21 R具有对称性

$\forall \langle x,y\rangle \in R$

都有 $x,y\in A \wedge x+y=10$

$\Rightarrow \langle y,x\rangle \in R$

$\forall x \forall y(x,y\in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \rightarrow \langle y,x\rangle \in R)$ ∴R具有对称性

22 (1) R的关系图

(2) R的性质 ①反自反性

②反对称性

①自反性 IR^{-1}

24. ∵R具有自反性

∴ $\forall x(x\in A \rightarrow \langle x,x\rangle \in R)$

$\Rightarrow$ ~~$\forall x\forall y$~~ $\forall x(x\in A \rightarrow \langle x,x\rangle \in R^{-1})$

II $R_1\cap R_2$

对于 $\forall x\in A$, ~~$\langle x,x\rangle \in R_1$~~ $\langle x,x\rangle \in R_1$

对于 $\forall x\in A$, ~~$\langle x,x\rangle \in R_2$~~ $\langle x,x\rangle \in R_2$

∴对于任意 $\forall x\in A$ ~~$\langle x,x\rangle \in R$~~

$\langle x,x\rangle \in R_1\cap R_2$

III $R_1\cup R_2$

$\forall x\in A$, $\langle x,x\rangle \in R_1 \wedge \langle x,x\rangle \in R_2$

$\Rightarrow \langle x,x\rangle \in R_1\cup R_2$

$\boxed{\text{IV } R_1-R_2 \text{的反例}}$

$A=\{1,2,3\}$

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\langle 3,3\rangle\ \langle 1,3\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

$R_1-R_2=\{\langle 1,3\rangle\}$ 不具有自反性

V $R_1\circ R_2$

$R_1 \cup R_2$ 反对称性反例

$A=\{1,2\}$

$R_1=\{\langle 1,2\rangle\}$

$R_2=\{\langle 2,1\rangle\}$

$R_1\cup R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ 不具有反对称性

$R_1\cup R_2$ 的传递性反例

$A=\{1,2\}$

$R_1=\{\langle 1,2\rangle\}$

$R_2=\{\langle 2,1\rangle\}$

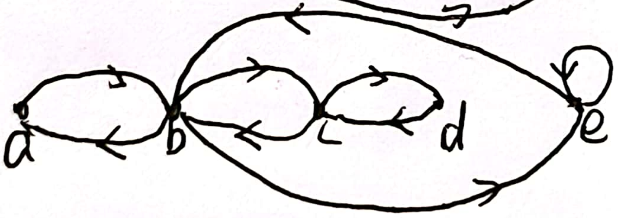
$R_1\cup R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ 不具有传递性

25

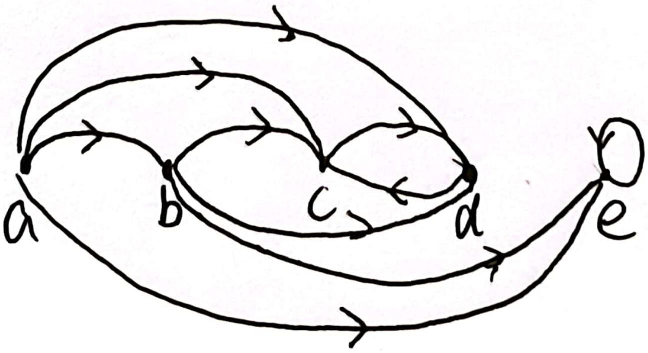
r(R)

r(R)

s(R)



t(R)



$R_1\subseteq R_2$

29 (1) $r(R_1)\subseteq r(R_2)$

证明：∵ ~~R_2~~

∵ $r(R_1)$, $r(R_2)$ 自反

∴ $R_1\subseteq r(R_1)$

$R_2\subseteq r(R_2)$

∵ $R_1\subseteq R_2$

∴ $R_1\subseteq r(R_2)$

∵ $r(R_1)$是包含R_1的最小自反关系

∴ $r(R_1)\subseteq r(R_2)$

(2) 证明 $s(R_1)$, $s(R_2)$对称

$R_1\subseteq s(R_1)$ $R_2\subseteq s(R_2)$

∵ $R_1\subseteq R_2$

∴ $R_1\subseteq s(R_2)$

∵ ~~s是包含~~ $s(R_1)$是包含R_1的最小对称关系

∴ $s(R_1)\subseteq s(R_2)$

(3) 同证明：∵ $t(R_2)$传递

$R_2\subseteq t(R_2)$

又∵ $R_1\subseteq R_2$

∴ $R_1\subseteq t(R_2)$

∵ $t(R_1)$是包含R_1的最小传递关系

∴ $t(R_1)\subseteq t(R_2)$

30. (1) 证明

∵ R自反

∴ $I_A\subseteq R$

又∵ $R\subseteq s(R)$, $R\subseteq t(R)$

∴ $I_A\subseteq s(R)$ $I_A\subseteq t(R)$

∴ $s(R)$与$t(R)$也自反

$r(R)=R\cup I_A$

(3) 证明：∵ R传递

∴ $\forall\langle x,y\rangle\in R \wedge \forall\langle y,t\rangle\in R$

$\Rightarrow \langle x,t\rangle\in R$

∵ $R\subseteq r(R)$

∴ $\langle x,t\rangle\in r(R)$

对 $\forall\langle x,y\rangle\in I_A$ 且 $\forall\langle y,t\rangle\in I_A$

$\Rightarrow x=y=t$

则 $\langle x,x\rangle\in I_A$，∵ $I_A\subseteq r(R)$ I_A传递

∴ 都有$\langle x,t\rangle\in r(R)$

得证 $r(R)$也有传递性