内 容 简 介

本书是关于线性代数与空间解析几何的专用工具书，内容涉及行列式、矩阵、几何向量、n 维向量、线性方程组、特征值、特征向量与相似矩阵、线性空间与线性变换、二次型与二次曲面.

本书适合大学师生参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何习题指导/李祝春，王忠英，边伟主编.—2 版.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.8

ISBN 978-7-5603-6901-3

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①李…②王…③边…　Ⅲ.①线性代数－高等学校－教学参考资料②立体几何－解析几何－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 208207 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　杜莹雪
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　肇东市一兴印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 14.25　字数 264 千字
版　　次　2015 年 9 月第 1 版　2017 年 8 月第 2 版
　　　　　2017 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6901-3
定　　价　23.00 元

◎目录

行　　列　　式

习　　题　　一

班级：____________________

学号：____________________

姓名：____________________

成绩：____________________

1 按自然数从小到大的自然次序，求解各题：

(1) 求 1 至 6 的全排列 241356 的逆序数.

解 $t(241356)=0+0+2+1+0+0=3$.

(2) 求 1 至 $2n$ 的全排列 $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$ 的逆序数.

解 $t(13\cdots(2n-1)24\cdots(2n))=0+0+\cdots+0+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(3) 选择 i 与 j，使由 1 至 9 的排列 $91274i56j$ 成偶排列.

解 由 $91274i56j$ 是从 1 至 9 的排列，所以 i,j 只能取 3 或 8.

当 $i=8,j=3$ 时

$$t(912748563)=0+1+1+1+2+1+3+3+6=18$$

是偶排列.

当 $i=3,j=8$ 时

$$t(912743568)=0+1+1+1+2+3+2+2+1=13$$

是奇排列，不合题意，舍去.

(4) 选择 i 与 j，使由 1 至 9 的排列 $71i25j489$ 成奇排列.

解 由 $71i25j489$ 是从 1 至 9 的排列，所以 i,j 只能取 3 或 6.

当 $i=3,j=6$ 时

$$t(713256489)=0+1+1+2+1+1+3+0+0=9$$

是奇排列.

当 $i=6,j=3$ 时

$$t(716253489)=0+1+1+2+2+3+3+0+0=12$$

是偶排列，不合题意，舍去.

2 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 9a & 18b \\ 26b & 13a \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 32\ 153 & 32\ 053 \\ 75\ 284 & 75\ 184 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 9a & 18b \\ 26b & 13a \end{vmatrix}=9\times 13\begin{vmatrix} a & 2b \\ 2b & a \end{vmatrix}=117(a^2-4b^2)$.

(2)
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 32\ 153 & 32\ 053 \\ 75\ 284 & 75\ 184 \end{vmatrix}&=\begin{vmatrix} 32\ 053+100 & 32\ 053 \\ 75\ 184+100 & 75\ 184 \end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix} 32\ 053 & 32\ 053 \\ 75\ 184 & 75\ 184 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 100 & 32\ 053 \\ 100 & 75\ 184 \end{vmatrix}\\&=0+7\ 518\ 400-3\ 205\ 300=4\ 313\ 100.\end{aligned}$$

(3) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}=5\times 4\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix}=0$.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(4) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4abcdef.$$

3 已知 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$，利用行列式性质求下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

解　(1) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

(2) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 = 1.$$

4 利用行列式定义计算：

(1) $\begin{vmatrix} & & & & 1 \\ & & & 2 & \\ & & 3 & & \\ & 4 & & & \\ 5 & & & & \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解　(1) $\begin{vmatrix} & & & & 1 \\ & & & 2 & \\ & & 3 & & \\ & 4 & & & \\ 5 & & & & \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5}$

$$= (-1)^{t(54321)} a_{15} a_{24} a_{33} a_{42} a_{51}$$

$$= (-1)^{10} \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & n-1 \\ n & & & & 0 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$

$$=(-1)^{t(23\cdots n1)}a_{12}a_{23}\cdots a_{(n-1)n}a_{n1}$$
$$=(-1)^{n-1}\times 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$$
$$=(-1)^{n-1}n!.$$

5 利用行列式的定义证明：

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=0$；

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

证 (1) $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$

$$=(-1)^{t(p_1p_2p_3p_4p_5)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}.$$

假设 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}\neq 0$，由已知，$p_3,p_4,p_5$ 必等于 4 或 5，从而 p_3,p_4,p_5 中至少有两个相等，这与 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5 是 1，2，3，4，5 的一个全排列矛盾，故所有项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}=0$，因此 $D=0$.

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum (-1)^{t(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$.

由已知，只有当 p_1,p_2 取 1 或 2 时

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}\neq 0$$

而 p_1,p_2,p_3,p_4 是 1，2，3，4 的一个全排列，故 p_3,p_4 取 3 或 4，于是

$$D=(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}+$$
$$(-1)^{t(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+(-1)^{t(2143)}a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$$

从而

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(a_{33}a_{44}-a_{34}a_{43})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$$
$$= D$$

6 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 11 \\ -2 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 10 \end{vmatrix}$；

(3) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；　(4) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$；

(5) $D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$；

(6) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$.

解　(1) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 4 行展开}} (-1)^{4+4} d \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第 3 列展开}} (-1)^{3+3} dc \begin{vmatrix} a & 3 \\ 0 & b \end{vmatrix} = abcd.$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 11 \\ -2 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$=-3\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&1&2&2\\0&0&-3&7\\0&0&-3&6\end{vmatrix}$$

$$=-3\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&1&2&2\\0&0&-3&7\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=-9.$$

(3) $$D_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}\overset{\substack{r_1+r_2\\r_1+r_3\\\vdots\\r_1+r_n}}{=\!=}\begin{vmatrix}(n-1)a+x&(n-1)a+x&\cdots&(n-1)a+x\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a+x]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a+x]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x-a&0&\cdots&0\\0&0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a+x](x-a)^{n-1}.$$

(4) $$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\-1&1&0&\cdots&0\\-1&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}\overset{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3\\\vdots\\c_1+c_n}}{=\!=}\begin{vmatrix}1+2+3+\cdots+n&2&3&\cdots&n\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

(5) $$D_n=\begin{vmatrix}a&0&0&\cdots&1\\0&a&0&\cdots&0\\0&0&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按第 1 行展开}}{=\!=\!=}(-1)^{1+1}a\begin{vmatrix}a&0&\cdots&0\\0&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a\end{vmatrix}+$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{1+n}(-1)^{n-1+1}a^{n-2}$$

$$=a^n-a^{n-2}.$$

$$(6)D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(-2)^{n-1}=(-1)^{n-1}2^{n-1}.$$

7 证明：

$$(1)\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^2.$$

证

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[c_2+(-1)c_3]{c_1+(-1)c_2}\begin{vmatrix} a^2-ab & ab-b^2 & b^2 \\ 2a-a-b & a+b-2b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a(a-b) & b(a-b) \\ a-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)^2\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$$

$$(2)\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0.$$

证　等式左端$=\begin{vmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & a^2+4a+4 & a^2+6a+9 \\ b^2 & b^2+2b+1 & b^2+4b+4 & b^2+6b+9 \\ c^2 & c^2+2c+1 & c^2+4c+4 & c^2+6c+9 \\ d^2 & d^2+2d+1 & d^2+4d+4 & d^2+6d+9 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{c_3+(-1)c_1 \\ c_4+(-1)c_1}]{c_2+(-1)c_1}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

年　月　日

$$\xlongequal[c_4+(-3)c_2]{c_3+(-2)c_2}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0$$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & x_1+a_1 & x_1^2+b_1x_1+b_2 & x_1^3+c_1x_1^2+c_2x_1+c_3 \\ 1 & x_2+a_1 & x_2^2+b_1x_2+b_2 & x_2^3+c_1x_2^2+c_2x_2+c_3 \\ 1 & x_3+a_1 & x_3^2+b_1x_3+b_2 & x_3^3+c_1x_3^2+c_2x_3+c_3 \\ 1 & x_4+a_1 & x_4^2+b_1x_4+b_2 & x_4^3+c_1x_4^2+c_2x_4+c_3 \end{vmatrix}=$

$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}.$

证 等式左端 $\xlongequal[\substack{c_3+(-b_2)c_1 \\ c_4+(-c_3)c_1}]{c_2+(-a_1)c_1}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2+b_1x_1 & x_1^3+c_1x_1^2+c_2x_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2+b_1x_2 & x_2^3+c_1x_2^2+c_2x_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2+b_1x_3 & x_3^3+c_1x_3^2+c_2x_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2+b_1x_4 & x_4^3+c_1x_4^2+c_2x_4 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_4+(-c_2)c_2]{c_3+(-b_1)c_2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3+c_1x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3+c_1x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3+c_1x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3+c_1x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4+(-c_1)c_3}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}=\text{等式右端}$$

8 解关于未知数 x 的方程：

(1) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x-2 & 6 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=0.$

解 $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x-2 & 6 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & x-2 \end{vmatrix}$

$$=(x-1)[x(x-2)-3]$$
$$=(x-1)(x^2-2x-3)$$
$$=(x-1)(x-3)(x+1)=0$$

所以 $x_1=1, x_2=3, x_3=-1$.

(2) $\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix}=0(m\neq 0).$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

解
$$\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a & a & x \\ 1 & 1 & 1 \\ b & x & b \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 0 & 0 & x-a \\ 1 & 1 & 1 \\ b & x & b \end{vmatrix}$$
$$= m(x-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & x \end{vmatrix} = m(x-a)(x-b) = 0$$

因 $m \neq 0$,所以 $x_1 = a, x_2 = b$.

9 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a$,求下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n2} & a_{n1} \end{vmatrix}$;

(3) $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}\begin{vmatrix} a_{1p_1} & a_{1p_2} & \cdots & a_{1p_n} \\ a_{2p_1} & a_{2p_2} & \cdots & a_{2p_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{np_1} & a_{np_2} & \cdots & a_{np_n} \end{vmatrix}$,其中“$\sum$”是对 $1,2,\cdots,n$ 的所有全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 取和,$n \geqslant 2$.

解　(1) 经行的交换得

$$原式 = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a$$

(2) 与(1) 类似,经列的交换得
$$原式 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a$$

(3) 经列的交换得
$$\begin{vmatrix} a_{1p_1} & a_{1p_2} & \cdots & a_{1p_n} \\ a_{2p_1} & a_{2p_2} & \cdots & a_{2p_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{np_1} & a_{np_2} & \cdots & a_{np_n} \end{vmatrix} = (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

年　月　日

$$=(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a$$

故

$$原式=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a=a\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=0$$

10 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix}1-a&a&0&0&0\\-1&1-a&a&0&0\\0&-1&1-a&a&0\\0&0&-1&1-a&a\\0&0&0&-1&1-a\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}6&1&1&1&1\\1&6&1&1&1\\1&1&6&1&1\\1&1&1&6&1\\1&1&1&1&6\end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0&0\\0&\lambda&-1&0&0\\0&0&\lambda&-1&0\\0&0&0&\lambda&-1\\k&0&0&0&\lambda\end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\b_4&0&0&a_4\\0&b_3&a_3&0\\0&a_2&b_2&0\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}a_1&b_1&0&0\\b_4&a_4&0&0\\0&0&a_3&b_3\\0&0&b_2&a_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\b_4&a_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_3&b_3\\b_2&a_2\end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3).$$

(2) 将前 4 行依次加到第 5 行，再按第 5 行展开得

心得 体会 拓广 疑问

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ -a & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-a^5+\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}$$

$$=-a^5+\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\\ -a & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-a^5+a^4+\begin{vmatrix}1-a & a & 0\\ -1 & 1-a & a\\ 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}$$

$$=-a^5+a^4+\begin{vmatrix}1-a & a & 0\\ -1 & 1-a & a\\ -a & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-a^5+a^4-a^3+\begin{vmatrix}1-a & a\\ -1 & 1-a\end{vmatrix}$$

$$=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$$

(3) $$\begin{vmatrix}6 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10 & 10 & 10 & 10 & 10\\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6\end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{vmatrix}$$

$$=10\times 5^4=6\ 250.$$

(4) 按最后一行展开得

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1\\ k & 0 & 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ \lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\end{vmatrix}+$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$\lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}$$
$$=k+\lambda^5$$

11 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & x+1\\ 1 & -1 & 1 & x-1 & 1\\ 1 & -1 & x+1 & -1 & 1\\ 1 & x-1 & 1 & -1 & 1\\ x+1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix}x_1-m & x_1 & x_1 & x_1\\ x_2 & x_2-m & x_2 & x_2\\ x_3 & x_3 & x_3-m & x_3\\ x_4 & x_4 & x_4 & x_4-m\end{vmatrix}$.

解 (1) 依次将第 2,3,4,5 列加到第 1 列得

$$原式=\begin{vmatrix}x+1 & -1 & 1 & -1 & x+1\\ x+1 & -1 & 1 & x-1 & 1\\ x+1 & -1 & x+1 & -1 & 1\\ x+1 & x-1 & 1 & -1 & 1\\ x+1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(x+1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & x+1\\ 1 & -1 & 1 & x-1 & 1\\ 1 & -1 & x+1 & -1 & 1\\ 1 & x-1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(x+1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & x\\ 1 & 0 & 0 & x & 0\\ 1 & 0 & x & 0 & 0\\ 1 & x & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}}(x+1)x^4=x^4(x+1)$$

(2) 依次将第 2,3,4 行加到第 1 行得

$$原式=\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{4}x_i-m & \sum\limits_{i=1}^{4}x_i-m & \sum\limits_{i=1}^{4}x_i-m & \sum\limits_{i=1}^{4}x_i-m\\ x_2 & x_2-m & x_2 & x_2\\ x_3 & x_3 & x_3-m & x_3\\ x_4 & x_4 & x_4 & x_4-m\end{vmatrix}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$=\left(\sum_{i=1}^{4}x_i-m\right)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_2&x_2-m&x_2&x_2\\x_3&x_3&x_3-m&x_3\\x_4&x_4&x_4&x_4-m\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{4}x_i-m\right)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-m&0&0\\0&0&-m&0\\0&0&0&-m\end{vmatrix}$$

$$=\left(m-\sum_{i=1}^{4}x_i\right)m^3$$

12 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix}a_1+b_1&a_1+b_2&a_1+b_3&a_1+b_4\\a_2+b_1&a_2+b_2&a_2+b_3&a_2+b_4\\a_3+b_1&a_3+b_2&a_3+b_3&a_3+b_4\\a_4+b_1&a_4+b_2&a_4+b_3&a_4+b_4\end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix}1+a_1b_1&1+a_1b_2&1+a_1b_3&1+a_1b_4\\1+a_2b_1&1+a_2b_2&1+a_2b_3&1+a_2b_4\\1+a_3b_1&1+a_3b_2&1+a_3b_3&1+a_3b_4\\1+a_4b_1&1+a_4b_2&1+a_4b_3&1+a_4b_4\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}1&0&0&a_1\\-1&1&0&a_2\\0&-1&1&a_3\\0&0&-1&a_4\end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&x\\1&4&9&x^2\\1&8&27&x^3\end{vmatrix}$.

解　(1) 依次将第 3,2,1 行乘 -1 加到第 4,3,2 行得

$$原式=\begin{vmatrix}a_1+b_1&a_1+b_2&a_1+b_3&a_1+b_4\\a_2-a_1&a_2-a_1&a_2-a_1&a_2-a_1\\a_3-a_2&a_3-a_2&a_3-a_2&a_3-a_2\\a_4-a_3&a_4-a_3&a_4-a_3&a_4-a_3\end{vmatrix}=0$$

(2) 依次将第 3,2,1 行乘 -1 加到第 4,3,2 行得

$$原式=\begin{vmatrix}1+a_1b_1&1+a_1b_2&1+a_1b_3&1+a_1b_4\\b_1(a_2-a_1)&b_2(a_2-a_1)&b_3(a_2-a_1)&b_4(a_2-a_1)\\b_1(a_3-a_2)&b_2(a_3-a_2)&b_3(a_3-a_2)&b_4(a_3-a_2)\\b_1(a_4-a_3)&b_2(a_4-a_3)&b_3(a_4-a_3)&b_4(a_4-a_3)\end{vmatrix}$$

年　月　日

$$
=(a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_3)\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & 1+a_1b_3 & 1+a_1b_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}
$$

$$=0$$

(3) 按最后一列展开得

$$
\text{原式}=a_4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}-a_3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}+
$$

$$
a_2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}-a_1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}
$$

$$=a_1+a_2+a_3+a_4$$

(4) 由范德蒙德(Vandermonde)行列式的计算公式得

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=(x-3)(x-2)(x-1)(3-2)(3-1)(2-1)\\
&=2(x-1)(x-2)(x-3)
\end{aligned}
$$

13 证明:

$$
(1)D_n=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}
$$

$$=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

证 等式左端

$$
\xlongequal{r_n+(x)r_{n-1}}\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n+a_{n-1}x & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\substack{\vdots \\ r_n+(x^{n-1})r_1}]{\substack{r_n+(x^2)r_{n-2} \\ r_n+(x^3)r_{n-3}}}\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ f(x) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$=(-1)^{n+1}f(x)\begin{vmatrix} -1 & & & & \\ x & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & -1 & \\ & & & x & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}$$

$$=f(x)=\text{等式右端}$$

其中 $f(x)=a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

$$(2)D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}=n+1.$$

证　1）当 $n=1$ 时，$D_1=2=1+1$.

2）假设当 $n\leqslant k$ 时结论成立，当 $n=k+1$ 时，若 $k+1=2$，则

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3=2+1$$

结论成立．若 $k+1\geqslant 3$，将 D_{k+1} 按第一行展开得

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}=2D_k-D_{k-1}=2(k+1)-(k-1+1)$$

$$=(k+1)+1$$

由数学归纳法，对一切自然数 n 结论成立．

$$(3)D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_i\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right),$$

其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$.

证　用加边法

$$\text{等式左端}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$=\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})a_1a_2\cdots a_n$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})=\text{等式右端}$$

(4) $D_n=\begin{vmatrix} x+y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}=\dfrac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}$,

其中 $x\neq y$.

证 当 $n=1$ 时

$$D_1=x+y=\frac{x^2-y^2}{x-y}$$

等式成立.

假设当 $n\leqslant k$ 时等式成立,当 $n=k+1$ 时,若 $k+1=2$,则

$$D_{k+1}=D_2=x^2+xy+y^2=\frac{x^3-y^3}{x-y}$$

等式成立.若 $k+1\geqslant 3$,将 D_{k+1} 按第一列展开得

$$D_{k+1}=(x+y)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x+y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}_{k\text{阶}}+$$

$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} xy & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}_{k\text{阶}}$$

$$=(x+y)D_k-xyD_{k-1}=(x+y)\frac{x^{k+1}-y^{k+1}}{x-y}-xy\frac{x^k-y^k}{x-y}$$

$$=\frac{x^{(k+1)+1}-y^{(k+1)+1}}{x-y}$$

由归纳法原理,等式对一切自然数 n 都成立.

14 设 $f(x)$ 是一个次数不大于 $n-1$ 的一元多项式,证明:如果存在 n 个互不相同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使 $f(a_i)=0,i=1,2,\cdots,n$,则 $f(x)=0$.

年 月 日

证　设

$$f(x)=k_{n-1}x^{n-1}+k_{n-2}x^{n-2}+\cdots+k_1x+k_0$$

依题意有

$$\begin{cases}k_0+a_1k_1+\cdots+a_1^{n-1}k_{n-1}=0\\ \vdots\\ k_0+a_nk_1+\cdots+a_n^{n-1}k_{n-1}=0\end{cases}\tag{1}$$

因 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同,故(1)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\neq 0$$

所以关于 $k_0,k_1,\cdots,k_{n-1}$ 的线性方程组(1)只有零解,所以

$$k_0=k_1=\cdots=k_{n-1}=0,f(x)=0$$

15 利用克莱姆(Cramer)法则解方程组:

(1) $\begin{cases}5x_1+4x_2=11\\6x_1+5x_2=20\end{cases}$.

解　$$D=\begin{vmatrix}5&4\\6&5\end{vmatrix}=25-24=1\neq 0$$

故方程组有唯一解.

$$D_1=\begin{vmatrix}11&4\\20&5\end{vmatrix}=55-80=-25,D_2=\begin{vmatrix}5&11\\6&20\end{vmatrix}=100-66=34$$

由克莱姆法则,有

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-25,x_2=\frac{D_2}{D}=34$$

(2) $\begin{cases}5x_1+6x_2=1\\x_1+5x_2+6x_3=0\\x_2+5x_3=0\end{cases}$.

解　$$D=\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&6&-30\\1&5&-19\\0&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5&-30\\1&-19\end{vmatrix}$$

$$=-[5\times(-19)-(-30)\times 1]=65\neq 0$$

故方程组有唯一解.

$$D_1=\begin{vmatrix}1&6&0\\0&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&6\\1&5\end{vmatrix}=25-6=19$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$D_2=\begin{vmatrix}5&1&0\\1&0&6\\0&0&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&6\\0&5\end{vmatrix}=-5$$

$$D_3=\begin{vmatrix}5&6&1\\1&5&0\\0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5\\0&1\end{vmatrix}=1$$

所以由克莱姆法则得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{19}{65},x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{13},x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{65}$$

年　月　日

矩　　阵

习　题　二

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

成绩：________________

心得 体会 拓广 疑问

1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2\\-3&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&2\\4&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}5&4\\13&-1\end{pmatrix}$. 计算：

(1)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；(2)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$；(3)$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}$.

解 (1)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\-3&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\1&8\end{pmatrix}$.

(2)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\-3&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-7&2\end{pmatrix}$.

(3)$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}=2\begin{pmatrix}2&2\\-3&5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}5&4\\13&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&18\\37&10\end{pmatrix}$.

2 设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，求$\frac{1}{3}\boldsymbol{A}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{A}_2+\frac{1}{12}\boldsymbol{A}_3$.

解 $$\frac{1}{3}\boldsymbol{A}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{A}_2+\frac{1}{12}\boldsymbol{A}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix}+\frac{1}{12}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

3 计算：

(1)$\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}$；

(2)$\begin{pmatrix}1\\4\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 3\ 2\ 1)$；

(3)$(1\ 3\ 2\ 1)\begin{pmatrix}1\\4\\1\\1\end{pmatrix}$；

(4)$\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&-1\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\3&1\end{pmatrix}$；

(5)$\begin{pmatrix}k_1&&\\&k_2&\\&&k_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$；

(6)$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1&&\\&k_2&\\&&k_3\end{pmatrix}$；

(7)$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$；

(8)$(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

解　(1) $\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\\6\\49\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}1\\4\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 3\ 2\ 1)=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\4&12&8&4\\1&3&2&1\\1&3&2&1\end{pmatrix}$.

(3) $(1\ 3\ 2\ 1)\begin{pmatrix}1\\4\\1\\1\end{pmatrix}=(16)$.

(4) $\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&-1\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&6\\-1&2\\5&6\end{pmatrix}$.

(5) $\begin{pmatrix}k_1&&\\&k_2&\\&&k_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1a_{11}&k_1a_{12}\\k_2a_{21}&k_2a_{22}\\k_3a_{31}&k_3a_{32}\end{pmatrix}$.

(6) $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1&&\\&k_2&\\&&k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1a_{11}&k_2a_{12}&k_3a_{13}\\k_1a_{21}&k_2a_{22}&k_3a_{23}\end{pmatrix}$.

(7) $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}$.

(8) $$(x_1\ \ x_2\ \ x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1\ \ x_2\ \ x_3)\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}$$

$$=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)+x_3(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+(a_{12}+a_{21})x_1x_2+(a_{13}+a_{31})x_1x_3+(a_{23}+a_{32})x_2x_3.$$

4 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵,证明:

(1) 当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时

$$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2\pm2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$$

证　$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2\pm\boldsymbol{AB}\pm\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2$

所以当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时

年　月　日

$$(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2\pm 2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$$

成立.

(2) 当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$$

证 $\qquad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2$

所以当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$$

成立.

(3) 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^m=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_m^k\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^{m-k}\quad(m\geqslant 1)$$

其中 C_m^k 表示从 m 个不同的元素中,取出 k 个不同元素的组合数.

1) 当 $m=1$ 时

$$\sum_{k=0}^{1}\mathrm{C}_1^k\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^{1-k}=\mathrm{C}_1^0\boldsymbol{A}^0\boldsymbol{B}^1+\mathrm{C}_1^1\boldsymbol{A}^1\boldsymbol{B}^0=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$$

结论成立.

2) 假设当 $m=l$ 时,结论

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^l=\sum_{k=0}^{l}\mathrm{C}_l^k\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^{l-k}\quad(l\geqslant 1)$$

成立,则当 $m=l+1$ 时有

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{l+1}&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^l(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\Big(\sum_{k=0}^{l}\mathrm{C}_l^k\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^{l-k}\Big)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\\
&=(\mathrm{C}_l^0\boldsymbol{B}^l+\mathrm{C}_l^1\boldsymbol{AB}^{l-1}+\mathrm{C}_l^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{l-2}+\cdots+\mathrm{C}_l^{l-1}\boldsymbol{A}^{l-1}\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_l^l\boldsymbol{A}^l)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\\
&=\mathrm{C}_l^0\boldsymbol{B}^l\boldsymbol{A}+\mathrm{C}_l^1\boldsymbol{AB}^{l-1}\boldsymbol{A}+\mathrm{C}_l^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{l-2}\boldsymbol{A}+\cdots+\\
&\quad\ \mathrm{C}_l^{l-1}\boldsymbol{A}^{l-1}\boldsymbol{BA}+\mathrm{C}_l^l\boldsymbol{A}^{l+1}+\mathrm{C}_l^0\boldsymbol{B}^{l+1}+\mathrm{C}_l^1\boldsymbol{AB}^l+\mathrm{C}_l^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{l-1}+\cdots+\\
&\quad\ \mathrm{C}_l^{l-1}\boldsymbol{A}^{l-1}\boldsymbol{B}^2+\mathrm{C}_l^l\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}\quad(\text{由 }\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA})\\
&=\mathrm{C}_l^0\boldsymbol{B}^l\boldsymbol{A}+\mathrm{C}_l^1\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{l-1}+\mathrm{C}_l^2\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}^{l-2}+\cdots+\mathrm{C}_l^{l-1}\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_l^l\boldsymbol{A}^{l+1}+\\
&\quad\ \mathrm{C}_l^0\boldsymbol{B}^{l+1}+\mathrm{C}_l^1\boldsymbol{AB}^l+\mathrm{C}_l^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{l-1}+\cdots+\mathrm{C}_l^{l-1}\boldsymbol{A}^{l-1}\boldsymbol{B}^2+\mathrm{C}_l^l\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}\\
&=\mathrm{C}_{l+1}^0\boldsymbol{B}^{l+1}+(\mathrm{C}_l^0+\mathrm{C}_l^1)\boldsymbol{AB}^l+(\mathrm{C}_l^1+\mathrm{C}_l^2)\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{l-1}+\cdots+\\
&\quad\ (\mathrm{C}_l^{l-1}+\mathrm{C}_l^l)\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_{l+1}^{l+1}\boldsymbol{A}^{l+1}\quad(\text{由 }\mathrm{C}_{l+1}^m=\mathrm{C}_l^m+\mathrm{C}_l^{m-1})\\
&=\mathrm{C}_{l+1}^0\boldsymbol{B}^{l+1}+\mathrm{C}_{l+1}^1\boldsymbol{AB}^l+\mathrm{C}_{l+1}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{l-1}+\cdots+\mathrm{C}_{l+1}^l\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_{l+1}^{l+1}\boldsymbol{A}^{l+1}\\
&=\sum_{k=0}^{l+1}\mathrm{C}_{l+1}^k\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^{l+1-k}
\end{aligned}$$

由数学归纳法,对一切自然数 m,结论都成立.

5 计算(n 为自然数):

(1) $\begin{pmatrix}k_1&&\\&k_2&\\&&k_3\end{pmatrix}^n$.

解 用数学归纳法证明

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} k_1^n & & \\ & k_2^n & \\ & & k_3^n \end{pmatrix}$$

当 $n=1$ 时，显然. 归纳假设当 $n=m$ 时，结论成立.

当 $n=m+1$ 时

$$\begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{pmatrix}^{m+1} = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1^m & & \\ & k_2^m & \\ & & k_3^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^{m+1} & & \\ & k_2^{m+1} & \\ & & k_3^{m+1} \end{pmatrix}$$

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

解　用数学归纳法证明

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

当 $n=1$ 时，显然. 归纳假设当 $n=k$ 时结论成立.

当 $n=k+1$ 时

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（3）$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$.

解　当 $n=2$ 时

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $n=3$ 时

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

年　月　日

$$\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}^n=\begin{cases}\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix} & (\text{当 } n=1\text{ 时})\\ \begin{pmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & (\text{当 } n=2\text{ 时})\\ \mathbf{0}_{3\times3} & (\text{当 } n\geqslant 3\text{ 时})\end{cases}$$

(4) $\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}^n$.

解 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，于是

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}^n&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^{n-k}\\&=\mathrm{C}_n^0\boldsymbol{A}^0\boldsymbol{B}^n+\mathrm{C}_n^1\boldsymbol{A}^1\boldsymbol{B}^{n-1}+\mathrm{C}_n^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{n-2}\\&=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}0&0&a^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&na&\frac{n(n-1)}{2}a^2\\0&1&na\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(5) $\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}^n$.

解 $$\begin{aligned}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}^2&=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix}=5^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\&=5^2\boldsymbol{E}_2\end{aligned}$$

当 $n=2k$ 时

$$\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}^n=\left(\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}^2\right)^k=(5^2\boldsymbol{E}_2)^k=5^{2k}\boldsymbol{E}_2$$

当 $n=2k-1$ 时

$$\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}^{2(k-1)}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}=5^{2(k-1)}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$$

所以

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}^n=\begin{cases}5^{2(k-1)}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix} & (n=2k-1)\\ 5^{2k}\boldsymbol{E}_2 & (n=2k)\end{cases}$$

(6) $\left(\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 2\end{pmatrix}(2\ 1\ 2)\right)^n$.

解　原式$=\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 2\end{pmatrix}(2\ 1\ 2)\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 2\end{pmatrix}(2\ 1\ 2)\cdots\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 2\end{pmatrix}(2\ 1\ 2)$

$$=\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 2\end{pmatrix}3^{n-1}(2\ 1\ 2)$$

$$=3^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 2\end{pmatrix}(2\ 1\ 2)=3^{n-1}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -6 & -3 & -6\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

6 求下列矩阵的行列式(n 为正整数)：

(1) $-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

解　$\left|-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1$

(2) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 6 & 8\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}^4$.

解　$\left|\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 6 & 8\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}^4\right|=\left(\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 6 & 8\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 4\end{vmatrix}\right)^4$

$$=\left(\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\right)^4=1$$

(3) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

解　$\left|\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=6\times 6=36$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(4) $\begin{pmatrix}-3&4&0&0\\4&3&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&-3&2\end{pmatrix}^{2n}$.

解 $$\left|\begin{pmatrix}-3&4&0&0\\4&3&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&-3&2\end{pmatrix}^{2n}\right|=\left(\begin{vmatrix}-3&4&0&0\\4&3&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&-3&2\end{vmatrix}\right)^{2n}$$
$$=\left(\begin{vmatrix}-3&4\\4&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1&1\\-3&2\end{vmatrix}\right)^{2n}=5^{4n}$$

7 试证:当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时,$(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'$.

证 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,两边取转置得
$$(\boldsymbol{AB})'=(\boldsymbol{BA})'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'$$
反之,若$(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'$,两边取转置得
$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{B}')'(\boldsymbol{A}')'=\boldsymbol{BA}$$

8 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{pmatrix}$.

解 $$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&-1&1&0&0\\3&4&-2&0&1&0\\5&-4&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{行}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&-2&1&-3&1&0\\0&-14&6&-5&0&1\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{行}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&-2&1&-3&1&0\\0&0&-1&16&-7&1\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{行}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&-15&7&-1\\0&-2&0&13&-6&1\\0&0&1&16&-7&1\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{行}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&1&0\\0&-2&0&13&-6&1\\0&0&-1&16&-7&1\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{行}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&1&0\\0&1&0&-\frac{13}{2}&3&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-16&7&-1\end{array}\right)$$

所以
$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-\frac{13}{2}&3&-\frac{1}{2}\\-16&7&-1\end{pmatrix}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

(2) $\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&4&5\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

解 $\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&2&3&1&0&0&0\\0&1&4&5&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&2&0&1&0&0&-3\\0&1&4&0&0&1&0&-5\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&-2&-3\\0&1&0&0&0&1&-4&-5\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$

所以

$$\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&4&5\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-2&-3\\0&1&-4&-5\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$.

解 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$,则

$$|\boldsymbol{A}|=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

(4) $\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$.

解 $\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&-1&0&1&0&0\\-1&2&-1&0&1&0\\0&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&1&0\\-1&2&-1&0&1&0\\0&-1&2&0&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&1&0\\0&3&-2&1&2&0\\0&-1&2&0&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&1&0\\0&1&2&1&2&2\\0&-1&2&0&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&1&0\\0&1&2&1&2&2\\0&0&4&1&2&3\end{array}\right)$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&1&0&\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{array}\right)$$

所以

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

(5) $\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&5&0&0\\0&0&7&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

解
$$\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&5&0&0\\0&0&7&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}^{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\begin{pmatrix}7&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&0&0\\-2&1&0&0\\0&0&\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(6) $\begin{pmatrix}0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$, $\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$.

解
$$\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\begin{pmatrix}a_1&0&\cdots&0\\0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1}\end{pmatrix}\\a_n&\mathbf{0}\end{pmatrix}^{-1}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & a_n^{-1} \\ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

9 求下列等式中的矩阵 $\boldsymbol{X}$：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

解　$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

解　$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

解　$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

(4) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

年　月　日

解 由 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$,得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}$$

$$(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}$$

因

$$|\boldsymbol{A}|=4,\ |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$$

可逆,所以

$$\boldsymbol{X}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

10 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,求 $\boldsymbol{B}$.

解 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$$

而

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

且

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

11 已知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{9}$.

解 由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$ 及

$$|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

得

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$A=PBP^{-1}$$

故

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$$

依题设知

$$B^9=B$$

故

$$A^9=(PBP^{-1})^9=PB^9P^{-1}=PBP^{-1}=A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$$

12 求下列矩阵的秩：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\1&1&1&1\\1&2&1&2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\1&2&1&1\\2&5&3&2\end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\x&4&6\\3&y&9\end{pmatrix};\qquad D=\begin{pmatrix}1&-1&0&a\\0&1&-1&b\\-1&0&1&c\end{pmatrix}.$$

解 由

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\1&1&1&1\\1&2&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&-1&2&1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$$

得

$$R(A)=3$$

由

$$B=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\1&2&1&1\\2&5&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&-1&-1&0\\0&-1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得

$$R(B)=2$$

由

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\x&4&6\\3&y&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4-2x&6-3x\\0&y-6&0\end{pmatrix}$$

得

$$R(C)=\begin{cases}1 & (x=2\text{ 且 }y=6\text{ 时})\\2 & (x=2\text{ 且 }y\neq 6\text{ 时})\\2 & (x\neq 2\text{ 且 }y=6\text{ 时})\\3 & (x\neq 2\text{ 且 }y\neq 6\text{ 时})\end{cases}$$

年 月 日

由

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&-1&0&a\\0&1&-1&b\\-1&0&1&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&a\\0&1&-1&b\\0&-1&1&a+c\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&a\\0&1&-1&b\\0&0&0&a+b+c\end{pmatrix}$$

得

$$R(\boldsymbol{D})=\begin{cases}2 & (\text{当 } a+b+c=0 \text{ 时})\\3 & (\text{当 } a+b+c\neq 0 \text{ 时})\end{cases}$$

13 设 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})'\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{E}$,其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$.

解 由

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})'\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{E}$$

得

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}'-\boldsymbol{B}')^{-1}$$

由于

$$\boldsymbol{C}'-\boldsymbol{B}'=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{C}'-\boldsymbol{B}')^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}'-\boldsymbol{B}')^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$$

14 试证:若对某一正整数 k,方阵 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$,则

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$$

证 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})$

$$=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}-\boldsymbol{A}-\cdots-\boldsymbol{A}^{k-1}-\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}$$

同理

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$$

所以

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$$

15 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶可逆阵. 求：

(1) $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-9\boldsymbol{E})$；

(2) $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}'-\boldsymbol{E})'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})'+[(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})']^{-1}$.

解　(1)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-9\boldsymbol{E})&=(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\\&=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}\\&=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}'-\boldsymbol{E})'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})'+[(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})']^{-1}\\&=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}'-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}')^{-1}\boldsymbol{A}'+(\boldsymbol{B}')^{-1}\boldsymbol{A}'\\&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{B}')^{-1}\boldsymbol{A}'-(\boldsymbol{B}')^{-1}\boldsymbol{A}'+(\boldsymbol{B}')^{-1}\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}'\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\1&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

16 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$f(x)=x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$a_0\neq 0$ 且 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$，试证：$\boldsymbol{A}$ 可逆，并用 $\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

证　由 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$，得

$$\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}=-a_0\boldsymbol{E}$$

又 $a_0\neq 0$，所以

$$-\frac{1}{a_0}(\boldsymbol{A}^{m-1}+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-2}+\cdots+a_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}$$

$$=\boldsymbol{A}\left[-\frac{1}{a_0}(\boldsymbol{A}^{m-1}+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-2}+\cdots+a_1\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}$$

由定义可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=-\frac{1}{a_0}(\boldsymbol{A}^{m-1}+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-2}+\cdots+a_1\boldsymbol{E})$$

17 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，若对任意 $n\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 都有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}_{m\times 1}$，试证：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证　反证，若

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\neq\boldsymbol{0}$$

设 $a_{ij}\neq 0$,取

$$\boldsymbol{X}_0=(\underbrace{0\ 0\ \cdots\ 0}_{j-1个}\ 1\ 0\ \cdots\ 0)'$$

则

$$\boldsymbol{AX}_0=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{ij}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}$$

与题设矛盾,故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

18 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$,证明:$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证 由 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$ 知

$$\boldsymbol{AA}'=(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk})=\boldsymbol{0}$$

考查 $\boldsymbol{AA}'$ 的第 i 行与第 i 列处的元素,得

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=0\quad(i=1,2,\cdots n)$$

由 a_{ik} 为实数知

$$a_{ik}=0\quad(k,i=1,2,\cdots,n)$$

故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

19 设 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}_n$,证明

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)=n$$

证法 1 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}_n$ 知 $\boldsymbol{A}$ 可逆,所以 $R(\boldsymbol{A})=n$. 由

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{A}$$

知

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant R(2\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})=n$$

由

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$$

知

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n$$

从而

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$$

证法 2 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}_n$ 知

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)=\boldsymbol{0}$$

于是

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n & 2\boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\to \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 2\boldsymbol{E}_n \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n) & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

所以

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)=R\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}=n$$

20 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times p$ 矩阵，$R(\boldsymbol{A})=n$，试证：$R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$.

证法 1　由

$$R(\boldsymbol{AB})\geqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})-n, R(\boldsymbol{A})=n$$

得

$$R(\boldsymbol{AB})\geqslant R(\boldsymbol{B})$$

又

$$R(\boldsymbol{AB})\leqslant R(\boldsymbol{B})$$

所以

$$R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$$

证法 2　因 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$R(\boldsymbol{A})=n$，所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$$

于是

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{QB}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_n\boldsymbol{QB} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{QB} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

故由 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆得

$$R(\boldsymbol{AB})=R\left(\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{QB} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right)=R\begin{pmatrix} \boldsymbol{QB} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}=R(\boldsymbol{QB})=R(\boldsymbol{B})$$

21 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 经初等行变换可化成 $\boldsymbol{B}$，若记

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n), \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_n)$$

则当 $\boldsymbol{\beta}_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}} k_j\boldsymbol{\beta}_j$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}} k_j\boldsymbol{\alpha}_j$.

证　由已知，$\boldsymbol{A}$ 经初等行变换可化成 $\boldsymbol{B}$，所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{P\alpha}_1\ \ \boldsymbol{P\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{P\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_n)$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}_j=\boldsymbol{P\alpha}_j\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

由于

$$\boldsymbol{\beta}_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} k_j\boldsymbol{\beta}_j$$

得

$$\boldsymbol{P\alpha}_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} k_j\boldsymbol{P\alpha}_j$$

年　月　日

在上式两边的左边同乘 $\boldsymbol{P}^{-1}$,即得

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}k_j\boldsymbol{\alpha}_j$$

22 求 $\begin{pmatrix}1 & -\tan\frac{\pi}{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}^n$,其中 n 为自然数.

解

$$\begin{pmatrix}1 & -\tan\frac{\pi}{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}^n$$

$$=\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}\right)^n\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}^n$$

$$=2^n\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}^n \text{(用数学归纳法证明)}$$

$$=2^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{3} & -\sin\frac{n\pi}{3}\\ \sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3}\end{pmatrix}$$

23 求 $\begin{pmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^{2n}$.

解

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}^{2n}=\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}5^{2n} & 0\\ 0 & 5^{2n}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{2n}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}^n$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 1+4\\ 0 & 4^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1 & 1+4\\ 0 & 4^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1+4+4^2\\ 0 & 4^3\end{pmatrix}$$

归纳假设

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1 & 1+4+\cdots+4^{k-1}\\ 0 & 4^k\end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}1 & 1+4+\cdots+4^{k-1}\\ 0 & 4^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1+4+\cdots+4^k\\ 0 & 4^{k+1}\end{pmatrix}$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

由数学归纳法,对一切自然数 n,都有

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&4\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&1+4+\cdots+4^{n-1}\\0&4^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}(4^n-1)\\0&4^n\end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}^{2n}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}^{2n}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\begin{pmatrix}-1&1\\0&2\end{pmatrix}^{2n}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}5^{2n}&0\\0&5^{2n}\end{pmatrix}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\begin{pmatrix}1&1\\0&4\end{pmatrix}^{n}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5^{2n}&0&0&0\\0&5^{2n}&0&0\\0&0&1&\frac{1}{3}(4^n-1)\\0&0&0&4^n\end{pmatrix}$$

24 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,则 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 1$ 的充要条件是存在两个 $n\times 1$ 的矩阵 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}'$.

证 $\Rightarrow$ 若 $R(\boldsymbol{A})=0$,则 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}_{n\times n}$. 取

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}=(0\ 0\ \cdots\ 0)'$$

有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}'$;若 $R(\boldsymbol{A})=1$,则 $\boldsymbol{A}$ 经初等变换可化为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

于是存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}(1\ 0\ \cdots\ 0)\boldsymbol{Q}$$

取

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{V}'=(1\ 0\ \cdots\ 0)\boldsymbol{Q}$$

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}'$.

$\Leftarrow$ 由关系式

年 月 日

$$R(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}')\leqslant R(\boldsymbol{U}), R(\boldsymbol{U})\leqslant 1$$

立即得

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}')\leqslant R(\boldsymbol{U})\leqslant 1$$

25 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵,试证:

(1)$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$;

(2)$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$;

(3)$(-\boldsymbol{A})^*=(-1)^{n-1}\boldsymbol{A}^*$;

(4)$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

证 (1) 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$,两边的右边同乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,得 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) 因 $\boldsymbol{A}$ 可逆,故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$$

得

$$\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{E}_n,(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$$

由

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^*\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{E}_n$$

于是

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$$

故

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$$

(3) 将 $-\boldsymbol{A}$ 代入式

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$$

得

$$(-\boldsymbol{A})^*(-\boldsymbol{A})=|-\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n=(-1)^n|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$$
$$(-\boldsymbol{A})^*=(-1)^{n-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=(-1)^{n-1}\boldsymbol{A}^*$$

(4) 对式

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$$

两边取行列式得

$$|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{A}|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n|=|\boldsymbol{A}|^n$$

由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,于是

$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$$

26 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$,求:

(1)$|\boldsymbol{A}^*|$;(2)$|(-\boldsymbol{A})^*|$;(3)$\left|\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right|$;(4)$|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}|$.

解 (1) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{3-1}=4^2=16$.

(2) $|(-\boldsymbol{A})^*|=|-\boldsymbol{A}|^{3-1}=[(-1)^3|\boldsymbol{A}|]^2=16$.

(3) $\left|\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right|=\left|4\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right|=\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right|=\frac{1}{2^3}\times 4^2=2$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

(4) $|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}^*|}=\dfrac{1}{16}$.

27 设 4 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{X}\ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{Z}),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{X}\ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{Z}),\ |\boldsymbol{A}|=4,\ |\boldsymbol{B}|=1$$

求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$.

解 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\ 2\boldsymbol{X}\ 2\boldsymbol{Y}\ 2\boldsymbol{Z}|=2^3\ |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{X}\ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{Z}|$

$$=8(|\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{X}\ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{Z}|+|\boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{X}\ \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{Z}|)=8\times(4+1)=40$$

28 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,n 是奇数,$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n$, $|\boldsymbol{A}|=1$,试证:$|\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=0$.

证
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|&=|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{E}_n)|\,|\boldsymbol{A}|\\&=|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)'\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)'|\,|\boldsymbol{A}|\\&=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n|=(-1)^n\ |\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|\end{aligned}$$

所以

$$|\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=0$$

29 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,证明:若对任意 $n\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 都有解,则 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

证 由已知,对任意 $n\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 都有解,取

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{B}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

存在 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ 使

$$\boldsymbol{AX}_i=\boldsymbol{B}_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

令 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{X}_1\ \boldsymbol{X}_2\ \cdots\ \boldsymbol{X}_n)$,则

$$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1\ \boldsymbol{X}_2\ \cdots\ \boldsymbol{X}_n)=(\boldsymbol{AX}_1\ \boldsymbol{AX}_2\ \cdots\ \boldsymbol{AX}_n)=(\boldsymbol{B}_1\ \boldsymbol{B}_2\ \cdots\ \boldsymbol{B}_n)=\boldsymbol{E}_n$$

$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}$ 都是 n 阶方阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

30 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_{n+m})$ 是 $n+m$ 阶方阵,$|\boldsymbol{A}|=a$. 求

$$|\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\ \boldsymbol{\alpha}_{n+2}\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_{n+m}\ \boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n|$$

解 将 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 依次与 $\boldsymbol{\alpha}_{n+m},\boldsymbol{\alpha}_{n+m-1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+2},\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 交换得

$$|\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\ \boldsymbol{\alpha}_{n+2}\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_{n+m}\ \boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n|=(-1)^m\ |\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\ \boldsymbol{\alpha}_{n+2}\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_{n+m}\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n|$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 依次与 $\boldsymbol{\alpha}_{n+m},\boldsymbol{\alpha}_{n+m-1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+m},\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 交换得

$$|\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\ \boldsymbol{\alpha}_{n+2}\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_{n+m}\ \boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n|=(-1)^{2m}\ |\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_{n+m}\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n|$$

以此类推得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\ \boldsymbol{\alpha}_{n+2}\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_{n+m}\ \boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n|&=(-1)^{nm}\ |\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_{n+m}|\\&=(-1)^{nm}\ |\boldsymbol{A}|=(-1)^{nm}a\end{aligned}$$

31 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{D}$ 都是 n 阶方阵,$\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$,试证

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|$$

年 月 日

证

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1})r_1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$$

$$=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{ACA}^{-1}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CAA}^{-1}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|$$

32 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

证 $\Rightarrow$ 因初等变换不改变矩阵的秩，所以若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

$\Leftarrow$ 若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r$，由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵知，存在可逆阵 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{Q}_2$ 使

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{m\times n},\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

于是 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2$，即 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\boldsymbol{B}$. 因 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}$ 可逆，故它们均可表示为若干个初等阵之积，从而 $\boldsymbol{A}$ 经初等变换可以化成 $\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

33 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times 1$ 矩阵，b 是常数，证明

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & b \end{pmatrix}$$

可逆的充要条件是 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\neq b$.

证 $|\boldsymbol{Q}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & b-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||b-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$

由 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非奇异矩阵，故

$$|\boldsymbol{Q}|\neq 0\Leftrightarrow \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\neq b$$

从而 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\neq b$.

34 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，试证

$$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n & (\text{当 } R(\boldsymbol{A})=n \text{ 时}) \\ 1 & (\text{当 } R(\boldsymbol{A})=n-1 \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } R(\boldsymbol{A})<n-1 \text{ 时}) \end{cases}$$

证 已知 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

如果 $R(\boldsymbol{A})=n$，那么 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$，故 $R(\boldsymbol{A}^*)=n$.

如果 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，那么

$$|\boldsymbol{A}|=0,\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{0},R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant n,R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$$

但是，由 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 知 $\boldsymbol{A}$ 一定有一个 $n-1$ 阶子式不等于零，所以 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$，则有 $R(\boldsymbol{A}^*)\geqslant 1$，故 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$.

如果 $R(\boldsymbol{A})<n-1$，那么 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶子式都等于零，$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$，故 $R(\boldsymbol{A}^*)=0$.

35 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 矩阵，称 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的迹. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n\times n$ 矩阵，证明：

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(1) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$;

(2) $\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A})=k\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$;

(3) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$;

(4) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{E}_n$;

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵,则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{ABA}^{-1})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$.

证 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn},\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=b_{11}+b_{22}+\cdots+b_{nn}$$

(1) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ii}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$.

(2) $\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=1}^{n}ka_{ii}=k\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=k\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

(3) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\sum\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki})=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$;

$\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})=\sum\limits_{k=1}^{n}(\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik})=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$.

即得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$.

(4) 由(1)

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})&=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}+(-1)\boldsymbol{BA})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})+\mathrm{tr}((-1)\boldsymbol{BA})\\&=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})+(-1)\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})\\&=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})-\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})\xlongequal{\text{由(3)}}0\end{aligned}$$

但 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}_n)=n>0,n\neq0$,所以

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{E}_n$$

(5) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{ABA}^{-1})=\mathrm{tr}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})]=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BE})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$.

36 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$R(\boldsymbol{A})=1$,$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=2$,求 $|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|$.

解 因 $R(\boldsymbol{A})=1$,由 24 题知,存在两个 $n\times1$ 矩阵 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{UV}'$. 再由 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=2$ 知,$\boldsymbol{U}'\boldsymbol{V}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=2$. 于是,由降阶公式得

$$|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{UV}'|=\lambda^{n-1}|\lambda-\boldsymbol{U}'\boldsymbol{V}|=\lambda^{n-1}|\lambda-2|$$

几何向量

习　题　三

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

成绩：________________

心得 体会 拓广 疑问

❶ 如图 1,设 A,B,C 是任意三点,求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

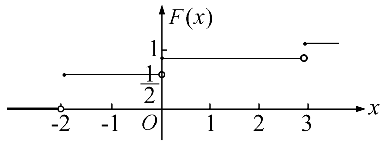

图 1

解　由三角形法则

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$$

❷ 如图 2,设平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}$.

解
$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}\\-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b});\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b});\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

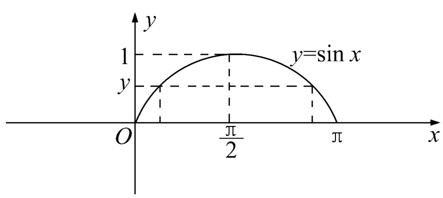

图 2

❸ 如果平面上一个四边形的对角线互相平分,试应用向量知识证明:它是平行四边形.

证　已知

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC},\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$$

因此

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}$$

且

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DC}$$

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形(图 3).

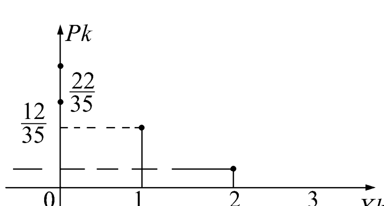

图 3

❹ 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度是 5,$\boldsymbol{a}$ 与轴 $\boldsymbol{u}$ 的夹角是 30°,求 $\boldsymbol{a}$ 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

影.

解 $\mathrm{P_{rj_u}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle=5\cos 30^\circ=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

5 已知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,试证:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

证 由

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$$

得

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$$

$$|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{b}|^2=0$$

得 $4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

6 试证:$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 的必要条件是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

证 由等式 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 两边与 $\boldsymbol{c}$ 作内积得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$$

得 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$. 所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

7 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个向量,k,l 是两个数,试证:

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$ 垂直;

(2)$(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直.

证 (1)$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot k\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot l\boldsymbol{b}$

$$=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+l(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$ 垂直.

(2)$[(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$

$$=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})=0.$$

所以$(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直.

8 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量,且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$$

$$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+1+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}+1=0$$

取和得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}$$

9 已知 $\boldsymbol{a}=(1,-2,3),\boldsymbol{b}=(2,1,0),\boldsymbol{c}=(6,-2,6)$:

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是否与 $\boldsymbol{c}$ 平行;

(2) 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle$;

(3) 求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$;

(4) 设 $\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,求$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$.

解 (1) 因

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,-2,3)+(2,1,0)=(3,-1,3)$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&3\\6&-2&6\end{vmatrix}=(0,0,0)$$

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行.

(2) 由已知

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,-2,3)\cdot(2,1,0)=1\times2+(-2)\times1+3\times0=0$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(1,-2,3)\cdot(6,-2,6)=1\times6+(-2)\times(-2)+3\times6=28$$

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\arccos\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}$$

$$=\arccos\frac{28}{\sqrt{1+4+9}\times\sqrt{6^2+(-2)^2+6^2}}$$

$$=\arccos\frac{28}{2\sqrt{266}}=\arccos\frac{14}{\sqrt{266}}$$

(3) 由已知

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&3\\2&1&0\end{vmatrix}=(-3,6,5)$$

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&1&0\\6&-2&6\end{vmatrix}=0$$

(4) 由已知

$$\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=3(1,-2,3)+4(2,1,0)-(6,-2,6)$$
$$=(5,0,3)$$

$$\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=2(2,1,0)+(6,-2,6)=(10,0,6)$$

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\arccos\frac{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}=\arccos\frac{5\times10+0+3\times6}{\sqrt{34}\times\sqrt{136}}$$

$$=\arccos\frac{68}{4\times17}=\arccos 1=0$$

10 已知空间三点 $A(1,0,-1),B(1,-2,0),C(1,1,1)$:

(1) 求以 OA,OB 为邻边的平行四边形的面积;

(2) 求以 O,A,B,C 为顶点的四面体的体积.

解　(1) $S_{平行四边形}=|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-1\\1&-2&0\end{matrix}\right\|$

$$=|-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}|=3.$$

(2) $V=\dfrac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}\ \ \overrightarrow{OB}\ \ \overrightarrow{OC}]|=\dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1&0&-1\\1&-2&0\\1&1&1\end{matrix}\right\|=\dfrac{5}{6}.$

11 已知 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$,试利用行列

年　月　日

式的性质证明

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

证 $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ a_x & a_y & a_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$$

同理可证

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

12 已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求一单位向量 $\boldsymbol{d}$，使 $\boldsymbol{d}\perp\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}$ 共面.

解 由已知

$$\boldsymbol{a}=(1,0,0),\boldsymbol{b}=(0,1,-2),\boldsymbol{c}=(2,-2,1)$$

设 $\boldsymbol{d}=(x,y,z)$ 且 $x^2+y^2+z^2=1$.

由 $\boldsymbol{d}\perp\boldsymbol{c}$ 得 $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}=0$，即

$$2x-2y+z=0$$

由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}$ 共面得 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{d}]=0$，即

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ x & y & z\end{vmatrix}=0$$

得 $z+2y=0$，由此得

$$x=\pm\frac{2}{3},y=\pm\frac{1}{3},z=\mp\frac{2}{3}$$

所以

$$\boldsymbol{d}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})\text{ 或 }\boldsymbol{d}=(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

13 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，且向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的长度相等，两两夹角也相等，试求 $\boldsymbol{c}$.

解 由已知

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$$

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\arccos\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\arccos\frac{1}{2}$$

得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1$$

设 $\boldsymbol{c}=(x,y,z)$，得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=x+y=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=y+z=1$$

即

$$x=z,y=1-z$$

年 月 日

又 $x^2+y^2+z^2=2$，得

$$x=1 \text{ 或 } x=-\frac{1}{3}$$

即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$$

或

$$\boldsymbol{c}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{4}{3}\boldsymbol{j}-\frac{1}{3}\boldsymbol{k}$$

14 已知 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，求 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.

解

$$\begin{aligned}&[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\=&[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\=&\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+\\&\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\\=&\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=2+2=4\end{aligned}$$

15 用数量积证明三角形的余弦定理.

证　考察三角形（图 4），记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BC}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CA}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

于是

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}|^2&=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\&=|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle\\&=|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2-2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\alpha\end{aligned}$$

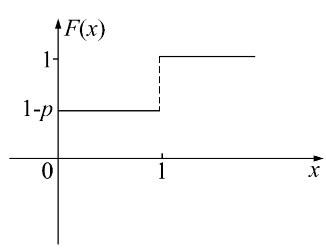

图 4

16 用向量积证明三角形的正弦定理.

证　考察三角形（图 5），记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BC}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CA}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}$，则该三角形的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|$$

于是

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\gamma=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\alpha=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\sin\beta$$

故

$$\frac{|\boldsymbol{a}|}{\sin\alpha}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{\sin\beta}=\frac{|\boldsymbol{c}|}{\sin\gamma}$$

心得 体会 拓广 疑问

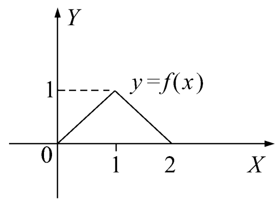

图 5

17 求过点(3,0,−1)且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

解 这是一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,-7,5)$ 且过点 $M_0(3,0,-1)$ 的平面,由点法式可直接写出平面方程为

$$3(x-3)-7(y-0)+5(z+1)=0$$

即

$$3x-7y+5z-4=0$$

18 求过点 $M_0(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$ 的平面方程.

解 平面法向量 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b}$,所以可取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

而

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$$

所求平面方程为

$$(x-1)+(y-0)-3(z+1)=0$$

即

$$x+y-3z-4=0$$

19 指出下列平面的特殊位置:

(1)$x=0$.

(2)$5y-1=0$.

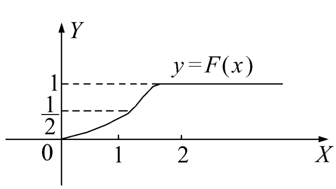

图 6

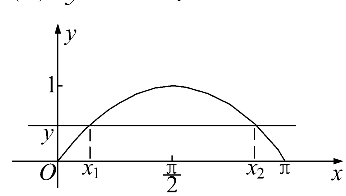

图 7

图 6 为坐标面 yOz.

图 7 为过点$\left(0,\dfrac{1}{5},0\right)$,平行于坐标面 xOz 的平面.

(3)$y+z=2$.

(4)$x-2z=0$.

心得 体会 拓广 疑问

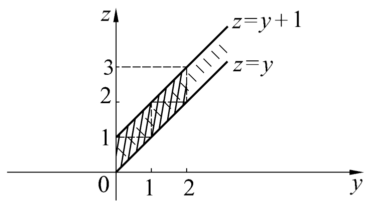

图 8

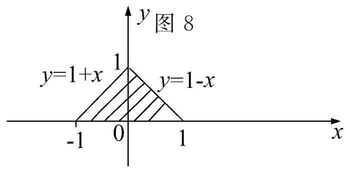

图 9

图 8 为过坐标面 yOz 上的直线 $y+z=2$ 且平行于 x 轴的平面.

图 9 为过坐标面 xOz 上的直线 $x-2z=0$ 且过 y 轴的平面.

(5) $2x+3y-z=0$.

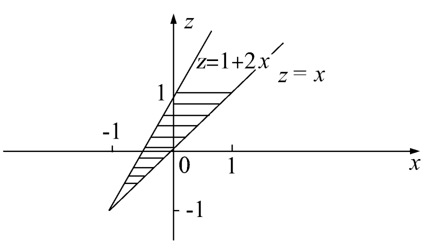

图 10

图 10 为过坐标面 xOz 上的直线 $2x-z=0$ 及坐标面 yOz 上的直线 $3y-z=0$ 的平面.

20 求过点 $M_0(4,-1,3)$，且平行于向量 $\boldsymbol{s}=(2,1,5)$ 的直线.

解　所求直线方程为

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}$$

21 化直线 $\begin{cases}x-y+z=1\\2x+y+z=4\end{cases}$ 为标准方程和参数方程.

解　因为直线 l 垂直于 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(2,1,1)$，所以直线的方向向量为

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(-2,1,3)$$

又令 $y=0$ 得 $x=3$，$z=-2$，即点 $(3,0,-2)$ 在直线 l 上，从而所求直线方程为

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}$$

参数方程为

$$\begin{cases}x=3-2t\\y=t\\z=-2+3t\end{cases}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

22 求过点(2,0,−3),且与直线$\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$垂直的平面方程.

解 显然直线 L 的方向向量即为平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{n}=(1,-2,4)\times(3,5,-2)=(-16,14,11)$$

所求平面方程为

$$-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$$

化简得

$$16x-14y-11z-65=0$$

23 求过点 $M_0(2,1,3)$,且与直线

$$L:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$$

垂直相交的直线方程.

解 直线 L 的参数方程可写成

$$\begin{cases}x=-1+3t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$$

故可设过点 $M_0(2,1,3)$ 与 L 垂直相交的直线 L_0 与 L 相交于点 $P_0(-1+3t_0,1+2t_0,-t_0)$. L_0 的方程可写成

$$\frac{x-2}{3t_0-3}=\frac{y-1}{2t_0}=\frac{z-3}{-t_0-3}$$

因 L 与 L_0 垂直,故

$$3\times(3t_0-3)+2\times(2t_0)+(-1)\times(-t_0-3)=0$$

解得 $t_0=\dfrac{3}{7}$,故 L_0 的方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$$

24 求与直线

$$\begin{cases}x=1\\y=-1+t,\\z=2+t\end{cases}\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$$

都平行且过原点的平面.

解 两直线的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=(0,1,1),\boldsymbol{s}_2=(1,2,1)$$

平面的法向量为

$$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=(-1,1,-1)$$

所以平面的方程为

$$-x+y-z=0$$

即

$$x-y+z=0$$

年 月 日

25 求过点$(-1,2,3)$，垂直于直线$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$，且平行于平面$7x+8y+9z+10=0$的直线方程.

解　所求直线L的方向向量

$$\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$$

所以

$$\boldsymbol{s}=(4,5,6)\times(7,8,9)=(-3,6,-3)$$

所求直线方程为

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{-3}$$

或

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$$

26 已知两直线

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$$

$$L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$$

求过L_1且平行于L_2的平面方程.

解　所求平面π的法向量

$$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}_2$$

设$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}_1=(A,B,C)\cdot(1,0,-1)=A-C=0$$
$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}_2=(A,B,C)\cdot(2,1,1)=2A+B+C=0$$

可知

$$A=C,B=-3C$$

从而π的方程为

$$C(x-1)-3C(y-2)+C(z-3)=0$$

即

$$x-3y+z+2=0$$

注　本题亦可用平面束方程解答.方程L_1可写为平面交的形式，即

$$\begin{cases}y=2\\x+z-4=0\end{cases}$$

过L_1的平面方程具有如下形式

$$x+z-4+\lambda(y-2)=0,\boldsymbol{n}=(1,\lambda,1)$$

因为$\boldsymbol{n}\perp(2,1,1)$，故

$$\boldsymbol{n}\cdot(2,1,1)=2+\lambda+1=0,\lambda=-3$$

从而π的方程为

$$x-3y+z+2=0$$

27 已知平面

心得 体会 拓广 疑问

$$\pi_1: x-2y+2z+1=0$$
$$\pi_2: 2x+3y-6z-6=0$$

求 π_1 与 π_2 之间的夹角.

解 $\boldsymbol{n}_1=(1,-2,2)$,$\boldsymbol{n}_2=(2,3,-6)$,$\boldsymbol{n}_1$ $\boldsymbol{n}_2$

$$\cos\psi=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{16}{21}$$

所以

$$\psi=\arccos\frac{16}{21}$$

28 已知两直线

$$L_1:\begin{cases}x=2t\\y=-3+3t\\z=4t\end{cases}$$

$$L_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{2}$$

问 L_1 与 L_2 是否共面,是否相交,若相交,求其交点.

解 L_1 的方程可化为

$$L_1:\frac{x}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{4}$$

显然 L_1 L_2,将 L_1 的参数方程代入 L_2 有

$$\frac{2t-1}{1}=\frac{3t-1}{1}=\frac{4t-2}{2}$$

有解 $t=0$,这说明两直线相交,且交点为$(0,-3,0)$,因而共面.

注 亦可在 L_1 与 L_2 上分别取点 $A(0,-3,0)$ 与 $B(1,-2,2)$,作向量$\overrightarrow{AB}=(1,1,2)$,再判定 $\boldsymbol{s}_1=(2,3,4)$,$\boldsymbol{s}_2=(1,1,2)$ 及$\overrightarrow{AB}$ 三向量是否共面,从而判定 L_1 与 L_2 是否共面.

29 设两直线

$$L_1:\begin{cases}x=-2-4t\\y=2+mt\\z=3+2t\end{cases}$$

$$L_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{n}$$

(1) 求 m,n 使 $L_1//L_2$;

(2) 求 m,n 使 $L_1\perp L_2$,并问这样的 m,n 是否唯一?

(3) 求 m,n 使 L_1 与 L_2 共面,并问这样的 m,n 是否唯一?

(4) 当 $m=-4,n=-1$ 时,求 L_1 与 L_2 的夹角.

解 (1)$L_1//L_2$,则有

$$\frac{-4}{2}=\frac{m}{-2}=\frac{2}{n}$$

解得

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{cases} m=4 \\ n=-1 \end{cases}$$

(2) $L_1 \perp L_2$，则有

$$(-4,m,2)\cdot(2,-2,n)=0$$

所以 $m-n=-4$，m,n 显然不唯一.

(3) 要使 L_1,L_2 共面，由上题方法有

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=mn-4n+2m-8=0$$

其中 $\overrightarrow{AB}=(3,-3,-3)$，$m,n$ 显然不唯一.

(4) 当 $m=-4,n=-1$ 时

$$\boldsymbol{s}_1=(-4,-4,2),\boldsymbol{s}_2=(2,-2,-1)$$

得

$$\cos\psi=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{1}{9},\psi=\arccos\frac{1}{9}$$

30 已知平面 $\pi: x-2y-2z+4=0$，直线 $L:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{n}$：

(1) 求 n 使 L 与 π 垂直；

(2) 求 n 使 $L\,/\!/\,\pi$；

(3) 当 $n=-2$ 时，求 L 与 π 之间的夹角；

(4) 当 $n=-2$ 时，求 L 与 π 的交点.

解 (1) 由已知

$$\boldsymbol{n}=(1,-2,-2),\boldsymbol{s}=(-1,2,n)$$

$$L\perp\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\,/\!/\,\boldsymbol{s}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}=0\Leftrightarrow\frac{1}{-1}=\frac{-2}{2}=\frac{-2}{n}$$

从而 $n=2$.

(2) 由已知

$$L\,/\!/\,\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$$

从而

$$-1-4-2n=0$$

所以 $n=-\dfrac{5}{2}$.

(3) 当 $n=-2$ 时

$$\sin\psi=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{s}|}=\frac{1}{9},\psi=\arcsin\frac{1}{9}$$

(4) L 的参数方程形式为

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=2t \\ z=-2-2t \end{cases}$$

代入 π 的方程，并解得 $t=9$，故交点坐标为$(-8,18,-20)$.

31 已知平面

$$\pi_1: x-y-2z=2$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\pi_2: x+2y+z=8$$
$$\pi_3: x+y+z=0$$

求过 π_1 与 π_2 的交线且与平面 π_3 垂直的平面的方程.

解 过交线的平面方程具有如下形式

$$x-y-2z-2+\lambda(x+2y+z-8)=0$$

整理再由与 π_3 垂直的条件,解得 $\lambda=\frac{1}{2}$,从而得平面方程 $x-z=4$.

32 判别直线与平面的位置关系:

(1) $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 与 $4x-2y-2z=3$;

(2) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$ 与 $3x-2y+7z=8$;

(3) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 与 $x+y+z=3$.

解 (1) 由已知

$$\boldsymbol{s}=(-2,-7,3),\boldsymbol{n}=(4,-2,-2)$$

因为 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$,所以 $L\parallel\pi$. 又 $M(-3,-4,0)\notin\pi$,故 L 不在平面上.

(2) 由于

$$\boldsymbol{s}=(3,-2,7),\boldsymbol{n}=(3,-2,7)$$

显然 $\boldsymbol{s}\parallel\boldsymbol{n}$,所以 $L\perp\pi$.

(3) 由于

$$\boldsymbol{s}=(3,1,-4),\boldsymbol{n}=(1,1,1),\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$$

所以 $L\parallel\pi$. 又 $M(2,-2,3)\in\pi$,所以 L 在平面 π 内.

33 求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

解 过点 $(-1,2,0)$ 且垂直于平面 π 的直线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$$

化为参数式为

$$\begin{cases}x=-1+t\\y=2+2t\\z=-t\end{cases}$$

代入平面方程有 $t=-\frac{2}{3}$,所以点在平面的投影为 $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

34 求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

解 过已知直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-2z-9=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$$2x-4y+z+\lambda(3x-2z-9)=0$$

设 L_0 为 L 在平面 π 的投影,所以过 L_0,L 的平面 $\pi_0\perp\pi$,从而

年 月 日

$$(3\lambda+2,-4,-2\lambda+1)\cdot(4,-1,1)=0$$

解得 $\lambda=-\dfrac{13}{10}$,从而得平面 π_0 的方程为

$$19x+40y-36z-117=0$$

所以所求直线 L_0 的方程为

$$\begin{cases}19x+40y-36z-117=0\\4x-y+z-1=0\end{cases}$$

35 求点 $A(2,4,3)$ 在直线 $x=y=z$ 上投影点的坐标及点 A 到该直线的距离.

解　如图 11,L 的参数方程为

$$x=y=z=t$$

设垂足 P 的坐标为 (t,t,t),则

$$(t-2,t-4,t-3)\cdot(1,1,1)=0$$

解得 $t=3$,投影点坐标为 $P(3,3,3)$.

点 A 到 L 的距离

$$d=\sqrt{(3-2)^2+(3-4)^2+(3-3)^2}=\sqrt{2}$$

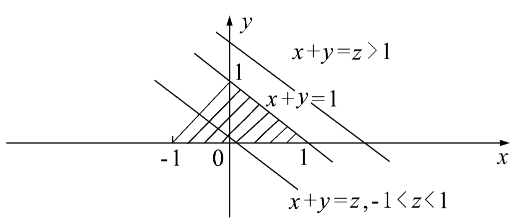

图 11

36 如图 12,求过点 $M(-4,-5,3)$,且与直线

$$L_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$$

与

$$L_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$$

都相交的直线方程.

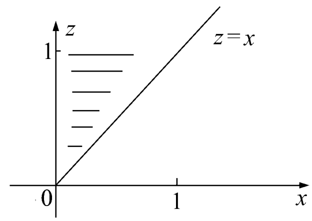

图 12

解　记 π_1,π_2 分别是过点 M 及直线 L_1 和过点 M 及直线 L_2 的两个平面.则所求直线 L 是 π_1 与 π_2 的交线.

$$A(-1,-3,2)\in L_1, B(2,-1,1)\in L_2$$
$$\overrightarrow{MA}=(3,2,-1), \overrightarrow{MB}=(6,4,-2)$$
$$\overrightarrow{MA}\times \boldsymbol{s}_1=(3,2,-1)\times(3,-2,-1)=(-4,0,-12)$$
$$\overrightarrow{MB}\times \boldsymbol{s}_2=(3,2,-1)\times(2,3,-5)=(-7,13,5)$$

所以 π_1 的方程为

$$-4(x+1)-12(z-2)=0$$

即

$$x+3z-5=0$$

π_2 的方程为

$$-7(x-2)+13(y+1)+5(z-1)=0$$

即

$$7x-13y-5z-22=0$$

所求直线方程为

$$\begin{cases}x+3z-5=0\\7x-13y-5z-22=0\end{cases}$$

37 一平面 π 垂直于平面 $z=0$，并通过由点 $M_0(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\end{cases}$ 的垂线，求平面 π 的方程.

解 已知直线的参数方程形式为

$$L:\begin{cases}x=0\\y=t\\z=t+1\end{cases}$$

设 M_0 到 L 垂线的垂足坐标为 $P(0,t,t+1)$，则

$$\overrightarrow{M_0P}=(-1,t+1,t)$$

又 $\overrightarrow{M_0P}$ 与直线垂直，所以

$$(-1,t+1,t)\cdot(0,1,1)=0$$

解得 $t=-\dfrac{1}{2}$. 故垂线方程为

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{-\frac{1}{2}}$$

或

$$\begin{cases}x+2y+1=0\\x-2z+1=0\end{cases}$$

过此直线的平面束方程为

$$x+2y+1+\lambda(x-2z+1)=0$$

因为所求平面的法向量垂直于 $(0,0,1)$，故 $\lambda=0$，所以平面 π 的方程为

$$x+2y+1=0$$

38 求直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$ 与它们的公垂

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

线的交点的坐标，并给出公垂线的方程.

解　$L_1: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(2,1,0)$；

$L_2: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$ 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2=(1,0,1)$.

因 L_1 与 L 的交点在 L_1 上，可记为 $P_1(3+2t_0,t_0,1)$；

因 L_2 与 L 的交点在 L_2 上，可记为 $P_2(-1+l_0,2,l_0)$.

由 $\overrightarrow{P_1P_2}\perp \boldsymbol{s}_1$，$\overrightarrow{P_1P_2}\perp \boldsymbol{s}_2$，得

$$\begin{cases}2\times(4+2t_0-l_0)+(t_0-2)=0\\4+2t_0-l_0+1-l_0=0\end{cases}$$

解得 $t_0=-\dfrac{1}{3}$，$l_0=\dfrac{13}{6}$，故 L_1 与公垂线交于 $p_1(\dfrac{7}{3},-\dfrac{1}{3},1)$，$L_2$ 与公垂线交于 $P_2(\dfrac{7}{6},2,\dfrac{13}{6})$，公垂线 L 的方程为

$$\frac{x-\frac{7}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{3}}{-2}=\frac{z-1}{-1}$$

n 维向量

习 题 四

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

成绩：________________

❶ 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}4\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，试求满足下式的 $\boldsymbol{\alpha}$

$$2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+5(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=2(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$$

解　由已知

$$2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}+5\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}_3-5\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\-15\\-13\\-10\end{pmatrix}$$

❷ 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，试证：对任意列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^n$，都有

(1) $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}$；

(2) $(\boldsymbol{A\alpha})'\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{A\beta})'\boldsymbol{\alpha}$.

证　(1) 注意到 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}$ 是 1×1 矩阵，故有

$$\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})'=\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}$$

(2) 因 $(\boldsymbol{A\alpha})'\boldsymbol{\beta}$ 是 1×1 矩阵，故有

$$(\boldsymbol{A\alpha})'\boldsymbol{\beta}=[(\boldsymbol{A\alpha})'\boldsymbol{\beta}]'=\boldsymbol{\beta}'(\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{A\beta})'\boldsymbol{\alpha}$$

❸ 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 是 k 个 n 维列向量，试证：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关当且仅当 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_k$ 线性无关.

证　$\Rightarrow$ 若存在数 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 使得

$$l_1\boldsymbol{A\alpha}_1+l_2\boldsymbol{A\alpha}_2+\cdots+l_k\boldsymbol{A\alpha}_k=\boldsymbol{0}$$

上式两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，则有

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_k\boldsymbol{\alpha}_k=\boldsymbol{0}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 的线性无关性知

$$l_1=l_2=\cdots=l_k=0$$

这表示 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_k$ 线性无关.

$\Leftarrow$ 设存在数 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 使得

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_k\boldsymbol{\alpha}_k=\boldsymbol{0}$$

上式两边左乘 $\boldsymbol{A}$，则有

$$l_1\boldsymbol{A\alpha}_1+l_2\boldsymbol{A\alpha}_2+\cdots+l_k\boldsymbol{A\alpha}_k=\boldsymbol{0}$$

由 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_k$ 的线性无关性知

$$l_1=l_2=\cdots=l_k=0$$

这表明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关.

❹ 判定下列向量组是否线性相关，为什么？

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}6\\-4\\-8\end{pmatrix}$；

心得 体会 拓广 疑问

(2)$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$;

(3)$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$;

(3)$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$;

(4)$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$;

(5)$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\7\\4\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}$;

(6)$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}$.

解 (1) 两向量成比例,所以线性相关.

(2) 有零向量,所以线性相关.

(3) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3|\neq 0$,所以线性无关.

(4) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3|=0$,所以线性相关.

(5) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4|\neq 0$,所以线性无关.

(6)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 成比例,所以线性相关.

5 判断下列命题是否正确:

(1) 若存在常数 k_1,k_2,k_3,使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关;

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关;

(3) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示,则 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关;

(4) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中任一向量都可由其余两个向量线性表示;

(5) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中任意一个向量都可以由其余两个向量线性表示,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关;

(6) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中任两个向量都线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关;

(7) 设存在一组数 k_1,k_2,k_3,使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,且 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$,

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示,则 $k_3 \neq 0$;

(8) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可表示为其余向量的线性组合.

解　(1) ×;(2) ×;(3)√;(4) ×;(5)√;(6) ×;(7) ×;(8) ×.

6 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,若 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,试证:表示式是唯一的.

证　由已知,存在 k_1,k_2,k_3,使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

其中 $k_1,k_2,k_3 \in \mathbf{R}$. 若还有 $k'_1,k'_2,k'_3 \in \mathbf{R}$,使得

$$\boldsymbol{\beta}=k'_1\boldsymbol{\alpha}_1+k'_2\boldsymbol{\alpha}_2+k'_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

则

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}'=(k_1-k'_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-k'_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3-k'_3)\boldsymbol{\alpha}_3$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性无关性即知

$$k_1=k'_1,k_2=k'_2,k_3=k'_3$$

即

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

的表示式是唯一的.

7 设 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表示法是唯一的,试证:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证　由已知

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

且表示法唯一. 设

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\mathbf{0}&=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3\\&=(k_1+\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3+\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\beta}$ 的表示法唯一,故有

$$k_i+\lambda_i=k_i \quad (i=1,2,3)$$

即 $\lambda_i=0,i=1,2,3$,这表明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

8 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,试证:

(1)$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2)$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

证　(1) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 又因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2)(反证法) 假设 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则存在 k_1,k_2,k_3 使

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

由(1) 知,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_3$$

则

年　月　日

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=(k_1\lambda_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1\lambda_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，这与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关矛盾. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

9 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\beta}$$

试证：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

证 设

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$$

则

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\beta})+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\beta})+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$$

即

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+(k_1+2k_2+3k_3+k)\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$$

由已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，所以

$$k_1=k_2=k_3=0,k_1+2k_2+3k_3+k=0$$

即

$$k_1=k_2=k_3=k=0$$

所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

10 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，试证：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关.

证法 1 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示，知

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)\leqslant R(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)$$

由 $R(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)\leqslant n$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，$R(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)=n$，得

$$n\leqslant R(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)\leqslant n$$

所以

$$R(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)=n$$

即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关.

证法 2 由已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示，即得

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=k_{11}\boldsymbol{\beta}_1+k_{21}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{n1}\boldsymbol{\beta}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2=k_{12}\boldsymbol{\beta}_1+k_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{n2}\boldsymbol{\beta}_n\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n=k_{1n}\boldsymbol{\beta}_1+k_{2n}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{nn}\boldsymbol{\beta}_n\end{cases}$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{n1}&k_{n2}&\cdots&k_{nn}\end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，故

$$n=R(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)=R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{BC})\leqslant R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)\leqslant n$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

即

$$R(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)=n$$

所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关.

11 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但 $\boldsymbol{\alpha}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,试证:$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

证　由已知 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但 $\boldsymbol{\alpha}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示得:存在数 k_1,k_2,k_3 使

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

且 $k_1\neq 0$,则

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{k_1}\boldsymbol{\alpha}-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

12 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 的秩相等,试证:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 等价.

证　只需证明 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示即可.

不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组,则由已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 的秩相等知,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 的秩也为 r,从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 也为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 的极大无关组,故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,进而 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示. 因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 等价.

13 确定数 a,使向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\\vdots\\1\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\\a\end{pmatrix}$$

的秩为 n.

解　记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,而

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}a&1&1&\cdots&1\\1&a&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&a\end{vmatrix}\\&=(a+n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&a-1&0&\cdots&0\\0&0&a-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a-1\end{vmatrix}\\&=(a+n-1)(a-1)^{n-1}\end{aligned}$$

所以取 $a\neq 1$ 且 $a\neq 1-n$ 即可.

年　月　日

14 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times p$ 与 $p\times n$ 矩阵,证明

$$R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$$

证 由

$$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{0}_{m\times n})\xrightarrow{c_2+c_1(\boldsymbol{B})}(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{AB})$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0}_{m\times n}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(\boldsymbol{A})r_1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{AB}\end{pmatrix}$$

知

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{0}_{m\times n})=R(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{AB})\geqslant R(\boldsymbol{AB})$$

$$R(\boldsymbol{B})=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0}_{m\times n}\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{AB}\end{pmatrix}\geqslant R(\boldsymbol{AB})$$

所以

$$R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$$

15 设有向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

试求:(1) 该向量组的秩;

(2) 该向量组的一个极大无关组;

(3) 用(2) 中选定的极大无关组表示该向量组中其余向量.

解

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4\ \boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&2&3&0&1\\2&1&1&2&1\\1&3&4&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&3&0&1\\0&-3&-5&2&-1\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&0&1\\0&1&1&0&0\\0&-3&-5&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&3&0&1\\0&1&1&0&0\\0&0&-2&2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

因此:(1) 向量组的秩为 3.

(2)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为极大无关组.

(3)$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3$.

16 试证:由向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

所生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$.

证　设

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

因 $|\boldsymbol{A}|=2\neq0$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,其生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$.

17 由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,0)$ 所生成的向量空间记作 V_1,由 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,0,0),\boldsymbol{\beta}_2=(3,0,3,0)$ 所生成的向量空间记作 V_2,证明:$V_1=V_2$.

证　只需证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价即可.容易看出

$$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2$$

而

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=3\boldsymbol{\alpha}_2$$

即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价,故其所生成的向量空间相等.

18 设

$V_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$
$V_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$
问 V_1,V_2 是不是向量空间,为什么?

解　(1) $\forall\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V_1,\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in V_1$,则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$

因为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,y_1+y_2+\cdots+y_n=0$$

所以

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)=0$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1$$

由于

$$\forall k\in\mathbf{R},k\boldsymbol{\alpha}=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)$$

而

$$kx_1+kx_2+\cdots+kx_n=k(x_1+x_2+\cdots+x_n)=k\cdot0=0$$

所以 $k\boldsymbol{\alpha}\in V_1$,即 V_1 是向量空间.

(2) 取 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,\cdots,0)\in V_2$,则 $2\boldsymbol{\alpha}=(2,0,\cdots,0)\notin V_2$,故 V_2 不是向量空间.

19 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4),\boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1),\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6)$$

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3;\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 都是 $\mathbf{R}^3$ 的基;

(2) 求由前一组基到后一组基的过渡矩阵;

(3) 求向量$(0,-2,3)$在这两组基下的坐标.

解 (1) 令

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}'_1\ \boldsymbol{\alpha}'_2\ \boldsymbol{\alpha}'_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}'_1\ \boldsymbol{\beta}'_2\ \boldsymbol{\beta}'_3)=\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}$$

因 $|\boldsymbol{A}|=1\neq 0$, $|\boldsymbol{B}|=4\neq 0$,即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 均线性无关,所以它们都是 $\mathbf{R}^3$ 的基.

(2) 设$(\boldsymbol{\beta}'_1\ \boldsymbol{\beta}'_2\ \boldsymbol{\beta}'_3)=(\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3)\boldsymbol{P}$,即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}$,所以 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 由

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&3&5&1\\2&3&7&1&2&1\\1&3&1&4&1&-6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-27&-71&-41\\0&1&0&9&20&9\\0&0&1&4&12&8\end{array}\right)=(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$$

故前一组基到后一组基的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}$$

(3) 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(0,-2,3)$,在这两组基下的坐标分别为 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$,即

$$\boldsymbol{\alpha}'=\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{BY}$$

由

$$(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{\alpha}')=\left(\begin{array}{ccc:c}3&5&1&0\\1&2&1&-2\\4&1&-6&3\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&-\frac{53}{4}\\0&1&0&\frac{19}{2}\\0&0&1&-\frac{31}{4}\end{array}\right)=(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha}')$$

得

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}-\frac{53}{4}\\\frac{19}{2}\\-\frac{31}{4}\end{pmatrix}$$

心得 体会 拓广 疑问

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{53}{4}\\\frac{19}{2}\\-\frac{31}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

20 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 是互不相同的k 个数，又 $k\leqslant n$，证明：n 维向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\a_1\\a_1^2\\\vdots\\a_1^{n-1}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\a_2\\a_2^2\\\vdots\\a_2^{n-1}\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k=\begin{pmatrix}1\\a_k\\a_k^2\\\vdots\\a_k^{n-1}\end{pmatrix}$$

线性无关.

证　因为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 互不相同，因此

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_k\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{k-1}&a_2^{k-1}&\cdots&a_k^{k-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant k}(a_i-a_j)\neq 0\quad\text{（范德蒙德行列式）}$$

从而向量组

$$\begin{pmatrix}1\\a_1\\\vdots\\a_1^{k-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a_2\\\vdots\\a_2^{k-1}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}1\\a_k\\\vdots\\a_k^{k-1}\end{pmatrix}$$

线性无关，进而

$$\begin{pmatrix}1\\a_1\\\vdots\\a_1^{n-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a_2\\\vdots\\a_2^{n-1}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}1\\a_k\\\vdots\\a_k^{n-1}\end{pmatrix}$$

也线性无关.

21 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩相等，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，证明：这两个向量组等价.

证　只需证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\leqslant r)$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的一个极大无关组，因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，所以

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_r\ \boldsymbol{\beta}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_s)=R(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_s)=R(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_r)=m$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 也是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的极大无关组，从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，进而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

22 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 s，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的秩是 t，试证：$t\geqslant r+s-m$.

证 $s=R(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_m)\leqslant R(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_r)+R(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_m)$

$=t+R(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_m)\leqslant t+(m-r)$

故

$$t\geqslant r+s-m$$

23 设有 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$，记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_s)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_t)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示的充要条件是存在矩阵 $\boldsymbol{C}$，使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$$

证 $\Rightarrow$ 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则可设

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=c_{11}\boldsymbol{\beta}_1+c_{21}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_{t1}\boldsymbol{\beta}_t\\ \boldsymbol{\alpha}_2=c_{12}\boldsymbol{\beta}_1+c_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_{t2}\boldsymbol{\beta}_t\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s=c_{1s}\boldsymbol{\beta}_1+c_{2s}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_{ts}\boldsymbol{\beta}_t\end{cases}$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_s)=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_t)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1s}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{t1}&c_{t2}&\cdots&c_{ts}\end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1s}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{t1}&c_{t2}&\cdots&c_{ts}\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$$

$\Leftarrow$ 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_{ij})_{t\times s}$，即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_s)=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_t)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1s}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{t1}&c_{t2}&\cdots&c_{ts}\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=c_{11}\boldsymbol{\beta}_1+c_{21}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_{t1}\boldsymbol{\beta}_t\\ \boldsymbol{\alpha}_2=c_{12}\boldsymbol{\beta}_1+c_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_{t2}\boldsymbol{\beta}_t\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s=c_{1s}\boldsymbol{\beta}_1+c_{2s}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_{ts}\boldsymbol{\beta}_t\end{cases}$$

24 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成矩阵 $\boldsymbol{B}$，试证：$\boldsymbol{A}$ 的列向量组

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

证 因 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$，所以存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$，从而也有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}^{-1}$. 由上题知，$\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可以互相表示，从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

25 设列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 和列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 满足

$$(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_s)\boldsymbol{K}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为 $s\times r$ 矩阵，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的秩 $R(\boldsymbol{K})=r$.

证法 1 $\Rightarrow$ 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关，下证 $R(\boldsymbol{K})=r$. 反证，若 $R(\boldsymbol{K})\neq r$，则 $\boldsymbol{K}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_r$ 线性相关. 于是存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使

$$k_1\boldsymbol{\gamma}_1+k_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\gamma}_r=\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

于是

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_r)\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关矛盾.

$\Leftarrow$ 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_r$ 使

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_r)\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

于是

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_s)\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_r)\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，知

$$\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\gamma}_1\ \boldsymbol{\gamma}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\gamma}_r)\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

于是

$$k_1\boldsymbol{\gamma}_1+k_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\gamma}_r=\boldsymbol{0}$$

故 $\boldsymbol{K}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_r$ 线性相关，这与 $R(\boldsymbol{K})=r$ 矛盾.

年 月 日

证法 2 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_s)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_r)$，则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}$$

故有

$$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{AK})\leqslant R(\boldsymbol{K})$$

另一方面，注意到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，故 $R(\boldsymbol{A})=s$，则有

$$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{AK})\geqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{K})-s=R(\boldsymbol{K})$$

所以

$$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{K})$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\ 线性无关\Leftrightarrow\boldsymbol{B}\ 列满秩\Leftrightarrow R(\boldsymbol{B})=r\Leftrightarrow R(\boldsymbol{K})=r$$

26 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量，证明：该向量组线性无关的充要条件是任一 n 维向量都可由它们线性表示.

证 $\Rightarrow$ 对 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关. 再由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，知 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

$\Leftarrow$ 因任一 n 维向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，所以 n 维标准单位向量组

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,0,1)$$

可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，而向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的秩为 n，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩等于 n，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

27 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$，若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i)=0$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

证 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$，可记 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$，则

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n)=k_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_n(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_n)$$

由已知

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i)=0\quad(i=1,\cdots,n)$$

所以 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$，即 $|\boldsymbol{\alpha}|^2=0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

28 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个规范正交基

$$\boldsymbol{\beta}_1=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_2=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

试证

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

证 由已知

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 1 & (i=j)\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)&=\left(\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{j=1}^n y_j\boldsymbol{\alpha}_j\right)=\sum_{i=1}^n x_i\left(\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{j=1}^n y_j\boldsymbol{\alpha}_j\right)\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\sum_{i=1}^n x_iy_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)=\sum_{i=1}^n x_iy_i\end{aligned}$$

心得 体会 拓广 疑问

$$=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

29 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个规范正交基，求 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$ 的内积.

解　由上题知

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=1\times2+(-1)\times1+1\times2=3$$

30 将向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

规范正交化.

解　(1) 正交化，取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2\\&=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{5}\times2\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) 规范化，取

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}}{10}\\-\frac{\sqrt{10}}{10}\\\frac{\sqrt{10}}{5}\\\frac{\sqrt{10}}{5}\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{10}}{5}\\\frac{\sqrt{10}}{5}\\\frac{\sqrt{10}}{10}\\\frac{\sqrt{10}}{10}\end{pmatrix}$$

31 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交阵，试证：

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正交阵；

(2) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交阵.

证　(1) 由已知，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交阵，则

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$$

从而

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}^{-1},(\boldsymbol{A}^{-1})'\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}')'\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$$

年　月　日

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正交阵.

(2) $(\boldsymbol{AB})'(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,所以 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交阵.

32 设矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的规范正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的规范正交基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵,证明:$\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵.

证 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1\ \boldsymbol{P}_2\ \cdots\ \boldsymbol{P}_n)$,其中 $\boldsymbol{P}_i$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的第 i 列,则由

$$(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{P}_1\ \boldsymbol{P}_2\ \cdots\ \boldsymbol{P}_n)$$

可知

$$\boldsymbol{\beta}_j=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}_j\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

于是由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是规范正交基知

$$(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}_j\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是规范正交基知

$$(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

于是

$$\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}_j=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

从而

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}'_1\\ \boldsymbol{P}'_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{P}'_n\end{pmatrix}(\boldsymbol{P}_1\ \boldsymbol{P}_2\ \cdots\ \boldsymbol{P}_n)=(\boldsymbol{P}'_i\boldsymbol{P}_j)_{n\times n}=\boldsymbol{E}_n$$

即 $\boldsymbol{P}$ 是正交阵.

【补充习题】

33 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\,(s\geqslant 2)$ 线性无关,设

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}=\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$$

试讨论 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的线性相关性.

解

$$(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}1 & & & & 1\\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 1\end{pmatrix}$$

因为

$$\begin{vmatrix}1 & & & & 1\\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 1\end{vmatrix}=1+(-1)^{s+1}=\begin{cases}2 & (s\text{ 为奇数})\\ 0 & (s\text{ 为偶数})\end{cases}$$

故当 s 为奇数时，$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关；当 s 为偶数时，$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关.

34 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times m}$ 为矩阵($m>n$)满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$，问 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的线性相关性如何.

解

$$n=R(\boldsymbol{E}_n)=R(\boldsymbol{BA})\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant n$$

即

$$R(\boldsymbol{A})=n$$

$\boldsymbol{A}$ 列满秩，故 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关.

35 试证：n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关等价于

$$D=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}'_1\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}'_1\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}'_1\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}'_2\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}'_2\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}'_2\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}'_n\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}'_n\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}'_n\boldsymbol{\alpha}_n\end{vmatrix}\neq 0$$

证　记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_s)$，则

$$D=\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'_1\\ \boldsymbol{\alpha}'_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}'_n\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_s)\right|=|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\text{ 线性无关}\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0\Leftrightarrow D\neq 0$$

36 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 是反对称阵($\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{A}$)的充要条件是：对任一向量 $\boldsymbol{X}$，有 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$.

证法 1　$\Rightarrow$ 若 $\boldsymbol{A}$ 反对称，有

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})'=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\Rightarrow 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0\Rightarrow\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$$

$\Leftarrow$ 若对任一向量 $\boldsymbol{X}$，有 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$，选取

$$\boldsymbol{X}=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)'=\boldsymbol{e}_i$$

有

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0\Rightarrow a_{ii}=0\quad(i=1,\cdots,n)$$

再取

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j$$

有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}&=(\boldsymbol{e}'_i+\boldsymbol{e}'_j)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)\\&=a_{ij}+a_{ji}=0\end{aligned}$$

即

$$a_{ij}=-a_{ji}\quad(i\neq j)$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为反对称阵.

37 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，若对任一向量 $\boldsymbol{\beta}$，有 $\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证　取 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{e}_i$，则

心得 体会 拓广 疑问

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}\quad(i=1,\cdots,n)$$

取 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \boldsymbol{e}_n)$，则

$$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{0}$$

即 $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

38 求由 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基底 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵，并求 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$ 在后一组基下的坐标.

解 $$(\boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所以过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{\alpha}$ 在后一组基下的坐标为$(-1,-2,3)$.

年 月 日

线性方程组

习 题 五

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

成绩：________________

心得 体会 拓广 疑问

❶ 判断下列线性方程组是否有解：

(1) $\begin{cases}2x_1+4x_2-x_3=6\\x_1-2x_2+x_3=4\\3x_1+6x_2+2x_3=-1\end{cases}$； (2) $\begin{cases}2x_1+4x_2-x_3=6\\x_1+2x_2+x_3=4\\3x_1+6x_2+2x_3=-1\end{cases}$；

(3) $\begin{cases}2x+4y-z=6\\x+2y+z=3\\3x+6y+2z=9\end{cases}$； (4) $\begin{cases}3x-2y+z=-2\\6x-4y+2z=-5.\\-9x+6y-3z=6\end{cases}$

解 (1) $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}2&4&-1&6\\1&-2&1&4\\3&6&2&-1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&-2&1&4\\0&8&-3&-2\\0&12&-1&-13\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&-2&1&4\\0&8&-3&-2\\0&0&7&-20\end{array}\right).$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=3$，所以方程组有唯一解.

(2) $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}2&4&-1&6\\1&2&1&4\\3&6&2&-1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&4\\0&0&-3&-2\\0&0&-1&-13\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&4\\0&0&-1&-13\\0&0&0&37\end{array}\right).$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=2\neq R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=3$，所以方程组无解.

(3) $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}2&4&-1&6\\1&2&1&3\\3&6&2&9\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&3\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=2\leqslant 3$，所以方程组有无穷多解.

(4) $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}3&-2&1&-2\\6&-4&2&-5\\-9&6&-3&6\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:c}3&-2&1&-2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right).$

因为 $R(\boldsymbol{A})=1\neq R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=2$，所以方程组无解.

❷ 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$ 都是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解向量，令

$$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\eta}_m$$

验证：

(1) 若 $k_1+k_2+\cdots+k_m=0$，则 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 对应的齐次线性方程组

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量；

(2) 若 $k_1+k_2+\cdots+k_m=1$，则 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解向量.

证

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A\eta}&=\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\eta}_m)\\&=k_1\boldsymbol{A\eta}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{A\eta}_m\\&=(k_1+k_2+\cdots+k_m)\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

(1) 若 $k_1+k_2+\cdots+k_m=0$，则 $\boldsymbol{A\eta}=\mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量.

(2) 若 $k_1+k_2+\cdots+k_m=1$，则 $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{\beta}$，所以 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解向量.

3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，$R(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解向量，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\9\\9\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\8\\8\\5\end{pmatrix}$$

(1) 求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系；

(2) 求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解　(1) 由已知

$$\boldsymbol{A\alpha}_i=\boldsymbol{\beta},R(\boldsymbol{A})=3\quad(i=1,2,3)$$

所以 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系含有

$$n-R(\boldsymbol{A})=4-3=1$$

个非零向量. 令

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$$

则

$$\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{A}[(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)]=\boldsymbol{A\alpha}_1-\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$$

所以 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个线性无关解向量，是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系.

(2) 令

$$\boldsymbol{\eta}^*=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\9\\9\\4\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A\eta}^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}$$

即 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解，从而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}^*+k\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\9\\9\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\quad(k\text{ 为任意常数})$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

4 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{pmatrix}$$

(1)a,b 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 不能表为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合;

(2)a,b 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 可唯一地表为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合.

解 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合的充要条件是非齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$$

无解;$\boldsymbol{\beta}$ 可唯一表为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合的充要条件是非齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$$

有唯一解.

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a&2&b+1\\0&2&-2&a+5&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{array}\right)$$

(1) 当 $a=-1,b\neq 0$ 时

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)=2\leqslant R(\boldsymbol{B})=3$$

此时 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合.

(2) 当 $a\neq -1,b$ 任意时

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)=R(\boldsymbol{B})=4$$

此时 $\boldsymbol{\beta}$ 可唯一表为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合.

5 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=0\\ax_1+x_2+x_3=0\\x_1-x_2+3x_3=0\end{cases}$$

有非零解,求 a.

解 齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数行列式

年 月 日

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

即

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a-1 & 1-a & 0 \\ -2 & -1-3a & 0 \end{vmatrix}=(1-a)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1-3a \end{vmatrix}$$
$$=3(1+a)(1-a)=0$$

所以 $a=\pm 1$.

❻ 求下列方程组的基础解系及通解：

(1) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$；

(2) $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \end{cases}$；

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & -1 \\ 1 & 32 & 18 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 26 & -22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

解 (1) 由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} x_1=\frac{4}{3}x_4 \\ x_2=-3x_4 \\ x_3=\frac{4}{3}x_4 \end{cases}$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=3<4$，所以基础解系含 $n-R(\boldsymbol{A})=1$ 个非零向量，取 $x_4=3$，得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}4\\-9\\4\\3\end{pmatrix}$$

所以通解为

$$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\xi}=k\begin{pmatrix}4\\-9\\4\\3\end{pmatrix}\quad(k\text{ 为任意常数})$$

（2）由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\2&3&1&1\\2&2&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

故

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_4\\x_2=-\frac{1}{2}x_4\\x_3=\frac{1}{2}x_4\end{cases}$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=3<4$，所以基础解系含 $n-R(\boldsymbol{A})=1$ 个非零向量.

取 $x_4=2$，得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

所以通解为

$$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\xi}=k\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}\quad(k\text{ 为任意常数})$$

（3）由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&9&5&2\\1&5&3&1\\1&-4&-2&-1\\1&32&18&7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&5&3&1\\0&9&5&2\\0&-9&-5&-2\\0&27&15&6\end{pmatrix}$$

心得 体会 拓广 疑问

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&5&3&1\\0&9&5&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故原方程组与

$$\begin{cases}x_1+5x_2=-3x_3-x_4\\9x_2=-5x_3-2x_4\end{cases}$$

同解.因为$R(\boldsymbol{A})=2$,所以基础解系含$n-R(\boldsymbol{A})=2$个线性无关向量.

取$x_3=9,x_4=0$,得

$$x_1=-2,x_2=-5$$

所以

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\-5\\9\\0\end{pmatrix}$$

取$x_3=0,x_4=9$,得

$$x_1=1,x_2=-2$$

所以

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\9\end{pmatrix}$$

得一个基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$,通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\-5\\9\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\9\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数})$$

(4)由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\2&3&2&-1\\4&5&-2&3\\-1&3&26&-22\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\0&-1&-6&5\\0&-3&-18&15\\0&5&30&-25\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\0&1&6&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以原方程组与

$$\begin{cases}x_1+2x_2=-4x_3+3x_4\\x_2=-6x_3+5x_4\end{cases}$$

年　月　日

同解.

因为 $R(\boldsymbol{A})=2$，所以基础解系含 $n-R(\boldsymbol{A})=2$ 个线性无关向量，取

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

得一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=k_1\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix}\quad (k_1,k_2\text{ 为任意常数})$$

7 求下列方程组的通解：

(1) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\2x_1+x_2-x_3=1\\4x_1+2x_2-2x_3-x_4=2\end{cases}$；

(2) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3-x_4=1\\x_1-3x_2+2x_3-4x_4=3\\x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2\end{cases}$；

(3) $\begin{pmatrix}2&7&3&1\\1&3&-1&1\\7&-3&-2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix}1&3&5&-4&0\\1&3&2&-2&1\\1&-2&1&-1&-1\\1&2&1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$.

解

(1) 由

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}2&1&-1&1&1\\2&1&-1&0&1\\4&2&-2&-1&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}2&1&-1&1&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-3&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}2&1&-1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

心得 体会 拓广 疑问

又因为

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=2<4$$

所以方程组有无穷多解，取 x_2,x_3 为自由未知量，令 $x_2=2k_1,x_3=2k_2$，则

$$2x_1=-2k_1+2k_2+1,x_4=0$$

所以方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1+k_2+\frac{1}{2}\\2k_1\\2k_2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数})$$

其中 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ 为方程组的特解，$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$ 为导出组的基础解系.

（2）由

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}2&1&-1&-1&1\\1&-3&2&-4&3\\1&4&-3&5&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&-3&2&-4&3\\0&7&-5&7&-5\\0&7&-5&9&-5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&-3&2&-4&3\\0&7&-5&7&-5\\0&0&0&2&0\end{array}\right)$$

取 x_3 为自由未知量，令 $x_3=7k$，则解得

$$\begin{cases}x_1=k+\frac{6}{7}\\x_2=5k-\frac{5}{7}\\x_4=0\end{cases}$$

故原方程通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k+\frac{6}{7}\\5k-\frac{5}{7}\\7k\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\-\frac{5}{7}\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\5\\7\\0\end{pmatrix}\quad(k\text{ 为任意常数})$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

其中特解为 $\boldsymbol{\eta}^{*}=\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\-\frac{5}{7}\\0\\0\end{pmatrix}$，基础解为 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\5\\7\\0\end{pmatrix}$.

（3）由

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}2&7&3&1&6\\1&3&-1&1&-2\\7&-3&-2&6&-4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&3&-1&1&-2\\0&1&5&-1&10\\0&-24&5&-1&10\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&3&-1&1&-2\\0&1&5&-1&10\\0&-25&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&1&-2\\0&1&0&0&0\\0&0&5&-1&10\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&\frac{4}{5}&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&-\frac{1}{5}&2\end{array}\right)$$

取 x_4 为自由未知量，令 $x_4=5k$，则

$$x_1=-4k, x_2=0, x_3=k+2$$

故原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4k\\0\\k+2\\5k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-4\\0\\1\\5\end{pmatrix}\quad(k\text{ 为任意常数})$$

（4）由

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccccc:c}1&3&5&-4&0&1\\1&3&2&-2&1&-1\\1&-2&1&-1&-1&3\\1&2&1&-1&-1&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccccc:c}1&3&5&-4&0&1\\0&0&-3&2&1&-2\\0&-5&-4&3&-1&2\\0&-1&-4&3&-1&2\end{array}\right)$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccccc:c}1&3&5&-4&0&1\\0&0&-3&2&1&-2\\0&-4&0&0&0&0\\0&-1&-4&3&-1&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&5&-4&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&-3&2&1&-2\\0&0&-1&1&-2&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&0&1&-10&21\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&-1&2&-4\\0&0&0&-1&7&-14\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&0&0&-3&7\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&-5&10\\0&0&0&1&-7&14\end{array}\right)$$

令 $x_5=k$，则原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3k+7\\0\\5k+10\\7k+14\\k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}3\\0\\5\\7\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\0\\10\\14\\0\end{pmatrix}\quad (k\text{ 为任意常数})$$

8 当 a_1,a_2,a_3 满足什么条件时，方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=a_1\\x_2-x_3=a_2\\-x_1+x_3=a_3\end{cases}$$

有解？并写出通解.

解　$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&0&a_1\\0&1&-1&a_2\\-1&0&1&a_3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&0&a_1\\0&1&-1&a_2\\0&-1&1&a_1+a_3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&0&a_1\\0&1&-1&a_2\\0&0&0&a_1+a_2+a_3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&a_1+a_2\\0&1&-1&a_2\\0&0&0&a_1+a_2+a_3\end{array}\right)$$

年　月　日

所以当 $a_1+a_2+a_3=0$ 时

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=2$$

原方程组有解，此时，令 $x_3=k$，则通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k+a_1+a_2\\k+a_2\\k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1+a_2\\a_2\\0\end{pmatrix}\quad(k\text{ 为任意常数})$$

9 当 a 等于何值时，方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\(a+1)x_1+(a+1)x_2+2x_3=2\\(2a+1)x_1+3x_2+(a+2)x_3=3\end{cases}$$

有唯一解，有无穷多解，无解？当有解时，把解写出来.

解 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&1&1\\a+1&a+1&2\\2a+1&3&a+2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}$

$=(a+2)(a-1)^2$

(1) 当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时，方程组有唯一解

$$x_1=x_2=x_3=\frac{1}{a+2}$$

(2) 当 $a=-2$ 时

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&1\\-1&-1&2&2\\-3&3&0&3\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&-2\\0&3&-3&-3\\0&6&-6&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&-2\\0&1&-1&-1\\0&0&0&3\end{array}\right)$$

因为

$$R(\boldsymbol{A})=2\neq R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=3$$

所以原方程组无解.

(3) 当 $a=1$ 时

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

因为

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=1<3$$

所以方程组有无穷多解，解方程 $x_1=1-x_2-x_3$ 得通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数})$$

10 设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为$n-1$,而$\boldsymbol{A}$中某元素a_{ij}的代数余子式$\boldsymbol{A}_{ij} \neq \boldsymbol{0}$,试证:$(\boldsymbol{A}_{i1}, \boldsymbol{A}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{A}_{in})'$是该方程组的基础解系.

证 不失一般性,不妨设$\boldsymbol{A}_{11} \neq \boldsymbol{0}$,则

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12}, \cdots, \boldsymbol{A}_{1n})' \neq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{A\xi} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} \\ \boldsymbol{A}_{12} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{A}_{11} + a_{12}\boldsymbol{A}_{12} + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{A}_{1n} \\ a_{21}\boldsymbol{A}_{11} + a_{22}\boldsymbol{A}_{12} + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{A}_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{A}_{11} + a_{n2}\boldsymbol{A}_{12} + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{A}_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

因为$R(\boldsymbol{A}) = n-1 < n$,所以$|\boldsymbol{A}| = 0$,$\boldsymbol{A\xi} = \boldsymbol{0}$,即$\boldsymbol{\xi}$为$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的解向量,且$\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{0}$,故线性无关.又因为$R(\boldsymbol{A}) = n-1$知$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的基础解系含线性无关的向量个数为$n - R(\boldsymbol{A}) = 1$,因此$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12}, \cdots, \boldsymbol{A}_{1n})'$为$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的基础解系.

11 设$\boldsymbol{\eta}$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{0})$的一个解向量,$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$是它对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的基础解系.证明:

(1)$\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关;

(2)$\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\eta}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r} + \boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$的$n-r+1$个线性无关的解向量.

证 (1) 设存在数$k, k_1, \cdots, k_{n-r}$使得

$$k\boldsymbol{\eta} + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r} = \boldsymbol{0}$$

上式两边左乘$\boldsymbol{A}$,则有$k\boldsymbol{A\eta} = \boldsymbol{0}$,注意到$\boldsymbol{A\eta} = \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{0}$,$k = 0$,从而可得

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r} = \boldsymbol{0}$$

由$\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$的线性无关性知

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$$

所以$\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关.

(2) 因

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_i + \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{A\xi}_i + \boldsymbol{A\eta} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \quad (i = 1, \cdots, n-r)$$

所以$\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\eta}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r} + \boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$的$n-r+1$个解向量.下证$\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\eta}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r} + \boldsymbol{\eta}$线性无关.事实上,若存在数$k, k_1, \cdots, k_{n-r}$使得

$$k\boldsymbol{\eta} + k_1(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\eta}) + \cdots + k_{n-r}(\boldsymbol{\xi}_{n-r} + \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{0}$$

即

$$(k + k_1 + \cdots + k_{n-r})\boldsymbol{\eta} + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r} = \boldsymbol{0}$$

由(1)知,$\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关,所以

$$k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0, k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$$

所以$k = 0$.从而$\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\eta}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r} + \boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$的$n-r+1$个线性无关的解向量.

年 月 日

12 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0})$ 的系数矩阵的秩为 r，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r},\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解向量，证明：它的任意一个解向量都可表为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$.

证 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 $n-r$ 个线性无关解向量. 显然

$$\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_{n-r}$$

是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解. 若存在数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 使

$$k_1(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_2)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_{n-r})=\boldsymbol{0}$$

则

$$(k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-k_1\boldsymbol{\eta}_1-\cdots-k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\boldsymbol{0}$$

因为已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 线性无关，则有

$$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$$

于是

$$\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_{n-r}$$

线性无关，因而是齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，故非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}=&\ l_1(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)+l_2(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_2)+\cdots+l_{n-r}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_{n-r})+\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\\ =&-l_1\boldsymbol{\eta}_1-l_2\boldsymbol{\eta}_2-\cdots-l_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+(l_1+l_2+\cdots+l_{n-r}+1)\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\\ =&\ k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\end{aligned}$$

其中

$$k_1=-l_1,k_2=-l_2,\cdots,k_{n-r}=-l_{n-r},k_{n-r+1}=l_1+\cdots+l_{n-r}+1$$

且

$$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$$

13 证明：与线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系等价的线性无关向量组也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

证 设 $R(\boldsymbol{A})=r$，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，即 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A\xi}_i=\boldsymbol{0}(i=1,2,\cdots,n-r)$. 又设线性无关向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 等价，则必有 $s=n-r$，且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_{n-r}$ 中的任一向量均可由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\beta}_i=k_{i1}\boldsymbol{\xi}_1+k_{i2}\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{i,n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}\quad(i=1,2,\cdots,n-r)$$

所以

$$\boldsymbol{A\beta}_i=k_{i1}\boldsymbol{A\xi}_1+k_{i2}\boldsymbol{A\xi}_2+\cdots+k_{i,n-r}\boldsymbol{A\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0}$$

这说明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的含 $n-r$ 个解向量的线性无关向量组，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

14 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 r，试证：若 $r<n$，则存在秩为 $n-r$ 的列满秩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$.

证 因 $R(\boldsymbol{A})=r<n$，所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含

有 $n-r$ 个线性无关向量. 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为基础解系,由其线性无关性,知矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\xi}_1\ \boldsymbol{\xi}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\xi}_{n-r})$ 列满秩,且其秩为 $n-r$,并且

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1\ \boldsymbol{\xi}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\xi}_{n-r})=(\boldsymbol{A\xi}_1\ \boldsymbol{A\xi}_2\ \cdots\ \boldsymbol{A\xi}_{n-r})=\boldsymbol{0}_{m\times(n-r)}$$

15 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,试证:$\boldsymbol{A}$ 的秩为 m 的充要条件是对任意 $m\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{\beta}$,方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 总有解.

证　$\Rightarrow$ 若 $R(\boldsymbol{A})=m$,则对任意 $m\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{\beta}$,有

$$m=R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})\leqslant m$$

所以

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=m$$

故方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解.

$\Leftarrow$ 若对任意 $m\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{\beta}$,方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 总有解,取

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{e}_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

则有 $n\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{x}_i$ 使

$$\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{e}_i\quad(i=1,\cdots,m)$$

令 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_m)$,则

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_m)=(\boldsymbol{Ax}_1\ \boldsymbol{Ax}_2\ \cdots\ \boldsymbol{Ax}_m)=(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \boldsymbol{e}_m)=\boldsymbol{E}_m$$

所以

$$m\geqslant R(\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{AX})=R(\boldsymbol{E}_m)=m$$

故 $R(\boldsymbol{A})=m$.

16 设有平面上三条直线

$$L_1: x+y+a=0$$
$$L_2: x+2y+b=0$$
$$L_3: x+3y+c=0$$

试讨论这三条直线的位置关系.

解　考虑三条直线方程所成的线性方程组,其系数矩阵的秩为 $R(\boldsymbol{A})=2$,对其增广矩阵作如下初等行变换

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cc:c}1&1&-a\\1&2&-b\\1&3&-c\end{array}\right)\xrightarrow{行}\left(\begin{array}{cc:c}1&1&-a\\0&1&a-b\\0&2&a-c\end{array}\right)\xrightarrow{行}\left(\begin{array}{cc:c}1&1&-a\\0&1&a-b\\0&0&2b-a-c\end{array}\right)$$

可见,当 $a+c=2b$ 时

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=2$$

方程组有唯一解,这表示三条直线交于一点.

当 $a+c\neq 2b$ 时

$$2=R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=3$$

方程组无解,注意到三条直线的方向向量两两线性无关,此时三条直线在平面上两两相交,但没有公共交点.

17 图 13,设由三个不同平面的方程组成的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}$$

它的系数矩阵与增广矩阵的秩都是 2,那么这三个平面的位置关系可能是下面四种中的哪一种?

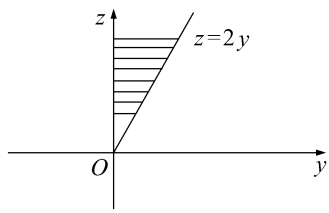

图 13

解 依题意,方程组有无穷多解,有一个自由未知量,交于一条直线,故选(B).

18 讨论 a 等于何值时,方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=a^3\\x_1+ax_2+x_3=a\end{cases}$$

与方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\(a+1)x_1+(a+1)x_2+2x_3=a+1\\x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$$

同解. 当这两个方程组同解时,求出通解.

解 考察第二个线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}a&1&1\\a+1&a+1&2\\1&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$$

当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时,系数行列式不为零. 第二个方程组有唯一解,而此时第一个方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩都是 2,所以有无穷多解. 不合题意,舍去.

当 $a=1$ 时,这两个方程组同解,通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数})$$

当 $a=-2$ 时,由第一个方程组的导数矩阵的秩和增广阵的秩都是 2,知该方程组有无穷多解. 而由

$$
\left(\begin{array}{ccc:c}
-2 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 2 & -1 \\
1 & 1 & -2 & 4
\end{array}\right)
\xrightarrow{\text{行}}
\left(\begin{array}{ccc:c}
-2 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 3
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{行}}
\left(\begin{array}{ccc:c}
-1 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 3 & -3 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 3
\end{array}\right)
$$

知第二个方程组的系数矩阵的秩不等于增广阵的秩,该方程组无解,不符合题意,舍去.

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

特征值、特征向量与相似矩阵

习 题 六

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

成绩：________________

心得 体会 拓广 疑问

❶ 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&3\\0&0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}$. 求$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的特征值及特征向量.

解　(1) 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-2&-3\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3=0$$

故$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$为$\boldsymbol{A}$的特征值.

解方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

从而$\boldsymbol{A}$的特征向量为$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中$k_1$，$k_2$为不同时为零的任意常数.

(2) 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1\\-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)=0.$$

故$\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$为$\boldsymbol{B}$的特征值.

当$\lambda=2$时，解方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1)'$. 所以$\boldsymbol{B}$的属于特征值2的特征向量为$k_1\boldsymbol{\xi}_1$，其中$k_1$为非零的任意常数.

当$\lambda=3$时，解方程组$(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由

$$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,2)'$. 所以$\boldsymbol{B}$的属于特征值3的特征向量为$k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中$k_2$为非零的任意常数.

❷ 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&2\\1&-2&1\end{pmatrix}$. 求$\boldsymbol{A}$的特征值及属于实特征值的一个特征向量.

解　由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-2&\lambda-1&-2\\-1&2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

年　月　日

$$=(\lambda-1)(\lambda-1+2i)(\lambda-1-2i)=0$$

故 $\lambda_1=1,\lambda_2=1-2i,\lambda_3=1+2i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 当 $\lambda=1$ 时,解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&0&-2\\-1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,1,-2)'$ 为属于 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值 1 的一个特征向量.

3 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,证明:$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证 由 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,知 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 注意到

$$\boldsymbol{BA}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}$$

得 $\boldsymbol{BA}$ 与 $\boldsymbol{AB}$ 相似.

4 求一个正交相似变换矩阵,将下列实对称矩阵化为对角阵:

(1) $\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$.

解 (1) 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)=0$$

故 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

当 $\lambda_1=-2$ 时,解方程组 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,2)'$$

单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})'$$

当 $\lambda_2=1$ 时,解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_2=(-2,-1,2)'$$

单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_2=(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})'$$

当 $\lambda_3=4$ 时,解方程组 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=(2,-2,1)'$$

单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_3=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})'$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

令

$$P=(\boldsymbol{\eta}_1\ \boldsymbol{\eta}_2\ \boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为所求的正交相似变换矩阵且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(-2,1,4)$$

(2) 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -2 & \lambda-5 & \lambda-1\\ 2 & 4 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -4 & \lambda-9 & 0\\ 2 & 4 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2\\ -4 & \lambda-9\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$$

得 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时,解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-2,2,1)',\boldsymbol{\xi}_2=(2,1,2)'$$

$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 已经是正交的,进行单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)',\boldsymbol{\eta}_2=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)'$$

当 $\lambda_3=10$ 时,解方程组 $(10\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=(-1,-2,2)'$$

再单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_3=\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)'$$

令

$$P=(\boldsymbol{\eta}_1\ \boldsymbol{\eta}_2\ \boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为所求的正交相似交换矩阵且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(1,1,10)$$

5 设 λ 为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,试证:$\lambda^2+\lambda+1$ 是 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值.

证　设 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的一特征向量,则 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$,故有

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}$$

$$(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}=(\lambda^2+\lambda+1)\boldsymbol{X}$$

而 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda^2+\lambda+1$ 为 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值.

6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且存在自然数 m 使 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$，试证：$\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 0.

证 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{X}$ 为相应的一个特征向量，则 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$. 这样 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{X}=\lambda^m\boldsymbol{X}$，而 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$，得 $\lambda^m\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 知，$\lambda^m=0$，$\lambda=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 0.

7 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，试证：$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值.

证 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 知 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一特征值，则 $\lambda\neq 0$，$\boldsymbol{X}$ 为相应的一个特征向量，则

$$\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{X},\ |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{X}$$

即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{X}$，注意到 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，知 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值.

8 设 λ,μ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ,μ 的特征向量. 试证：$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 线性无关，且 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

证 设

$$k_1\boldsymbol{X}+k_2\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘式(1) 两边得

$$k_1\lambda\boldsymbol{X}+k_2\mu\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

用 μ 乘式(1) 两边得

$$k_1\mu\boldsymbol{X}+k_2\mu\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0} \tag{3}$$

由(2)－(3) 得

$$k_1(\lambda-\mu)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

由 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，$\lambda\neq\mu$ 知 $k_1=0$. 再由 $\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{0}$ 知 $k_2=0$，故 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 线性无关.

反证法，假设 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则存在 k 使

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=k(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})$$

而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=\mu\boldsymbol{Y}$$

从而

$$\lambda\boldsymbol{X}+\mu\boldsymbol{Y}=k(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}),(\lambda-k)\boldsymbol{X}+(\mu-k)\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$$

而 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 线性无关，$\lambda-k=\mu-k=0$，得 $\lambda=k=\mu$，矛盾，故 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

9 设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&4\\2&x&2\\4&2&-1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}5&&\\&y&\\&&-5\end{pmatrix}$ 相似，求 x,y.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

解　因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,所以

$$\begin{cases}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x-2=y\\ -5(3x-8)=-25y\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$$

10 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,1,-1$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

依次为对应的特征向量,求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{2n}$.

解　设

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

由已知得

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(0,1,-1)$$

故

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\operatorname{diag}(0,1,-1)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(0,1,-1)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&1&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{2n}&=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(0,1,-1)^{2n}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(0,1,1)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

11 设四阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,-1,1,1$,向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0,2)',\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,2,0)'$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量,求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{2n}$.

解 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 为属于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 1 的特征向量,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交,有

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_4=0\\x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_1+x_3+x_4=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$$

基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_3=(-1,-1,0,1)',\boldsymbol{\xi}_4=(-1,1,1,0)'$$

注意到 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$ 相互正交,单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_i=\frac{\boldsymbol{\xi}_i}{|\boldsymbol{\xi}_i|}\quad(i=1,2,3,4)$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1\ \boldsymbol{\eta}_2\ \boldsymbol{\eta}_3\ \boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\0&\frac{\sqrt{6}}{3}&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{3}&0&\frac{\sqrt{3}}{3}&0\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵.令

$$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(-1,-1,1,1)$$

则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{2n}=\boldsymbol{PD}^{2n}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(1,1,1,1)\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PEP}^{-1}=\boldsymbol{E}$$

12 已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,其中

年 月 日

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

求：(1)$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式；(2)$\boldsymbol{A}$ 的特征值；(3)$|\boldsymbol{A}|$；(4)$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$；(5)$R(\boldsymbol{A})$.

解　$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式、特征值、行列式、迹与秩分别对应相等，从而有：

(1) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$；

(2)$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$；

(3) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=-2$；

(4)$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=2$；

(5)$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$.

13 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$. 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2$. 求：

(1) 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值及与 $\boldsymbol{B}$ 相似的对角阵，说明理由；

(2)$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^*$ 的特征值；

(3) 行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 及 $|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^*|$.

解　(1) 由已知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互异，故可相似对角化，从而存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(1,-1,2)$$

故

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}^3-5\boldsymbol{D}^2=\mathrm{diag}(-4,-6,-12)$$

$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $-4,-6,-12$.

(2) 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{D}|=1\times(-1)\times 2=-2$$

知

$$\boldsymbol{A}^*=(-2)\times\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{-1}$$

从而 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $-1,1,-\frac{1}{2}$.

(3) 由已知

$$|\boldsymbol{B}|=(-4)\times(-6)\times(-12)=-288$$

$$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^*|=(-1)\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

14 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行元素之和均等于 a，试证：a 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，并且 $\boldsymbol{X}=(1,1,\cdots,1)'$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 a 的一个特征向量.

证　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

年　月　日

且

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = a \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则

$$\boldsymbol{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{X}$$

故 a 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 a 的一个特征向量.

15 设数列 $\{x_n\}$ 满足规律

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, x_0 = 1, x_1 = 3$$

求 x_n 及 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

解 令

$$\boldsymbol{\alpha}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbf{N})$$

则由

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + x_{k-1} \\ x_k = x_k \end{cases}$$

知 $\boldsymbol{\alpha}_{k+1} = \boldsymbol{A\alpha}_k$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 易知

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，并且

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

分别为相应于 λ_1, λ_2 的特征向量.

由已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. 解关于 k_1, k_2 的方程，$\boldsymbol{\alpha}_1 = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$，即

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ k_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

从而有

年　月　日

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{A}^{n-1}(k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2) = k_1\lambda_1^{n-1}\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\lambda_2^{n-1}\boldsymbol{\xi}_2$$

$$= (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix}$$

故

$$x_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} = \lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda_1^{n+2}+\lambda_2^{n+2}}{\lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{n+1}\cdot\lambda_2}{1+(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{n+1}}$$

$$= \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{因为} \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1)$$

16 某地区有 81 000 人订阅甲、乙两种报刊(每人均只订其中一种报刊),调查表明每年有 40% 订甲种报刊的人改订乙种报刊,同时又有 20% 订乙种报刊的人改订甲种报刊,若订阅甲、乙两种报刊的总人数不变,问 10 年后该地区大约有多少人订甲种报刊.

解 设第 k 年订阅甲、乙两种报刊的人数分别为 x_k, y_k,则

$$x_k + y_k = m = 81\ 000 \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

又由已知

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0.6x_k + 0.2y_k \\ y_{k+1} = 0.4x_k + 0.8y_k \end{cases}$$

令

$$\boldsymbol{\alpha}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_k \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

易知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.4$$

且

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

分别为相应的特征向量.

令 k_1, k_2 使

心得 体会 拓广 疑问

$$\boldsymbol{\alpha}_1=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$$

即

$$\begin{cases}x_0=k_1+k_2\\ y_0=2k_1-k_2\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}k_1=\dfrac{x_0+y_0}{3}\\ k_2=\dfrac{2x_0-y_0}{3}\end{cases}$$

这样

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=\frac{x_0+y_0}{3}\boldsymbol{\xi}_1+\frac{2x_0-y_0}{3}\boldsymbol{\xi}_2\\ &=\frac{1}{3}m\boldsymbol{\xi}_1+\frac{1}{3}(2x_0-y_0)\boldsymbol{\xi}_2\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{k+1}&=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{3}m\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\xi}_1+\frac{1}{3}(2x_0-y_0)\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\xi}_2\\ &=\frac{1}{3}m1^k\boldsymbol{\xi}_1+\frac{1}{3}(2x_0-y_0)\,0.4^k\boldsymbol{\xi}_2\\ &=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}m+\dfrac{1}{3}(2x_0-y_0)0.4^k\\ \dfrac{2}{3}m-\dfrac{1}{3}(2x_0-y_0)0.4^k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

故

$$x_{k+1}=\frac{1}{3}m+\frac{1}{3}(2x_0-y_0)\,0.4^k$$

$$x_{10}=\frac{1}{3}m+\frac{1}{3}(2x_0-y_0)\,0.4^9\approx 27\ 000(\text{人})$$

10 年后,该地区大约有 27 000 人订甲种报刊.

线性空间与线性变换

习　题　七

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

成绩：________________

1 验证 2 阶实上三角阵的全体

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbf{R}\right\}$$

是实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间，并写出它的一个基.

解 对任意

$$k \in \mathbf{R}, \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \in S, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \in S$$

有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ 0 & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \in S$$

$$k\boldsymbol{A}=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ 0 & ka_{22} \end{pmatrix} \in S$$

故 S 为一线性空间，其一基底为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{不唯一})$$

2 验证实线性空间 $\mathbf{R}^n$ 中与已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 正交的所有向量全体

$$S=\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n \mid (\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha})=0\}$$

是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间.

解 对任意

$$k \in \mathbf{R}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in S$$

有

$$(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha})=0, (\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta})=0$$

从而有

$$(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta})=0, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in S$$

又

$$(\boldsymbol{\alpha}_0, k\boldsymbol{\alpha})=k(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha})=0, k\boldsymbol{\alpha} \in S$$

所以，S 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间.

3 已知 $1, x, x^2$ 是实线性空间

$$\mathbf{R}[x]_2=\{p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbf{R}\}$$

的基，试求

$$p(x)=(x-2)(x-3)$$

在该基下的坐标.

解

$$p(x)=(x-2)(x-3)=6-5x+x^2$$

故 $p(x)$ 在基 $1, x, x^2$ 下的坐标为 $(6, -5, 1)$.

4 设 U 为线性空间 V 的子空间，并且 U 与 V 的维数相等，证明 $U=V$.

证 设 U 的维数为 r，则 U 有一极大线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$.

$U\subseteq V$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 V 中线性无关向量组,而 V 的维数也是 r,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为 V 中的一极大线性无关向量组,即为 V 之一基底,所以任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,可表为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合. 这样有 $V\subseteq U$,$U=V$.

5 在 $P[x]_2$ 中,设有两组基 ①$1,x,x^2$;②$1,1+x,(1+x)^2$.

(1) 求 ① 到 ② 的过渡矩阵;

(2) 求由 ① 经过渡矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 得到的新基.

解　(1)

$$1=1+0x+0x^2=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$1+x=1+1x+0x^2=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(1+x)^2=1+2x+1x^2=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

故

$$(1,(1+x),(1+x)^2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

① 到 ② 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(2) 令

$$\begin{aligned}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)&=(1,x,x^2)\boldsymbol{P}\\&=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=(1,-1+x,2-x+x^2)\end{aligned}$$

知

$$\alpha_1=1,\alpha_2=-1+x,\alpha_3=2-x+x^2$$

为所求的新基.

6 判别下面定义的变换,哪些是线性变换,哪些不是?

(1) 在线性空间 V_n 中,$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}_0$,$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V_n$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 是 V_n 中一固定向量;

(2) 在 $\mathbf{R}^3$ 中 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+3x_2\\x_2+x_3\\x_3\end{pmatrix}$;

(3) 在 $\mathbf{R}[x]_3$ 中 $\boldsymbol{A}p(x)=p'(x)$，$\forall\, p(x)\in\mathbf{R}[x]_3$，其中 $p'(x)$ 表示 $p(x)$ 的导函数.

解 (1)$\boldsymbol{\alpha}_0=\mathbf{0}$ 时

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},\ \forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V_n$$

$\boldsymbol{A}$ 为 V_n 上恒等线性变换. $\boldsymbol{\alpha}_0\neq\mathbf{0}$ 时

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{0})=\boldsymbol{\alpha}_0\neq\mathbf{0}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 不是线性变换.

(2) 是线性变换. 因为令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},\ \forall\,\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^3$$

这样，$\forall\,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^3$，$k\in\mathbf{R}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$$
$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X})=k\cdot\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=k\cdot\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 上线性变换.

(3) 是线性变换. 因为由导数性质知，$\forall\, p_1(x),p_2(x)\in\mathbf{R}[x]_3$，$k\in\mathbf{R}$

$$p'_1(x)\in\mathbf{R}[x]_3$$
$$(p_1(x)+p_2(x))'=p'_1(x)+p'_2(x)$$
$$(kp_1(x))'=k\cdot p'_1(x)$$

7 说明 xOy 平面上变换 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 的几何意义，其中：

(1)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$； (2)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$；

(3)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$； (4)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

解 (1)$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$，几何意义是将 xOy 平面上的点映成关于 y 轴对称的点.

(2)$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$，几何意义为将 xOy 平面上的点投影到 x 轴上.

(3)$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$，几何意义为将 xOy 平面上的点映成关于直线 $y=x$ 对称的点.

(4)$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$，几何意义为将 xOy 平面上的点

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

顺时针旋转90°.

8 n 阶实对称阵全体 V 对于矩阵通常的线性运算构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个$\dfrac{n(n+1)}{2}$维线性空间. 给定一个 n 阶实可逆阵 $\boldsymbol{P}$，则变换

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{P},\ \forall \boldsymbol{B}\in V$$

称为合同变换，试证 V 中的合同变换为线性变换.

证　对任意

$$\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2\in V,k\in\mathbf{R}$$

有

$$(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P})'=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}'_1\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}$$

这样有

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}\in V$$

又

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)&=\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{P}\\&=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{P}\\&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1)+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_2)\\\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B}_1)&=\boldsymbol{P}'(k\boldsymbol{B}_1)\boldsymbol{P}\\&=k\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}\\&=k\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1)\end{aligned}$$

综上可知，V 中合同变换为线性变换.

9 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的线性变换，它使

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 在自然基下的矩阵表示；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$下的矩阵表示.

解　(1) 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 为自然基，令

$$\boldsymbol{\alpha}'_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}'_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}'_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}'_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\alpha}'_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\alpha}'_3=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

由已知

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}'_1)=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}=-\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

年　月　日

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}'_2)=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}'_3)=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}=-2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+4\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

由 $\boldsymbol{A}$ 为线性变换知

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=-\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_3\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=-2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+4\boldsymbol{\varepsilon}_3\end{cases}$$

可解得

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=3\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-3\boldsymbol{\varepsilon}_3\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=-3\boldsymbol{\varepsilon}_1+0\boldsymbol{\varepsilon}_2+4\boldsymbol{\varepsilon}_3\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=-2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+3\boldsymbol{\varepsilon}_3\end{cases}$$

故

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3))=(\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}3&-3&-2\\2&0&-1\\-3&4&3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-3&-2\\2&0&-1\\-3&4&3\end{pmatrix}$$

为所求.

（2）
$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=-\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=3\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2$$

故 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 在自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-3&-2\\2&0&-1\\-3&4&3\end{pmatrix}$$

年　月　日

这样，$\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下矩阵表示为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{3}{7}\\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -3 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ -3 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{46}{7} & \frac{29}{7} & -\frac{69}{7}\\ -\frac{29}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{47}{7}\\ -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{5}{7}\end{pmatrix}$$

10 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的线性变换，已知 $\boldsymbol{A}$ 在自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵.

解　基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下矩阵表示为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\ -2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

11 求 $\mathbf{R}^3$ 中下列线性变换的逆变换：

(1) $\begin{cases}y_1=2x_1+2x_2+x_3\\ y_2=3x_1+x_2+5x_3\\ y_3=3x_1+2x_2+3x_3\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}y_1=2x_1+x_2-x_3\\ y_2=2x_1+x_2+2x_3\\ y_3=x_1-x_2+x_3\end{cases}$.

解　(1)

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 5\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

故所求的逆变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 5\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 9\\ 6 & 3 & -7\\ 3 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

心得 体会 拓广 疑问

(2)
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

故所求逆变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

12 设 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 V_n 中的线性变换，$\boldsymbol{\alpha} \in V_n$，若 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$，但 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$，试证向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}, \cdots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ $(k \geqslant 1)$ 线性无关.

证 若

$$l_1\boldsymbol{\alpha} + l_2\boldsymbol{A\alpha} + \cdots + l_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{\alpha} + l_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \tag{*}$$

其中 $l_1, l_2, \cdots, l_k$ 为一组常数. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 V_n 中的线性变换，$\boldsymbol{A}$ 作用式(*)两端 $k-1$ 次后得

$$l_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$$

而

$$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$$

故有

$$l_1 = 0$$

这样式(*)变为

$$l_2\boldsymbol{A\alpha} + l_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{\alpha} + l_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$$

在上式两端用 $\boldsymbol{A}$ 作用 $k-2$ 次得

$$l_2\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$$

于是由 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ 知

$$l_2 = 0$$

同理可证

$$l_3 = l_4 = \cdots = l_k = 0$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}, \cdots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \quad (k \geqslant 1)$$

是线性无关的.

年 月 日

二次型与二次曲面

习　题　八

班级：________________

学号：________________

姓名：________________

成绩：________________

1 用矩阵表示下列二次型,并求出这些二次型的秩.

(1) $f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$;

解 $$f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $R(f)=R(\boldsymbol{A})=1$.

(2) $f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$;

解 $$f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&-2\\-2&-2&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&-2\\-2&-2&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&0&-4\\0&-4&-11\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&-4&-11\\0&0&-4\end{pmatrix}$$

所以 $R(f)=R(\boldsymbol{A})=3$.

(3) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+6x_2x_3+4x_1x_3-2x_1x_4-4x_2x_4$.

解 $$f=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\-1&1&3&-2\\2&3&1&0\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\-1&1&3&-2\\2&3&1&0\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4+r_1}]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&0&5&-3\\0&5&-3&2\\0&-3&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\times r_2]{r_2\leftrightarrow r_4}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&3&-2&0\\0&5&-3&2\\0&0&5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[3\times r_3]{r_3-\frac{5}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&3&-2&0\\0&0&1&6\\0&0&5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-5r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&3&-2&0\\0&0&1&6\\0&0&0&-33\end{pmatrix}$$

所以 $R(f)=R(\boldsymbol{A})=4$.

2 用配方法化下列二次型为标准形,并求出所用的可逆线性变换.

(1) $f=x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2-4x_1x_3+4x_3^2$;

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

解　$f=(x_1+3x_2-2x_3)^2-9x_2^2-4x_3^2+12x_2x_3+5x_2^2+4x_3^2$

$$=(x_1+3x_2-2x_3)^2-4(x_2-\frac{3}{2}x_3)^2+9x_3^2$$

作线性变换

$$\begin{cases}y_1=x_1+3x_2-2x_3\\y_2=x_2-\dfrac{3}{2}x_3\\y_3=x_3\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_1=y_1-3y_2-\dfrac{5}{2}y_3\\x_2=y_2+\dfrac{3}{2}y_3\\x_3=y_3\end{cases}$$

则二次型的标准形为 $f=y_1^2-4y_2^2+9_3^2$.

变换矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-3&-\dfrac{5}{2}\\0&1&\dfrac{3}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(2) $f=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$.

解　注意到 f 不含平方项,但含 x_1x_2 项,故令

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

将其代入 f 得

$$\begin{aligned}f&=(y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1-y_2)y_3+y_3(y_1+y_2)\\&=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3\\&=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}y_1+y_3=z_1\\y_2=z_2\\y_3=z_3\end{cases}$$

年　月　日

即

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$$

所用的可逆线性变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 用初等变换法将下列二次型化为标准形，并求合同变换矩阵.

(1) $f = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_1x_4 + 4x_2x_3 - 4x_2x_4 - 8x_3x_4$;

解 首先写出 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

作合同变换

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \\ \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2 - \frac{1}{2}c_1 \\ c_3 - \frac{1}{2}c_1 \\ c_4 + \frac{1}{2}c_1 \\ c_1 \times \frac{1}{2}}]{\substack{r_2 - \frac{1}{2}r_1 \\ r_3 - \frac{1}{2}r_1 \\ r_4 + \frac{1}{2}r_1 \\ r_1 \times \frac{1}{2}}}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_2\\c_4+c_2}]{\substack{r_3-r_2\\r_4+r_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_3]{r_4-2r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

在可逆线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CY}$ 下

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(2) $f=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

解

$$A=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A\\E_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\&&\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_1+c_2\\c_2-\frac{1}{2}c_1\\c_3-c_1}]{\substack{r_1+r_2\\r_2-\frac{1}{2}r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&-1\\&&\\1&-\frac{1}{2}&-1\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2\times 2]{r_2\times 2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\\&&\\1&-1&-1\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D\\C\end{pmatrix}$$

所以合同变换矩阵

$$C=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

在可逆线性变换 $X=CY$ 下

$$f=y_1^2-y_2^2-y_3^2$$

4 用正交变换将下列二次型化为标准形，并写出所用的正交变换.

(1) $f=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$;

解

$$f=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&-2\\-2&\lambda-4&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-8)\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&\lambda-4&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-8)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=8$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 有

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

求得基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

由 Schmidt 正交化方法得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

单位化为

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3=8$ 有

$$8\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

求得特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

令

年　月　日

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1\ \boldsymbol{P}_2\ \boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 之下有

$$f=2y_1^2+2y_2^2+8y_3^2$$

(2) $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$.

解
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-5)=0$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

对于 $\lambda_1=1,1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

单位化得

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2=2,2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{P}_2$.

对于 $\lambda_3=5,5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,单位化得

$$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

令

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1\ \boldsymbol{P}_2\ \boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 下有 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

5 判断下列二次型是否是正定二次型.

(1) $f=2x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3$;

解　二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 6 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

其各阶顺序主子式

$$2>0$$

$$\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 6\end{vmatrix}=11>0$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 6 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{vmatrix}=38>0$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵, f 是正定二次型.

(2) $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_4-12x_3x_4+2x_1x_4$.

解　二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & 0 & 9 & -6\\ 1 & -3 & -6 & 19\end{pmatrix}$$

其各阶顺序主子式

$$1>0$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=2>0$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{vmatrix}=6>0$$

$$|\boldsymbol{A}|=24>0$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵, f 是正定二次型.

6 求下列二次型中的参数 t, 使二次型正定.

(1) $5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;

解　二次型的矩阵

年　月　日

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&t\end{pmatrix}$$

其顺序主子式

$$5>0$$

$$\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=1>0$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-3&5t-1\\0&-1&2t-1\\-1&-1&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&5t-1\\1&2t-1\end{vmatrix}=t-2$$

所以 $t>2$ 时,二次型正定.

(2) $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$.

解 二次型的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&t&1\\t&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式

$$2>0$$

$$\begin{vmatrix}2&t\\t&1\end{vmatrix}=2-t^2$$

$$|\boldsymbol{A}|=5-3t^2$$

欲使二次型正定,t 应满足

$$\begin{cases}2-t^2>0\\5-3t^2>0\end{cases}$$

解之

$$\begin{cases}-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}\\-\sqrt{\dfrac{5}{3}}<t<\sqrt{\dfrac{5}{3}}\end{cases}$$

故 $-\sqrt{\dfrac{5}{3}}<t<\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ 时二次型正定.

7 设实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的,证明:

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正定的; (2) $k\boldsymbol{A}\,(k>0)$ 是正定的.

证 (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 实对称正定,所以 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$,且 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 所以

$$(\boldsymbol{A}^{-1})'=(\boldsymbol{A}')^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$$

这说明 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是实对称阵. 设 λ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的任一特征值,则 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,由 $\boldsymbol{A}$ 正定知 $\dfrac{1}{\lambda}>0$,故 $\lambda>0$,从而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正定的.

(2) 对任意

$$\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{X} \neq \mathbf{0}$$

由 $\boldsymbol{A}$ 正定，$k > 0$，有

$$\boldsymbol{X}'(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = k\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0$$

故 $k\boldsymbol{A}$ 正定.

8 设实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的，试证 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 是正定的.

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定的实对称阵，所以

$$(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})' = 2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}' = 2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$$

即 $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是实对称的. 任取

$$\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{X} \neq \mathbf{0}$$

有

$$\boldsymbol{X}'(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0$$

所以 $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是正定的.

9 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，试证当实数 k 充分大时，$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 是正定的.

证　因为

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$$

所以

$$(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})' = \boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$$

即 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 是实对称阵. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个实特征值，则存在正交阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1+k & & & \\ & \lambda_2+k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n+k \end{pmatrix}$$

当 $k > \max\{|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|\}$ 时，$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值全大于 0，故 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 正定.

10 设二次型 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$.

(1) 写出 $f(\boldsymbol{X})$ 在正交变换下的一个标准形；

(2) 判断 f 是否正定；

(3) 当 $n=2$ 时，求正定阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

解　(1) 二次型 f 的矩阵

心得 体会 拓广 疑问

$$A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\cdots&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\lambda-1&-\frac{1}{2}&\cdots&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\lambda-1&\cdots&-\frac{1}{2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+\sum\limits_{j=2}^{n}c_j}(\lambda-\frac{n+1}{2})\begin{vmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\cdots&-\frac{1}{2}\\1&\lambda-1&-\frac{1}{2}&\cdots&-\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&\lambda-1&\cdots&-\frac{1}{2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1}(\lambda-\frac{n+1}{2})\begin{vmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\cdots&-\frac{1}{2}\\0&\lambda-\frac{1}{2}&0&\cdots&0\\0&0&\lambda-\frac{1}{2}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-\frac{1}{2})^{n-1}(\lambda-\frac{n+1}{2})$$

所以 A 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=\frac{1}{2},\lambda_n=\frac{n+1}{2}$$

经过正交变换，f 可化为标准形

$$f=\frac{1}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\cdots+\frac{1}{2}y_{n-1}^2+\frac{n+1}{2}y_n^2$$

年 月 日

(2) 因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零，故 f 为正定二次型.

(3) 当 $n=2$ 时

$$\lambda_1=\frac{1}{2},\lambda_2=\frac{3}{2},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_1=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2=\frac{3}{2}$

$$\frac{3}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1\quad\boldsymbol{P}_2)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵. 于是有

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}'$$

$$=P\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}P'P\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}P'$$

$$=\left(P\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}P'\right)^2$$

令

$$B=P\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}P'=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{6}+\sqrt{2} & \sqrt{6}-\sqrt{2}\\ \sqrt{6}-\sqrt{2} & \sqrt{6}+\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

显然 $B'=B$，即 B 为实对称阵，且 $A=B^2$. 又 B 的特征值为 $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{6}}{2}$，皆大于零，由 B 合同于 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}$，知 B 是正定的. 故 B 为正定阵，且 $A=B^2$.

11 设 A,B 都是 n 阶实对称阵，且 A 与 B 的特征值完全相同，试证存在正交阵 C，使 $AC=CB$.

证 设 λ_i 为 A,B 的特征值，$i=1,2,\cdots,n$，因为 A,B 都是实对称阵，所以存在正交矩阵 P,Q，使

$$P'AP=Q'BQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$APQ'=PQ'B$$

因此令 $C=PQ'$，则 $AC=CB$. 因为 P,Q 都是正交阵，所以 C 是正交阵.

12 设 A 是 n 阶正定矩阵，试证 $|A+2E|>2^n$.

证 因为 A 是 n 阶正定矩阵，所以

$$A'=A$$

所以存在可逆矩 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值，且

$$\lambda_i>0\quad(i=1,\cdots,n)$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

因

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}(2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1+2 & & & \\ & \lambda_2+2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n+2\end{pmatrix}$$

故

$$|\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+2)$$

$$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+2)>2^n$$

13 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，证明 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$.

证　先证必要性.

$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$，且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，由 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 为正定阵，有 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}>0$，即 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}>0$，故 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})>0$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$. 这说明线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 仅有零解，故 $R(\boldsymbol{A})=n$，即 $\boldsymbol{A}$ 是实列满秩阵.

再证充分性.

由 $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$，说明 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 是实对称阵. 由 $R(\boldsymbol{A})=n$，故线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 只有零解. 因此 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$，且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，于是

$$\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})>0$$

这说明 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 是正定阵.

14 指出下列方程在平面直角坐标系与空间直角坐标系中各表示什么图形.

(1) $x^2+y^2-2y=0$；

解　原方程为

$$x^2+(y-1)^2=1$$

在平面直角坐标系下表示，以 $(0,1)$ 为圆心，半径为 1 的圆，在空间直角坐标系下表示，以该圆为准线，母线平行于 z 轴的圆柱面.

(2) $x^2=2y$；

解　分别表示抛物线与抛物柱面.

(3) $4x+2y=1$；

解　分别表示直线及过此直线与 z 轴平行的平面.

(4) $\begin{cases}y=5x+1\\ y=2x-3\end{cases}$.

解　分别表示 xOy 平面两条直线的交点 $\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{17}{3}\right)$ 及两平面

$$y=5x+1$$

与

$$y=2x-3$$

年　月　日

的交线，即过点$\left(-\frac{4}{3},-\frac{17}{3}\right)$且平行$z$轴的直线.

15 将xOy坐标面上的双曲线$4x^2-9y^2=36$分别绕x轴及y轴旋转一周，求所生成的两个旋转曲面的方程.

解 双曲线方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

绕x轴旋转一周所得曲面方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2+z^2}{4}=1 \quad \text{（旋转双叶双曲面）}$$

绕y轴旋转一周所得曲面方程为

$$\frac{x^2+z^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1 \quad \text{（旋转单叶双曲面）}$$

16 求母线平行于x轴，且通过曲线

$$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$$

的柱面方程.

解 在曲线方程(两个曲面的交线方程)中消掉x有

$$3y^2-z^2=16$$

即为母线平行于x轴且通过该曲线的柱面方程.

17 求球面

$$x^2+y^2+z^2=9$$

与平面

$$x+z=1$$

的交线在xOy面上的投影的方程.

解 将球面方程与平面方程联立消掉z得母线平行于z轴的投影柱面方程为

$$x^2+y^2+(1-x)^2=9$$

故交线在xOy面上的投影的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+(1-x)^2=9\\ z=0\end{cases}$$

18 将下列曲线的一般方程化为参数方程.

(1)$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ y=x\end{cases}$；

解 将$y=x$代入球面方程有

$$2x^2+z^2=9$$

$$\frac{x^2}{\frac{9}{2}}+\frac{z^2}{9}=1$$

令

年　月　日

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ z=3\sin\theta \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

于是得到曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ z=3\sin\theta \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

(2) $\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4 \\ z=0 \end{cases}$.

解　将 $z=0$ 代入球面方程有

$$(x-1)^2+y^2=3$$

令

$$\begin{cases} x-1=\sqrt{3}\cos\theta \\ y=\sqrt{3}\cos\theta \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

于是曲线参数方程为

$$\begin{cases} x=1+\sqrt{3}\cos\theta \\ y=\sqrt{3}\sin\theta \\ z=0 \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

19 求螺旋线

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}$$

在三个坐标面上的投影的直角坐标方程.

解　在 xOy 面投影为

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=0 \end{cases}$$

消掉 θ 得

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{cases}$$

在 yOz 面投影为

$$\begin{cases} x=0 \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}$$

消掉 θ 得

$$\begin{cases} x=0 \\ y=a\sin\dfrac{z}{b} \end{cases}$$

在 xOz 面投影为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=0\\z=b\theta\end{cases}$$

消掉 θ 得

$$\begin{cases}x=a\cos\dfrac{z}{b}\\y=0\end{cases}$$

20 求旋转抛物面

$$z=x^2+y^2\quad(0\leqslant z\leqslant 4)$$

在三个坐标面上的投影.

解 在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 4\\z=0\end{cases}$$

在 yOz 面上的投影为

$$\begin{cases}y^2\leqslant z\leqslant 4\\x=0\end{cases}$$

在 xOz 面上的投影为

$$\begin{cases}x^2\leqslant z\leqslant 4\\y=0\end{cases}$$

21 求直线

$$L:\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$$

绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面的方程.

解 设 $M_1(x,y,z)$ 是 L 上的任意点,$M(X,Y,Z)$ 是旋转曲面上由 M_1 旋转所生成的点. 则有

$$z=Z,x^2+y^2=X^2+Y^2\tag{*}$$

直线 L 的一般方程为

$$x=1\tag{1}$$

$$y=z\tag{2}$$

(1) 平方加(2) 平方得

$$x^2+y^2=z^2+1\tag{3}$$

将(*)代入(3)得

$$X^2+Y^2-Z^2=1$$

此即 L 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面方程,为旋转单叶双曲面.

22 求以(0,0,0)为顶点,且以

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\y=b\end{cases}$$

为准线的锥面方程.

解 设 $M_1(x,y,z)$ 是准线上任意点,$M(X,Y,Z)$ 是联结 O,M_1 直线

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

上锥面的任意点，$OM \parallel OM_1$.

显然有

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}$$

且

$$y=b$$

即

$$\begin{cases}x=Xt\\ y=Yt\\ z=Zt\end{cases}\quad(-\infty<t<+\infty)\tag{*}$$

由准线方程有

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,y=b$$

即

$$\frac{Y}{b}t=1$$

将(*)代入

$$\frac{X^2}{a^2}t^2+\frac{Z^2}{c^2}t^2=1$$

得

$$(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Z^2}{c^2})t^2=\frac{Y^2}{b^2}t^2$$

即

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$$

为过(0,0,0)的锥面方程.

23 指出

$$\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}-x=0$$

所表示的曲面是由 xOy 面上什么曲线绕什么轴旋转而成的.

解
$$\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}-x=0$$

即

$$\frac{y^2+z^2}{2}=x$$

为旋转抛物面，是由$\begin{cases}x=\dfrac{y^2}{2}\\ z=0\end{cases}$绕 x 轴旋转而成.

24 指出下列方程的图形是什么曲面.

(1)$16x^2+9y^2+16z^2=144$；

解　原曲面方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 椭球面.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(2) $z=(y-1)^2+x^2$;

解 旋转抛物面.

(3) $4x^2-4y^2+36z^2=144$;

解 原曲面方程为 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{4}=1$ 单叶双曲面.

(4) $x=(y+1)^2+\frac{z^2}{4}$;

解 椭圆抛物面.

(5) $x^2+4y^2-z^2+9=0$;

解 原曲面方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}-\frac{z^2}{9}=-1$ 双叶双曲面.

(6) $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

解 圆锥面的上半部分.

(7) $x^2+2y^2-z^2=0$;

解 二次锥面.

(8) $z=xy$.

解 马鞍面.

25 指出下列方程所表示的曲线.

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25\\x=3\end{cases}$;

解 为平面 $x=3$ 上圆心为 $(3,0,0)$,半径 $R=4$ 的圆.

(2) $\begin{cases}x^2+4y^2+9z^2=36\\y=1\end{cases}$;

解 为平面 $y=1$ 上的椭圆 $\frac{x^2}{32}+\frac{z^2}{\frac{32}{9}}=1$.

(3) $\begin{cases}x^2-4y^2+z^2=25\\x=-3\end{cases}$;

解 为平面 $x=-3$ 上的双曲线 $\frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$.

(4) $\begin{cases}y^2+z^2-4x+8=0\\y=4\end{cases}$;

解 为平面 $y=4$ 上的抛物线 $x=\frac{1}{4}z^2+6$.

(5) $\begin{cases}\frac{y^2}{19}-\frac{z^2}{14}=1\\x-2=0\end{cases}$.

解 为平面 $x=2$ 上的双曲线 $\frac{y^2}{19}-\frac{z^2}{14}=1$.

26 画出下列曲面围成的立体的图形.

(1) $2x+3y+6z=6, x=0, y=0, z=0$;

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

解　平面的截距式方程为

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$$

平面 $2x+3y+6z=6$ 与三个坐标面在第一卦限所围的四面体(图14)

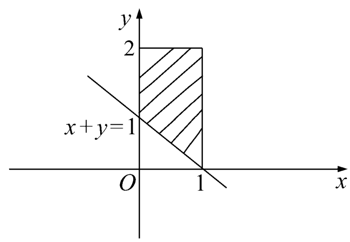

图 14

(2)$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$,$z=0$;

解　为 $x^2+y^2+z^2=1$ 球面的上半球面与 xOy 所围的上半球体(图15).

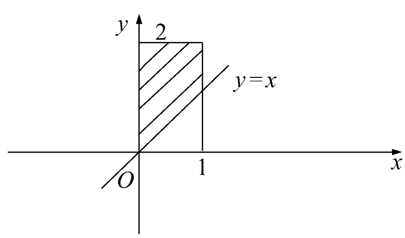

图 15

(3)$x^2+y^2-z+1=0$,$z=3$;

解　旋转抛物面 $z=x^2+y^2+1$ 与平面 $z=3$ 所围的立体(图 16).

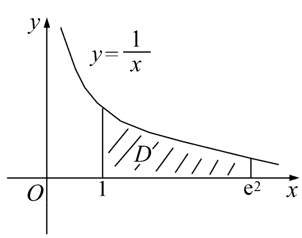

图 16

(4)$y=x^2$,$y=2$,$z=0$,$z=2$.

解　由平面 $z=0$,$z=2$,$y=2$ 截抛物柱面 $y=x^2$ 的立体(图 17).

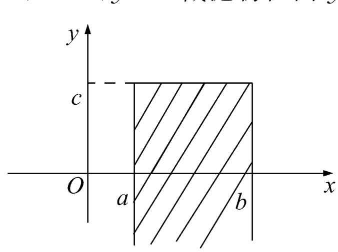

图 17

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

27 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

问 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面.

解 二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & 3\end{pmatrix}$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 1 & -3\\ 1 & \lambda-5 & 3\\ -3 & 3 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -(\lambda-4)(\lambda-6) & -3(\lambda-4)\\ 1 & \lambda-5 & 3\\ 0 & 3(\lambda-4) & \lambda+6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-6 & 3\\ 3(\lambda-4) & \lambda+6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)(\lambda^2-9\lambda)=0$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$. 在正交变换下

$$f(x_1,x_2,x_3)=1$$

化为

$$0y_1^2+4y_2^2+9y_3^2=1$$

为椭圆柱面.

28 用正交变换和坐标平移将下面的二次曲面方程化为标准方程

$$x_1^2+x_2^2-2x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3+6x_1+6x_2+6x_3-\frac{15}{2}=0$$

解 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ 4 & 1 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4 & 2\\ -4 & \lambda-1 & 2\\ 2 & 2 & \lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -\lambda-3 & -\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda+3\\ 0 & \lambda+3 & 2\lambda+6\\ 2 & 2 & \lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+3)\begin{vmatrix}\lambda+3 & \lambda^2+\lambda-6\\ 1 & 4\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+3)^2\begin{vmatrix}1 & \lambda-2\\ 1 & 4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+3)^2(\lambda-6)=0$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=-3$.

年 月 日

对于 $\lambda_1=6$

$$6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-4&2\\-4&5&2\\2&2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2=\lambda_3=-3$

$$-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&-4&2\\-4&-4&2\\2&2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

由 Schmidt 正交化得

$$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\sqrt{2}\\\frac{1}{3}\sqrt{2}\\\frac{4}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3}\sqrt{2}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3}\sqrt{2}\\\frac{1}{3}&0&\frac{4}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

在正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 下,原方程为

$$6y_1^2-3y_2^2-3y_3^2+6(-y_1+0y_2+\sqrt{2}y_3)-\frac{15}{2}=0$$

配方有

$$6\left(y_1-\frac{1}{2}\right)^2-3y_2^2-3\left(y_3-\sqrt{2}\right)^2=3$$

心得 体会 拓广 疑问

作平移变换

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - \dfrac{1}{2} \\ y_2 \\ y_3 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

则
$$6z_1^2 - 3z_2^2 - 3z_3^2 = 3$$

标准方程为

$$\frac{z_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{z_2^2}{1} - \frac{z_3^2}{1} = 1$$

为双叶双曲面.

29 求曲线 $C: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z^2 = 2y \end{cases}$ 在 xOy 坐标面和 yOz 坐标面上的投影方程,并画出草图.

解 (1) 消去 z 得柱面方程

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

故 C 在 xOy 坐标面的投影方程为

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad (图\ 18)$$

表示以(0,1,0)为圆心,半径等于 1 的圆.

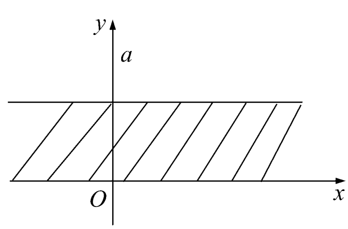

图 18

(2)$z^2 = 2y$ 是包含 C 的母线平行于 x 轴的柱面. 曲线

$$\begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases}$$

包含 C 在 yOz 坐标面的投影,C 在 yOz 坐标面的投影曲线为

$$\begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases} \quad (0 \leqslant y \leqslant 2) \quad (图\ 19)$$

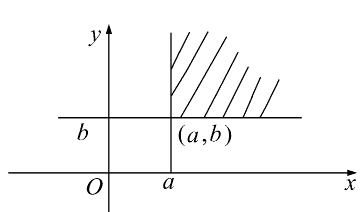

图 19

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

30 求曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\y^2+z^2=a^2\end{cases}(a>0)$ 在各坐标面上的投影方程，并画出草图.

解　(1) $x^2+y^2=a^2$ 是通过 C，母线垂直于 xOy 坐标面的柱面方程 C 在 xOy 坐标面的投影曲线为

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\z=0\end{cases}$$

(2) 与(1)类似，C 在 yOz 坐标面的投影曲线的方程为

$$\begin{cases}y^2+z^2=a^2\\x=0\end{cases}$$

(3) 消去 y 得通过 C，母线垂直于 xOz 坐标面的柱面

$$(x+z)(x-z)=0$$

这是两个相交平面，于是得 C 在 xOz 坐标面的投影方程

$$\begin{cases}(x+z)(x-z)=0\\y=0\end{cases}\quad(|x|\leqslant a)$$

这是两条相交直线段(图 20).

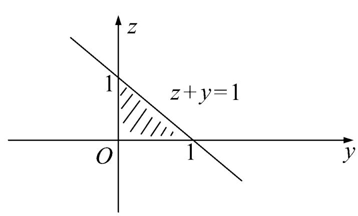

图 20

心得 体会 拓广 疑问

综合练习 100 题

一、填空题

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{AA}'=\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\underline{0}$.

2. 若 4 阶行列式 D 的某一行的所有元素及其余子式都相等，则 $D=\underline{0}$.

3. 在一个 n 阶行列式中，如果等于零的元素多于 n^2-n 个，那么这个行列式 $D=\underline{0}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，若 $m>n$，则 $|\boldsymbol{AB}|=\underline{0}$.

5. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$，$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{B}=\underline{\boldsymbol{0}}$.

6. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}=\underline{\boldsymbol{E}}$.

7. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'=\underline{\boldsymbol{E}}$.

8. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=1$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $|3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=\underline{-3^{n-1}}$.

9. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}|=0$，$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$，则 $R(\boldsymbol{A})=\underline{n-1}$.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=1$，$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=2$，则 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{vmatrix}=\underline{2}$.

11. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$.

12. $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，则 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\end{vmatrix}=\underline{(-1)^{mn}ab}$.

13. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\underline{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})}$.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，其特征值为 $3,-1,2$，则 $|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}|=\underline{100}$.

15. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&1\\0&1&-1&0&0&1\\0&0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&-1&1\\-1&0&0&0&1&a\end{pmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{A})=\underline{\begin{cases}4, & \text{当 } a=-4 \text{ 时}\\5, & \text{当 } a\neq-4 \text{ 时}\end{cases}}$.

16. 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和都等于 0，且 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，则 $\boldsymbol{AX}=$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$\mathbf{0}$ 的通解为$\underline{k(1,1,\cdots,1)',k\text{ 为任意常数}}$.

17. 矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 满足 $m<n$，$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'|\neq \mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的基础解系一定由$\underline{n-m}$ 个线性无关的解向量构成.

18. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是$\underline{0\text{ 或 }1\text{ 或 }-1}$.

19. 如果 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)'$ 是方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，则$\underline{a=-3;b=0}$.

20. 已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，且 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}$，则 $|\lambda\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}|=\underline{3(\lambda-1)(3\lambda-1)}$.

21. 已知 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 的特征值为 1，2，3，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^*|=\underline{\dfrac{7^3}{6}}$.

22. 已知 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则 $|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}|=\underline{0}$.

23. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 的特征值为$\underline{0(n\text{ 重})}$.

24. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，则$\underline{0}$一定是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

25. 直线$\begin{cases}10x+2y-2x=27\\x+y-z=0\end{cases}$的单位方向向量为$\underline{\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)}$.

26. 已知 $D=\begin{vmatrix}2&7&6&8\\4&4&4&4\\2&4&7&9\\8&1&8&8\end{vmatrix}$，$A_{41},A_{42},A_{43},A_{44}$ 为 D 中第 4 行元素的代数余子式，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\underline{0}$.

27. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，$\boldsymbol{X}$ 是 3 维列向量，使得 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$，记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X})$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\underline{\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}}$.

28. 若两个非零几何向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\underline{\dfrac{\pi}{2}}$.

29. 直线 L：$\begin{cases}x+2y-z-6=0\\2x-y+z-1=0\end{cases}$的参数方程为$\underline{\begin{cases}x=\dfrac{8}{5}-t\\y=\dfrac{11}{5}+3t\\z=5t\end{cases}}$.

30. 圆$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0\\2x+2y+z+1=0\end{cases}$的半径 $R=\underline{3}$.

二、选择题

1. 设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 有非零解的充要条件是(C).

年 月 日

(A)$r=n$

(B)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关

(C)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

(D)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是(C).

(A) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解

(B) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解

(C) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

(D)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的任两解之和还是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解

3. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的系数行列式为零，则(C).

(A) 方程组有无穷多解

(B) 方程组无解

(C) 若方程组有解，则有无穷多解

(D) 方程组有唯一解

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，对于线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$，下列结论正确的是(A).

(A) 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 m，则方程组有解

(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 n，则方程组有无穷多解

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 n，则方程组有唯一解

(D) 若 $m>n$，则方程组无解

5. 设 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 3，则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为(C).

(A)3　　(B)4　　(C)0　　(D)2

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$n>2$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则下列结论正确的是(B).

(A)$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|$

(B) 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$

(C)$\boldsymbol{A}^*=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$

(D)$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^*)$

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}$ 非零，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则必有(D).

(A)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$　(B)$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$　(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$　(D) $|\boldsymbol{B}|=0$

8. 设有两个平面方程

$$\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2y+d_2=0$$

如果 $R\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$，则一定有(D).

(A)π_1 与 π_2 平行　　(B)π_1 与 π_2 垂直

(C)π_1 与 π_2 重合　　(D)π_1 与 π_2 相交

心得 体会 拓广 疑问

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征根，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征根之一是(D).

(A)λ^{n-1}　(B)$\lambda\,|\boldsymbol{A}|$　(C)λ　(D)$\lambda^{-1}\,|\boldsymbol{A}|$

10. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的(B).

(A) 充分必要条件

(B) 充分而非必要条件

(C) 必要而非充分条件

(D) 既非充分条件也非必要条件

11. 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与某对角阵相似，则(C).

(A)$\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值

(B)$\boldsymbol{A}$ 一定是 n 阶实对称阵

(C)$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

(D)$\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量正交

12. 下列说法正确的是(D).

(A) 若有全不为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

(B) 若有一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\boldsymbol{0}$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

(C) 若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关

(D) 任意 4 个 3 维几何向量一定线性相关

13. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，满足：对任意 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 都有 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$，下列结论中正确的是(D).

(A) 若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

(B) 若 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}$

(C) 若 $\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

(D) 若 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

14. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵，则必有(B).

(A)$\boldsymbol{AB}$ 正定　(B)$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$ 正定　(C)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 正定　(D)$k\boldsymbol{A}$ 正定

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则(C).

(A)$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵　(B)$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵

(C) $(\boldsymbol{A}^*)^2=\boldsymbol{E}$　(D)$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=n^2$

16. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，下列结论中错误的是(D).

(A) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆，则 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}$ 也可逆

(B) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也是实对称正定矩阵

(C) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正交矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵

(D) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是实对称矩阵

17. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，下列结论中错误的是(B).

(A) 若 $\boldsymbol{A}$ 经列的初等变换化成 $\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 经行的初等变换化成 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}$

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 经行的初等变换化成 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解

(D) 若 $\boldsymbol{A}$ 经列的初等变换化成 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

18. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则必有(C).

(A)$\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$　　(B)$\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$

(C)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　　(D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

19. 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则(B).

(A)$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$　　(B) $|\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}|$

(C)$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}^*$　　(D)$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}$

20. 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则(D).

(A)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆　　(B)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆

(C)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$　　(D)$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$ 时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 不可逆

21. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(A).

(A) 合同且相似　　(B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似　　(D) 不合同且不相似

22. 实二次型 $f=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}$ 为正定二次型的充要条件是(C).

(A)f 的负惯性指数是 0

(B) 存在正交阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}$

(C) 存在可逆阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}$

(D) 存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$

23. 设 $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$，则下列结论中错误的是(D).

(A) 线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 正定

(B)$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$

(C)$\boldsymbol{A}$ 的特征值大于等于 0

(D)$R(\boldsymbol{B})=m\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 正定

24. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$，则 $|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}^{-1}|$ 等于(C).

(A)a　　(B) $\dfrac{1}{a}$　　(C)a^{n-2}　　(D)a^n

25. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，则必有(D).

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|^{-1}$

年　月　日

(B) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}$

(C) $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$

(D) $|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{BA}|$

26. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的两个不同的解,$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,k_1,k_2 为任意常数,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为(B).

(A)$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2}{2}$

(B)$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}$

(C)$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+\boldsymbol{\eta}_1$

(D)$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)$

27. 设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$,则 L_1 与 L_2 的夹角为(C).

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

28. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维列向量,且 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{\beta}_1|=m$,$|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\alpha}_3|=n$,则 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$ 等于(D).

(A)$m+n$ (B)$-(m+n)$ (C)$m-n$ (D)$n-m$

29. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异($n>2$),则(C).

(A) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$

(B) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$

(C) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$

(D) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$

30. 设矩阵 $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$ 的秩是 3,则直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$(A).

(A) 相交于一点 (B) 重合 (C) 平行但不重合 (D) 异面

三、计算题

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^5$ 及 $|\boldsymbol{A}^{10}|$.

解 由

心得 体会 拓广 疑问

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & \lambda+1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & \lambda+1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3(\lambda+4)$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,\lambda_4=-4$.

对 $\lambda=0$，由 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=\boldsymbol{0}$，可解得三个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0,0)',\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1,0)',\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,0,-1)'$$

对 $\lambda=-4$，由 $(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=\boldsymbol{0}$，可解得特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_4=(1,-1,-1,1)'$$

令

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_3\boldsymbol{T}_4)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -4\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{TD}$，得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{TDT}^{-1},\boldsymbol{T}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{T}|}\boldsymbol{T}^*=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -3\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -3\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\times\frac{1}{4}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{TD}^5\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -4^5\end{pmatrix}\times$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -3\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=2^8\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=2^8\boldsymbol{A}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

又 $\boldsymbol{A}^{10}=2^{16}\boldsymbol{A}^{2}$，$|\boldsymbol{A}^{10}|=|2^{16}\boldsymbol{A}^{2}|=2^{64}|\boldsymbol{A}^{2}|=2^{64}|\boldsymbol{A}|^{2}=0$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\a&0&c\\b&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

(1) a,b,c 满足什么条件时，$\boldsymbol{A}$ 的秩是 3；

(2) a,b,c 取何值时，$\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵；

(3) 取一组 a,b,c，使 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵.

解 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\a&0&c\\b&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a&0&c\\0&1&0\\2b&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a-2bc&0&0\\0&1&0\\2b&0&1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}a-2bc&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

当 $a\neq 2bc$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的秩是 3.

(2)

$$\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix}0&a&b\\1&0&0\\0&c&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

要想 $\boldsymbol{A}$ 成为对称矩阵，应满足

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'$$

即

$$a=1,b=c=0$$

(3) 要想 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵，应满足

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$$

即

$$\begin{pmatrix}0&a&b\\1&0&0\\0&c&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\a&0&c\\b&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

亦即

$$\begin{cases}a^2+b^2=1\\ac+\frac{1}{2}b=0\\c^2+\frac{1}{2}=1\end{cases}$$

解得

$$a=\frac{1}{2},b=-\frac{\sqrt{3}}{2},c=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

年 月 日

3. 设有三维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$$

问 λ 取何值时：

(1)$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一；

(2)$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表达式不唯一；

(3)$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解法 1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}$$

由

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}0&-\lambda&-\lambda(\lambda+2)&-\lambda^2(\lambda+1)\\0&\lambda&-\lambda&\lambda(1-\lambda)\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}0&0&-\lambda^2-3\lambda&\lambda(1-2\lambda-\lambda^2)\\0&\lambda&-\lambda&\lambda(1-\lambda)\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda^2\\0&\lambda&-\lambda&\lambda(1-\lambda)\\0&0&-\lambda(\lambda+3)&\lambda(1-2\lambda-\lambda^2)\end{pmatrix}$$

(1) 当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$，此时 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一.

(2) 当 $\lambda=0$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1<3$，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式不唯一.

(3) 当 $\lambda=-3$ 时，$R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解法 2 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}$$

则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3)$$

(1) 当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一.

(2) 当 $\lambda=0$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1<3$，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式不唯一.

年 月 日

(3) 当 $\lambda=-3$ 时,$R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$,$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

4. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$$

对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$$

又

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$$

求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$($n$ 为正整数).

解 由于

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

又由于

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1=\lambda_1^n\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_2^n\boldsymbol{\xi}_2=2^n\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_3=\lambda_3^n\boldsymbol{\xi}_3=3^n\boldsymbol{\xi}_3$$

所以

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^n(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\xi}_1,2^n\boldsymbol{\xi}_2,3^n\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2^n&3^n\\1&2^{n+1}&3^{n+1}\\1&2^{n+2}&3^{n+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}$$

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$:

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;(2) 求 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

解 (1) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+5)=0.$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-5$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵,$\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $1,1,-5$,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-5\end{pmatrix}$$

于是

心得 体会 拓广 疑问

$$T^{-1}A^{-1}T=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-\frac{1}{5}\end{pmatrix},T^{-1}(E+A^{-1})T=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

故 $E+A^{-1}$ 的特征值为 $2,2,\frac{4}{5}$.

6. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,k,1)'$ 是 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆阵 A^{-1} 的特征向量，试求常数 k 的值.

解 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 A 的特征值为 λ 的特征向量，则 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，即

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$$

亦即

$$\begin{cases}k+3=\lambda\\2k+2=\lambda k\end{cases}$$

解得

$$k^2+k-2=0$$

即 $k=1$ 或 -2.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，试求：

(1) a 的值；(2) 正交阵 P，使 $P'AP$ 为对角阵.

解 (1) $B=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&1-a&1-a^2&-2-a\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(1-a)(2+a)&-2-a\end{pmatrix}$$

要使 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，必须

$$R(A)=R(B)<3$$

因此 $a=-2$.

(2) 此时

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 2\\ -1 & \lambda+2 & -1\\ 2 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3.$

对于 $\lambda_1=0$，由

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{0}$$

得特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2=3$，由

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}$$

得特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3=-4$，由

$$\begin{pmatrix}-4 & -1 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -4\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0}$$

得特征向量

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$$

此时 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵,并且 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵$\begin{pmatrix}0&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}$.

8. 已知线性方程组(I)$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=0\end{cases}$的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{12}\\b_{13}\\b_{14}\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}b_{21}\\b_{22}\\b_{23}\\b_{24}\end{pmatrix}$$

试求线性方程组(II)$\begin{cases}b_{11}y_1+b_{12}y_2+b_{13}y_3+b_{14}y_4=0\\b_{21}y_1+b_{22}y_2+b_{23}y_3+b_{24}y_4=0\end{cases}$的通解.

解 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}&b_{14}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}&b_{24}\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 为(I)的一个基础解系得 $\boldsymbol{AB}'=\boldsymbol{0}$. 由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关,所以 $R(\boldsymbol{B})=2$,又 $\boldsymbol{BA}'=\boldsymbol{0}$,所以

$$\boldsymbol{\eta}_1=(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14})',\boldsymbol{\eta}_2=(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24})'$$

是 $\boldsymbol{B}$ 的基础解系,通解为

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$$

k_1,k_2 为任意常数.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

9. 已知方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$$

有三个线性无关的解向量，求 a,b 的值及方程组的通解.

解 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&b-a&1+a\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&4-2a&b+4a-5&4-2a\end{pmatrix}$$

由于该非齐次线性方程组有三个线性无关的解向量，故

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta}),n-R(\boldsymbol{A})+1=3$$

其中 $n=4$. 于是

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=2$$

从而

$$a=2,b=-3$$

该方程组与方程组

$$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\x_2=x_3-5x_4-3\end{cases}$$

同解. 令

$$x_3=k_1,x_4=k_2$$

得该方程组的通解

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k_1+4k_2+2\\k_1-5k_2-3\\k_1\\k_2\end{pmatrix}$$

$$=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$，问当 k 为何值时，存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵，并求出一个 $\boldsymbol{P}$ 及相应的对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$.

年 月 日

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & 2\\ k & \lambda+1 & -k\\ -4 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 2\\ 0 & \lambda+1 & -k\\ \lambda-1 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & \lambda+1 & -k\\ 1 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)^2=0$$

解得特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-1$.

当 $\lambda=1$ 时

$$R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$$

$\boldsymbol{A}$ 有 1 个线性无关的特征向量.

当 $\lambda=-1$ 时

$$-1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 2\\ k & 0 & -k\\ -4 & -2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ k & 0 & -k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & \frac{k}{2} & -\frac{k}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵,所以

$$R(-1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$$

从而 $k=0$. 因此 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$,设对应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1$,由

$$\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & -2 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1=0$$

得

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,1)'$$

设对应于 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,由

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & -2 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$$

得

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,-2,0)',\boldsymbol{\xi}_3=(0,1,1)'$$

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆阵,相应的对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

11. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{B}$.

解 由

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$$

得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$$

由于

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

12. 已知将 3 阶可逆阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行的 2 倍加到第 3 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{AB}^{-1}$.

解 令

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$$

由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 均可逆，故 $\boldsymbol{B}$ 可逆，所以

$$\boldsymbol{AB}^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

13. 设有线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3=0\\bx_1+ax_2+bx_3=0\\bx_1+bx_2+ax_3=0\end{cases}\quad (a,b\text{ 不全为 }0)$$

(1) a,b 为何值时方程组有非零解；

(2) 写出相应的基础解系及通解；

(3) 求解空间的维数.

解 (1) 齐次方程组有非零解的充要条件是系数行列式

$$\begin{vmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{vmatrix}=0$$

即

$$(a-b)^2(a+2b)=0$$

故 $a=b\neq 0$ 或 $a=-2b\neq 0$ 时,方程组有非零解.

(2) 当 $a=b\neq 0$ 时,方程组为

$$x_1+x_2+x_3=0$$

即

$$x_1=-x_2-x_3$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

通解为

$$k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数})$$

当 $a=-2b\neq 0$ 时,方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0\\x_1-2x_2+x_3=0\\x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$$

解得基础解系为

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

通解为

$$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(k\text{ 为任意常数})$$

(3) 当 $a=b\neq 0$ 时,解空间维数为 2;当 $a=-2b\neq 0$ 时,解空间维数为 1.

14. 设二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$$

经正交变换

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$$

化成

$$f=y_2^2+2y_3^2$$

其中

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)',\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,y_3)'$$

$\boldsymbol{P}$ 是 3 阶正交矩阵,求 a,b 及满足上述条件的一个 $\boldsymbol{P}$.

解 正交变换前后,二次型的矩阵分别为

心得 体会 拓广 疑问

$$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

故二次型可以写成

$$f=X'AX$$

和

$$f=Y'BY$$

且

$$B=P'AP=P^{-1}AP$$

由 A,B 相似知

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$$

即

$$\lambda^3-3\lambda^2+(2-a^2-b^2)\lambda+(a-b)^2=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda$$

比较系数得

$$a=0,b=0$$

由

$$P^{-1}AP=B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

知 A 的特征值是 0,1,2.

解方程组

$$(0E-A)x=\mathbf{0}$$

得

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$P_1=\frac{\xi_1}{|\xi_1|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

解方程组 $(E-A)x=\mathbf{0}$,得

$$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},P_2=\xi_2$$

解方程组 $(2E-A)x=\mathbf{0}$,得

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

年 月 日

单位化得

$$\boldsymbol{P}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{|\boldsymbol{\xi}_3|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1\ \boldsymbol{P}_2\ \boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

15. 求直线 $L_1:\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x+y-z-2=0\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+2y-z-2=0\\x+2y+2z+4=0\end{cases}$ 的公垂线方程.

解 L_1 与 L_2 的标准式及参数形式分别为

$$L_1:\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}\text{ 与}\begin{cases}x=1\\y=t\\z=t\end{cases}$$

$$L_2:\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{0}\text{ 与}\begin{cases}x=2\lambda\\y=-\lambda\\z=-2\end{cases}$$

L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(0,1,1)$，L_2 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(2,-1,0)$. 设 L_1 与 L_2 公垂线垂足为

$$A(1,t,t),B(2\lambda,-\lambda,-2)$$

则应有

$$\overrightarrow{AB}=(2\lambda-1,-\lambda-t,-2-t)$$

且

$$\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{s}_1=-\lambda-2t-2=0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{s}_2=5\lambda+t-2=0$$

解得

$$\begin{cases}t=-\frac{4}{3}\\\lambda=\frac{2}{3}\end{cases}$$

所以

$$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(1,2,-2)$$

故公垂线方程为

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\frac{z-1}{1}=\frac{y+\frac{4}{3}}{2}=\frac{z+\frac{4}{3}}{-2}$$

16. 求直线 $L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi: x+2y-z=0$ 上的投影方程.

解 设通过直线 L 垂直于平面 π 的平面 π_0 的方程为

$$2x-y+z-1+\lambda(x+y-z+1)=0$$

π_0 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=(2+\lambda,-1+\lambda,1-\lambda)$$

平面 π 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$$

由 $\pi_0\perp\pi$,知

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}=0$$

得

$$2+\lambda+2(-1+\lambda)-(1-\lambda)=0$$

解得 $\lambda=\frac{1}{4}$. 从而得 π_0 方程为

$$3x-y+z-1=0$$

所以所求直线 L_0 方程为

$$\begin{cases}3x-y+z-1=0\\x+2y-z=0\end{cases}$$

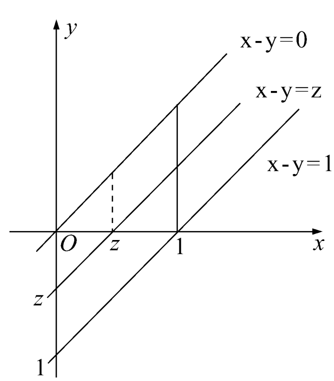

图 21

17. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求一个可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,所以有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$$

年 月 日

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-(5+a)\lambda^2+(5a+3)\lambda+6-6a$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-2)^2(\lambda-b)=\lambda^3-(b+4)\lambda^2+(4b+4)\lambda-4b$$

比较两式系数可得

$$\begin{cases}5a+3=4b+4\\ 6-6a=-4b\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=5\\ b=6\end{cases}$$

(2) 因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 6\end{pmatrix}$ 相似,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2,2,6

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

解

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 2 的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

解

$$(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 6 的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1\ \boldsymbol{\xi}_2\ \boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

18. 已知 3 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3,2,−2,$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{pmatrix}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 3,2 的特征向量，

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 −2 的一个特征向量；

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 将二次型 $f=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}$ 化为标准形.

解 (1) 设 −2 对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}$,则有

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{X})=0,(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{X})=0$$

可取

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

(2) 把特征向量规范正交化后得

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

则在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 下 f 化为 $f=3y_1^2+2y_2^2-2y_3^2$.

19. 已知二次型 $f=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2,求 c 及此二次型对应矩阵的特征值,指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 代表三维几何空间中何种几何曲面.

解 二次型 f 所对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}$$

因 f 的秩为 2,即 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,故有 $|\boldsymbol{A}|=0$,所以 $c=3$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0$$

得特征值为 0,4,9. 与特征值相对应的单位特征向量分别为

$$\boldsymbol{P}_1=(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})',\boldsymbol{P}_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)',\boldsymbol{P}_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})'$$

年 月 日

取正交变换阵

$$P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

则在正交线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 下,方程

$$f(x_1,x_2,x_3)=1$$

化为椭圆柱面

$$4y_2^2+9y_3^2=1$$

20. 设有数列 $a_0=0, a_1=1, a_2=a_0+a_1, a_3=a_2+a_1, \cdots, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}, \cdots$,求 $a_{1\,000}$.

解法 1 由

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{pmatrix} a_{1\,000} \\ a_{999} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{999}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

并且

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

分别是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 的特征向量.

记

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

心得 体会 拓广 疑问

则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^{999}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}^{999}\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{1\,000}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{1\,000}] & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{1\,000}\times\frac{5-\sqrt{5}}{10}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{1\,000}\times\frac{5+\sqrt{5}}{10}\\ \frac{\sqrt{5}}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{999}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{999}] & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{999}\times\frac{5-\sqrt{5}}{10}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{999}\times\frac{5-\sqrt{5}}{10}\end{pmatrix}$$

所以

$$a_{1\,000}=\frac{\sqrt{5}}{5}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{1\,000}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{1\,000})$$

解法 2 考察

$$\widetilde{D}_n=\begin{vmatrix}1 & -1 & & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ & 1 & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 & -1\\ & & & & 1 & 1\end{vmatrix}$$

由行列式展开定理得

$$\widetilde{D}_n=\widetilde{D}_{n-1}+\widetilde{D}_{n-2}(n=3,4,\cdots)$$

补充定义 $\widetilde{D}_{-1}=0$,$\widetilde{D}_0=1$,于是

$$a_n=\widetilde{D}_{n-1}(n=0,1,\cdots) \tag{1}$$

为求 $\widetilde{D}_{999}$,引进辅助行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ & & & & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

将 D_n 按第一行展开可得

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n \tag{2}$$

由 α,β 的对称性可得

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n \tag{3}$$

若 $\alpha\neq\beta$,联立(2),(3) 并解之

年 月 日

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \tag{4}$$

若 $\alpha = \beta$，由(2) 或(3)

$$D_n = \alpha D_{n-1} + \alpha^n = \alpha(\alpha D_{n-2} + \alpha^{n-1}) + \alpha^n = \cdots =$$
$$(n-1)\alpha^n + \alpha^{n-1} D_1 = (n+1)\alpha^n$$

解

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

得

$$\alpha_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta_0 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

由(1) 和(4) 知

$$a_{1\,000} = \widetilde{D}_{999} = \begin{vmatrix} \alpha_0+\beta_0 & \alpha_0\beta_0 & & & & \\ 1 & \alpha_0+\beta_0 & \alpha_0\beta_0 & & & \\ & 1 & \alpha_0+\beta_0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \alpha_0+\beta_0 & \alpha_0\beta_0 \\ & & & & 1 & \alpha_0+\beta_0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\alpha_0^{1\,000} - \beta_0^{1\,000}}{\alpha_0 - \beta_0} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000}\right]$$

四、证明题

1. 证明 $D_n = \begin{vmatrix} 6 & 9 & & & & \\ 1 & 6 & 9 & & & \\ & 1 & 6 & 9 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 6 & 9 \\ & & & & 1 & 6 \end{vmatrix} = (n+1)3^n$（$n$ 为正整数）.

证 (1)$n=1$ 时，$D_1 = 6 = (1+1)\times 3$.

(2) 假设当 $n \leqslant k$ 时结论成立，当 $n = k+1$ 时，若

$$k+1=2$$

由

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 = (2+1)\times 3^2$$

知命题成立.

若 $k+1 \geqslant 3$，将 D_{k+1} 按第一行展开得

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix}6&9&&&&\\1&6&9&&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&1&6&9\\&&&&1&6\end{vmatrix}=6D_k-9D_{k-1}=6(k+1)3^k-9\times k\times 3^{k-1}$$

$$=(k+2)\times 3^{k+1}$$

由数学归纳法，对一切自然数 n 结论都成立.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵，证明：若存在大于等于 2 的自然数 m 使 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$.

证 因 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$，所以 $|\boldsymbol{A}|^m=|\boldsymbol{A}^m|=0$，又 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵，故 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 1$. 所以 $\boldsymbol{A}$ 经初等变换可以化为

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

于是存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\quad 0)\boldsymbol{Q}$$

取

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{V}'=(1\quad 0)\boldsymbol{Q}$$

则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}'$$

令 $\boldsymbol{V}'\boldsymbol{U}=k$，则

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}'=k\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}'=k\boldsymbol{A}$$

由 $\boldsymbol{A}^m=k^{m-1}\boldsymbol{A}=0$ 知 $k=0$，或者 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是幂等阵（$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$），试证：

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 0；

(2) $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)=n$；

(3) $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化；

(4) $R(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

证 (1) 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，则存在 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$. 于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}$$

由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 知，$\lambda^2\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$. 由 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda^2=\lambda$，故 $\lambda=1$ 或 0.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 知，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$，于是

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n \tag{1}$$

由

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}_n$$

知

$$n=R(\boldsymbol{E}_n)\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) \tag{2}$$

年 月 日

综合(1),(2)可得

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)=n$$

(3) 记

$$R(\boldsymbol{A})=r_1,R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)=r_2$$

当 $r_1=0$ 或 $r_2=0$ 时,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n$,命题显然成立.以下设

$$r_1\neq 0,r_2\neq 0$$

由

$$r_1+r_2=n$$

知

$$0<r_1<n,0<r_2<n$$

取

$$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}$$

为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$$

的基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}$$

是

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

的基础解系,则

$$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量,故由

$$(n-r_1)+(n-r_2)=n$$

知 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r_1},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

(4) 由(1),(3)可知存在可逆阵 $\boldsymbol{T}$ 使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \\ & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

于是 $R(\boldsymbol{A})=r=\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正定矩阵,证明:$\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于 0.

证 因 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 正定,则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$,使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P'}_1\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P'}_2\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P'}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P'}_2\boldsymbol{P}_2$$

$$\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P'}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P'}_2=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P'}_2)'(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P'}_2)$$

因 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$ 可逆,则 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P'}_2$ 可逆,从而$(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2')'(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2')$ 正定,它的特征值全大于 0.因 $\boldsymbol{AB}$ 与$(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2')'(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2')$ 相似,从而 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于 0.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,试证:

(1) 若 $\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关;

(2)$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解一定是 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解;

(3)$R(\boldsymbol{A}^{n+1})=R(\boldsymbol{A}^{n})$.

证 (1) 反证法:

若 $\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,则存在不全为零的数 $l_0,l_1,\cdots,l_k$,使

$$l_0\boldsymbol{\alpha}+l_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$$

设 l_i 是第一个不等于零的系数,即 $l_0=l_1=\cdots=l_{i-1}=0,l_i\neq 0$,则

$$l_i\boldsymbol{A}^{i}\boldsymbol{\alpha}+l_{i+1}\boldsymbol{A}^{i+1}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$$

两边乘以矩阵 $\boldsymbol{A}^{k-i}$,得

$$l_i\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}+l_{i+1}\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{2k-i}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=0$,故对任意

$$m\geqslant k+1$$

都有

$$\boldsymbol{A}^{m}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$$

从而由上式得

$$l_i\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$$

但

$$\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$$

故 $l_i=0$ 与假设矛盾.

(2) 证明:假设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,但不是 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,即有

$$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}\text{ 但 }\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$$

由(1) 知 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关,与 $n+1$ 个 n 维向量 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关矛盾,故 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(3) 由(2) 知 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解一定是 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,且易知 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解一定是 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,所以方程 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 同解,所以 $R(\boldsymbol{A}^{n+1})=R(\boldsymbol{A}^{n})$.

6. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性无关,试证:向量组

$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_m,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

证 假设有一组数 $l_1,l_2,\cdots,l_{m-1},l_m$ 使得

$$l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_{m-1}\boldsymbol{\beta}_{m-1}+l_m\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{0}$$

则有

$$l_1(\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_m)+l_2(\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_m)+\cdots+l_{m-1}(\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_m)+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

即

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+(l_1k_1+l_2k_2+\cdots+l_{m-1}k_{m-1}+l_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,所以

$$l_1=l_2=\cdots=l_{m-1}=l_1k_1+l_2k_2+\cdots+l_{m-1}k_{m-1}+l_m=0$$

所以

$$l_1=l_2=\cdots=l_{m-1}=l_m=0$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,m 为奇数,试证

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1$$

线性无关.

证 假设存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\beta}_{m-1}+k_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$$

则有

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+k_{m-1}(\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\boldsymbol{\alpha}_m)+k_m(\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

即

$$(k_1+k_m)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_{m-1}+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

又由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,所以

$$k_1+k_m=k_1+k_2=\cdots=k_{m-1}+k_m=0$$

因为 m 是奇数,所以线性方程组(1)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&1\\1&1&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{m+1}=2\neq0$$

$$\begin{cases}k_1+k_m=0\\k_1+k_2=0\\\qquad\vdots\\k_{m-1}+k_m=0\end{cases}\tag{1}$$

故(1)只有零解,所以

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

8. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,$n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个列向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$$
$$R(\boldsymbol{A})=n$$

问齐次线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 是否有非零解,证明你的结论.

证 当 n 为奇数时,齐次线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$,没有非零解. 当 n 为偶数时,$\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 有非零解.

由于 $R(\boldsymbol{A})=n$,所以 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

由上题知,当 n 为奇数时,$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关,所以

$$R(\boldsymbol{B})=n$$

因此齐次线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 没有非零解.

但当 n 为偶数时,因

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n)-(\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$$

线性相关，所以 $R(\boldsymbol{B})<n$. 因此，齐次线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 有非零解.

9. 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于不同特征值的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\boldsymbol{\xi}_n$$

试证：$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个互不相同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$，则

$$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\boldsymbol{\xi}_n)=\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\boldsymbol{\lambda}_n\boldsymbol{\xi}_n$$

$$\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1^{n-1}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\lambda_n^{n-1}\boldsymbol{\xi}_n$$

设有一组数 $k_0,k_1,\cdots,k_{n-1}$，使得

$$k_0\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

即

$$\begin{aligned}&k_0(\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\boldsymbol{\xi}_n)+k_1(\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\xi}_n)+\cdots+\\&k_{n-1}(\lambda_1^{n-1}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\lambda^{n-1}\boldsymbol{\xi}_n)=\mathbf{0}\end{aligned}$$

可得

$$\begin{gathered}(k_0+k_1\lambda_1+\cdots+k_{n-1}\lambda_1^{n-1})\boldsymbol{\xi}_1+(k_0+k_1\lambda_2+\cdots+k_{n-1}\lambda_2^{n-1})\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\\(k_0+k_1\lambda_n+\cdots+k^{n-1}\lambda_n^{n-1})\boldsymbol{\xi}_n=0\end{gathered}$$

由于 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 线性无关，所以

$$\begin{cases}k_0+k_1\lambda_1+\cdots+k_{n-1}\lambda_1^{n-1}=0\\k_0+k_1\lambda_2+\cdots+k_{n-1}\lambda_2^{n-1}=0\\\qquad\vdots\\k_0+k_1\lambda_n+\cdots+k_{n-1}\lambda_n^{n-1}=0\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\lambda_n&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_0\\k_1\\\vdots\\k_{n-1}\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

又由于

$$\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\lambda_n&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0$$

所以

$$k_0=k_1=\cdots=k_{n-1}=0$$

即 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

10. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶实对称矩阵，试证 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等.

年 月 日

证 (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，记 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}$，则

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}|=|\boldsymbol{T}^{-1}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{T}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$

(2) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 因 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵，存在正交阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$$

即

$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1})=\boldsymbol{B}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵，证明当 $k>0$ 时，$k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 正定.

证 $$(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})'=(k\boldsymbol{E})'+(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})'=k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$$

即 $k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 是实对称阵. 对任意 n 维非零实列向量 $\boldsymbol{X}$，有

$$\boldsymbol{X}'(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=k(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

由于 $k>0$，所以 $k(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})>0$，又 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\geqslant 0$，所以

$$\boldsymbol{X}'(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}>0$$

即 $k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 正定.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，证明

$$R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}')=R(\boldsymbol{A})$$

并举例说明 $\boldsymbol{A}$ 是复矩阵时，结论未必成立.

证 考察方程组

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

显然(2)的解均为(1)的解，因而

$$n-R(\boldsymbol{A})\leqslant n-R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})$$

即有

$$R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A}) \tag{3}$$

另一方面，对任意 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n$，如果 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})=0$，即

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})=0 \tag{4}$$

设

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$$

由(4)知 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=0$，因为 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵，$\boldsymbol{X}$ 为实向量，故 a_i 均为实数，所以

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$$

心得 体会 拓广 疑问

即 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$，所以(1)的解也是(2)的解，故有

$$n-R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\leqslant n-R(\boldsymbol{A})$$

即

$$R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) \tag{5}$$

综合式(3)，(5)知

$$R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$$

由 $R(\boldsymbol{A}')=R(\boldsymbol{A})$ 知

$$R(\boldsymbol{AA}')=R((\boldsymbol{A}')'\boldsymbol{A}')=R(\boldsymbol{A}')=R(\boldsymbol{A})$$

故有

$$R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{AA}')=R(\boldsymbol{A})$$

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}'=(1,\mathrm{i})$，于是 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 是复矩阵，结论不成立.

13. 若任意 n 维列向量都是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，试证：$\boldsymbol{A}$ 一定是标量矩阵.

证 先证 $\boldsymbol{A}$ 的任两个特征值都相等，否则，设 $\lambda_1,\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值，$\boldsymbol{X}\neq\mathbf{0}$，$\boldsymbol{Y}\neq\mathbf{0}$，使

$$\boldsymbol{AX}=\lambda_1\boldsymbol{X},\boldsymbol{AY}=\lambda_2\boldsymbol{Y}$$

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 线性无关

$$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\neq\mathbf{0}$$

依题意存在 k 使

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=k(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})$$

于是

$$(\lambda_1-k)\boldsymbol{X}+(\lambda_2-k)\boldsymbol{Y}=\mathbf{0},k=\lambda_1=\lambda_2$$

矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都相等，记为 λ.

令 $\boldsymbol{e}_j$ 为 n 阶单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 个列向量，$j=1,\cdots,n$，于是

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1\cdots\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_n)$$

由已知

$$\boldsymbol{Ae}_j=\lambda\boldsymbol{e}_j\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1\cdots\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_n)=\lambda(\boldsymbol{e}_1\cdots\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_n),\boldsymbol{AE}=\lambda\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，试证：存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

证 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{D}\text{，其中 }\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$$

令 $\delta_i=\sqrt{\lambda_i}(i=1,2,\cdots,n)$，则

年 月 日

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_1^2&&&\\&\delta_2^2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}$$

而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}'$$

$$=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}'$$

令

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}'$$

易验证 $\boldsymbol{B}$ 为正定阵，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

15. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零实列向量，证明：$\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$ 为正交矩阵.

证 因为

$$\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\right)'=\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$$

故

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\right)'\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\right)\\&=\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\right)\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\right)\\&=\boldsymbol{E}-\frac{4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}+\frac{4}{(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha})^2}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}'=\boldsymbol{E}-\frac{4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}+\frac{4}{(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha})^2}(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}')\\&=\boldsymbol{E}-\frac{4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}+\frac{4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

因而 $\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$ 为正交矩阵.

16. 设方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解，且 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，试证：

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解.

证 设 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 $n-r$ 个线性无关的向量,不妨设为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$. 有 $\boldsymbol{A\xi}_i=\boldsymbol{0}(i=1,\cdots,n-r)$.

又 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解必为 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解,从而

$$\boldsymbol{B\xi}_i=\boldsymbol{0}(i=1,\cdots,n-r)$$

因此 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 也是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解.

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 是 n 维列向量,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\beta}' & 0\end{pmatrix}$,若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解.

证 由于

$$R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta})\leqslant R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})$$
$$R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta})$$

所以 $R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta})=R(\boldsymbol{A})$ 即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解.

18. 设

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})' \quad (i=1,2,\cdots,r,r<n)$$

是 r 个线性无关的 n 维实向量,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \qquad\vdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的实非零解向量. 试证:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

证 假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,由已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,必有

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r \tag{1}$$

又由 $\boldsymbol{\beta}$ 为方程组的解,从而

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i)=0 \quad (i=1,\cdots,r)$$

于是

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r)=0$$

从而 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$,矛盾. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

19. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶正定矩阵,若 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量都是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量,则 $\boldsymbol{AB}$ 正定.

证 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶正定矩阵,因此 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 也必为实对称矩阵. 设 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个标准正交的特征向量,记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_n)$,则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix}k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n\end{pmatrix}$$

并且 $\lambda_i,k_i>0,(i=1,\cdots,n)$,所以

年 月 日

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{ABP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APP}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1k_1&&&\\&\lambda_2k_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_nk_n\end{pmatrix}$$

且 $\lambda_ik_i>0(i=1,\cdots,n)$. 再由 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}'$ 得 $(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{AB}$,因此 $\boldsymbol{AB}$ 正定.

20. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,试证向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

证 设有一组数

$$k_0,k_1,\cdots,k_t$$

使得

$$k_0\boldsymbol{\beta}+k_1(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_t(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t)=\boldsymbol{0}$$

即

$$(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_t)\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\boldsymbol{0} \qquad (1)$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,所以 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 的线性组合,所以 $k_0+k_1+k_2+\cdots+k_t=0$,因此式(1)变为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关,所以 $k_1=k_2=\cdots=k_t=0$,进而 $k_0=0$,故向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2010 级期中试题及答案

（此卷满分 30 分）

注：本试卷中 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵，$R(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵和 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

一、填空题(每小题 1 分，共 5 分)

1. 如果行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & x & 1 \end{vmatrix}=0$，则 $x=$________.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$________.

3. 过点 $(1,1,1)$ 且与直线 $\begin{cases} y+z-2=0 \\ x+2y+z+4=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程为________.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 是 $n\times 1$ 矩阵，a,b,c 是常数，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & b \end{vmatrix}=0$，则行列式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & c \end{vmatrix}=$________.

二、选择题(每小题 1 分，共 5 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{AB})$ 的值为(　　).

(A)4　　(B)3　　(C)2　　(D)1

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，则必有(　　).

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$　　(B) $|\boldsymbol{B}|\neq 0$

(C) $|\boldsymbol{A}^*|=0$　　(D) $|\boldsymbol{B}^*|\neq 0$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 中位于 (i,j) 的元素为(　　).

(A) $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}\boldsymbol{A}_{ki}$　　(B) $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kj}\boldsymbol{A}_{ki}$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(C) $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\boldsymbol{A}_{ik}$　　　　(D) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{A}_{kj}$

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶可逆矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 -1 倍加到第 3 行得 $\boldsymbol{B}$，则应有(　　).

(A) 将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1 行的 -1 倍加到第 3 行得 $\boldsymbol{B}^{-1}$

(B) 将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1 列的 1 倍加到第 3 列得 $\boldsymbol{B}^{-1}$

(C) 将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 3 行的 -1 倍加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}^{-1}$

(D) 将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 3 列的 1 倍加到第 1 列得 $\boldsymbol{B}^{-1}$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，若 $a_{31}=a_{32}=a_{33}>0$，则 a_{31} 的值为(　　).

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) 3　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\sqrt{3}$

三、(5 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x & x & x & x & y \\ x & x & x & y & x \\ x & x & y & x & x \\ x & y & x & x & x \\ y & x & x & x & x \end{pmatrix}$. 求(1) $|\boldsymbol{A}|$；(2) $R(\boldsymbol{A})$.

四、(5 分) 求直线 $l:\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+2y-z=0$ 上的投影直线的方程.

五、(5 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

六、(3 分) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 4 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|$.

七、(2 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=r$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可表为 r 个秩为 1 的矩阵的和.

年　月　日

参考答案

一、1. $\frac{3}{2}$　2. $(-4)^{n-1}\boldsymbol{A}$　3. $x-y+z-1=0$　4. $\begin{pmatrix}2&5&6\\1&4&6\\3&6&6\end{pmatrix}$

5. $a(c-b)$

二、1. C　2. C　3. B　4. D　5. A

三、解

$$\begin{vmatrix}x&x&x&x&y\\x&x&x&y&x\\x&x&y&x&x\\x&y&x&x&x\\y&x&x&x&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y&x&x&x&x\\x&y&x&x&x\\x&x&y&x&x\\x&x&x&y&x\\x&x&x&x&y\end{vmatrix}=(y+4x)(y-x)^4$$

$$R(\boldsymbol{A})=\begin{cases}0, x=y=0\\1, x=y\neq 0\\4, y=-4x\\5, y\neq x \text{ 且 } y\neq -4x\end{cases}$$

四、解：记投影直线为 l_1，则 l_1 可视为它与直线 l 所确定的平面 π_1 与已知平面 π 的交线. 过直线 l 的平面束方程为

$$2x-y+z+\lambda(x+y-z+1)=0$$

即

$$(\lambda+2)x+(\lambda-1)y(1-\lambda)z+(\lambda-1)=0$$

由 $\pi_1\perp\pi$，有

$$(\lambda+2)+2(\lambda-1)-(1-\lambda)=0$$

解得

$$\lambda=\frac{1}{4}$$

因此，平面 π_1 为

$$3x-y+z-1=0$$

所求投影直线 l_1 的方程为

$$\begin{cases}3x-y+z-1=0\\x+2y-z=0\end{cases}$$

五、解：等式两边左乘以 $\boldsymbol{A}$ 得

$$\frac{1}{3}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

即

$$\frac{1}{3}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

心得 体会 拓广 疑问

因 $|\boldsymbol{A}|=1+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=6$,上式整理得

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$$

而

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-2&0\\-2&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

是可逆矩阵,因此

$$\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

六、解

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|&=|\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{EB}^{-1}|=|\boldsymbol{ABB}^{-1}+\boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}|\\&=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{B}^{-1}|\\&=2|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}|\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

七、证:由 $r(\boldsymbol{A})=r$ 知,存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2+\cdots+\boldsymbol{B}_r$$

其中,$\boldsymbol{B}_i(i=1,2,\cdots,r)$ 表示第 i 行第 i 列的元素为 1,其余元素均为 0 的 $m\times n$ 矩阵,因此有 $r(\boldsymbol{B}_i)=1$,并且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2+\cdots+\boldsymbol{B}_r)\boldsymbol{Q}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}^{-1}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Q}^{-1}+\cdots+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}_r\boldsymbol{Q}^{-1}\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆,知

$$r(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Q}^{-1})=r(\boldsymbol{B}_i)=1\quad(i=1,2,\cdots,r)$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2011 级期中试题及答案

(此卷满分 30 分)

注:本试卷中 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵,$R(\boldsymbol{A})$,$\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩,$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵和 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

一、填空题(每小题 1 分,共 4 分)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=$________.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,则 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$________.

(注:用 $\boldsymbol{A}$ 表示即可)

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,且 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$,则 a,b 应满足的条件为________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 m 阶可逆矩阵,则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}^{-1}=$________.

二、选择题(每小题 1 分,共 4 分)

1. 过点 $(2,-1,3)$ 且和平面 $\pi_1:2x-y+3z-1=0$ 与 $\pi_2:5x+4y-z-7=0$ 都平行的直线方程为(　　).

(A) $\dfrac{x-2}{11}=\dfrac{y+1}{-17}=\dfrac{z-3}{-13}$

(B) $\dfrac{x-2}{-11}=\dfrac{y+1}{-17}=\dfrac{z-3}{13}$

(C) $11x-17y-13z=0$

(D) $11x+17y-13z=0$

2. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}+2a_{11} & a_{33}+2a_{13} & a_{32}+2a_{12} \end{pmatrix}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$,则必有(　　).

(A)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$

(B)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$

(C)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3$

(D)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n>1)$ 阶方阵,则下列结论正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|$

(B)$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^*)$

(C)$\boldsymbol{A}^*=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{-1}$

(D) 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$

4. 设 $n\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=(\lambda\ 0\ \cdots\ 0\ \lambda)^{\mathrm{T}}$,常数 $\lambda>0$,且矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,则 λ 的值为(　　).

(A)1　　(B)-1　　(C)$\dfrac{1}{2}$　　(D)$-\dfrac{1}{2}$

三、(6 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&t\\3&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}$ 为 4×3 的非零矩阵,且 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$.(1) 求 t 的值;(2) 求 $R(\boldsymbol{B})$.

四、(5 分) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&2&1\\0&0&3&0&1\\0&4&0&0&1\\5&0&0&0&1\end{vmatrix}$.

五、(6 分) 已知空间中三点 $A(1,0,-1)$,$B(1,-2,0)$,$C(1,1,1)$.

(1) 求以 OA,OB 为邻边的平行四边形的面积;

(2) 求以 O,A,B,C 为顶点的四面体的体积.

六、(3 分) 设有两个 3×1 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=(1\ 2\ -1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(-2\ 1\ -2)^{\mathrm{T}}$,且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,求 $|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$ 的值.

七、(2 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,且满足 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^m=\boldsymbol{0}(m\geqslant 1)$,证明:$\boldsymbol{A}$ 可逆.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

参考答案

一、1. 0　2. $\dfrac{A+3E}{2}$　3. $a\neq b$ 且 $a+2b=0$　4. $\begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

二、1. A　2. B　3. D　4. C

三、解：(1) 由 $BA=0$，得 $R(A)+R(B)\leqslant 3$. 而 $B\neq 0$，知 $R(B)\geqslant 1$，故 $R(A)\leqslant 2$，得

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & t \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5t-15=0$$

故 $t=3$.

(2) 因 $R(A)=2$，由 $R(A)+R(B)\leqslant 3$ 得 $R(B)\leqslant 1$. 故 $R(B)=1$.

四、解　$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{5\times 4}{2}}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)5!$$

$$=120\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$

五、解：(1) $S=|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{matrix}\right\|=|-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}|=3.$

(2) $V=\dfrac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}\ \ \overrightarrow{OB}\ \ \overrightarrow{OC}]|=\dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|=\dfrac{5}{6}.$

六、解

$$\begin{aligned} |A^2-2A+2E_3| &= |(A-E_3)^2+E_3| \\ &= |(-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^2+E_3| \\ &= |(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^2+E_3| \\ &= |(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})+E_3| \\ &= |2(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})+E_3| \\ &= |E_1+2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}|=|1+4|=5 \end{aligned}$$

七、证：因为

$$(A+E)^m=0$$

即

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$\boldsymbol{A}^m + \mathrm{C}_m^1\boldsymbol{A}^{m-1} + \mathrm{C}_m^2\boldsymbol{A}^{m-2} + \cdots + \mathrm{C}_m^{m-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$$

则有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{m-1} + \mathrm{C}_m^1\boldsymbol{A}^{m-2} + \cdots + \mathrm{C}_m^{m-1}\boldsymbol{E}) = -\boldsymbol{E}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2013 级 期中试题及答案

（此卷满分 30 分）

注：本试卷中 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵，$R(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵和 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

一、填空题（每小题 1 分，共 4 分）

1. 已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-1$，则 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A} \\ 2\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix}=$ ________.

2. 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程为________.

3. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $R((\boldsymbol{A}^*)^*)=$ ________.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则 $|2\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}|=$ ________.

二、选择题（每小题 1 分，共 4 分）

1. 在直角坐标系中，点 $A(2,4,3)$ 到直线 $x-1=y-2=z-3$ 的距离为（　　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $\sqrt{3}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=m$，则下列结论正确的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式都不为 0

(B) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|\neq 0$

(C) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$

(D) 若 $R(\boldsymbol{B})=n$，则 $R(\boldsymbol{AB})=m$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列上得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为（　　）.

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，若 $a_{21}=a_{22}=a_{23}<0$，则 a_{22}

年　月　日

为(　　).

(A) -3　　(B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $-\frac{1}{3}$　　(D) $-\sqrt{3}$

三、(5 分) 求过点$(-1,2,3)$垂直于直线$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$且平行于平面$7x+8y+9z+10=0$的直线方程.

四、(6 分) 记 A_{ij} 是 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

的 i 行 j 列位置元素的代数余子式.

(1) 计算 D_n;

(2) 计算 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$.

五、(6 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,且满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{XA}-4\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}$. 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

六、(3 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵($n\geqslant 2$),且满足 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}\neq 2\boldsymbol{E}$.

(1) 说明 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆;

(2) 求 $|\boldsymbol{A}^*|$.

七、(2 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $R(\boldsymbol{A})=r$. 证明:存在两个列满秩的 $n\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{H}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{FH}^{\mathrm{T}}$.

心得 体会 拓广 疑问

参考答案

一、1. -16　2. $x-3y-z+4=0$　3. 0

4. $2^{n-1}(2-a_1b_1-a_2b_2-\cdots-a_nb_n)$

二、1. C　2. D　3. A　4. B

三、解：所求直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 垂直于已知直线的方向向量 $\boldsymbol{s}_0$，且垂直于已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}$，所以

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_0\times\boldsymbol{n}=(4,5,6)\times(7,8,9)=(-3,6,-3)\,/\!/\,(1,-2,1)$$

于是，所求直线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$$

四、解

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-\frac{a_2}{2}-\frac{a_3}{3}-\cdots-\frac{a_n}{n} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$=n!\left(a_1-\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{k}\right)$$

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$=n!\left(1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

五、解：等式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}$$

即

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}-2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}=4\boldsymbol{A}$$

得

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=4\boldsymbol{A}$$

而 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=2\neq0$，故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆且 $\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$. 可求

年　月　日

出

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

六、解 1:(1) 由 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$,即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$,得 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\leqslant n$. 又因 $\boldsymbol{A}\neq 2\boldsymbol{E}$,即 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{0}$,知 $R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\geqslant 1$. 故 $R(\boldsymbol{A})\leqslant n-1$,从而 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(2) 由 $\boldsymbol{A}$ 不可逆,知 $R(\boldsymbol{A}^*)<n$,从而 $|\boldsymbol{A}^*|=0$.

解 2:(1) 在等式 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$ 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$$

即

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}=2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

从而

$$|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$$

因 $\boldsymbol{A}\neq 2\boldsymbol{E}$,即 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(2) 同解 1.

解 3:(1) 由 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$,从而 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$,这与题设矛盾. 故 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(2) 同解 1.

七、证:由 $R(\boldsymbol{A})=r$ 知,存在 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}(\boldsymbol{E}_r\quad \boldsymbol{0})\boldsymbol{Q}$$

令

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{F}$ 为 $n\times r$ 矩阵,$\boldsymbol{H}$ 也为 $n\times r$ 矩阵,$\boldsymbol{F},\boldsymbol{H}$ 都是列满秩矩阵,且

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2014 级期中试题及答案

（此卷满分 30 分）

注：本试卷中 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵，$R(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵和 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

一、填空题(每小题 1 分，共 5 分)

1. 设空间中几何向量 $\boldsymbol{a}$ 与 Ox，Oy，Oz 轴的夹角依次为 α，β，γ，则 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$________.

2. 直线 L_1：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 与直线 L_2：$x-2=y=z-3$ 间的距离为________.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，多项式 $f(x)=x^2+bx+c$. 若 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$，则 $f(a)=$________.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|=$________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 7 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}$ 的行列式依次为 a 和 b，$b\neq 0$，则 $|\boldsymbol{AB}|=$________.

二、选择题(每小题 1 分，共 5 分)

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵的秩为 1，则必有(　　).

(A) $a+2b=0$　　(B) $b+2a=0$

(C) $a=b\neq 0$　　(D) $b^3+2a^3=0$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶非零矩阵，$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$，则下列说法中错误的是(　　).

(A) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　(B) $|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$ 可逆　　(D) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则必有(　　).

(A) $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$　　(B) $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$

年　月　日

(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ (D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

4. 设 M 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{MD}$ 等于(　　).

(A) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ (B) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

(C) $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ (D) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

5. 设有直线 L: $\begin{cases}3x+2y-8z+4=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 π: $4x-2y-z-2=0$, 则必有(　　).

(A) L 平行于 π (B) L 在 π 上

(C) L 垂直于 π (D) L 与 π 斜交

三、(5 分) 求由点 $M_0(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0\\y-z+1=0\end{cases}$ 的垂线 L 的方程.

四、(5 分) 已知 x 为实数, 行列式

$$\begin{vmatrix}x+2 & 2x & 0\\1 & x+2 & 2x\\0 & 1 & x+2\end{vmatrix}=0$$

求 x 及

$$\begin{vmatrix}x+2 & 2x & 0 & 0\\1 & x+2 & 2x & 0\\0 & 1 & x+2 & 2x\\0 & 0 & 1 & x+2\end{vmatrix}$$

的值.

五、解析题(每小题 2 分, 共 10 分; 判断对错, 对的请证明, 错的请举出反例)

1. 设 2 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.

2. 若 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵相等, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

3. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个几何向量, 如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, 若存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$, 则 $a=-1$.

心得 体会 拓广 疑问

参考答案

一、1. 2　2. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$　3. 1　4. -2　5. $-\frac{a}{b}$

二、1. B　2. D　3. C　4. B　5. D

三、解：题设中已知直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(1,1,-1)\times(0,1,-1)=(0,1,1)$$

设垂足的坐标为 $M(x_1,y_1,z_1)$，则 M 在已知直线上，并且$\overrightarrow{M_0M}$ 与已知直线垂直，于是

$$x_1+y_1-z_1+1=0$$
$$y_1-z_1+1=0$$
$$(y_1+1)+(z_1-1)=0$$

求得 $M\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. 于是，所求垂线 L 的方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$$

四、解：由

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2x & 0 \\ 1 & x+2 & 2x \\ 0 & 1 & x+2 \end{vmatrix}=(x+2)(x^2+2x+4)-2x(x+2)=0$$

解得：$x=-2$. 于是

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2x & 0 & 0 \\ 1 & x+2 & 2x & 0 \\ 0 & 1 & x+2 & 2x \\ 0 & 0 & 1 & x+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=16$$

五、解：1. 不正确. 反例：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 不正确. 反例：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_3$，$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{E}_3$.

3. 不正确. 反例：$\boldsymbol{a}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{b}=(2,0,0)$，$\boldsymbol{c}=(3,0,0)$.

4. 正确. 证明：充分性. 若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，则显然有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$$

必要性. 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，取 $\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{A}}{2}$，则有

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{A}$$

5. 正确. 证明：设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，得

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$c_{12}-ac_{21}=0$$
$$c_{12}+ac_{22}-ac_{11}=1$$
$$c_{11}-c_{21}-c_{22}=1$$

因此，$a=-1$.

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2010 级 期末试题及答案

（此卷满分 50 分）

注：本试卷中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$R(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}^{*}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}_n$ 表示 n 阶单位矩阵.

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为________.

3. 方程 $3x^2-2y^2+z^2-6=0$ 表示的空间曲面是________.

4. 若 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关，则 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解向量空间 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ 的维数是________.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & a\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量，则常数 $a=$________，$\lambda_0=$________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关

2. 设有两个平面

$$\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

若 $r\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix}=2$，则有（　　）.

(A) π_1 与 π_2 重合

(B) π_1 与 π_2 平行但不重合

(C) π_1 与 π_2 垂直

(D) π_1 与 π_2 相交为一条直线

3. 设向量组 I：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 II：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则下列命题正确的是（　　）.

(A) 当 $r>s$ 时，向量组 I 线性相关

(B) 当 $r<s$ 时，向量组 I 线性相关

(C) 当 $r>s$ 时，向量组 II 线性相关

年　月　日

(D) 当 $r < s$ 时，向量组 II 线性相关

4. 已知 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，则与 $\boldsymbol{A}^{*}-\boldsymbol{E}$ 相似的矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

5. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正定的，则 $\boldsymbol{AB}$ 一定是(　　).

(A) 对称矩阵

(B) 正交矩阵

(C) 正定矩阵

(D) 可逆矩阵

三、(5 分) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，证明 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$ 也是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，并求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

四、(5 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\3&a&-1&2\\5&3&b&6\end{pmatrix}$ 且 $r(\boldsymbol{A})=2$，求 a,b 的值.

五、(6 分) 求方程组的通解

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+x_4=1\\2x_1-x_2+x_3+2x_4=3\\x_1-x_2-x_3+x_4=2\\3x_1+3x_4=5\end{cases}$$

六、(6 分) 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和都为 3，向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与全部的特征向量；

(2) 求正交阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$；

心得 体会 拓广 疑问

年　　月　　日

心得 体会 拓广 疑问

(3) 求 $\boldsymbol{A}$.

七、(5 分) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,证明:$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

八、(3 分) 设 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是 n 元实二次型,有 n 维实列向量 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$,使 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}>0$,$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}<0$,证明:存在 n 维实列向量 $\boldsymbol{\gamma}\neq\boldsymbol{0}$,使 $\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}=0$.

心得 体会 拓广 疑问

参考答案

一、1. $\dfrac{4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}}{3}$ 2. 0(n 重根) 3. 单叶双曲面 4. $m-n$ 5. $a=4$, $\lambda_0=3$

二、1. C 2. D 3. A 4. B 5. D

三、解:(1) $|\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&2&0\end{vmatrix}\neq 0$. 因此,$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基.

(2) 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\beta}_3)$, 则 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&3\\1&0&0&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3&4\\1&1&1&1&2&3\\1&-1&1&1&4&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&1&-1&-1&-1\\0&0&2&-2&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&-1\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

四、解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\3&a&-1&2\\5&3&b&6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&a+3&-4&-4\\0&8&b-5&-4\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&a+3&-4&-4\\0&5-a&b-1&0\end{pmatrix}$$

由 $r(\boldsymbol{A})=2$ 得

$$a=5, b=1$$

五、解

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&2&1&1\\2&-1&1&2&3\\1&0&-1&1&2\\3&-1&0&3&5\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&2&1&1\\0&1&-3&0&1\\0&1&-3&0&1\\0&2&-6&0&2\end{array}\right)$$

年 月 日

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 2 & 1 & 1\\0 & 1 & -3 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & 1 & 2\\0 & 1 & -3 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

所以,方程组的通解为

$$X=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数})$$

六、解:(1) 由题设知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,即 $\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,且 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量. 再由 $\boldsymbol{A\xi}_1=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,0,3. 属于特征值 0 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$,$k_1,k_2$ 不全为 0. 属于特征值 3 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{\xi}_3$,$k_3\neq 0$.

(2) 对 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1)}{(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1)}\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

对 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{|\boldsymbol{\varepsilon}_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_2}{|\boldsymbol{\varepsilon}_2|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{|\boldsymbol{\xi}_3|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1\quad\boldsymbol{\gamma}_2\quad\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

七、证法 1：由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 知

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$$

因此

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n$$

又由 $2\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$，因而

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant r(\boldsymbol{E})=n$$

故 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

证法 2

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}&2\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&2\boldsymbol{E}\\\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})&\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{E}_n\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

因此

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{E}_n\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}=n$$

八、证：设二次型的秩为 r，存在可逆变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$ 使 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 化为规范形

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

令

$$\boldsymbol{Y}_0=(1,0,\cdots 0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

则有

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{CY}_0\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbf{R}^n$$

并且

$$f=\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\gamma}=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2=1^2-1^2=0$$

哈尔滨工业大学 2011 级期末试题及答案

（此卷满分 50 分）

注：本试卷中 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵，$R(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵和 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 均不可逆，则 $|3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=$________.

2. 直线 $l: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$ 与平面 $\pi: x+2y-5z-11=0$ 的交点为________

3. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,-2,6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,t,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(4,-1,-5,10)^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则 $t=$________.

4. 设两个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 正交且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，则 $|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=$________.

5. 设向量 $X_0=(1,1,k)^{\mathrm{T}}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵的特征向量，则 $k=$________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则必有（　　）.

(A) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

(B) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

(D) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

2. 已知向量组(I)：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则与(I)等价的向量组是（　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

3. 设有三个平面 $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1$，$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2$，$\pi_3: a_3x+b_3y+c_3z=d_3$，如果 $R\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&\vdots&d_1\\a_2&b_2&c_2&\vdots&d_2\\a_3&b_3&c_3&\vdots&d_3\end{pmatrix}=$

年　月　日

2,则三个平面的位置关系为(　　).

(A) 相交于一点　　(B) 相交于一条直线

(C) 重合　　(D) 无公共点

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实方阵,则下列命题错误的是(　　).

(A) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$,则 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值

(B) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 0

(C) 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}$ 没有实特征值

(D) 若 $|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})|=0$,则 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值

5. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$ 正定,则常数 a 的取值范围是(　　).

(A) $-\sqrt{\dfrac{7}{2}}<a<\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

(B) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(C) $-1<a<1$

(D) $-2<t<2$

三、(5 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}$,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

四、(5 分) 设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似,求 x,y.

五、(6 分) 当 k 为何值时,方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-2x_4=0\\2x_1-x_2-x_3+x_4=1\\3x_1+x_2-2x_3-x_4=k\end{cases}$ 无解;有解;在有无穷多解时,求出通解.

六、(6 分) 设 4 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,1)$,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) 问矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否能相似对角化?若能,求出可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$.

七、(5 分) 设向量组(I):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,且可由向量组(II):$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性表示.

证明:(1) 向量组(II) 线性无关;

(2) 向量组(I) 与(II) 等价.

八、(3 分) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 合同,证明:$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 合同.

参考答案

一、1. 14　2. $(3,-1,-2)$　3. -3　4. k^n　5. $-2,1$

二、1. C　2. D　3. B　4. D　5. A

三、解：由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|=1$，在等式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}$ 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$$

故

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

四、解：由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似知，$-1,2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 于是

$$|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -x-1 & -2\\ -3 & -1 & -2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x+1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2x=0$$

得 $x=0$. 再由 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$ 知 $-1=1+y$，故 $y=-2$.

五、解 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -2 & -1 & k\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-1\end{array}\right)$$

当 $k\neq1$ 时，无解.

当 $k=1$ 时，有无穷多解. 此时

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -1 & -\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

故通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{1}{5}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\in\mathbf{R})$$

六、解：(1) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}|=(\lambda-1)^3\,|\lambda-1+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|$

年　月　日

$$=(\lambda-1)^3(\lambda-1+4)$$
$$=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1(3 重根)，-3.

当 $\lambda=1$ 时

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

因此，属于 1 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$，$k_1,k_2,k_3$ 是不全为 0 的任意常数.

当 $\lambda=-3$ 时，对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

属于 -3 的全部特征向量为 $k_4\boldsymbol{\xi}_4$，$k_4\neq 0$. 因 $\boldsymbol{A}$ 有 4 个线性无关的特征向量，能相似对角化. 令 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\xi}_1\quad\boldsymbol{\xi}_2\quad\boldsymbol{\xi}_3\quad\boldsymbol{\xi}_4)$，则

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-3\end{pmatrix}$$

七、证：(1) 由题设知：$4=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\leqslant R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\leqslant 4$，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关.

(2) 因向量组(I) 可由向量组(II) 线性表示，存在矩阵 $\boldsymbol{K}$ 使得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \boldsymbol{\beta}_3\ \boldsymbol{\beta}_4)\boldsymbol{K}$$

由向量组(I)，(II) 都线性无关知 $\boldsymbol{K}$ 是可逆的，故

$$(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \boldsymbol{\beta}_3\ \boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{K}^{-1}$$

从而向量组(I) 与(II) 等价.

八、证：由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 合同，因此存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}$$

令 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{T}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

故结论成立.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2013 级 期末试题及答案

（此卷满分 50 分）

注：本试卷中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$R(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}^*$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}_n$ 表示 n 阶单位矩阵.

一、填空题(每小题 2 分，共 10 分)

1. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素都是 1，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为________.

2. 在空间直角坐标系中，方程 $2x^2-y^2-3z^2+9=0$ 表示的几何图形是________.

3. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$，则 $|\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{A}^{-1}|=$________.

4. 已知 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的规范正交基，则 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 在该组基下的坐标为________.

5. 已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 相似，则 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=$________.

二、选择题(每小题 2 分，共 10 分)

1. 给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,-2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,5,6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(3,0,7,t)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则 t 的值为(　　).

(A)2　　(B)4　　(C)8　　(D)14

2. 设 4×3 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$R(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，令 $\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解可表示成(其中 k 是任意常数)(　　).

(A) $k(1,1,-1)^{\mathrm{T}}+(3,-1,0)^{\mathrm{T}}$

(B) $(1,1,-1)^{\mathrm{T}}+k(3,-1,0)^{\mathrm{T}}$

(C) $k(4,0,-1)^{\mathrm{T}}+(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$

(D) $k(4,0,-1)^{\mathrm{T}}+k(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}$，二次型 $f(x)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 的正负惯性指数都是 1，则 $|3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$ 的值为(　　).

(A)4　　(B)-10　　(C)-6　　(D)8

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　　).

(A) 合同且相似

(B) 合同但不相似

(C) 相似但不合同

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(D) 不合同也不相似

5. 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 都是正定矩阵,则下列结论正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都正定

(B)$\boldsymbol{AB}$ 正定,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 非正定

(C)$\boldsymbol{AB}$ 不一定正定,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 正定

(D)$\boldsymbol{AB}$ 非正定,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 正定

三、(5 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$,求$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

四、(6 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 都是 $\mathbf{R}^3$ 的基;

(2) 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵;

(3) 求 $\boldsymbol{\xi}=-\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+3\boldsymbol{\beta}_3$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

五、(6 分) 当 a 等于何值时,方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=a\\x_1+ax_2+x_3=1\\ax_1+x_2+x_3=a\end{cases}$ 无解?有唯一解?有无穷多解?当有无穷多解时,写出通解.

六、(6 分) 设二次型 $f=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求常数 a;

(2) 求一个正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$,将 f 化为标准型;

(3) 问 $f(x_1,x_2,x_3)=-1$ 表示 $\mathbf{R}^3$ 中何种曲面.

七、(4 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实方阵,且 $R(\boldsymbol{A})=n$. 证明:$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

八、(3 分) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m>1)$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$. 证明:向量组 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

参考答案

一、1. n(1 重),0($n-1$ 重)　2. 单叶双曲面　3. $\frac{27}{2}$　4. $(2\sqrt{2},2,-\sqrt{2})^{\mathrm{T}}$　5. 6

二、1. D　2. A　3. B　4. B　5. C

三、解: 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 及 $|\boldsymbol{A}|=6\neq 0$ 知 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}^{*}$ 可逆

$$(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

四、解: (1) $|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&0&2\end{vmatrix}=1\neq 0$

$$|\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 都是 $\mathbf{R}^3$ 的基.

(2) 由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)\qquad(*)$$

得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}&=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)\\&=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&0&-1\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&3&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(3) 解法 1: $\boldsymbol{\xi}=-\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+3\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. 设 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, 则

$$x=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

心得 体会 拓广 疑问

解法 2：$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$. 设 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. 根据

（*）得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

五、解：$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&a\\1&a&1&1\\a&1&1&a\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&a\\0&a-1&1-a&1-a\\0&1-a&1-a^2&a-a^2\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&a\\0&a-1&1-a&1-a\\0&0&2-a-a^2&1-a^2\end{array}\right)$$

(1) 当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时，此方程组有唯一解；

(2) 当 $a=-2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=3$，此方程组无解；

(3) 当 $a=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=1<3$，此方程组有无穷多解. 此时

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ (k_1,k_2\text{ 为任意常数})$$

是此方程组的通解.

六、解：(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$. 由 $R(\boldsymbol{A})=2$，知 $|\boldsymbol{A}|=0$，由此求得 $a=-2$ 或者 $a=1$.

当 $a=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=1$，不满足条件；当 $a=-2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2$，故 $a=-2$ 为所求.

(2) 当 $a=-2$ 时

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-1&-1\\-1&\lambda+2&-1\\-1&-1&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)^2$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,-3,-3$.

当 $\lambda_1=0$ 时，解 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，规范化得

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

当 $\lambda_2=\lambda_3=-3$ 时,解 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$,得特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

正交化得

$$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

规范化得

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1\quad\boldsymbol{P}_2\quad\boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵,且在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 下,$f=-3y_2^2-3y_3^2$.

(3) $f=-1$ 表示 $\mathbf{R}^3$ 中的椭圆柱面.

七、证:因 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵. 又由 $R(\boldsymbol{A})=n$ 知线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 只有零解. 因此,$\forall\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{X}\neq\mathbf{0}$,有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX})>\mathbf{0}$$

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

八、证:设 $k_1(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathbf{0}$,即

$$(k_1+k_2+\cdots+k_m)\boldsymbol{\beta}-k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_2\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

亦即

$$\left(\sum_{i=1}^m k_i-k_1\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(\sum_{i=1}^m k_i-k_2\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(\sum_{i=1}^m k_i-k_m\right)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关知

年 月 日

$$\begin{cases} k_2 + k_3 + \cdots + k_m = 0 \\ k_1 + k_3 + \cdots + k_m = 0 \\ \qquad \vdots \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_{m-1} = 0 \end{cases}$$

该线性方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1}(m-1) \neq 0 \quad (m > 1)$$

故有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$，因此，$\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2014 级期末试题及答案

（此卷满分 50 分）

注：本试卷中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$R(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}^*$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}_n$ 表示 n 阶单位矩阵.

一、填空题(每小题 2 分，共 10 分)

1. 行列式 $D_4=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}=$________.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=$________.

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的所有特征向量为________.

4. 空间直角坐标系中曲线 $\begin{cases} y=z^2 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周，所得曲面的方程为________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实方阵，$|\boldsymbol{A}|=1$，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零实列向量，则 $R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}=$________.

二、选择题(每小题 2 分，共 10 分)

1. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2kx_2x_3$ 正定，则 k 的取值范围为(　　).

(A) $k>1$

(B) $k<-1$

(C) $-1<k<1$

(D) $-1\leqslant k\leqslant 1$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，则必有(　　).

(A) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解

(B) 若 $R(\boldsymbol{A})=m$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解

(C) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

年　月　日

(D) 若 $R(\boldsymbol{A})=n$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解

3.已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似,则 $|2\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E}_3|$ 等于(　　).

(A)2　　(B)-2　　(C)6　　(D)-6

4.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个属于不同特征值的实特征向量,则(　　).

(A)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交

5.设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$,则(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价且合同

(B)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价但不相似

(C)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似且合同

(D)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似但不合同

三、(5 分) 设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&4\\2&x&2\\4&2&-1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&y&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$ 相似,求 x,y.

四、(5 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足:$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

五、(5 分) 已知方程组(I)$\begin{cases}x_1+x_2+bx_3=0\\x_1+(b-2)x_2+x_3=0\end{cases}$ 与

(II)$\begin{cases}x_2+x_3=0\\x_1+x_2+2x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$ 同解,求参数 a,b 及方程组(I)的全部解.

六、(5 分) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$,$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$,

$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

(1) 用正交变换将 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 化为标准形,并求所用的正交变换矩阵 $\boldsymbol{P}$;

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{101}$;

(3) 方程 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{X}=1$ 表示空间中何种二次曲面.

七、(5分) 求点 $A(2,4,3)$ 在直线 $x=y=z$ 上投影点 $B(x_0,y_0,z_0)$ 的坐标及点 A 到该直线的距离.

八、(5分) (1) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $R(\boldsymbol{A})=1$. 证明:存在列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和列向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}$;

(2) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}$,其中列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 也线性无关,证明:$R(\boldsymbol{A})=2$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

参考答案

一、1. $a+b+c+1$　2. $\boldsymbol{E}_3$　3. $k(1,-1)^{\mathrm{T}},k\neq0$　4. $y=x^2+z^2$
5. $n+1$

二、1. C　2. B　3. D　4. C　5. D

三、解：因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似，有 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{D})$，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{D}|$，于是

$$y=x-2$$
$$-25y=-15x+40$$

求得 $x=1,y=-1$.

此时，对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,-5,5$，与对角阵 $\boldsymbol{D}$ 相似，符合题意.

四、解：$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-1&1&-1\\-1&-1&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=-4\neq0$，因此 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆.

于是，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$ 得

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

五、解：记方程组(I)，(II) 的系数矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，由题意知 $R(\boldsymbol{A})=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$. 利用行初等变换，有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&b\\1&b-2&1\\0&1&1\\1&1&2\\1&1&a\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&b-1\\0&0&2-b\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&a-b\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&b\\1&b-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&b\\0&b-3&1-b\end{pmatrix}$$

注意到 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 至少为 2，$R(\boldsymbol{A})$ 至多为 2，所以，$R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})=2$. 因此，$a=b=2$. 此时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$. 故方程组(I) 的全部解是 $\boldsymbol{X}=k(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数.

六、解：(1) 由 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$ 知，即 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 再由 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系知，0 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值且属于 0 的线性无关的特征向量正是 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$.

年　月　日

设 $\xi_3=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 是属于 -1 的特征向量，由 $\boldsymbol{A}$ 实对称，知 ξ_3 与 ξ_1，ξ_2 都正交，即

$$\begin{aligned}x-y&=0\\x-z&=0\end{aligned}$$

解得基础解系 $\xi_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

对 ξ_1,ξ_2 作正交化得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\xi_1)}{(\xi_1,\xi_1)}\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$$

对 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\xi_3$ 作单位化

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{|\boldsymbol{\varepsilon}_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_2}{|\boldsymbol{\varepsilon}_2|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\xi_3}{|\xi_3|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1\quad\boldsymbol{\gamma}_2\quad\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$$

在正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 下，原二次型化为 $f=-y_3{}^2$.

(2)
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{101}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}^{101}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3$ 的特征值为 1，1，0，故二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{X}$ 的标准型为

$$z_1{}^2+z_2{}^2$$

所以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{X}=1$ 表示空间中的圆柱面.

七、解：由题意知，$\overrightarrow{AB}$ 与直线的方向向量垂直，并且点 B 在直线上，因此

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$x_0=y_0=z_0$$

$$(x_0-2)+(y_0-4)+(z_0-3)=0$$

解得点 B 的坐标为 $B(3,3,3)$. 点 B 到该直线的距离为 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$.

八、证:(1) 因为 $R(\boldsymbol{A})=1$,所以存在可逆阵$\boldsymbol{P}_1$ 和$\boldsymbol{Q}_1$,使

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}(1\quad 0\quad \cdots\quad 0)$$

即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}(1\quad 0\quad \cdots\quad 0)\boldsymbol{Q}_1^{-1}$$

令

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{P}_1^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=(\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}$$

(2) 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 及线性无关性知

$$2=R(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2)+R(\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2)-2\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}})+R(\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}})=2$$

故 $R(\boldsymbol{A})=2$.

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2015 级 期末试题及答案

（此卷满分 60 分）

注：本试卷中，$\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$R(\boldsymbol{A})$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩和 $\boldsymbol{A}$ 的迹.

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 1 & 2 & b & 3 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} =$ ________.

2. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,1,1,\cdots,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1,\cdots,1)$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n=(1,1,\cdots,1,a)$，其中 $n>1$，$a>0$，若存在向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，则 $a=$ ________.

3. 已知空间直角坐标系中三点 $A(1,0,-1)$，$B(1,-2,0)$，$C(1,1,1)$，则以 A,B,C 及坐标原点为顶点的四面体的体积等于 ________.

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & t & -1 \end{pmatrix}$，若存在非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 $t=$ ________.

5. 已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在直线 l：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 上，且 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 π：$2x-y+2z-1=0$ 的距离为 1，则 $y_0=$ ________或 ________.

6. 在空间直角坐标系中，方程 $z=xy$ 表示的几何图形是 ____________.

7. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，则 $\boldsymbol{C}^{10}=$ ________.

8. 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $-1,1,2$，则 $|\boldsymbol{A}+\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^*|=$ ________.

9. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量，如果 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，则 $\boldsymbol{X}=$ ________是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

年 月 日

10. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零实列向量，则秩$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}=$ ________.

二、(7 分) 已知 k 是一个数，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m>1)$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$. 讨论向量组 $\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性相关性.

三、(7 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{E}$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

四、(7 分) k 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=1 \\ (1-k)x_1+(k-1)x_2=0 \\ (2k+1)x_1+3x_2+(k+2)x_3=3 \end{cases}$$

无解?有唯一解?有无穷多解?当有无穷多解时,求出全部解.

五、(7 分) 已知 k 是实数,向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,1)$,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值,特征向量;

(2) k 满足什么条件时 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 正定.

心得 体会 拓广 疑问

六、(7 分) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称阵，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 下化为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}$ 的第三列为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求出将 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 化为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ 的一个正交变换矩阵 $\boldsymbol{P}$；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^n$；

(3) 在空间直角坐标系中，方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种几何图形.

七、(5 分) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，证明：

(1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 同解；

(2) 对任意正整数 k，都有 $R((\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^k)=R(\boldsymbol{A})$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

参考答案

一、 1. abc 2. 1 3. $\frac{5}{6}$ 4. -1 5. $0,-6$ 6. 双曲抛物面

7. $\begin{pmatrix}1 & 10\\0 & 1\end{pmatrix}$ 8. -2 9. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数 10. $n+1$

二、解法 1：记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_m)$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$. 由已知关系 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}$，其中

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1+k & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+k & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+k\end{pmatrix}$$

利用矩阵秩的关系，有 $R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{K})$. 另由 $R(\boldsymbol{A})=m$，得到 $R(\boldsymbol{B})\geqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{K})-m=R(\boldsymbol{K})$. 所以，$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{K})$.

由于 $|\boldsymbol{K}|=(k+m)k^{m-1}$，因此，当 $k=-m$ 或 $k=0$ 时，$\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，反之，线性无关.

解法 2：设有数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得

$$k_1(\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_m)=\boldsymbol{0}$$

由 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，上式整理得

$$\begin{aligned}&((1+k)k_1+k_2+\cdots+k_m)\boldsymbol{\alpha}_1+\\&(k_1+(1+k)k_2+\cdots+k_m)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\\&(k_1+k_2+\cdots+(1+k)k_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

根据 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，知

$$\begin{cases}(1+k)k_1+k_2+\cdots+k_m=0\\ k_1+(1+k)k_2+\cdots+k_m=0\\ \quad\vdots\\ k_1+k_2+\cdots+(1+k)k_m=0\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}1+k & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+k & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

方程组系数矩阵的行列式等于 $(k+m)k^{m-1}$，因此，当 $k=-m$ 或 $k=0$ 时，$\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，反之，线性无关.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

三、解：由 $|\boldsymbol{A}|=1$，知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 在 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{XA}=4\boldsymbol{E}$ 两边左侧同时乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$，右边同时乘以矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{AB}^{-1}\boldsymbol{X}=4\boldsymbol{E}$$

即

$$\boldsymbol{X}=4(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}^{-1})^{-1},\ |\boldsymbol{A}|=1,\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

得

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

四、解 $$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}k&1&1&1\\1-k&k-1&0&0\\2k+1&3&k+2&3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&k&1\\0&k-1&1-k&0\\0&0&2-k-k^2&1-k\end{array}\right)$$

当 $k=-2$ 时，无解；

当 $k\neq-2$ 且 $k\neq1$ 时，有唯一解；

当 $k=1$ 时有无穷多解. 此时

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

故通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}^{*}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

五、解：(1)
$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}|&=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-k\boldsymbol{E}|\\&=(\lambda-k)^3(\lambda-k-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\\&=(\lambda-k)^3(\lambda-k-4)\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 k（3 重根），$k+4$.

当 $\lambda=k$ 时

$$k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=-\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

因此,属于 k 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$,$k_1,k_2,k_3$ 是不全为 0 的任意常数;

当 $\lambda=k+4$ 时

$$(k+4)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}=4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

属于 $k+4$ 的全部特征向量为 $k_4\boldsymbol{\xi}_4$,$k_4\neq0$.

(2)$k>0$.

六、解:(1) 得知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,-1$. 由 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵,解

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{\sqrt{3}}{3}z=0$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

对 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 作正交化得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1)}{(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1)}\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$$

年 月 日

对 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 作单位化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{|\boldsymbol{\varepsilon}_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_2}{|\boldsymbol{\varepsilon}_2|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1\quad\boldsymbol{\gamma}_2\quad\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

为所求正交矩阵.

(2) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$.

当 n 为奇数时

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}^n\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$$

当 n 为偶数时

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}^n\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) 单叶双曲面.

七、证：(1) 若 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$.

若 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=0$，进而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$.

所以，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 同解.

(2) 因 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是实对称阵，若 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r$，则存在可逆阵 $\boldsymbol{T}$，使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda_1&&&\\&\ddots&&0\\&&\lambda_r&\\\hdashline&0&&0\end{array}\right)$$

年　月　日

其中 $\lambda_i \neq 0(i=1,2,\cdots,r)$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的非零特征值,于是

$$\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^k\boldsymbol{T}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda_1^k & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda_1^k & \\ \hdashline & 0 & & 0\end{array}\right)$$

$$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^k=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$$

得证.

心得 体会 拓广 疑问

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2016 级 期末试题及答案

（此卷满分 60 分）

注：本试卷中，A^*，A^T，$R(A)$，$\mathrm{tr}(A)$ 依次表示矩阵 A 的伴随矩阵，A 的转置矩阵，A 的秩和 A 的迹，E 表示单位矩阵.

一、填空题(每小题 2 分，共 20 分)

1. 已知 n 阶方阵 A 的各行元素之和都等于 0，$R(A)=n-1$，则________是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系.

2. 若实矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&t\\0&t&1\end{pmatrix}$ 正定，则 t 满足：________.

3. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的规范正交基，$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$ 与 $\beta_2=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$ 的内积为________.

4. 圆 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25\\x+\sqrt{3}y-6=0\end{cases}$ 的半径 $r=$________.

5. 母线平行于 z 轴，且通过曲线 $\begin{cases}x^2+2y^2+z^2=25\\-x^2+y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程为________.

6. 已知 A 与 B 相似，$B=\begin{pmatrix}-1&0\\x&1\end{pmatrix}$，则 $|A^2-A|=$________.

7. 若矩阵 A 满足 $A^2+E=2A$，则 A 的特征值只能是________.

8. 设 A 是 2 阶方阵，X 是 2 维列向量，X,AX 线性无关，且 $A^2X=2AX-X$，记 $P=(X,AX)$，则 $P^{-1}AP=$________.

9. 设 A,B,C 是三个 n 阶方阵，$|A|=1$，$|C-BA^{-1}B|=2$，则 $\begin{vmatrix}A&B\\B&C\end{vmatrix}=$________.

10. 设 Ψ 是线性空间 $\mathbf{R}^2$ 的一个线性变换，Ψ 关于 $\mathbf{R}^2$ 的基底 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$，则 Ψ 关于 $\mathbf{R}^2$ 的基底 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 的矩阵为________.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

二、(7 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求该向量组的秩;

(2) 求该向量组的一个极大无关组.

三、(7 分) 当 a 等于何值时,方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=1\\x_1+x_2+ax_3=1\end{cases}$$

无解? 有唯一解? 有无穷多解? 当有无穷多解时,求出所有解.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

四、(7 分) 设 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，求 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}$.

五、(7 分) 矩阵 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&3&0\\0&1&0\end{pmatrix}$中，哪两个相似？哪两个合同？为什么？

年 月 日

六、(7 分) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称阵，$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量，且二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 经正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 可以化为 $y_1^2-2y_2^2-2y_3^2$.

(1) 在空间直角坐标系中，方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种几何图形；

(2) 求出将 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 化为 $y_1^2-2y_2^2-2y_3^2$ 的一个正交变换矩阵 $\boldsymbol{P}$；

(3) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

七、(5 分) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个可相似对角化的 n 阶方阵，$\mathbf{R}$ 表示实数域.

证明：存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{B}$ 的充要条件是：$|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}|$，$\forall\lambda\in\mathbf{R}$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

参考答案

一、 1. $\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$或与之平行的任一非零向量　2. $-1<t<1$

3. 7　4. $r=4$　5. $2x^2+y^2=25$　6. 0　7. 1　8. $\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}$　9. 2

10. $\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$

二、解：$\begin{bmatrix}1&1&3\\2&1&4\\1&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&3\\0&-1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$，所以，向量组的秩为 2. $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 为极大无关组(实际上，任意两个向量都对).

三、解法 1

$$\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$$

$$=0\Rightarrow a=-2 \text{ 或 } a=1$$

$a=-2$ 时，$\begin{bmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1&-2\\0&-3&3&3\\0&0&0&3\end{bmatrix}$，无解.

$a=1$ 时，$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，有无穷多解 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$k_2,k_3$ 为任意常数.

$a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时，有唯一解.

解法 2

$$\begin{bmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&1&1\\0&1-a&a-1&0\\0&0&-(a+2)(a-1)&(1-a)\end{bmatrix}$$

$a=-2$,无解;$a=1$,有无穷多解$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$,$k_2,k_3$为任意常数;$a\neq-2$且$a\neq1$时,有唯一解.

四、解:$\left[\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}&\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{E}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{array}\right]$

所以

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&-1\\1&0&-1&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

五、解:$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1|=(\lambda-3)\lambda^2$,$\lambda_1=3$,$\lambda_2=\lambda_3=0$,$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_2|=\lambda^2(\lambda-2)$,$\lambda_1=2$,$\lambda_2=\lambda_3=0$,$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_3|=(\lambda-3)\lambda^2$,$\lambda_1=3$,$\lambda_2=\lambda_3=0$. 当$\lambda=0$时,$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&3&0\\0&1&0\end{bmatrix}$,$R(\boldsymbol{A}_3)=1$,$\dim N(\boldsymbol{A}_3)=2$,$\boldsymbol{A}_3$可相似对角化. 故$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_3$相似,因为它们都可以相似对角化且特征值相同. $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$合同,因为它们都是实对称阵,且$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$正特征值个数都为1,负特征值个数都为0.

六、解:(1)$y_1^2-2y_2^2-2y_3^2=1$,表示(旋转)双叶双曲面.

(2)设$\boldsymbol{X}$为$\boldsymbol{A}$的属于2的特征向量,$\boldsymbol{A}$是实对称阵,所以$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\xi}_1)=0$,即

$$x_1+x_2+x_3=0$$

基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

规范正交化$\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_3-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},$$

心得 体会 拓广 疑问

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

(3)
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & -2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

七、解:“$\Rightarrow$”

若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$,使得 $\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{TB}$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{TBT}^{-1}$,$\forall\lambda\in\mathbf{R}$

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|&=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{TBT}^{-1}|=|\boldsymbol{T}(\lambda\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{T}^{-1}-\boldsymbol{TBT}^{-1}|\\&=|\boldsymbol{T}||\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}||\boldsymbol{T}^{-1}|=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}|\end{aligned}$$

“$\Leftarrow$”

对 $\forall\lambda\in\mathbf{R}$,$|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}|$,则 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值,设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

由 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 可相似对角化,存在可逆阵 $\boldsymbol{C}_1$,$\boldsymbol{C}_2$

$$\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_2$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{B}$$

取 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1}$ 即可.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2017 级期末试题及答案

（此卷满分 60 分）

注：本试卷中，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$R(\boldsymbol{A})$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 依次表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩和 $\boldsymbol{A}$ 的迹，$\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵.

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$________.

2. 已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$，其中 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________.

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的基，则基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为________.

4. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，$R(\boldsymbol{A})=2$，则 $R((\boldsymbol{A}^*)^*)=$________.

5. 已知 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 是线性空间 V 的基，$\mathscr{A}$ 是 V 的一个线性变换，若 $\mathscr{A}(\varepsilon_1)=\varepsilon_1$，$\mathscr{A}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=\varepsilon_2$，则 $\mathscr{A}$ 关于 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=$________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则（　　）.

(A) 当 $R(\boldsymbol{A})<n$ 时，$\boldsymbol{AX}=\beta$ 有唯一解

(B) 当 $R(\boldsymbol{A})<n$ 时，$\boldsymbol{AX}=\beta$ 有无穷多解

(C) 当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{AX}=\beta$ 有唯一解

(D) 当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{AX}=\beta$ 有无穷多解

2. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则（　　）.

(A) 当 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关时，$r\leqslant s$

(B) 当 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关时，$r\leqslant s$

(C) 当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关时，$r\leqslant s$

(D) 当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关时，$r\leqslant s$

3. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1\quad b_2\quad b_3)$，$a_1a_2a_3\neq 0$，$b_1b_2b_3\neq 0$，则（　　）.

(A) 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的 1-重特征值　　　　(B) 0 是 $\boldsymbol{A}$ 是 2-重特征值

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(C)0 是 $\boldsymbol{A}$ 的 3- 重特征值　　　　(B)0 至少是 $\boldsymbol{A}$ 是 2- 重特征值

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称正定矩阵，$\boldsymbol{P}$ 是 3 阶实可逆矩阵，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，则(　　).

(A) $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}|>1$　　　　(B) $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}|<1$

(C)$\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵　　　　(D)$\boldsymbol{B}$ 不是正定矩阵

5. 设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$，则(　　).

(A)$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 相似，但不合同　　　　(B)$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 合同，但不相似

(C)$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 等价，但不相似　　　　(D)$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 相似，但不等价

三、(5 分)　设 a,b 是两个数，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\a&-1&0&0\\0&0&-b&a\\0&0&0&b\end{pmatrix}$，整数 $m>0$，求 $\boldsymbol{A}^{2m}$.

四、(10 分)　已知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2&3\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

五、(10 分) 问 a 为何值时,直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中三个平面 $\pi_1: ax+z=1$;$\pi_2: x+ay=a$;$\pi_3: ay+z=1$ 没有公共点?交于一点?交于一条直线?在交于一条直线时,写出该直线的参数方程.

六、(10 分) 已知二次型 $f(x,y,z)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,其中 $\boldsymbol{X}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$,$\xi_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$,$\xi_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$ 的基础解系.

(1) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵;

(2) 求出二次型 $f(x,y,z)$;

(3) 在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中,方程 $f(x,y,z)=1$ 表示何种几何图形.

年 月 日

七、(5 分) 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值，证明 $R(\boldsymbol{A}^2)=R(\boldsymbol{A})$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

参考答案

一、 1. $4a+4b$ 2. $\begin{pmatrix}1 & 0 & -x\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & -y\end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 4. 0

5. $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$

二、1. C 2. C 3. D 4. A 5. C

三、解

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & a\\a & -1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1^2=\begin{pmatrix}1 & a\\a & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\a & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a^2 & 0\\0 & 1+a^2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1^{2m}=\begin{pmatrix}(1+a^2)^m & 0\\0 & (1+a^2)^m\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-b & a\\0 & b\end{pmatrix};\boldsymbol{A}_2^2=\begin{pmatrix}-b & a\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b & a\\0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b^2 & 0\\0 & b^2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2^{2m}=\begin{pmatrix}b^{2m} & 0\\0 & b^{2m}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{2m}=\begin{pmatrix}(1+a^2)^m & 0 & 0 & 0\\0 & (1+a^2)^m & 0 & 0\\0 & 0 & b^{2m} & 0\\0 & 0 & 0 & b^{2m}\end{pmatrix}$$

四、解

$$\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -\frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 可逆

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

心得 体会 拓广 疑问

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}-2&2&3\\0&-\frac{3}{2}&0\\0&0&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

五、解法 1 $\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&0\\0&a&1\end{vmatrix}=a(a+1)=0, a=0$ 或 $a=-1$.

$a=0$ 时，$\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，无穷多解. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

三平面交于一条直线，直线的参数方程为 $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=1\end{cases}$，$t$ 为任意常数. 当 $a=-1$ 时，增广阵为 $\begin{pmatrix}-1&0&1&1\\1&-1&0&-1\\0&-1&1&1\end{pmatrix}$，可化为 $\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&-1&1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$，方程组无解. 三平面没有交点.

$a\neq 0$ 且 $a\neq -1$ 时，方程组有唯一解. 三平面交于一点.

解法 2 $\begin{pmatrix}a&0&1&1\\1&a&0&a\\0&a&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&a\\0&a&1&1\\0&0&1+a&1+a-a^2\end{pmatrix}$. 考虑 $a=0$，$a+1=0$，即 $a=0$ 或 $a=-1$.

$a=0$ 时，增广阵可化为 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，无穷多解. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

三平面交于一条直线，直线的参数方程为 $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=1\end{cases}$，$t$ 为任意常数.

当 $a=-1$ 时，增广阵的行列阶梯为 $\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&-1&1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$，方程组无解.

年 月 日

三平面没有交点.

$a\neq 0$ 且 $a\neq -1$ 时,方程组有唯一解.三平面交于一点.

六、解:(1) 由 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系有两个向量知,$\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$.

$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0$,所以 $\lambda_3=0-\lambda_1-\lambda_2=2$. $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $-1,-1,2$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的属于 2 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,由 $\boldsymbol{\xi}_1\perp\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_2\perp\boldsymbol{\xi}_3$ 得

$\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_1-x_3=0\end{cases}$,基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 规范化得 $\boldsymbol{Q}_3=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_3}{|\boldsymbol{\xi}_3|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$,规范正交化 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\-1\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{Q}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$

(2) 求二次型

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$f(x,y,z)=2xy+2xz+2yz$$

(3) 在 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 下，$f(x',y',z')=-x'^2-y'^2+2z'^2=1$，表示(旋转)双叶双曲面.

七、证：设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互不相同，知 A 可以相似对角化，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}^2$ 的秩等于 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$ 中非零元的个数，即 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中非零元的个数. 而 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中非零元的个数，从而 $R(\boldsymbol{A}^2)=R(\boldsymbol{A})$.