

代数学笔记 Chapter 6: 模论基础 (Module Theory)

根据手写笔记整理

2025 年 12 月 15 日

本章导读

本章主要介绍模 (Module) 的概念。模是线性空间在环上的推广。

- 掌握模的公理化定义，理解其与线性空间的联系。
- 理解 \mathbb{Z} -模即为阿贝尔群。
- 理解模定义的等价描述 (环同态到自同态环)。
- **核心难点:** 理解 $R^{\text{op}} \cong \text{End}_R({}_R R)$ 及其背后的“左右”对偶关系。

目录

1	模 (Modules) 与线性空间 (Linear Spaces)	2
2	重要的模例子	2
3	模定义的结构等价性	3
4	反环与正则模的自同态环	4
5	模同态与子模	6
5.1	模同态 (Module Homomorphism)	6
5.2	子模 (Submodule)	7

5.3	生成子模 (Generated Submodule)	7
6	商模与同构定理	7
6.1	商模运算的良定义 (Well-definedness)	7
6.1.1	问题背景	7
6.1.2	详细证明	8
6.2	模的第一同构定理 (First Isomorphism Theorem)	9
6.2.1	定理陈述	9
6.2.2	详细证明步骤	9
7	左模、右模与双模	10
7.1	右模与反环 (Opposite Ring)	10
7.2	双模 (Bimodule)	11
8	群表示与模	11
9	直积与直和	13
9.1	外直积 (External Direct Product)	13
9.2	内直和 (Internal Direct Sum)	13
10	直积与直和 (Direct Product & Direct Sum)	15
11	单模与半单模 (Simple & Semisimple Modules)	19
12	自由模 (Free Modules)	21
13	正合列与同调代数 (Exact Sequences)	22

1 模 (Modules) 与线性空间 (Linear Spaces)

模定义的引入

模的概念是对线性空间的自然推广。我们将标量域 k 替换为一般的幺环 R 。

左 R -模 (Left R -Module)	线性空间 (V/k)
<p>设 R 是幺环。M 是 R 上的左模，记为 $(M, 0, +, \cdot)$。</p> <p>基本结构：</p> <ul style="list-style-type: none"> $0 \in M$ $+: M \times M \rightarrow M$ $\cdot: R \times M \rightarrow M$ 	<p>设 k 是域。V 是 k 上的线性空间，记为 $(V, 0, +, \cdot)$。基本结构：</p> <ul style="list-style-type: none"> $0 \in V$ $+: V \times V \rightarrow V$ $\cdot: k \times V \rightarrow V$
公理体系 (Axioms)	
<ol style="list-style-type: none"> $(M, 0, +)$ 是阿贝尔群。 数乘满足以下律 ($x, y \in M, a, b \in R$): <ul style="list-style-type: none"> $(a \cdot b)x = a \cdot (b \cdot x)$ $(a + b)x = ax + bx$ $a(x + y) = ax + ay$ $1 \cdot x = x$ 	<ol style="list-style-type: none"> $(V, 0, +)$ 是加法群 (Abelian)。 数乘满足以下律 ($x, y \in V, a, b \in k$): <ul style="list-style-type: none"> $(ab)x = a(bx)$ $(a + b)x = ax + bx$ $a(x + y) = ax + ay$ $1 \cdot x = x$

2 重要的模例子

两个基本例示

例 2.1 (线性空间). 若 $R = k$ 为域，则 k -线性空间 $\iff k$ -模。

例 2.2 (阿贝尔群即 \mathbb{Z} -模). \mathbb{Z} -模 \iff 加法群 (阿贝尔群)。

设 M 是加法群，则可定义唯一的 \mathbb{Z} -模结构。对于 $n \in \mathbb{Z}, x \in M$ ，数乘定义如下：

$$n \cdot x = \begin{cases} \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ 个}} & (n \in \mathbb{N}_+, n > 0) \\ 0 & (n = 0) \\ -mx = \underbrace{(-x) + \cdots + (-x)}_{m \text{ 个}} & (n = -m, m \in \mathbb{N}_+) \end{cases} \quad (1)$$

3 模定义的结构等价性

环作用与同态

我们可以从“表示论”的角度来理解模。定义一个模，本质上是定义环 R 到群自同态环的映射。

命题 3.1. 设 R 为幺环， M 为加法群。以下两个陈述等价：

- (i) M 是左 R -模。
- (ii) 存在环同态 $\Phi : R \rightarrow \text{End}(M)$ 。

其中 $\text{End}(M)$ 是 M 的自同态环（加法为逐点加，乘法为复合）。

证明. 1. (i) \Rightarrow (ii): 由模构造同态

假设 M 是左 R -模。构造映射 $\Phi : R \rightarrow \text{End}(M)$:

$$a \mapsto \Phi(a), \quad \text{其中 } \Phi(a)(x) = a \cdot x$$

即 $\Phi(a)$ 是“左乘 a ”这一变换。验证 Φ 是环同态：

- 加法: $(a + b)x = ax + bx \implies \Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$ 。
- 乘法: $(ab)x = a(bx) \implies \Phi(ab) = \Phi(a) \circ \Phi(b)$ 。
- 单位元: $1 \cdot x = x \implies \Phi(1) = \text{id}_M$ 。

2. (ii) \Rightarrow (i): 由同态定义模

假设存在环同态 $\Phi : R \rightarrow \text{End}(M)$ 。定义数乘 $R \times M \rightarrow M$:

$$(a, x) \mapsto a \cdot x := \Phi(a)(x)$$

容易验证该运算满足模的所有公理（因为 Φ 保持了环的运算结构）。 □

4 反环与正则模的自同态环

$$\mathbf{P20:} \quad R^{\text{op}} \cong \text{End}_R(R)$$

本节讨论一个深刻的同构，它揭示了“左乘”与“右乘”在非交换环中的对偶关系。

定义 4.1 (反环 R^{op}). 设 R 为环。 R^{op} 与 R 集合、加法相同，但乘法定义为：

$$a \cdot_{\text{op}} b = b \cdot a$$

即运算顺序颠倒。

注意 (NOTE): 符号说明

${}_R R$ 表示 R 视作自身的左 R -模。即标量从左边作用： $r \cdot x = rx$ （环原本的乘法）。

定理 4.2. $R^{\text{op}} \cong \text{End}_R({}_R R)$ 。

直观理解：为什么是反环？

$\text{End}_R({}_R R)$ 中的元素 f 必须与左乘交换，即 $f(rx) = rf(x)$ 。在非交换环中，只有右乘才能与左乘完美交换（结合律 $(rx)a = r(xa)$ ）。然而，右乘的复合顺序与元素乘积顺序是相反的：先右乘 a 再右乘 b ，等于右乘 (ab) ，但在函数记号里是 $f_b \circ f_a$ 。为了修正这个顺序，我们需要 R^{op} 。

证明 $R^{\text{op}} \cong \text{End}_R(R)$. 我们分步构造映射并验证。

1. 构造映射

定义 $\Psi: R^{\text{op}} \rightarrow \text{End}_R(R)$ ，对于 $a \in R$ ，定义 ρ_a 为右乘映射：

$$\rho_a(x) = xa$$

2. 验证 ρ_a 是模同态

我们需要验证 ρ_a 属于 $\text{End}_R(R)$ （即它是左 R -线性的）。对于任意 $r \in R$ 和 $x \in R$ ：

$$\rho_a(r \cdot x) = (rx)a = r(xa) = r \cdot \rho_a(x)$$

这利用了环的结合律。

3. 验证 Ψ 是环同态

- 加法：显然 $\rho_{a+b} = \rho_a + \rho_b$ 。
- 乘法：计算 $\Psi(a \cdot_{\text{op}} b)$ 。

$$\text{左边} = \Psi(ba) = \rho_{ba} \implies \text{作用于 } x : x(ba)$$

$$\text{右边} = \Psi(a) \circ \Psi(b) = \rho_a \circ \rho_b \implies x \xrightarrow{\rho_b} xb \xrightarrow{\rho_a} (xb)a$$

由结合律 $x(ba) = (xb)a$ ，故 $\Psi(a \cdot_{\text{op}} b) = \Psi(a) \circ \Psi(b)$ ，乘法保持。

4. 验证双射

- 单射：若 $\rho_a = 0$ （零映射），则 $\rho_a(1) = 1 \cdot a = a = 0$ 。故核为 $\{0\}$ 。
- 满射：设 $f \in \text{End}_R(R)$ 为任意自同态。令 $a = f(1)$ 。对于任意 $x \in R$ ，我们有：

$$f(x) = f(x \cdot 1) \stackrel{\text{左线性}}{=} xf(1) = xa = \rho_a(x)$$

因此 $f = \rho_a = \Psi(a)$ 。

□

本章导读

本章主要整理了模 (Module) 的基本理论。模可以看作是线性空间在环上的推广，或者是阿贝尔群的推广。我们将探讨模同态、子模、商模、同构定理，并进一步延伸到左右模的区别、双模以及模论在群表示论中的应用 (群代数)。最后，我们将讨论模的分解工具：外直积与内直和。

5 模同态与子模

基本定义

5.1 模同态 (Module Homomorphism)

设 M, M' 为 R -模。映射 $\phi: M \rightarrow M'$ 称为 **R -模同态** (R -module homomorphism), 如果它满足:

1. **加法保持**: $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ (即 ϕ 是加法群同态)。
2. **数乘保持**: $\phi(ax) = a\phi(x)$ (即 ϕ 与标量乘法交换)。

记 $\text{Hom}_R(M, N) = \{M \rightarrow N \text{ 的 } R\text{-同态}\}$ 。

注意 (NOTE): 同态集合的关系

由于模同态首先是群同态，我们有包含关系：

$$\text{Hom}_R(M, N) \subseteq \text{Hom}_{\text{Ab}}(M, N)$$

对于同态 ϕ ，我们定义：

- **核 (Kernel)**: $\text{Ker}(\phi) = \phi^{-1}(0) = \{x \in M \mid \phi(x) = 0\} \leq M$
- **像 (Image)**: $\text{Im}(\phi) = \phi(M) = \{\phi(x) \mid x \in M\} \leq M'$

二者均为各自所在的模的 **子模**。

5.2 子模 (Submodule)

定义 5.1 (子模). 设 M 为左 R -模, $N \subseteq M$ 。若 N 满足: 1. $\forall x, y \in N, x + y \in N$ (加法封闭) 2. $\forall a \in R, x \in N, a \cdot x \in N$ (数乘封闭) 则称 N 为 M 的 **** R -子模****, 记作 $N \leq M$ 。

直观理解: 子模的类比

- 当 $R = \mathbb{Z}$ 时, \mathbb{Z} -模即为阿贝尔群, 子模即为 ****子群****。
- 当 R 为域时, R -模即为线性空间, 子模即为 ****子空间****。
- 把 R 看作自身的左 R -模, 其子模即为 ****左理想****。

5.3 生成子模 (Generated Submodule)

设 $S \subseteq M$, 由 S 生成的子模 $\langle S \rangle$ 定义为包含 S 的最小子模, 即所有包含 S 的子模的交集。显式表达为:

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid a_i \in R, x_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

特例: 若 $S = \{x\}$, 则 $\langle x \rangle = Rx = \{ax \mid a \in R\}$ 称为由 x 生成的 ****循环子模****。若 $M = Rx$, 则 M 为 ****循环模****。

6 商模与同构定理

6.1 商模运算的良定义 (Well-definedness)

6.1.1 问题背景

设 R 是环, M 是左 R -模, N 是 M 的子模。我们在商集合 $M/N = \{x + N \mid x \in M\}$ 上定义加法和数乘运算如下:

$$(x + N) + (y + N) := (x + y) + N \quad (2)$$

$$a \cdot (x + N) := (ax) + N \quad (3)$$

为什么需要证明良定义? 因为陪集的代表法不唯一。例如 $x + N$ 和 $x' + N$ 可能是同一个集合 (只要 $x - x' \in N$)。我们需要确保我们选用了 x 还是 x' 来计算, 最终得到的结果集合是完全一样的。

6.1.2 详细证明

命题 6.1. 上述定义加法和数乘运算与代表元的选取无关, 是良定义的 (*Well-defined*)。

证明. 1. 加法的良定义性

假设有两个陪集 $A, B \in M/N$ 。设 x, x' 是 A 的不同代表元, 即 $A = x + N = x' + N$ 。这意味着 $x - x' \in N$ 。设 y, y' 是 B 的不同代表元, 即 $B = y + N = y' + N$ 。这意味着 $y - y' \in N$ 。

我们需要证明: 用 (x, y) 计算的结果与用 (x', y') 计算的结果相同, 即:

$$(x + y) + N = (x' + y') + N$$

考察两个结果代表元的差:

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y')$$

因为 N 是子模, 对加法封闭, 且 $x - x' \in N, y - y' \in N$, 所以:

$$(x - x') + (y - y') \in N$$

即 $(x + y) - (x' + y') \in N$ 。根据陪集相等的充要条件, 得证:

$$(x + y) + N = (x' + y') + N$$

2. 数乘的良定义性

设 x, x' 是同一个陪集的代表元, 即 $x + N = x' + N$ (意味着 $x - x' \in N$)。任取环中元素 $a \in R$ 。我们需要证明:

$$(ax) + N = (ax') + N$$

考察结果代表元的差:

$$ax - ax' = a(x - x')$$

因为 N 是 R -子模, 它对数乘封闭 (吸收性)。由于 $x - x' \in N$, 故对于任意 $a \in R$, 有 $a(x - x') \in N$ 。即 $ax - ax' \in N$ 。得证:

$$(ax) + N = (ax') + N$$

□

6.2 模的第一同构定理 (First Isomorphism Theorem)

6.2.1 定理陈述

定理 6.2. 设 M, M' 为左 R -模, $\phi: M \rightarrow M'$ 是一个 R -模同态。令 $K = \ker(\phi)$ 为 ϕ 的核。则存在唯一的 R -模同构映射 $\bar{\phi}: M/K \rightarrow \text{Im}(\phi)$, 使得 $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$ (其中 $\pi: M \rightarrow M/K$ 是自然投影)。即:

$$M/\ker(\phi) \cong \text{Im}(\phi)$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & M' \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\phi} & \\ M/K & & \end{array}$$

6.2.2 详细证明步骤

证明分为三个关键部分: (1) 构造映射并证明良定义; (2) 证明它是同态; (3) 证明它是双射。

证明. 第一步: 构造映射 $\bar{\phi}$ 并证明良定义

定义映射 $\bar{\phi}: M/K \rightarrow \text{Im}(\phi)$ 规则为:

$$\bar{\phi}(x + K) = \phi(x)$$

检验良定义: 假设 $x + K = y + K$, 即选了不同的代表元。这意味着 $x - y \in K$ 。由 $K = \ker(\phi)$ 的定义, 知 $\phi(x - y) = 0$ 。利用 ϕ 的线性性质:

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi(x - y) = 0 \implies \phi(x) = \phi(y)$$

所以, $\bar{\phi}(x + K)$ 的值与 x 的选取无关, 映射是良定义的。

第二步: 验证 $\bar{\phi}$ 是模同态

我们需要验证 $\bar{\phi}$ 保持加法和数乘运算。设 $\bar{x} = x + K, \bar{y} = y + K$ 。

1. 保持加法:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\bar{x} + \bar{y}) &= \bar{\phi}((x + y) + K) && (\text{商模加法定义}) \\ &= \phi(x + y) && (\text{映射定义}) \\ &= \phi(x) + \phi(y) && (\phi \text{ 是同态}) \\ &= \bar{\phi}(\bar{x}) + \bar{\phi}(\bar{y}) \end{aligned}$$

2. 保持数乘:

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}(a \cdot \bar{x}) &= \bar{\phi}((ax) + K) && (\text{商模数乘定义}) \\
 &= \phi(ax) && (\text{映射定义}) \\
 &= a\phi(x) && (\phi \text{ 是同态}) \\
 &= a \cdot \bar{\phi}(\bar{x})
 \end{aligned}$$

第三步: 验证 $\bar{\phi}$ 是同构 (双射)

1. 满射性 (Surjectivity): 对于像集 $\text{Im}(\phi)$ 中的任意元素 z , 根据定义, 存在 $x \in M$ 使得 $\phi(x) = z$ 。取 M/K 中的元素 $x + K$, 则有:

$$\bar{\phi}(x + K) = \phi(x) = z$$

故 $\bar{\phi}$ 是满射。

2. 单射性 (Injectivity): 只需证明 $\ker(\bar{\phi}) = \{0_{M/K}\} = \{K\}$ 。假设 $\bar{\phi}(x + K) = 0$ 。

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}(x + K) = 0 &\implies \phi(x) = 0 && (\text{映射定义}) \\
 &\implies x \in \ker(\phi) && (\text{核的定义}) \\
 &\implies x \in K && (\text{因为 } K = \ker(\phi)) \\
 &\implies x + K = K = 0_{M/K} && (\text{陪集性质})
 \end{aligned}$$

因为核仅包含零元素, 所以 $\bar{\phi}$ 是单射。

结论: $\bar{\phi}$ 是一个良定义的、双射的 R -模同态, 因此它是一个同构。 □

7 左模、右模与双模

非交换环下的结构

7.1 右模与反环 (Opposite Ring)

当环 R 非交换时, 左模 $(a \cdot x)$ 与右模 $(x \cdot a)$ 有本质区别。

- ** 右模公理 **: 需满足 $x \cdot (ab) = (x \cdot a) \cdot b$ 。

- ** 反环 R^{op} : 集合与加法同 R , 乘法定义为 $a * b := ba$ 。

命题 7.1 (左右转换). 左 R -模与右 R^{op} -模是一一对应的。转换规则: 若 M 是左 R -模, 定义右乘 $x * a := a \cdot x$, 则 M 成为右 R^{op} -模。

7.2 双模 (Bimodule)

设 R, S 为环。 M 称为 (R, S) -双模 $(R-S\text{-bimodule})$, 若: 1. M 是左 R -模; 2. M 是右 S -模; 3. 左右运算兼容 (结合律): $\forall a \in R, s \in S, x \in M$, 有

$$(a \cdot x) \cdot s = a \cdot (x \cdot s)$$

例 7.2. • 环 R 自身是 (R, R) -双模。其子双模即为 ** 双边理想 **。

- $M_{n \times m}(k)$ 是 $(M_n(k), M_m(k))$ -双模。

8 群表示与模

群代数的模

设 k 为域, G 为群, V 为 k -线性空间。若 G 作用在 V 上且保持线性结构, 称 V 为 G 的 ** 线性表示 **。这等价于群同态 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 。

直观理解: 表示即模

G 在 V 上的表示 $\iff V$ 是群代数 $k[G]$ 上的左模。

** 群代数 $k[G]$ 的元素是形式和 $\sum c_i g_i$ 。其乘法 (卷积) 定义为:

$$(c \cdot c')(g) = \sum_{h \in G} c(h) c'(h^{-1}g)$$

模的作用定义为: $(\sum c_i g_i) \cdot v = \sum c_i (g_i \cdot v)$ 。

1. 从形式和的乘法出发

设两个群代数元素 $A, B \in k[G]$, 它们可以写成以群元素为基底的形式和:

$$A = \sum_{h \in G} c(h) \cdot h, \quad B = \sum_{k \in G} c'(k) \cdot k$$

其中 $c(h)$ 和 $c'(k)$ 是标量系数（对应函数值）。

计算它们的乘积 $A \cdot B$ 。根据环的分配律（每一项都要乘以每一项）：

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \left(\sum_{h \in G} c(h) \cdot h \right) \cdot \left(\sum_{k \in G} c'(k) \cdot k \right) \\ &= \sum_{h \in G} \sum_{k \in G} \underbrace{c(h)c'(k)}_{\text{系数相乘}} \cdot \underbrace{(h \cdot k)}_{\text{基底相乘}} \end{aligned}$$

2. 重新分组（合并同类项）

上式展开后包含 $|G| \times |G|$ 个项。我们需要将这些项整理成标准形式，即按基底 g 进行归类：

$$A \cdot B = \sum_{g \in G} C_{\text{new}}(g) \cdot g$$

我们的目标是求出 g 前面的系数 $C_{\text{new}}(g)$ （即公式中的 $(c \cdot c')(g)$ ）。

核心问题：在双重求和 $\sum_h \sum_k$ 中，哪些项 (h, k) 的乘积最终贡献给了 g ？

这些项必须满足条件：

$$h \cdot k = g$$

如果我们固定了第一项的基底 h ，那么第二项的基底 k 就被唯一确定了：

$$k = h^{-1}g$$

3. 导出公式

因此，目标元素 g 的总系数，就是所有满足 $h \cdot k = g$ 的项的系数之和。我们遍历所有可能的 h ：

$$\begin{aligned} (c \cdot c')(g) &= \sum_{h \in G} (\text{第一项在 } h \text{ 处的系数}) \times (\text{第二项在 } k \text{ 处的系数}) \\ &= \sum_{h \in G} c(h) \cdot c'(k) \quad (\text{代入 } k = h^{-1}g) \\ &= \sum_{h \in G} c(h) \cdot c'(h^{-1}g) \end{aligned}$$

这正是卷积公式的由来。

4. 为什么叫“卷积”? (类比分析)

这个名称来源于分析学中函数的卷积, 二者在结构上完全一致, 只是运算符号不同。

- 实数域上的卷积 (加法群 \mathbb{R}): 我们要凑出和为 x 的项 (即 $t + (x - t) = x$)。

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x - t) dt$$

- 群上的卷积 (乘法群 G): 我们要凑出积为 g 的项 (即 $h \cdot (h^{-1}g) = g$)。

$$(c * c')(g) = \sum_{h \in G} c(h) \cdot c'(h^{-1}g)$$

9 直积与直和

模的分解与合成

9.1 外直积 (External Direct Product)

设 M_1, \dots, M_r 为 R -模。定义 ** 外直积 ** $M_1 \times \dots \times M_r$ 为笛卡尔积集合, 按分量定义加法和数乘。它构成一个新的 R -模。

9.2 内直和 (Internal Direct Sum)

设 N_1, \dots, N_r 是模 M 的子模。定义求和映射:

$$\Sigma : N_1 \times \dots \times N_r \rightarrow M, \quad (x_1, \dots, x_r) \mapsto \sum x_i$$

若 Σ 为 ** 同构 **, 称 M 是 N_i 的 ** 内直和 **, 记作 $M = N_1 \oplus \dots \oplus N_r$ 。

定理 9.1 (内直和判定). $M = N_1 \oplus N_2$ 当且仅当满足以下两个条件:

1. ** 和生成 **: $M = N_1 + N_2$ (即 Σ 满射)
2. ** 独立性 **: $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ (即 Σ 单射)

证明. 根据定义, $M = N_1 \oplus N_2$ 意味着加法映射

$$\Sigma : N_1 \times N_2 \rightarrow M, \quad (n_1, n_2) \mapsto n_1 + n_2$$

是一个 R -模同构 (即既是满射又是单射)。我们将分别证明必要性 (\Rightarrow) 和充分性 (\Leftarrow)。

1. 必要性 (\Rightarrow): 假设 $M = N_1 \oplus N_2$ 。

由于 Σ 是同构, 它必然是满射和单射。

- **满射性推出和生成:** 因为 Σ 是满射, 所以对于任意 $m \in M$, 存在 $(n_1, n_2) \in N_1 \times N_2$ 使得 $\Sigma(n_1, n_2) = m$ 。即 $n_1 + n_2 = m$ 。这正是 $M = N_1 + N_2$ 的定义。
- **单射性推出独立性:** 因为 Σ 是单射, 其核 $\ker(\Sigma) = \{(0, 0)\}$ 。设元素 $x \in N_1 \cap N_2$ 。考察 $N_1 \times N_2$ 中的元素 $(x, -x)$ (注意 $-x \in N_2$ 因为 $x \in N_2$ 且 N_2 是子模)。计算其映射值:

$$\Sigma(x, -x) = x + (-x) = 0$$

这意味着 $(x, -x) \in \ker(\Sigma)$ 。由单射性知 $(x, -x) = (0, 0)$, 即 $x = 0$ 。所以 $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ 。

2. 充分性 (\Leftarrow): 假设 $M = N_1 + N_2$ 且 $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ 。

我们需要证明映射 $\Sigma : (n_1, n_2) \mapsto n_1 + n_2$ 是同构。

- **证明 Σ 是满射:** 由条件 $M = N_1 + N_2$ 可知, 对任意 $m \in M$, 都存在 $n_1 \in N_1, n_2 \in N_2$ 使得 $m = n_1 + n_2$ 。即 $m = \Sigma(n_1, n_2)$ 。故 Σ 满射。
- **证明 Σ 是单射:** 我们需要证明 $\ker(\Sigma) = \{(0, 0)\}$ 。设 $(n_1, n_2) \in \ker(\Sigma)$, 即 $\Sigma(n_1, n_2) = 0$ 。这意味着:

$$n_1 + n_2 = 0 \implies n_1 = -n_2$$

观察等式两边:

- 左边 $n_1 \in N_1$ 。
- 右边 $-n_2 \in N_2$ (因为 $n_2 \in N_2$)。

因此, 元素 n_1 既属于 N_1 又属于 N_2 , 即 $n_1 \in N_1 \cap N_2$ 。由条件 $N_1 \cap N_2 = \{0\}$, 可得 $n_1 = 0$ 。进而 $n_2 = -n_1 = 0$ 。所以 $\ker(\Sigma) = \{(0, 0)\}$, 故 Σ 单射。

□

综上, Σ 是双射同态, 即同构。所以 $M = N_1 \oplus N_2$ 。

本章导读

本文档总结了模论的核心概念, 包括直积与直和的泛性质、单模与半单模的结构定理、自由模的性质, 以及同调代数中的正合列工具。内容基于手写笔记的详细解读, 重点在于理解代数对象的结构及其映射关系 (泛性质)。

10 直积与直和 (Direct Product & Direct Sum)

直积的泛性质 (Universal Property of Product)

设 R 为环, $\{M_i\}_{i \in I}$ 为一族 R -模。

定义 10.1 (直积). 令 $P = \prod_{i \in I} M_i$ 为笛卡尔积, 配备逐分量运算。存在一组标准投影映射 $\pi_i : P \rightarrow M_i$, 定义为 $\pi_i((x_j)_{j \in I}) = x_i$ 。

定理 10.2 (直积泛性质). 对于任意 R -模 Q 和一族同态 $\phi_i : Q \rightarrow M_i$, 存在唯一的同态 $\phi : Q \rightarrow P$, 使得对于所有 $i \in I$, 下图交换 (即 $\pi_i \circ \phi = \phi_i$):

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \nearrow \exists! \phi & \downarrow \pi_i \\ Q & \xrightarrow{\phi_i} & M_i \end{array}$$

这导出了如下同构式:

$$\mathrm{Hom}_R(Q, \prod_{i \in I} M_i) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(Q, M_i) \quad (4)$$

直观理解: 映射方向

要构造映射进入直积 P , 只需要给出进入每一个分量 M_i 的映射。

证明. 我们分两步进行: 先证明泛性质中的存在性与唯一性, 再由此推导同构式。

1. 泛性质的证明

设 $P = \prod_{i \in I} M_i$ 的元素记为序列 $(x_i)_{i \in I}$, 其中投影 $\pi_k((x_i)_{i \in I}) = x_k$ 。

(i) 存在性 (Existence):

给定一族同态 $\{\phi_i : Q \rightarrow M_i\}_{i \in I}$, 我们要构造 $\phi : Q \rightarrow P$ 。对任意 $q \in Q$, 定义 $\phi(q)$ 为第 i 个分量取值为 $\phi_i(q)$ 的序列, 即:

$$\phi(q) := (\phi_i(q))_{i \in I}$$

首先验证 ϕ 是 R -模同态。对于任意 $q_1, q_2 \in Q$ 和 $r \in R$:

$$\begin{aligned} \phi(q_1 + q_2) &= (\phi_i(q_1 + q_2))_{i \in I} \\ &= (\phi_i(q_1) + \phi_i(q_2))_{i \in I} \quad (\text{由 } \phi_i \text{ 的同态性}) \\ &= (\phi_i(q_1))_{i \in I} + (\phi_i(q_2))_{i \in I} \quad (\text{由直积的逐点加法定义}) \\ &= \phi(q_1) + \phi(q_2) \end{aligned}$$

同理可证 $\phi(r \cdot q) = r \cdot \phi(q)$ 。其次验证图表交换性: 对于任意 $k \in I$,

$$(\pi_k \circ \phi)(q) = \pi_k((\phi_i(q))_{i \in I}) = \phi_k(q)$$

故 $\pi_k \circ \phi = \phi_k$ 成立。存在性得证。

(ii) 唯一性 (Uniqueness):

假设存在另一个同态 $\psi : Q \rightarrow P$ 也满足 $\pi_i \circ \psi = \phi_i \ (\forall i \in I)$ 。设 $\psi(q) = (y_i)_{i \in I}$ 。根据投影的定义, $y_i = \pi_i(\psi(q))$ 。由假设条件, $\pi_i(\psi(q)) = \phi_i(q)$ 。这意味着 $\psi(q)$ 的每一个分量 y_i 都被唯一确定为 $\phi_i(q)$ 。因此 $\psi(q) = (\phi_i(q))_{i \in I} = \phi(q)$, 即 $\psi = \phi$ 。

2. 同构式的推导

定义映射

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Hom}_R(Q, P) &\longrightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(Q, M_i) \\ f &\longmapsto (\pi_i \circ f)_{i \in I} \end{aligned}$$

我们需要证明 Ψ 是群同构 (双射且保持加法)。

- **满射性 (Surjectivity):** 对应于泛性质的存在性。对于右侧任意一个元素 (即一族同态) $(\phi_i)_{i \in I}$, 由上述证明可知, 存在 $\phi \in \text{Hom}_R(Q, P)$ 使得 $\pi_i \circ \phi = \phi_i$ 。这意味着 $\Psi(\phi) = (\phi_i)_{i \in I}$ 。
- **单射性 (Injectivity):** 对应于泛性质的唯一性。若 $\Psi(f) = \Psi(g)$, 则对所有 i , $\pi_i \circ f = \pi_i \circ g$ 。令 $\phi_i = \pi_i \circ f$, 则 f 和 g 都是满足“投影后等于 ϕ_i ”的映射。由唯一性可知 $f = g$ 。
- **保持加法:** Hom 集合与直积集合均具备阿贝尔群结构。 $\Psi(f + g) = (\pi_i \circ (f + g))_i = (\pi_i \circ f + \pi_i \circ g)_i = \Psi(f) + \Psi(g)$ 。

綜上, $\text{Hom}_R(Q, P) \cong \prod \text{Hom}_R(Q, M_i)$ 。 □

直和与子模的和 (Direct Sum)

定义 10.3 (子模的和). 设 $N_i \subseteq M$ 为子模。它们的和定义为:

$$\sum_{i \in I} N_i := \left\langle \bigcup_{i \in I} N_i \right\rangle = \left\{ \sum_{\text{finite}} x_{i_k} \mid x_{i_k} \in N_{i_k} \right\}$$

定义 10.4 (内直和判定). 若满足以下条件, 则称和为直和, 记为 $\bigoplus N_i$:

$$\left(\sum_{j \neq i} N_j \right) \cap N_i = \{0\}, \quad \forall i \in I$$

定理 10.5 (直和泛性质). 设 $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$, 存在标准嵌入映射 $j_i: N_i \rightarrow M$ 。对于任意模 Y 和同态 $\psi_i: N_i \rightarrow Y$, 存在唯一同态 $\psi: M \rightarrow Y$, 使得 $\psi \circ j_i = \psi_i$ 。

$$\text{Hom}_R\left(\bigoplus_{i \in I} N_i, Y\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(N_i, Y)$$

证明. 设 $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ 。直和定义的关键在于: M 中的每一个元素 x 都可以唯一地表示为有限和形式 $x = \sum_{i \in I} j_i(x_i)$, 其中 $x_i \in N_i$, 且只有有限个 $x_i \neq 0$ 。

1. 泛性质的证明

(i) 存在性 (Existence):

给定一族同态 $\{\psi_i: N_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$ 。我们要构造 $\psi: M \rightarrow Y$ 。对于任意 $x = \sum_{i \in I} j_i(x_i) \in M$, 定义:

$$\psi(x) := \sum_{i \in I} \psi_i(x_i)$$

由于 x 的表达式中只有有限个 x_i 非零, 且 $\psi_i(0) = 0$, 上述右边的求和在 Y 中只有有限项非零, 因此定义良好。显然 ψ 保持加法和数乘 (由 ψ_i 的线性及求和符号的线性性保证)。验证图表交换性: 对于任意 $k \in I$ 和 $n \in N_k$, 元素 $j_k(n)$ 在 M 中的分解只有第 k 项为 n , 其余为 0。因此:

$$(\psi \circ j_k)(n) = \psi(j_k(n)) = \psi_k(n) + \sum_{i \neq k} \psi_i(0) = \psi_k(n)$$

即 $\psi \circ j_k = \psi_k$ 成立。

(ii) 唯一性 (Uniqueness):

假设存在另一个同态 $\phi: M \rightarrow Y$ 也满足 $\phi \circ j_i = \psi_i$ ($\forall i \in I$)。对于任意 $x = \sum_{i \in I} j_i(x_i) \in$

M ，利用 ϕ 的线性：

$$\phi(x) = \phi\left(\sum_{i \in I} j_i(x_i)\right) = \sum_{i \in I} \phi(j_i(x_i)) = \sum_{i \in I} (\phi \circ j_i)(x_i)$$

代入假设条件 $\phi \circ j_i = \psi_i$ ，得：

$$\phi(x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x_i)$$

这正是我们定义的 $\psi(x)$ 。故 $\phi = \psi$ 。

2. 同构式的推导

定义映射

$$\begin{aligned} \Gamma : \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{i \in I} N_i, Y\right) &\longrightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(N_i, Y) \\ F &\longmapsto (F \circ j_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

- **满射性：**对应泛性质的存在性。对于右边任意一族 $(\psi_i)_{i \in I}$ ，存在 ψ 使得 $\psi \circ j_i = \psi_i$ ，即 $\Gamma(\psi) = (\psi_i)_{i \in I}$ 。
- **单射性：**对应泛性质的唯一性。若 $\Gamma(F) = \Gamma(G)$ ，即对所有 i 都有 $F \circ j_i = G \circ j_i$ 。令 $\psi_i = F \circ j_i$ ，由唯一性知 $F = G$ 。
- **保持加法：** $\Gamma(F + G) = ((F + G) \circ j_i)_i = (F \circ j_i + G \circ j_i)_i = \Gamma(F) + \Gamma(G)$ 。

综上， $\text{Hom}_R(\bigoplus N_i, Y) \cong \prod \text{Hom}_R(N_i, Y)$ 。 □

直观理解：对偶性

直和是直积的对偶概念（Coproduct）。要构造走出直和的映射，只需给出走出每一个分量的映射。

有限情况与无限情况的对比

命题 10.6 (有限双积). 当索引集 I 有限时（例如 $i = 1, \dots, r$ ），直和与直积同构 ($M \cong \bigoplus M_i \cong \prod M_i$)。此时，投影 π 与嵌入 j 满足：

$$1. \text{ 正交性: } \pi_k \circ j_l = \delta_{kl} \cdot \text{Id}_{M_l}$$

$$2. \text{ 完备性: } \sum_{l=1}^r j_l \circ \pi_l = \text{Id}_M$$

例 10.7 (无限维函数空间). 设 $P = \text{Map}(X, M)$ 是 X 到 M 的所有函数。

- $P \cong \prod_{x \in X} M$ (直积, 允许无限多非零项)。
- 令 P_x 为单点支撑函数子模, 则 $\sum_{x \in X} P_x$ 是直和 (有限支撑函数)。
- 若 X 无限, 则 $\bigoplus P_x \subsetneq \prod P_x$ 。

11 单模与半单模 (Simple & Semisimple Modules)

单模与舒尔引理 (Schur's Lemma)

定义 11.1 (单模/不可约模). 非零模 M 称为单模, 如果其子模只有 $\{0\}$ 和 M 自身。

引理 11.2 (Schur 引理). 设 M, N 为单 R -模, $\phi: M \rightarrow N$ 为同态。

1. 若 $\phi \neq 0$, 则 ϕ 为同构。
2. $D = \text{End}_R(M)$ 是一个除环 (Division Ring)。

证明: Schur 引理. (1) 证明非零同态即为同构 设 $\phi: M \rightarrow N$ 是非零的 R -模同态。

- **单射性:** 考察核 $\text{Ker}(\phi)$ 。它是 M 的子模。因为 M 是单模, $\text{Ker}(\phi)$ 只能是 $\{0\}$ 或 M 。若 $\text{Ker}(\phi) = M$, 则 ϕ 为零映射, 与假设矛盾。故 $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$, 即 ϕ 是单射。
- **满射性:** 考察像 $\text{Im}(\phi)$ 。它是 N 的子模。因为 N 是单模, $\text{Im}(\phi)$ 只能是 $\{0\}$ 或 N 。若 $\text{Im}(\phi) = \{0\}$, 则 ϕ 为零映射, 与假设矛盾。故 $\text{Im}(\phi) = N$, 即 ϕ 是满射。

综上, ϕ 既单且满, 故为同构。

(2) 证明自同态环是除环 设 $D = \text{End}_R(M)$ 。显然 D 是一个环 (具有加法和复合运算)。取任意非零元素 $\phi \in D$ 。令 $N = M$, 应用上述结论 (1), 可知 $\phi: M \rightarrow M$ 是一个同构。因此, ϕ 存在逆映射 ϕ^{-1} , 且 ϕ^{-1} 也是 R -模同态 (即 $\phi^{-1} \in D$)。既然 D 中每一个非零元都可逆, 故 D 是除环。 \square

定理 11.3 (Schur 引理 II - 代数闭域情形). 设 G 为群, V 为 \mathbb{C} 上的有限维不可约表示。则:

$$\text{End}_G(V) \cong \mathbb{C} \cdot \text{Id}$$

即唯一的自同态是标量变换。证明利用了 \mathbb{C} 上特征值存在的性质。

证明: Schur 引理 II. 任取 $\phi \in \text{End}_G(V)$ 。由于 V 是复数域 \mathbb{C} 上的有限维向量空间, 根据线性代数基本定理, ϕ 作为线性变换必有特征值。设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 ϕ 的一个特征值。构造映射 $\psi = \phi - \lambda \cdot \text{Id}_V$ 。

1. ψ 是 G -同态: 因为 ϕ 与群作用交换, 而标量变换 $\lambda \cdot \text{Id}$ 与任何线性变换交换, 所以它们的差 ψ 依然在 $\text{End}_G(V)$ 中。
2. $\text{Ker}(\psi) \neq 0$: 因为 λ 是特征值, 存在非零特征向量 v 使得 $\phi(v) = \lambda v$, 即 $\psi(v) = 0$ 。
3. 应用不可约性: $\text{Ker}(\psi)$ 是 V 的非零子模 (不变子空间)。因为 V 是不可约的 (单模), 其非零子模只能是 V 本身。

故 $\text{Ker}(\psi) = V$, 这意味着对任意 $v \in V$ 都有 $\psi(v) = 0$, 即 $\phi(v) = \lambda v$ 。所以 $\phi = \lambda \cdot \text{Id}$ 。□

注意 (NOTE): 代数闭域的关键性

上述证明严重依赖于“特征值存在”这一事实, 这要求基域是代数闭域 (如 \mathbb{C})。若是实数域 \mathbb{R} , 例如旋转群 $SO(2)$ 在 \mathbb{R}^2 上的作用是不可约的, 但其自同态环同构于 \mathbb{C} (旋转 + 伸缩), 比 \mathbb{R} 大, 并不是所有自同态都是标量变换。

半单模 (Semisimple Modules)

定义 11.4. 模 M 称为半单模, 如果它是单模的直和: $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ 。

定理 11.5 (半单模的等价条件). 以下命题等价:

1. M 是半单模 (单模的直和)。
2. M 是单模的和 ($M = \sum S_i$)。
3. M 是完全可约的: $\forall N \subseteq M, \exists N' \subseteq M$ 使得 $M = N \oplus N'$ 。

证明: 半单模等价条件. 我们将按照 $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (1)$ 的顺序进行证明。

(1) \implies (2):

若 $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$, 则 M 显然由 $\{S_i\}_{i \in I}$ 生成。即 $M = \sum_{i \in I} S_i$ 。

(2) \implies (3):

假设 $M = \sum_{i \in I} S_i$, 其中 S_i 为单模。设 N 是 M 的任意子模。我们要寻找 N 的直和

补。考虑 M 中与 N 独立的单模集合族：

$$\mathcal{F} = \{J \subseteq I \mid N \cap \left(\sum_{j \in J} S_j\right) = \{0\}\}$$

该集合族关于包含关系是非空的（至少包含空集）且归纳有序的。由 Zorn 引理，存在极大元 $J_{max} \subseteq I$ 。令 $M' = \sum_{j \in J_{max}} S_j$ 。由直和判定条件知 $N \cap M' = \{0\}$ ，且 M' 实际上是直和 $\bigoplus_{j \in J_{max}} S_j$ 。我们要证明 $M = N + M'$ 。只需证明对于任意 $i \in I$ ，都有 $S_i \subseteq N + M'$ 。

- 若 $S_i \subseteq M'$ ，显然成立。
- 若 $S_i \not\subseteq M'$ ，考虑交集 $(N + M') \cap S_i$ 。这是一个 S_i 的子模。因为 S_i 是单模，该交集只能是 $\{0\}$ 或 S_i 。若为 $\{0\}$ ，则 $N \cap (M' + S_i) = \{0\}$ （需简单验证），这意味着可以将 i 加入 J_{max} ，这与 J_{max} 的极大性矛盾。因此必有 $(N + M') \cap S_i = S_i$ ，即 $S_i \subseteq N + M'$ 。

综上，所有 S_i 都在 $N + M'$ 中，故 $M = N \oplus M'$ 。

(3) \implies (1):

假设 M 是完全可约的。第一步：证明 M 包含单子模（若 $M \neq 0$ ）。取 $0 \neq x \in M$ 。由 Zorn 引理，循环模 Rx 包含一个极大子模 K 。由于 M 完全可约，其子模 Rx 也是完全可约的（完全可约模的子模性质）。故 $Rx = K \oplus S$ ，其中 $S \cong Rx/K$ 是单模。所以 M 包含单子模。

第二步：构造直和分解。考虑 M 中一族单子模的直和 $P = \bigoplus_{\alpha} S_{\alpha}$ 。由 Zorn 引理，存在一个极大的这样的直和 P_{max} 。由条件 (3)，存在补模 K 使得 $M = P_{max} \oplus K$ 。若 $K \neq 0$ ，由第一步可知 K 必定包含一个单子模 S' 。显然 $P_{max} \cap S' = \{0\}$ （因为 $S' \subseteq K$ ），这意味着 $P_{max} \oplus S'$ 是一个更大的单模直和，与 P_{max} 的极大性矛盾。故必须 $K = 0$ ，即 $M = P_{max}$ 是单模的直和。 \square

12 自由模 (Free Modules)

定义与秩

定义 12.1 (自由模). M 是自由 R -模，若存在子集 $X \subseteq M$ （基）满足：

1. $M = \langle X \rangle$ （生成性）；

2. X 是 R -线性无关的。

注意 (NOTE): 秩的唯一性

标准例子是 R^n 。

- 若 R 是交换环或体，则基的势（秩）唯一，即 $R^n \cong R^m \implies n = m$ 。
- 对一般非交换环，秩可能不唯一。若秩唯一，称该环为 **IBN** 环。

13 正合列与同调代数 (Exact Sequences)

正合列定义

定义 13.1. 序列 $M' \xrightarrow{\Phi} M \xrightarrow{\Psi} M''$ 在 M 处正合，若：

$$\text{Im}(\Phi) = \text{Ker}(\Psi)$$

这意味着 $\Psi \circ \Phi = 0$ 且所有进入核的元素都来自上一步的像。

例 13.2 (常见类型). • $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\Phi} M$ 正合 $\iff \Phi$ 单射。

• $M \xrightarrow{\Psi} M'' \rightarrow 0$ 正合 $\iff \Psi$ 满射。

• 短正合列 $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0 \iff M'' \cong M/i(M')$ 。

例 13.3 (具体实例：乘 n 映射). 设 A 为交换群， $n \in \mathbb{N}$ 。存在正合列：

$$0 \longrightarrow A[n] \longrightarrow A \xrightarrow{\times n} A \longrightarrow A/nA \longrightarrow 0$$

其中 $A[n]$ 是 n -扭子群 (Kernel)， A/nA 是余核 (Cokernel)。

短五引理 (The Short Five Lemma)

考虑如下交换图表，其中两行均为短正合列：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{p'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

定理 13.4 (3-Lemma). 1. 若 a, c 单射 $\implies b$ 单射。

2. 若 a, c 满射 $\implies b$ 满射。

3. 若 a, c 同构 $\implies b$ 同构。

证明方法称为**图表追踪 (Diagram Chasing)**。

证明：图表追踪法。 设交换图表如下：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{p'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

1. 单射性证明 (Injectivity)

假设 a 和 c 是单射。设 $x \in B$ 且 $b(x) = 0$ 。我们要证明 $x = 0$ 。

1. 将 x 映至 C' : $p'(b(x)) = p'(0) = 0$ 。
2. 利用交换性: $c(p(x)) = p'(b(x)) = 0$ 。
3. 因为 c 是单射, 故 $p(x) = 0$ 。
4. 利用上行正合性: $x \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(i)$, 故存在 $y \in A$ 使得 $i(y) = x$ 。
5. 将 y 映至 B' : $b(i(y)) = b(x) = 0$ 。
6. 利用交换性: $i'(a(y)) = b(i(y)) = 0$ 。
7. 因为下行正合, i' 是单射, 故 $a(y) = 0$ 。
8. 因为 a 是单射, 故 $y = 0$ 。
9. 回推 x : $x = i(y) = i(0) = 0$ 。得证 b 是单射。

2. 满射性证明 (Surjectivity)

假设 a 和 c 是满射。任取 $y' \in B'$ 。我们要找到 $x \in B$ 使得 $b(x) = y'$ 。

1. 将 y' 映至 C' : 令 $z' = p'(y')$ 。
2. 因为 c 是满射, 存在 $z \in C$ 使得 $c(z) = z'$ 。
3. 因为上行正合, p 是满射, 存在 $x_0 \in B$ 使得 $p(x_0) = z$ 。

4. 比较 $b(x_0)$ 与 y' :

$$p'(b(x_0)) = c(p(x_0)) = c(z) = z' = p'(y')$$

这说明 $p'(y' - b(x_0)) = 0$ 。

5. 利用下行正合性: $y' - b(x_0) \in \text{Ker}(p') = \text{Im}(i')$ 。故存在 $w' \in A'$ 使得 $i'(w') = y' - b(x_0)$ 。

6. 因为 a 是满射, 存在 $w \in A$ 使得 $a(w) = w'$ 。

7. 构造解 $x = x_0 + i(w)$ 。验证:

$$\begin{aligned} b(x) &= b(x_0) + b(i(w)) \\ &= b(x_0) + i'(a(w)) \quad (\text{交换性}) \\ &= b(x_0) + i'(w') \\ &= b(x_0) + (y' - b(x_0)) \\ &= y' \end{aligned}$$

得证 b 是满射。

3. 同构性证明

若 a, c 均为同构, 则它们既单且满。由 (1) 和 (2) 可知 b 既单且满, 故 b 也是同构。□