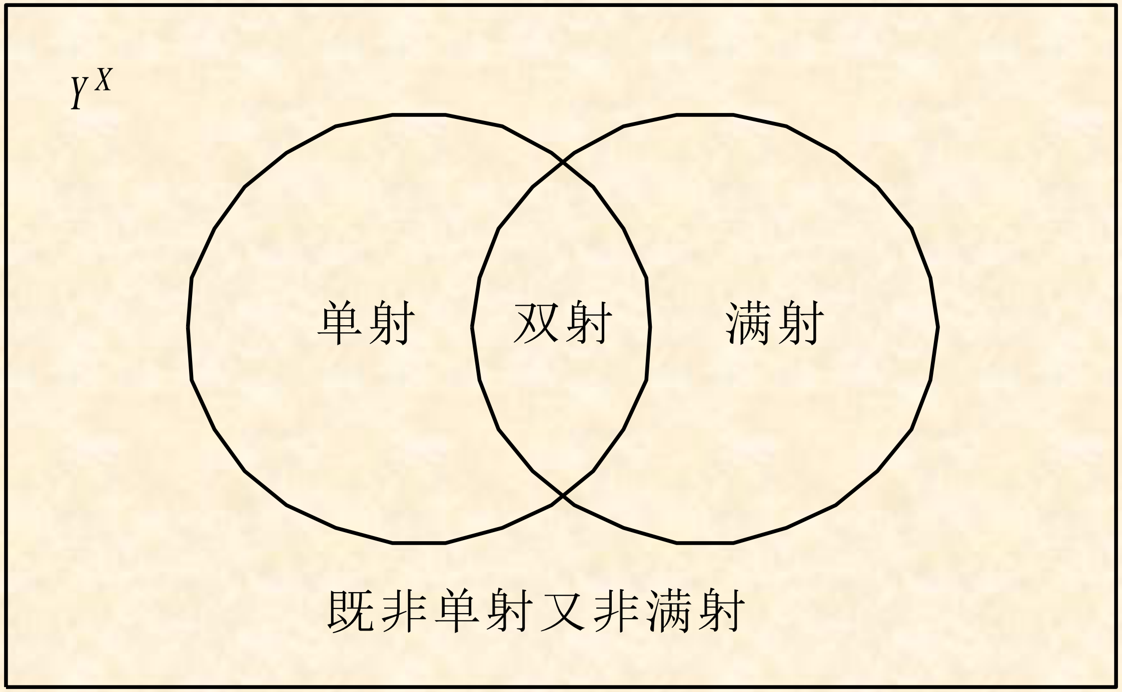


图 8.8.2

【例8.8.5】 对于给定的f和集合A，请判断f的性质；并求A在f下的像$f(A)$。

(1) f：R→R，$f(x)=x$，$A=\{8\}$

(2) f：N→N×N，$f(x)=\langle x, x+1\rangle$，$A=\{2, 5\}$

(3) f：Z→N，$f(x)=|x|$，$A=\{-1, 2\}$

(4) f：S→R，$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

S=［0,+∞)，A=［0, 7)

解

(1) f是双射，$f(A)=f(\{8\})=\{8\}$

(2) f是单射，$f(A)=f(\{2, 5\})=\{\langle 2, 3\rangle, \langle 5, 6\rangle\}$

(3) f是满射，$f(A)=f(\{-1, 2\})=\{1, 2\}$

(4) f是单射，$f(A)=f([0, 7))=(1/8, 1]$ 有极大值1

定理8.8.3 设A，B是有穷集合，$|A|=|B|$，则f: $A \to B$是单射的充分必要条件是f是满射。

证明 先证必要性。设f是单射，则$|A|=|f(A)|=|B|$。因为

$f(A) \subseteq B$，而B是有穷集合，所以$f(A)=B$，故f是满射。

再证充分性。设f是满射，则$f(A)=B$。于是$|A|=|f(A)|=|B|$。又因为A是有穷集合，且对于任意A的元素，B中都只有唯一的元素作为函数值，所以f是单射。

三、某些重要函数

定义 8.7

（1）设 f：$A \to B$，如果存在 $c \in B$ 使得对所有的 $x \in A$ 都有 $f(x)=c$，则称 f：$A \to B$ 是常函数.

（2）称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的恒等函数，对所有的 $x \in A$ 都有 $I_A(x)=x$.

（3）设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$, $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集，f：$A \to B$，如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \prec x_2$，就有 $f(x_1) \preccurlyeq f(x_2)$，则称 f 为单调递增的；如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \prec x_2$，就有 $f(x_1) \prec f(x_2)$，则称 f 为严格单调递增的. 类似的也可以定义单调递减和严格单调递减的函数.

(4) 设 A 为集合，对于任意的 $A'\subseteq A$, A'的特征函数

$\chi_{A'}$：$A\to\{0,1\}$定义为

$\chi_{A'}(a)=1, a\in A'$

$\chi_{A'}(a)=0, a\in A-A'$

(5) 设 R 是 A 上的等价关系，令

g：$A\to A/R$

$g(a)=[a], \forall a\in A$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射.

例 （1）偏序集$<P(\{a,b\}),R_{\subseteq}>$, $<\{0,1\},\le>$, $R_{\subseteq}$为包含关系, $\le$为一般的小于等于关系.

令 f: $P(\{a,b\})\to\{0,1\}$, $f(\varnothing)=f(\{a\})=f(\{b\})=0$, $f(\{a,b\})=1$,

f 是单调递增的, 但不是严格单调递增的.

（2）A 的每一个子集 A'都对应于一个特征函数, 不同的子集对应于不同的特征函数. 例如 $A=\{a,b,c\}$, 则有

$\chi_{\varnothing}=\{<a,0>,<b,0>,<c,0>\}$，$\chi_{\{a,b\}}=\{<a,1>,<b,1>,<c,0>\}$

（3）给定集合 A 和 A 上的等价关系 R, 就可以确定一个自然映射 $g: A\to A/R$. 不同的等价关系确定不同的自然映射, 其中恒等关系所确定的自然映射是双射, 而其他的自然映射一般来说只是满射. 例如

$A=\{1,2,3\}$, $R=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$

$g(1)=g(2)=\{1,2\}$, $g(3)=\{3\}$

【例8.8.7】 设$A=\{1, 2, 3, 4\}$， $R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}\cup I_A$，求自然映射：$g_1$：$A\to A/E_A$，$g_2$：$A\to A/R$。

解 $g_1(1)=g_1(2)=g_1(3)=g_1(4)=A$

$g_2(1)=g_2(2)=\{1,2\}$，$g_2(3)=\{3\}$，$g_2(4)=\{4\}$

注意到，$A/E_A=\{\{1, 2, 3, 4\}\}=\{A\}$，

$A/R=\{\{1, 2\},\{3\},\{4\}\}$，

所以自然映射都是满射且只有等价关系取I_A时是双射。

补充：分别确定一下各题的f是否为从A到B的函数，并对其中的函数f：A→B指出它是否为单射、满射或双射？如果不是，请说明理由。

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{6,7,8,9,10\}$，f为如下：

(a) $f=\{<1,8>,<3,9>,<4,10>,<2,6>,<5,9>\}$

(b) $f=\{<1,8>,<3,10>,<2,6>,<4,9>\}$

(c) $f=\{<1,7>,<2,6>,<4,5>,<1,9>,<5,10>\}$

(2) A，B为实数集R，f为如下：

(a) $f(x)=x^2-x$　　(b) $f(x)=x^3$

(c) $f(x)=\sqrt{x}$　　(d) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

(3) A，B为正整数集Z^+，f为如下：

(a) $f(x)=x+1$

(b) $f(x)=\begin{cases} 1, & x=1 \\ x-1, & x>1 \end{cases}$

(4) A，B为正实数集， $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

算法复杂性

- 判断算法好坏的标准：运行效率（时间复杂度）、占用资源（空间复杂度）
- 时间复杂度
  - 基本运算：排序和检索问题的基本运算是比较、矩阵乘法的基本运算是元素的相乘
  - 规模为n的输入
  - 基本运算的次数表示成 n 的函数

定义在自然数集合上的函数

- 检索问题：设$L = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$是 n 个不同的数构成的数组，从L 中检索给定的元素x，如果x 在L中，输出x所在的位置 i；如果x不在L中，输出0.

- 最坏情况下的运算次数 W(n)和平均情况下的运算次数A(n)分别称为算法最坏情况和平均情况下的复杂度，显然W(n)和A(n)都是自然数集合上的函数，例如顺序搜索算法最坏情况的时间复杂度函数是W(n)=n

- 多项式时间算法和指数时间算法复杂度

Polynomial Time Algorithms

- We say that an algorithm runs in ***polynomial time*** if the number of steps taken by an algorithm on any instance I is bounded by a polynomial in the size of I.

多项式：$\sum_{i=0}^{k} a_i n^i$，k为常数，k>0, $a_k > 0$

- We say that an algorithm runs in ***exponential time*** if it does not run in polynomial time.

- **Example 1**: finding the determinant of a matrix can be done in $O(n^3)$ steps.
  - This is polynomial time.

On polynomial vs exponential time

- We contrast two algorithm, one that takes 30,000 n^3 steps, and one that takes 2^n steps.

- Suppose that we could carry out 1 billion steps per second.

-

# of nodes	30,000 n^3 steps	2^n steps
n = 30,	0.81 seconds	1 second
n = 40,	1.92 seconds	17 minutes
n = 50	3.75 seconds	12 days
n = 60	6.48 seconds	31 years

当n趋近于无穷大时，指数时间复杂度远远高于多项式时间复杂度

On polynomial vs. exponential time

- Suppose that we could carry out 1 trillion steps per second, and instantaneously eliminate 99.9999999% of all solutions as not worth considering

-

# of nodes	1,000 n^{10} steps	2^n steps
n = 70,	2.82 seconds	1 second
n = 80,	10.74 seconds	17 minutes
n = 90	34.86 seconds	12 days
n = 100	100 seconds	31 years

函数的阶

- 设算法复杂度函数f是定义在自然数集合上的函数，当n变得很大时，函数值f(n)的增长取决于函数的阶。阶越高的函数，增长得越快，算法的复杂度就越高，算法分析的主要工作就是估计复杂度函数的阶，比如n, n^2, n*log*n, *log*n, 2^n.
- 对于指数函数，f(n)随着n的增加将增长得非常快，当n较大时，即使最先进的计算机也不可能在允许的时间内处理，这就是所谓的“指数爆炸”问题。

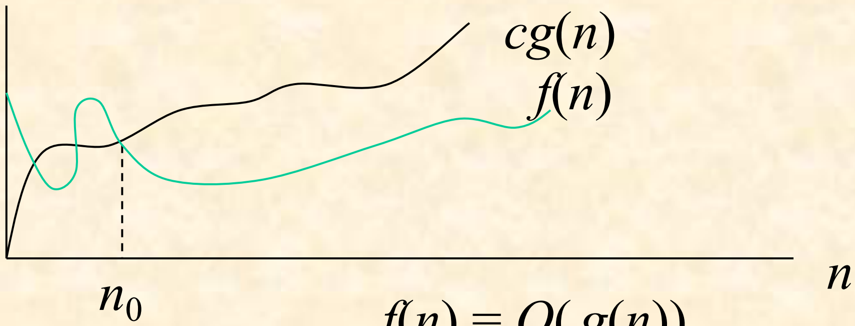
函数的阶

一般只需要关注f(n)的最高阶的项

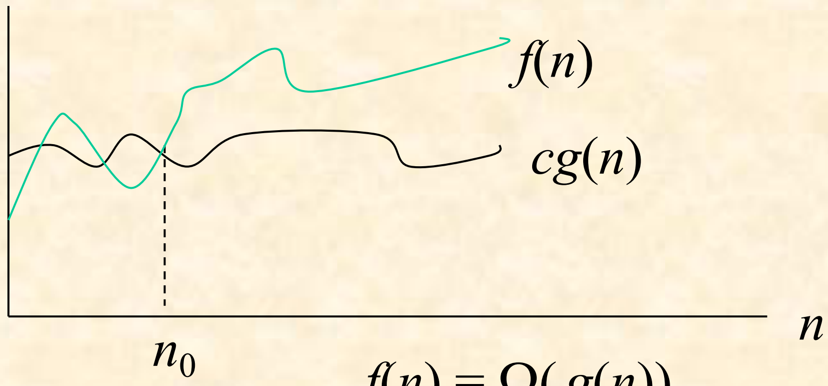
- 若存在正整数c 和 n_0, 使得对一切 $n \geq n_0$, 有$0 \leq f(n) \leq c(g(n))$, 记作 $f(n) = O(g(n))$; (见下页图)
- 若存在正整数c 和 n_0, 使得对一切 $n \geq n_0$, 有$0 \leq c(g(n)) \leq f(n)$, 记作 $f(n) = \Omega(g(n))$; (见下页图)
- 若$f(n) = O(g(n))$ 且 $f(n) = \Omega(g(n))$， 则$f(n) = \Theta(g(n))$ (见下页图)
- 例如: $f(n) = 2n^2 - 3n$， 则$f(n) = \Theta(n^2)$; $g(n) = 6n^3$ 则$g(n) = \Theta(n^3)$; $h(n) = \Theta(1)$ 则表示常数函数。

如果$f(n)=O(n^k)$, k是常数，则称$f(n)$是多项式界限的。

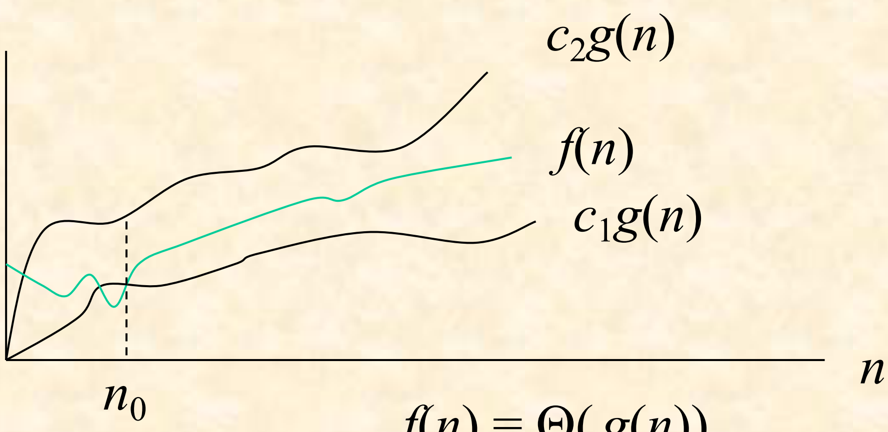
函数的阶



$f(n) = O(g(n))$



$f(n) = \Omega(g(n))$



$f(n) = \Theta(g(n))$

分治策略

- 设问题的输入规模为n。用某种方法把原问题分解为k个独立的规模相等的小问题，使用同样的算法分别求解这些子问题，然后把子问题的解组合起来就得到原问题的解。

二分法搜索

一种应用于搜索的分治算法

- 基本思想：如果数组已经从小到大排好序，把x 与中间的数比较，如果x 等于这个数，算法结束；如果x大于这个数，下面只需要搜索后半个数组；如果x小于这个数，那么只需要搜索前半个数组
- 设$n = 2^k$, 至多k 次比较，问题规模减少到1. $W(n) = \Theta(\log(n))$. 顺序搜索算法为 $\Theta(n)$.

第二节 函数的复合与反函数

主要内容

- 复合函数基本定理
- 函数的复合运算与函数性质
- 反函数的存在条件
- 反函数的性质

一、 复合函数基本定理

定理 8.1 设 F, G 是函数，则 $F\circ G$ 也是函数，且满足

（1） $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{x|x\in \mathrm{dom}F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}G\}$ $\boxed{\text{Ran}F\text{ 不一定包含于dom}G}$

（2） $\forall x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$有 $F\circ G(x)=G(F(x))$

证 先证明 $F\circ G$ 是函数.

因为 F, G 是关系，所以 $F\circ G$ 也是关系.

若对任个 $x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$若 $xF\circ Gy_1$ 和 $xF\circ Gy_2$，则

$<x, y_1>\in F\circ G\wedge <x, y_2>\in F\circ G$

$\Rightarrow\exists t_1(<x,t_1>\in F\wedge <t_1,y_1>\in G)\wedge\exists t_2(<x,t_2>\in F\wedge <t_2,y_2>\in G)$

$\Rightarrow\exists t_1\exists t_2(t_1=t_2\wedge <t_1,y_1>\in G\wedge <t_2,y_2>\in G$ （F 为函数）

$\Rightarrow y_1=y_2$ （G 为函数）

所以 $F\circ G$ 为函数.

任取 x,

$$x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$$

$$\Rightarrow \exists t \exists y(<x,t> \in F \wedge <t,y> \in G)$$

$$\Rightarrow \exists t(x \in \mathrm{dom}F \wedge t = F(x) \wedge t \in \mathrm{dom}G)$$

$$\Rightarrow x \in \{x | x \in \mathrm{dom}F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}G\}$$

任取 x,

$$x \in \mathrm{dom}F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}G$$

$$\Rightarrow <x,F(x)> \in F \wedge <F(x),G(F(x))> \in G$$

$$\Rightarrow <x,G(F(x))> \in F \circ G$$

$$\Rightarrow x \in \mathrm{dom}(F \circ G) \wedge F \circ G(x) = G(F(x))$$

所以（1）和（2）得证.

推论 1 设 F, G, H 为函数，则$(F\circ G)\circ H$ 和 $F\circ(G\circ H)$都是函数，且

$$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$$

证 由上述定理和关系复合具有结合性得证.

推论 2 设 $f: A\to B, g: B\to C$，则 $f\circ g: A\to C$，且$\forall x\in A$ 都有 $f\circ g(x)=g(f(x))$.

证 由上述定理知 $f\circ g$ 是函数，且

$$\mathrm{dom}(f\circ g)=\{x|x\in \mathrm{dom}f\wedge f(x)\in \mathrm{dom}g\}$$

$$=\{x|x\in A\wedge f(x)\in B\}=A$$

$$\mathrm{ran}(f\circ g)\subseteq \mathrm{ran}g\subseteq C$$

因此 $f\circ g: A\to C$，且$\forall x\in A$ 有 $f\circ g(x)=g(f(x))$.

我们注意到，$\langle x,z\rangle \in f\circ g$是指有$y$使$\langle x,y\rangle \in f$，$\langle y,z\rangle \in g$，即$y=f(x)$，$z=g(y)=g(f(x))$，因而

$$f\circ g(x)=g(f(x))$$

这就是说，当f，g为函数时，它们的合成（复合）作用于自变量的次序刚好与合成的原始记号的顺序相反。

【例8.9.1】 设$A=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，$B=\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$，$\mathrm{C}=\{\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \mathrm{z}_3\}$。

f：$A \to B$，$f=\{\langle x_1, y_2\rangle, \langle x_2, y_1\rangle, \langle x_3, y_3\rangle, \langle x_4, y_5\rangle\}$

g：$B \to \mathrm{C}$，$g=\{\langle y_1, \mathrm{z}_1\rangle, \langle y_2, \mathrm{z}_2\rangle, \langle y_3, \mathrm{z}_3\rangle, \langle y_4, \mathrm{z}_3\rangle, \langle y_5, \mathrm{z}_2\rangle\}$

求$f \circ g$。

解 $f \circ g=\{\langle x_1, z_2\rangle, \langle x_2, z_1\rangle, \langle x_3, z_3\rangle, \langle x_4, z_2\rangle\}$

用关系图图示$f \circ g$，其中虚线表示$f \circ g$，见图8.9.1。

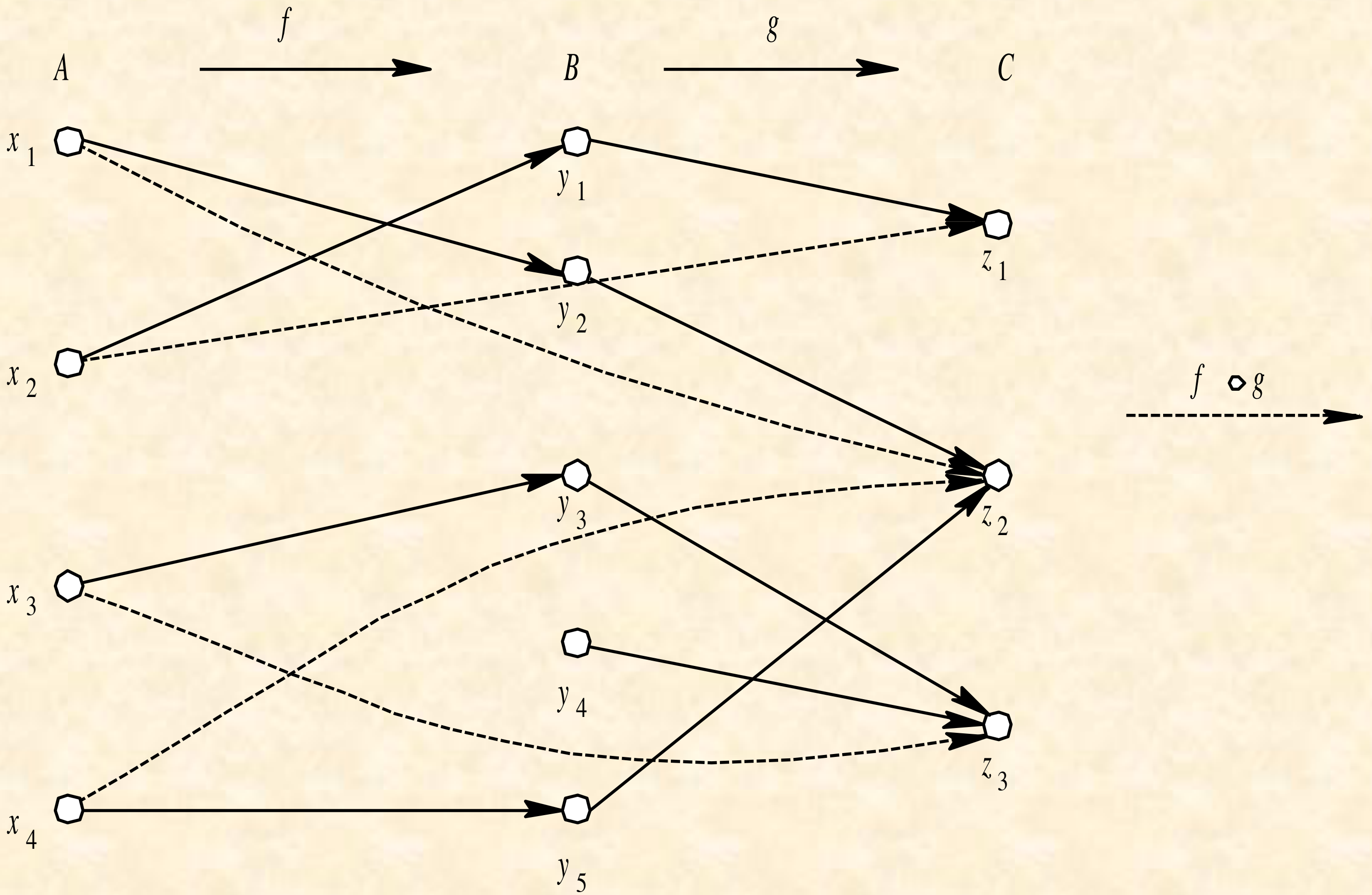


图 8.9.1

【例8.9.2】 设f，g均为实函数，$f(x)=2x+1$，$g(x)=x^2+1$，求$f\circ g$，$g\circ f$，$f\circ f$，$g\circ g$。

解 $f\circ g(x)=g(f(x))=(2x+1)^2+1=4x^2+4x+2$

$g\circ f(x)=f(g(x))=2(x^2+1)+1=2x^2+3$

$f\circ f(x)=f(f(x))=2(2x+1)+1=4x+3$

$g\circ g(x)=g(g(x))=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$

所以 $f\circ g=\{\langle x, 4x^2+4x+2\rangle\}$

$g\circ f=\{\langle x, 2x^2+3\rangle\}$

$f\circ f=\{\langle x, 4x+3\rangle\}$

$g\circ g=\{\langle x, x^4+2x^2+2\rangle\}$

由于函数的合成（复合）满足结合律，n 个函数f的合成（复合）可记为f^n，常称为f的n次迭代。显然

$$\begin{cases} f^0(x) = x \\ f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \end{cases}$$

和$R^0=I_A$一致， $x \in A$

和$R^{n+1}= R^n \circ R$一致

【例8.9.3】

（1）设f为N上的后继函数，即$f(x)=x+1$，那么$f^y(x)=x+y$。这表明，当把复合运算强化地运用于变元（合成次数），它就成为一种有力的构造新函数的手段。

（2）设f：$X \to X$，$X=\{a,b,\mathrm{c}\}$。若$f(a)=a$，$f(b)=b$，$f(\mathrm{c})=\mathrm{c}$，那么$f^2=f$。这时称f是等幂的。

函数复合的下列性质也是明显的。

二、函数的复合运算与函数的性质

定理 8.2 设 f: $A \to B$, g: $B \to C$.

（1）如果 f: $A \to B$, g: $B \to C$ 都是满射的，则 $f \circ g$: $A \to C$ 也是满射的.

（2）如果 f: $A \to B$, g: $B \to C$ 都是单射的，则 $f \circ g$: $A \to C$ 也是单射的.

（3）如果 f: $A \to B$, g: $B \to C$ 都是双射的，则 $f \circ g$: $A \to C$ 也是双射的.

证

（1）任取 $c \in C$, 由 g: $B \to C$ 的满射性, $\exists b \in B$ 使得 $g(b)=c$.

对于这个 b, 由 f: $A \to B$ 的满射性，$\exists a \in A$ 使得 $f(a)=b$.

由合成定理有

$$f \circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

从而证明了 $f \circ g$: $A \to C$ 是满射的.

（2）假设存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得

$$f \circ g(x_1)=f \circ g(x_2)$$

由合成定理有

$$g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

因为 g：$B \to C$ 是单射的，故 $f(x_1)=f(x_2)$．又由于 f：$A \to B$ 也是单射的，所以 $x_1=x_2$．从而证明 $f \circ g$：$A \to C$ 是单射的．

（3）由（1）和（2）得证．

注意：该定理说明函数的复合能够保持函数单射、满射、双射的性质．但定理的逆命题不为真，即如果 $f \circ g$：$A \to C$ 是单射（或满射、双射）的，不一定有 f：$A \to B$ 和 g：$B \to C$ 都是单射（或满射、双射）的．

定理 8.3 设 f：A→B，则 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$ （证明略）

考虑集合 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$, $C=\{c_1,c_2,c_3\}$. 令

$$f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_3>\}$$

$$g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_3,c_3>,<b_4,c_3>\}$$

$$f\circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_3>\}$$

那么 f: $A\to B$ 和 $f\circ g$: $A\to C$ 都是单射的, 但 g: $B\to C$ 不是单射的.

考虑集合 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3\}$, $C=\{c_1,c_2\}$. 令

$$f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_2>\}$$

$$g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_3,c_2>\}$$

$$f\circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_2>\}$$

那么 g: $B\to C$ 和 $f\circ g$: $A\to C$ 是满射的, 但 f: $A\to B$ 不是满射的.

定理8.9.4 设f：X→Y，g：Y→Z，那么

（1）如果$f\circ g$是单射，则f是单射函数。

（2）如果$f\circ g$是满射，则g是满射函数。

（3）如果$f\circ g$是双射，则f是单射函数，g是满射函数。

证明

（1）设$f\circ g$是单射，而f并非单射。那么有x_1，$x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，使$f(x_1)=f(x_2)$， 从而

$f\circ g(x_1)=g(f(x_1))=g(f(x_2))=f\circ g(x_2)$, 与$f\circ g$为单射矛盾。因此$f$为单射。

（2）、（3）的证明留给读者。

二．反函数

1．反函数存在的充要条件

任给函数 F，它的逆 F^{-1} 不一定是函数，只是一个二元关系.

任给单射函数 f：$A \to B$，则 f^{-1} 是函数，且是从 $\mathrm{ran}f$ 到 A 的双射函数，

但不一定是从 B 到 A 的双射函数.

对于双射函数 f：$A \to B$, f^{-1}：$B \to A$ 是从 B 到 A 的双射函数.

定理 8.4 设 f：$A \to B$ 是双射的，则 f^{-1}：$B \to A$ 也是双射的.

证明思路:

先证 f^{-1}：$B \to A$，即 f^{-1} 是函数，且 $\mathrm{dom}f^{-1}=B$, $\mathrm{ran}f^{-1}=A$.

再证明 f^{-1}：$B \to A$ 的双射性质.

证　因为 f 是函数，所以 f^{-1} 是关系，且

$$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran} f = B\,, \qquad \mathrm{ran}\, f^{-1} = \mathrm{dom} f = A,$$

对于任意的 $x \in B = \mathrm{dom}\, f^{-1}$，假设有 $y_1, y_2 \in A$ 使得

$$<x,y_1> \in f^{-1} \wedge <x,y_2> \in f^{-1}$$

成立，则由逆的定义有

$$<y_1,x> \in f \wedge <y_2,x> \in f$$

根据 f 的单射性可得 $y_1=y_2$，从而证明了 f^{-1} 是函数，且是满射的.

若存在 $x_1, x_2 \in B$ 使得 $f^{-1}(x_1)=f^{-1}(x_2)=y$，从而有

$$<x_1,y> \in f^{-1} \wedge <x_2,y> \in f^{-1}$$

$$\Rightarrow <y,x_1> \in f \wedge <y,x_2> \in f \Rightarrow x_1=x_2 \qquad \text{（因为 } f \text{ 是函数）}$$

对于双射函数 f：$A \to B$，称 f^{-1}：$B \to A$ 是它的反函数.

只有双射函数存在反函数，
如果f存在反函数，也称f是可逆的

2．反函数的性质

定理 8.5 设f：$A \to B$ 是双射的，则

$$f^{-1} \circ f = I_B,\quad f \circ f^{-1} = I_A$$

对于双射函数f：$A \to A$，有

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_A$$

证明思路：

根据定理可知f^{-1}：$B \to A$ 也是双射的

由合成基本定理可知$f^{-1} \circ f$：$B \to B$，$f \circ f^{-1}$：$A \to A$，且它们都是恒等函数.

可利用集合相等证明方法：证明等式两边两个集合互相包含对方（任意一个集合的元素都属于另外一个集合）。
证明过程见书155页。

例 设 f：$R \to R$，g：$R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \ge 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = x + 2$$

求$f \circ g$, $g \circ f$. 如果f和g存在反函数，求出它们的反函数.

解

$$f \circ g : R \to R$$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

$$g \circ f : R \to R$$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

f: $R \to R$ 不是双射的，不存在反函数.

g: $R \to R$ 是双射的，它的反函数是

g^{-1}: $R \to R$, $g^{-1}(x)=x-2$

定理8.9.7 设f：$X\rightarrow Y$，g：$Y\rightarrow Z$都是可逆的（反函数存在），那么$f\circ g$也是可逆的，且

$$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$$

证明留作练习。

【例8.9.5】 设 f：$N\to N$，g：$N\to N$，且

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x=0,1,2,3 \\ 0 & x=4 \\ x & x\geq 5 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x/2 & x\text{为偶数} \\ 3 & x\text{为奇数} \end{cases}$$

(1)求$f\circ g$，并讨论它的性质（是否是单射或满射）。

(2)设$A=\{0, 1, 2\}$，求$f\circ g$（A）。

解

$$(1)\quad f\circ g(x)=g(f(x))=\begin{cases}0 & x=4\\ 1 & x=1\\ 2 & x=3\\ 3 & x=0\ ,2,\text{或}x\geq 5\text{且为奇数}\\ x/2 & x\geq 5\ \text{且为偶数}\end{cases}$$

因为对任何一个$y\in N$，均有$x\in N$使得$f\circ g$（x）$=y$，所以$f\circ g$是满射。

（2）$f\circ g$（A）$=\{1, 3\}$

【例8.9.6】设f：$R \to R$，f（x）=x^2-2；g：$R \to R$，g（x）=x+4。

(1)求$g \circ f$，$f \circ g$

(2)问$g \circ f$和$f \circ g$是否为单射、满射、双射？

(3)求出f、g、$g \circ f$和$f \circ g$中的可逆函数的逆（反）函数。

解

（1） $g\circ f=\{\langle x, x^2+8x+14\rangle \mid x\in R\}$

$f\circ g=\{\langle x, x^2+2\rangle \mid x\in R\}$

（2）$g\circ f$和$f\circ g$均是非单非满函数。

（3）因为g是双射，所以可逆，反函数为：

g^{-1}（x）$=x-4$。

作业

- 7
- 10
- 12
- 21
- 23

第八章 习题课

一、 本章的主要内容及要求

1． 主要内容

- 函数，从 A 到 B 的函数 f:$A \to B$，B^A，函数的像与完全原像
- 函数的性质：单射、满射、双射函数
- 重要函数：恒等函数、常函数、单调函数、集合的特征函数、自然映射

2．要求:

- 给定 f, A, B, 判别 f 是否为从 A 到 B 的函数
- 判别函数 f: $A \to B$ 的性质（单射、满射、双射）
- 熟练计算函数的值、像、复合以及反函数
- 证明函数 f: $A \to B$ 的性质（单射、满射、双射）
- 给定集合 A, B，构造双射函数 f: $A \to B$

二、练习

1．对给定的 A, B 和 f，判断是否构成函数 f：$A \to B$．如果是，说明 f：$A \to B$ 是否为单射、满射、双射的．并根据要求进行计算．

（1）$A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{6,7,8,9,10\}, f=\{<1,8>,<3,9>,<4,10>,<2,6>,<5,9>\}$.

（2）A,B 同(1), $f=\{<1,7>,<2,6>,<4,5>,<1,9>,<5,10>\}$.

（3）A,B 同(1), $f=\{<1,8>,<3,10>,<2,6>,<4,9>\}$.

（4）$A=B=R, f(x)=x^3$.

（5）$A=B=R^+, f(x)=x/(x^2+1)$.

（6）$A=B=R\times R, f(<x,y>)=<x+y,x-y>$，令 $L=\{<x,y>|x,y\in R \wedge y=x+1\}$，计算 $f(L)$.

（7）$A=N\times N, B=N, f(<x,y>)=|x^2-y^2|$．计算 $f(N\times\{0\}), f^{-1}(\{0\})$.

解

（1）能构成 $f: A\to B$,

$f: A\to B$ 既不是单射也不是满射，因为 $f(3)=f(5)=9$，且 $7\notin \mathrm{ran}f$.

（2）不能构成 $f: A\to B$，因为 f 不是函数. $<1,7>\in f$ 且 $<1,9>\in f$，与函数定义矛盾.

（3）不能构成 $f: A\to B$，因为 $\mathrm{dom}f = \{1,2,3,4\} \neq A$.

（4）能构成 $f: A\to B$，且 $f: A\to B$ 是双射的.

（5）能构成 $f: A\to B$,

$f: A\to B$ 既不是单射的也不是满射的.

因为该函数在 $x=1$ 取极大值 $f(1)=1/2$. 函数不是单调的,且 $\mathrm{ran}f\neq R^+$.

（6）能构成 $f: A\to B$，且 $f: A\to B$ 是双射的.

$$f(L) = \{<2x+1,-1>|x\in R\}=R\times\{-1\}$$

（7）能构成 $f: A\to B$,

$f: A\to B$ 既不是单射的也不是满射的. 因为 $f(<1,1>)=f(<2,2>)=0$, $2\notin \mathrm{ran}f$.

$$f(N\times\{0\}) = \{n^2-0^2|n\in N\} = \{n^2|n\in N\}$$

$$,f^{-1}(\{0\}) = \{<n,n>|n\in N\}.$$

R/E$_1$={{x|x≥0}, {x|x<0}}
R/E$_2$={{x$_1$}, {x$_2$}, {x$_3$}, …}, E$_2$=I$_R$
R/E$_3$={{x|x∈Z}, {x|x∉Z}}
R/E$_4$={R}

2. 设 $f_1, f_2, f_3, f_4 \in R^R$，且

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ -1, & x<0\end{cases},\quad f_2(x)=x,$$

$$f_3(x)=\begin{cases}-1, & x\in Z\\ 1, & x\notin Z\end{cases}\quad f_4(x)=1$$

令 E_i 是由 f_i 导出的等价关系，i=1,2,3,4，即 $xE_iy \Leftrightarrow f_i(x)=f_i(y)$

(1) 画出偏序集 $<\{R/E_1, R/E_2, R/E_3, R/E_4\}, T>$ 的哈斯图，其中 T 是加细 (细分) 关系：$<R/E_i, R/E_j> \in T \Leftrightarrow \forall x(x\in R/E_i \rightarrow \exists y(y\in R/E_j \wedge x\subseteq y))$

即对于 R/E_i 的任何划分块 x，都存在 R/E_j 的划分块 y 使得 y 包含 x.

(2) g_i：$R\rightarrow R/E_i$ 是自然映射，求 $g_i(0)$, i=1,2,3,4.

(3) 对每个 i, 说明 g_i 的性质 (单射、满射、双射).

解

（1）哈斯图如下

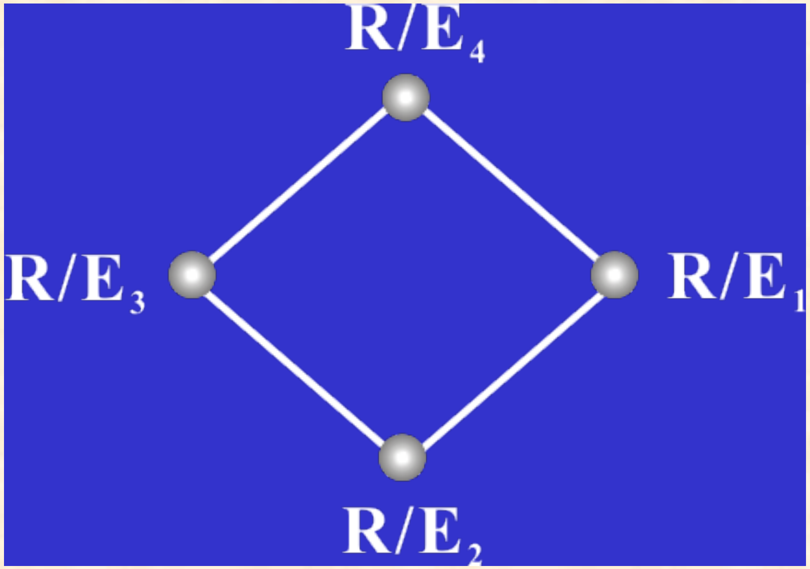


图1

（2）$g_1(0) = \{x \mid x \in R \wedge x \geq 0\}$，　$g_2(0)=\{0\}$，　$g_3(0)=Z$，　$g_4(0)=R$

（3）g_1, g_3, g_4 是满射的；g_2 是双射的.

3．对于以下集合 A 和 B，构造从 A 到 B 的双射函数 f：$A \to B$.

（1）$A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b,c\}$

（2）$A=(0,1)$，$B=(0,2)$

（3）$A=\{x|\ x\in Z \wedge x<0\}$，$B=N$

（4）$A=R$，$B=R^{+}$

解：（1）$f=\{<1,a>, <2,b>, <3,c>\}$

（2）f：$A\to B, f(x)=2x$

（3）f：$A\to B, f(x)= -x-1$

（4）f：$A\to B, f(x)=e^{x}$

4. 设

$$f: R\times R \to R\times R,$$

$$f(<x,y>) =< x+y, x-y >$$

证明 f 既是满射的，也是单射的.

证 任取$<u,v>\in R\times R$，存在$<\dfrac{u+v}{2},\dfrac{u-v}{2}>$使得

$$f(<\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}>) =< u,v >$$

因此 f 是满射的。

对于任意的$<x,y>$, $<u,v>\in R\times R$, 有

$$f(<x,y>) = f(<u,v>) \Leftrightarrow < x+y, x-y > = < u+v, u-v >$$

$$\Leftrightarrow x+y = u+v,\ x-y = u-v \Leftrightarrow x = u,\ y = v$$

$$\Leftrightarrow < x,y > = < u,v >$$

因此 f 是单射的.

证明方法

- 证明 $f: A \to B$ 是满射的方法

  任取 $y \in B$，找到 x(即给出 x 的表示)或者证明存在 $x \in A$，使得 $f(x)=y$.

- 证明 $f: A \to B$ 是单射的方法

  方法一　$\forall x_1, x_2 \in A$,

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow$	…	$\Rightarrow x_1=x_2$
推理前提	推理过程	推理结论

  方法二　$\forall x_1, x_2 \in A$,

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow$	…	$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
推理前提	推理过程	推理结论

- 证明 $f: A \to B$ 不是满射的方法

  找到 $y \in B$, $y \notin \mathrm{ran} f$

- 证明 $f: A \to B$ 不是单射的方法

  找到 $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$