

# 代数学笔记 Chapter 6：模论基础 (Module Theory)

根据手写笔记整理

2025 年 12 月 15 日

## 本章导读

本章主要介绍模 (Module) 的概念。模是线性空间在环上的推广。

- 掌握模的公理化定义，理解其与线性空间的联系。
- 理解  $\mathbb{Z}$ -模即为阿贝尔群。
- 理解模定义的等价描述（环同态到自同态环）。
- **核心难点：**理解  $R^{\text{op}} \cong \text{End}_R(R)$  及其背后的“左右”对偶关系。

## 目录

1 模 (Modules) 与线性空间 (Linear Spaces)	2
2 重要的模例子	2
3 模定义的结构等价性	3
4 反环与正则模的自同态环	4
5 模同态与子模	6
5.1 模同态 (Module Homomorphism)	6
5.2 子模 (Submodule)	7

5.3 生成子模 (Generated Submodule)	7
<b>6 商模与同构定理</b>	<b>7</b>
6.1 商模运算的良定义 (Well-definedness)	7
6.1.1 问题背景	7
6.1.2 详细证明	8
6.2 模的第一同构定理 (First Isomorphism Theorem)	9
6.2.1 定理陈述	9
6.2.2 详细证明步骤	9
<b>7 左模、右模与双模</b>	<b>10</b>
7.1 右模与反环 (Opposite Ring)	10
7.2 双模 (Bimodule)	11
<b>8 群表示与模</b>	<b>11</b>
<b>9 直积与直和</b>	<b>13</b>
9.1 外直积 (External Direct Product)	13
9.2 内直和 (Internal Direct Sum)	13
<b>10 直积与直和 (Direct Product &amp; Direct Sum)</b>	<b>15</b>
<b>11 单模与半单模 (Simple &amp; Semisimple Modules)</b>	<b>19</b>
<b>12 自由模 (Free Modules)</b>	<b>21</b>
<b>13 正合列与同调代数 (Exact Sequences)</b>	<b>22</b>

# 1 模 (Modules) 与线性空间 (Linear Spaces)

## 模 定 义 的 引 入

模的概念是对线性空间的自然推广。我们将标量域  $k$  替换为一般的幺环  $R$ 。

左 $R$ -模 (Left $R$ -Module)	线性空间 ( $V/k$ )
设 $R$ 是幺环。 $M$ 是 $R$ 上的左模，记为 $(M, 0, +, \cdot)$ 。 基本结构： <ul style="list-style-type: none"><li>• <math>0 \in M</math></li><li>• <math>+ : M \times M \rightarrow M</math></li><li>• <math>\cdot : R \times M \rightarrow M</math></li></ul>	设 $k$ 是域。 $V$ 是 $k$ 上的线性空间，记为 $(V, 0, +, \cdot)$ 。 <b>基本结构：</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• <math>0 \in V</math></li><li>• <math>+ : V \times V \rightarrow V</math></li><li>• <math>\cdot : k \times V \rightarrow V</math></li></ul>
公理体系 (Axioms)	
1. $(M, 0, +)$ 是阿贝尔群。 2. 数乘满足以下律 $(x, y \in M, a, b \in R)$ ： <ul style="list-style-type: none"><li>• <math>(a \cdot b)x = a \cdot (b \cdot x)</math></li><li>• <math>(a + b)x = ax + bx</math></li><li>• <math>a(x + y) = ax + ay</math></li><li>• <math>1 \cdot x = x</math></li></ul>	1. $(V, 0, +)$ 是加法群 (Abelian)。 2. 数乘满足以下律 $(x, y \in V, a, b \in k)$ ： <ul style="list-style-type: none"><li>• <math>(ab)x = a(bx)</math></li><li>• <math>(a + b)x = ax + bx</math></li><li>• <math>a(x + y) = ax + ay</math></li><li>• <math>1 \cdot x = x</math></li></ul>

## 2 重要的模例子

## 两 个 基 本 例 示

例 2.1 (线性空间). 若  $R = k$  为域，则  $k$ -线性空间  $\iff k$ -模。

例 2.2 (阿贝尔群即  $\mathbb{Z}$ -模).  $\mathbb{Z}$ -模  $\iff$  加法群 (阿贝尔群)。

设  $M$  是加法群，则可定义唯一的  $\mathbb{Z}$ -模结构。对于  $n \in \mathbb{Z}, x \in M$ ，数乘定义如下：

$$n \cdot x = \begin{cases} \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ 个}} & (n \in \mathbb{N}_+, n > 0) \\ 0 & (n = 0) \\ -mx = \underbrace{(-x) + \cdots + (-x)}_{m \text{ 个}} & (n = -m, m \in \mathbb{N}_+) \end{cases} \quad (1)$$

### 3 模定义的结构等价性

#### 环作用与同态

我们可以从“表示论”的角度来理解模。定义一个模，本质上是定义环  $R$  到群自同态环的映射。

**命题 3.1.** 设  $R$  为幺环， $M$  为加法群。以下两个陈述等价：

- (i)  $M$  是左  $R$ -模。
- (ii) 存在环同态  $\Phi : R \rightarrow \text{End}(M)$ 。

其中  $\text{End}(M)$  是  $M$  的自同态环（加法为逐点加，乘法为复合）。

**证明.** 1. (i)  $\Rightarrow$  (ii): 由模构造同态

假设  $M$  是左  $R$ -模。构造映射  $\Phi : R \rightarrow \text{End}(M)$ :

$$a \mapsto \Phi(a), \quad \text{其中 } \Phi(a)(x) = a \cdot x$$

即  $\Phi(a)$  是“左乘  $a$ ”这一变换。验证  $\Phi$  是环同态：

- 加法:  $(a + b)x = ax + bx \implies \Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$ 。
- 乘法:  $(ab)x = a(bx) \implies \Phi(ab) = \Phi(a) \circ \Phi(b)$ 。
- 单位元:  $1 \cdot x = x \implies \Phi(1) = \text{id}_M$ 。

2. (ii)  $\Rightarrow$  (i): 由同态定义模

假设存在环同态  $\Phi : R \rightarrow \text{End}(M)$ 。定义数乘  $R \times M \rightarrow M$ :

$$(a, x) \mapsto a \cdot x := \Phi(a)(x)$$

容易验证该运算满足模的所有公理（因为  $\Phi$  保持了环的运算结构）。  $\square$

## 4 反环与正则模的自同态环

$$\text{P20: } R^{\text{op}} \cong \text{End}_R(R)$$

本节讨论一个深刻的同构，它揭示了“左乘”与“右乘”在非交换环中的对偶关系。

**定义 4.1 (反环  $R^{\text{op}}$ )**. 设  $R$  为环。 $R^{\text{op}}$  与  $R$  集合、加法相同，但乘法定义为：

$$a \cdot_{\text{op}} b = b \cdot a$$

即运算顺序颠倒。

**注意 (NOTE): 符号说明**

${}_R R$  表示  $R$  视作自身的左  $R$ -模。即标量从左边作用： $r \cdot x = rx$  (环原本的乘法)。

**定理 4.2.**  $R^{\text{op}} \cong \text{End}_R({}_R R)$ 。

**直观理解：为什么是反环？**

$\text{End}_R({}_R R)$  中的元素  $f$  必须与左乘交换，即  $f(rx) = rf(x)$ 。在非交换环中，只有右乘才能与左乘完美交换 (结合律  $(rx)a = r(xa)$ )。然而，右乘的复合顺序与元素乘积顺序是相反的：先右乘  $a$  再右乘  $b$ ，等于右乘  $(ab)$ ，但在函数记号里是  $f_b \circ f_a$ 。为了修正这个顺序，我们需要  $R^{\text{op}}$ 。

证明  $R^{\text{op}} \cong \text{End}_R(R)$ 。我们分步构造映射并验证。

### 1. 构造映射

定义  $\Psi : R^{\text{op}} \rightarrow \text{End}_R(R)$ ，对于  $a \in R$ ，定义  $\rho_a$  为右乘映射：

$$\rho_a(x) = xa$$

### 2. 验证 $\rho_a$ 是模同态

我们需要验证  $\rho_a$  属于  $\text{End}_R(R)$  (即它是左  $R$ -线性的)。对于任意  $r \in R$  和  $x \in R$ :

$$\rho_a(r \cdot x) = (rx)a = r(xa) = r \cdot \rho_a(x)$$

这利用了环的结合律。

### 3. 验证 $\Psi$ 是环同态

- 加法: 显然  $\rho_{a+b} = \rho_a + \rho_b$ 。
- 乘法: 计算  $\Psi(a \cdot_{\text{op}} b)$ 。

$$\text{左边} = \Psi(ba) = \rho_{ba} \implies \text{作用于 } x : x(ba)$$

$$\text{右边} = \Psi(a) \circ \Psi(b) = \rho_a \circ \rho_b \implies x \xrightarrow{\rho_b} xb \xrightarrow{\rho_a} (xb)a$$

由结合律  $x(ba) = (xb)a$ , 故  $\Psi(a \cdot_{\text{op}} b) = \Psi(a) \circ \Psi(b)$ , 乘法保持。

#### 4. 验证双射

- 单射: 若  $\rho_a = 0$  (零映射), 则  $\rho_a(1) = 1 \cdot a = a = 0$ 。故核为  $\{0\}$ 。
- 满射: 设  $f \in \text{End}_R(R)$  为任意自同态。令  $a = f(1)$ 。对于任意  $x \in R$ , 我们有:

$$f(x) = f(x \cdot 1) \stackrel{\text{左线性}}{=} xf(1) = xa = \rho_a(x)$$

因此  $f = \rho_a = \Psi(a)$ 。

□

## 本章导读

本章主要整理了模（Module）的基本理论。模可以看作是线性空间在环上的推广，或者是阿贝尔群的推广。我们将探讨模同态、子模、商模、同构定理，并进一步延伸到左右模的区别、双模以及模论在群表示论中的应用（群代数）。最后，我们将讨论模的分解工具：外直积与内直和。

## 5 模同态与子模

### 基本定义

#### 5.1 模同态 (Module Homomorphism)

设  $M, M'$  为  $R$ -模。映射  $\phi : M \rightarrow M'$  称为 \*\* $R$ -模同态\*\* ( $R$ -module homomorphism)，如果它满足：

1. 加法保持:  $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$  (即  $\phi$  是加法群同态)。
2. 数乘保持:  $\phi(ax) = a\phi(x)$  (即  $\phi$  与标量乘法交换)。

记  $\text{Hom}_R(M, N) = \{M \rightarrow N \text{ 的 } R\text{-同态}\}$ 。

注意 (NOTE): 同态集合的关系

由于模同态首先是群同态，我们有包含关系：

$$\text{Hom}_R(M, N) \subseteq \text{Hom}_{\text{Ab}}(M, N)$$

对于同态  $\phi$ ，我们定义：

- \*\* 核 (Kernel)\*\*:  $\text{Ker}(\phi) = \phi^{-1}(0) = \{x \in M \mid \phi(x) = 0\} \leq M$
- \*\* 像 (Image)\*\*:  $\text{Im}(\phi) = \phi(M) = \{\phi(x) \mid x \in M\} \leq M'$

二者均为各自所在的模的 \*\* 子模 \*\*。

## 5.2 子模 (Submodule)

**定义 5.1** (子模). 设  $M$  为左  $R$ -模,  $N \subseteq M$ 。若  $N$  满足: 1.  $\forall x, y \in N, x + y \in N$  (加法封闭) 2.  $\forall a \in R, x \in N, a \cdot x \in N$  (数乘封闭) 则称  $N$  为  $M$  的  $**R$ -子模  $**$ , 记作  $N \leq M$ 。

### 直观理解: 子模的类比

- 当  $R = \mathbb{Z}$  时,  $\mathbb{Z}$ -模即为阿贝尔群, 子模即为  $**$  子群  $**$ 。
- 当  $R$  为域时,  $R$ -模即为线性空间, 子模即为  $**$  子空间  $**$ 。
- 把  $R$  看作自身的左  $R$ -模, 其子模即为  $**$  左理想  $**$ 。

## 5.3 生成子模 (Generated Submodule)

设  $S \subseteq M$ , 由  $S$  生成的子模  $\langle S \rangle$  定义为包含  $S$  的最小子模, 即所有包含  $S$  的子模的交集。显式表达为:

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid a_i \in R, x_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

特例: 若  $S = \{x\}$ , 则  $\langle x \rangle = Rx = \{ax \mid a \in R\}$  称为由  $x$  生成的  $**$  循环子模  $**$ 。若  $M = Rx$ , 则  $M$  为  $**$  循环模  $**$ 。

# 6 商模与同构定理

## 6.1 商模运算的良定义 (Well-definedness)

### 6.1.1 问题背景

设  $R$  是环,  $M$  是左  $R$ -模,  $N$  是  $M$  的子模。我们在商集合  $M/N = \{x + N \mid x \in M\}$  上定义加法和数乘运算如下:

$$(x + N) + (y + N) := (x + y) + N \tag{2}$$

$$a \cdot (x + N) := (ax) + N \tag{3}$$

为什么需要证明良定义? 因为陪集的表示法不唯一。例如  $x + N$  和  $x' + N$  可能是同一个集合 (只要  $x - x' \in N$ )。我们需要确保我们选用了  $x$  还是  $x'$  来计算, 最终得到的结果集合是完全一样的。

### 6.1.2 详细证明

**命题 6.1.** 上述定义的加法和数乘运算与代表元的选取无关，是良定义的 (*Well-defined*)。

#### 证明. 1. 加法的良定义性

假设有两个陪集  $A, B \in M/N$ 。设  $x, x'$  是  $A$  的不同代表元，即  $A = x + N = x' + N$ 。这意味着  $x - x' \in N$ 。设  $y, y'$  是  $B$  的不同代表元，即  $B = y + N = y' + N$ 。这意味着  $y - y' \in N$ 。

我们需要证明：用  $(x, y)$  计算的结果与用  $(x', y')$  计算的结果相同，即：

$$(x + y) + N = (x' + y') + N$$

考察两个结果代表元的差：

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y')$$

因为  $N$  是子模，对加法封闭，且  $x - x' \in N, y - y' \in N$ ，所以：

$$(x - x') + (y - y') \in N$$

即  $(x + y) - (x' + y') \in N$ 。根据陪集相等的充要条件，得证：

$$(x + y) + N = (x' + y') + N$$

#### 2. 数乘的良定义性

设  $x, x'$  是同一个陪集的代表元，即  $x + N = x' + N$  (意味着  $x - x' \in N$ )。任取环中元素  $a \in R$ 。我们需要证明：

$$(ax) + N = (ax') + N$$

考察结果代表元的差：

$$ax - ax' = a(x - x')$$

因为  $N$  是  $R$ -子模，它对数乘封闭（吸收性）。由于  $x - x' \in N$ ，故对于任意  $a \in R$ ，有  $a(x - x') \in N$ 。即  $ax - ax' \in N$ 。得证：

$$(ax) + N = (ax') + N$$

□

## 6.2 模的第一同构定理 (First Isomorphism Theorem)

### 6.2.1 定理陈述

**定理 6.2.** 设  $M, M'$  为左  $R$ -模,  $\phi: M \rightarrow M'$  是一个  $R$ -模同态。令  $K = \ker(\phi)$  为  $\phi$  的核。则存在唯一的  $R$ -模同构映射  $\bar{\phi}: M/K \rightarrow \text{Im}(\phi)$ , 使得  $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$  (其中  $\pi: M \rightarrow M/K$  是自然投影)。即:

$$M/\ker(\phi) \cong \text{Im}(\phi)$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & M' \\ \pi \downarrow & \swarrow \cong & \nearrow \bar{\phi} \\ M/K & & \end{array}$$

### 6.2.2 详细证明步骤

证明分为三个关键部分: (1) 构造映射并证明良定义; (2) 证明它是同态; (3) 证明它是双射。

证明. 第一步: 构造映射  $\bar{\phi}$  并证明良定义

定义映射  $\bar{\phi}: M/K \rightarrow \text{Im}(\phi)$  规则为:

$$\bar{\phi}(x+K) = \phi(x)$$

检验良定义: 假设  $x+K = y+K$ , 即选了不同的代表元。这意味着  $x-y \in K$ 。由  $K = \ker(\phi)$  的定义, 知  $\phi(x-y) = 0$ 。利用  $\phi$  的线性性质:

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi(x-y) = 0 \implies \phi(x) = \phi(y)$$

所以,  $\bar{\phi}(x+K)$  的值与  $x$  的选取无关, 映射是良定义的。

第二步: 验证  $\bar{\phi}$  是模同态

我们需要验证  $\bar{\phi}$  保持加法和数乘运算。设  $\bar{x} = x+K, \bar{y} = y+K$ 。

1. 保持加法:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\bar{x} + \bar{y}) &= \bar{\phi}((x+y)+K) && (\text{商模加法定义}) \\ &= \phi(x+y) && (\text{映射定义}) \\ &= \phi(x) + \phi(y) && (\phi \text{ 是同态}) \\ &= \bar{\phi}(\bar{x}) + \bar{\phi}(\bar{y}) \end{aligned}$$

2. 保持数乘:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(a \cdot \bar{x}) &= \bar{\phi}((ax) + K) && (\text{商模数乘定义}) \\ &= \phi(ax) && (\text{映射定义}) \\ &= a\phi(x) && (\phi \text{ 是同态}) \\ &= a \cdot \bar{\phi}(\bar{x})\end{aligned}$$

第三步: 验证  $\bar{\phi}$  是同构 (双射)

1. 满射性 (Surjectivity): 对于像集  $\text{Im}(\phi)$  中的任意元素  $z$ , 根据定义, 存在  $x \in M$  使得  $\phi(x) = z$ 。取  $M/K$  中的元素  $x + K$ , 则有:

$$\bar{\phi}(x + K) = \phi(x) = z$$

故  $\bar{\phi}$  是满射。

2. 单射性 (Injectivity): 只需证明  $\ker(\bar{\phi}) = \{0_{M/K}\} = \{K\}$ 。假设  $\bar{\phi}(x + K) = 0$ .

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(x + K) = 0 &\implies \phi(x) = 0 && (\text{映射定义}) \\ &\implies x \in \ker(\phi) && (\text{核的定义}) \\ &\implies x \in K && (\text{因为 } K = \ker(\phi)) \\ &\implies x + K = K = 0_{M/K} && (\text{陪集性质})\end{aligned}$$

因为核仅包含零元素, 所以  $\bar{\phi}$  是单射。

结论:  $\bar{\phi}$  是一个良定义的、双射的  $R$ -模同态, 因此它是一个同构。 □

## 7 左模、右模与双模

### 非交换环下的结构

#### 7.1 右模与反环 (Opposite Ring)

当环  $R$  非交换时, 左模  $(a \cdot x)$  与右模  $(x \cdot a)$  有本质区别。

- \*\* 右模公理 \*\*: 需满足  $x \cdot (ab) = (x \cdot a) \cdot b$ 。

- \*\* 反环  $R^{\text{op}}$ : 集合与加法同  $R$ , 乘法定义为  $a * b := ba$ 。

**命题 7.1** (左右转换). 左  $R$ -模与右  $R^{\text{op}}$ -模是一一对应的。转换规则: 若  $M$  是左  $R$ -模, 定义右乘  $x * a := a \cdot x$ , 则  $M$  成为右  $R^{\text{op}}$ -模。

## 7.2 双模 (Bimodule)

设  $R, S$  为环。 $M$  称为  $**(R, S)$ -双模  $**$  ( $R$ - $S$ -bimodule), 若: 1.  $M$  是左  $R$ -模; 2.  $M$  是右  $S$ -模; 3. 左右运算兼容 (结合律):  $\forall a \in R, s \in S, x \in M$ , 有

$$(a \cdot x) \cdot s = a \cdot (x \cdot s)$$

**例 7.2.** • 环  $R$  自身是  $(R, R)$ -双模。其子双模即为  $**$  双边理想  $**$ 。

- $M_{n \times m}(k)$  是  $(M_n(k), M_m(k))$ -双模。

## 8 群表示与模

### 群代数的模

设  $k$  为域,  $G$  为群,  $V$  为  $k$ -线性空间。若  $G$  作用在  $V$  上且保持线性结构, 称  $V$  为  $G$  的  $**$  线性表示  $**$ 。这等价于群同态  $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 。

**直观理解: 表示即模**

$G$  在  $V$  上的表示  $\iff V$  是群代数  $k[G]$  上的左模。

$**$  群代数  $k[G]^{**}$  的元素是形式和  $\sum c_i g_i$ 。其乘法 (卷积) 定义为:

$$(c \cdot c')(g) = \sum_{h \in G} c(h)c'(h^{-1}g)$$

模的作用定义为:  $(\sum c_i g_i) \cdot v = \sum c_i (g_i \cdot v)$ 。

### 1. 从形式和的乘法出发

设两个群代数元素  $A, B \in k[G]$ , 它们可以写成以群元素为基底的形式和:

$$A = \sum_{h \in G} c(h) \cdot h, \quad B = \sum_{k \in G} c'(k) \cdot k$$

其中  $c(h)$  和  $c'(k)$  是标量系数（对应函数值）。

计算它们的乘积  $A \cdot B$ 。根据环的分配律（每一项都要乘以每一项）：

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \left( \sum_{h \in G} c(h) \cdot h \right) \cdot \left( \sum_{k \in G} c'(k) \cdot k \right) \\ &= \sum_{h \in G} \sum_{k \in G} \underbrace{c(h)c'(k)}_{\text{系数相乘}} \cdot \underbrace{(h \cdot k)}_{\text{基底相乘}} \end{aligned}$$

## 2. 重新分组（合并同类项）

上式展开后包含  $|G| \times |G|$  个项。我们需要将这些项整理成标准形式，即按基底  $g$  进行归类：

$$A \cdot B = \sum_{g \in G} C_{\text{new}}(g) \cdot g$$

我们的目标是求出  $g$  前面的系数  $C_{\text{new}}(g)$ （即公式中的  $(c \cdot c')(g)$ ）。

**核心问题：**在双重求和  $\sum_h \sum_k$  中，哪些项  $(h, k)$  的乘积最终贡献给了  $g$ ？

这些项必须满足条件：

$$h \cdot k = g$$

如果我们固定了第一项的基底  $h$ ，那么第二项的基底  $k$  就被唯一确定了：

$$k = h^{-1}g$$

## 3. 导出公式

因此，目标元素  $g$  的总系数，就是所有满足  $h \cdot k = g$  的项的系数之和。我们遍历所有可能的  $h$ ：

$$\begin{aligned} (c \cdot c')(g) &= \sum_{h \in G} (\text{第一项在 } h \text{ 处的系数}) \times (\text{第二项在 } k \text{ 处的系数}) \\ &= \sum_{h \in G} c(h) \cdot c'(h^{-1}g) \quad (\text{代入 } k = h^{-1}g) \\ &= \sum_{h \in G} c(h) \cdot c'(h^{-1}g) \end{aligned}$$

这正是卷积公式的由来。

## 4. 为什么叫“卷积”？（类比分析）

这个名称来源于分析学中函数的卷积，二者在结构上完全一致，只是运算符号不同。

- **实数域上的卷积**（加法群  $\mathbb{R}$ ）：我们要凑出和为  $x$  的项（即  $t + (x - t) = x$ ）。

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x - t) dt$$

- **群上的卷积**（乘法群  $G$ ）：我们要凑出积为  $g$  的项（即  $h \cdot (h^{-1}g) = g$ ）。

$$(c * c')(g) = \sum_{h \in G} c(h) \cdot c'(h^{-1}g)$$

## 9 直积与直和

### 模的分解与合成

#### 9.1 外直积 (External Direct Product)

设  $M_1, \dots, M_r$  为  $R$ -模。定义 \*\*外直积\*\*  $M_1 \times \dots \times M_r$  为笛卡尔积集合，按分量定义加法和数乘。它构成一个新的  $R$ -模。

#### 9.2 内直和 (Internal Direct Sum)

设  $N_1, \dots, N_r$  是模  $M$  的子模。定义求和映射：

$$\Sigma : N_1 \times \dots \times N_r \rightarrow M, \quad (x_1, \dots, x_r) \mapsto \sum x_i$$

若  $\Sigma$  为 \*\*同构\*\*，称  $M$  是  $N_i$  的 \*\*内直和\*\*，记作  $M = N_1 \oplus \dots \oplus N_r$ 。

**定理 9.1** (内直和判定).  $M = N_1 \oplus N_2$  当且仅当满足以下两个条件：

1. \*\*和生成\*\*： $M = N_1 + N_2$  （即  $\Sigma$  满射）
2. \*\*独立性\*\*： $N_1 \cap N_2 = \{0\}$  （即  $\Sigma$  单射）

证明. 根据定义,  $M = N_1 \oplus N_2$  意味着加法映射

$$\Sigma : N_1 \times N_2 \rightarrow M, \quad (n_1, n_2) \mapsto n_1 + n_2$$

是一个  $R$ -模同构 (即既是满射又是单射)。我们将分别证明必要性 ( $\Rightarrow$ ) 和充分性 ( $\Leftarrow$ )。

**1. 必要性 ( $\Rightarrow$ ):** 假设  $M = N_1 \oplus N_2$ 。

由于  $\Sigma$  是同构, 它必然是满射和单射。

- **满射性推出和生成:** 因为  $\Sigma$  是满射, 所以对于任意  $m \in M$ , 存在  $(n_1, n_2) \in N_1 \times N_2$  使得  $\Sigma(n_1, n_2) = m$ 。即  $n_1 + n_2 = m$ 。这正是  $M = N_1 + N_2$  的定义。
- **单射性推出独立性:** 因为  $\Sigma$  是单射, 其核  $\ker(\Sigma) = \{(0, 0)\}$ 。设元素  $x \in N_1 \cap N_2$ 。考察  $N_1 \times N_2$  中的元素  $(x, -x)$  (注意  $-x \in N_2$  因为  $x \in N_2$  且  $N_2$  是子模)。计算其映射值:

$$\Sigma(x, -x) = x + (-x) = 0$$

这意味着  $(x, -x) \in \ker(\Sigma)$ 。由单射性知  $(x, -x) = (0, 0)$ , 即  $x = 0$ 。所以  $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ 。

**2. 充分性 ( $\Leftarrow$ ):** 假设  $M = N_1 + N_2$  且  $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ 。

我们需要证明映射  $\Sigma : (n_1, n_2) \mapsto n_1 + n_2$  是同构。

- **证明  $\Sigma$  是满射:** 由条件  $M = N_1 + N_2$  可知, 对任意  $m \in M$ , 都存在  $n_1 \in N_1, n_2 \in N_2$  使得  $m = n_1 + n_2$ 。即  $m = \Sigma(n_1, n_2)$ 。故  $\Sigma$  满射。
- **证明  $\Sigma$  是单射:** 我们需要证明  $\ker(\Sigma) = \{(0, 0)\}$ 。设  $(n_1, n_2) \in \ker(\Sigma)$ , 即  $\Sigma(n_1, n_2) = 0$ 。这意味着:

$$n_1 + n_2 = 0 \implies n_1 = -n_2$$

观察等式两边:

- 左边  $n_1 \in N_1$ 。
- 右边  $-n_2 \in N_2$  (因为  $n_2 \in N_2$ )。

因此, 元素  $n_1$  既属于  $N_1$  又属于  $N_2$ , 即  $n_1 \in N_1 \cap N_2$ 。由条件  $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ , 可得  $n_1 = 0$ 。进而  $n_2 = -n_1 = 0$ 。所以  $\ker(\Sigma) = \{(0, 0)\}$ , 故  $\Sigma$  单射。

□

综上， $\Sigma$  是双射同态，即同构。所以  $M = N_1 \oplus N_2$ 。

### 本章导读

本文档总结了模论的核心概念，包括直积与直和的泛性质、单模与半单模的结构定理、自由模的性质，以及同调代数中的正合列工具。内容基于手写笔记的详细解读，重点在于理解代数对象的结构及其映射关系（泛性质）。

## 10 直积与直和 (Direct Product & Direct Sum)

### 直积的泛性质 (Universal Property of Product)

设  $R$  为环， $\{M_i\}_{i \in I}$  为一族  $R$ -模。

**定义 10.1** (直积). 令  $P = \prod_{i \in I} M_i$  为笛卡尔积，配备逐分量运算。存在一组标准投影映射  $\pi_i : P \rightarrow M_i$ ，定义为  $\pi_i((x_j)_{j \in I}) = x_i$ 。

**定理 10.2** (直积泛性质). 对于任意  $R$ -模  $Q$  和一族同态  $\phi_i : Q \rightarrow M_i$ ，存在唯一的同态  $\phi : Q \rightarrow P$ ，使得对于所有  $i \in I$ ，下图交换（即  $\pi_i \circ \phi = \phi_i$ ）：

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \exists! \phi \nearrow & \downarrow \pi_i & \\ Q & \xrightarrow{\phi_i} & M_i \end{array}$$

这导出了如下同构式：

$$\text{Hom}_R(Q, \prod_{i \in I} M_i) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(Q, M_i) \quad (4)$$

#### 直观理解：映射方向

要构造映射进入直积  $P$ ，只需要给出进入每一个分量  $M_i$  的映射。

**证明.** 我们分两步进行：先证明泛性质中的存在性与唯一性，再由此推导同构式。

#### 1. 泛性质的证明

设  $P = \prod_{i \in I} M_i$  的元素记为序列  $(x_i)_{i \in I}$ ，其中投影  $\pi_k((x_i)_{i \in I}) = x_k$ 。

(i) 存在性 (Existence):

给定一族同态  $\{\phi_i : Q \rightarrow M_i\}_{i \in I}$ , 我们要构造  $\phi : Q \rightarrow P$ 。对任意  $q \in Q$ , 定义  $\phi(q)$  为第  $i$  个分量取值为  $\phi_i(q)$  的序列, 即:

$$\phi(q) := (\phi_i(q))_{i \in I}$$

首先验证  $\phi$  是  $R$ -模同态。对于任意  $q_1, q_2 \in Q$  和  $r \in R$ :

$$\begin{aligned}\phi(q_1 + q_2) &= (\phi_i(q_1 + q_2))_{i \in I} \\ &= (\phi_i(q_1) + \phi_i(q_2))_{i \in I} \quad (\text{由 } \phi_i \text{ 的同态性}) \\ &= (\phi_i(q_1))_{i \in I} + (\phi_i(q_2))_{i \in I} \quad (\text{由直积的逐点加法定义}) \\ &= \phi(q_1) + \phi(q_2)\end{aligned}$$

同理可证  $\phi(r \cdot q) = r \cdot \phi(q)$ 。其次验证图表交换性: 对于任意  $k \in I$ ,

$$(\pi_k \circ \phi)(q) = \pi_k((\phi_i(q))_{i \in I}) = \phi_k(q)$$

故  $\pi_k \circ \phi = \phi_k$  成立。存在性得证。

(ii) 唯一性 (Uniqueness):

假设存在另一个同态  $\psi : Q \rightarrow P$  也满足  $\pi_i \circ \psi = \phi_i$  ( $\forall i \in I$ )。设  $\psi(q) = (y_i)_{i \in I}$ 。根据投影的定义,  $y_i = \pi_i(\psi(q))$ 。由假设条件,  $\pi_i(\psi(q)) = \phi_i(q)$ 。这意味着  $\psi(q)$  的每一个分量  $y_i$  都被唯一确定为  $\phi_i(q)$ 。因此  $\psi(q) = (\phi_i(q))_{i \in I} = \phi(q)$ , 即  $\psi = \phi$ 。

## 2. 同构式的推导

定义映射

$$\begin{aligned}\Psi : \text{Hom}_R(Q, P) &\longrightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(Q, M_i) \\ f &\longmapsto (\pi_i \circ f)_{i \in I}\end{aligned}$$

我们需要证明  $\Psi$  是群同构 (双射且保持加法)。

- **满射性 (Surjectivity):** 对应于泛性质的存在性。对于右侧任意一个元素 (即一族同态)  $(\phi_i)_{i \in I}$ , 由上述证明可知, 存在  $\phi \in \text{Hom}_R(Q, P)$  使得  $\pi_i \circ \phi = \phi_i$ 。这意味着  $\Psi(\phi) = (\phi_i)_{i \in I}$ 。
- **单射性 (Injectivity):** 对应于泛性质的唯一性。若  $\Psi(f) = \Psi(g)$ , 则对所有  $i$ ,  $\pi_i \circ f = \pi_i \circ g$ 。令  $\phi_i = \pi_i \circ f$ , 则  $f$  和  $g$  都是满足“投影后等于  $\phi_i$ ”的映射。由唯一性可知  $f = g$ 。
- **保持加法:**  $\text{Hom}$  集合与直积集合均具备阿贝尔群结构。 $\Psi(f + g) = (\pi_i \circ (f + g))_i = (\pi_i \circ f + \pi_i \circ g)_i = \Psi(f) + \Psi(g)$ 。

综上,  $\text{Hom}_R(Q, P) \cong \prod \text{Hom}_R(Q, M_i)$ 。 □

## 直和与子模的和 (Direct Sum)

**定义 10.3** (子模的和). 设  $N_i \subseteq M$  为子模。它们的和定义为:

$$\sum_{i \in I} N_i := \left\langle \bigcup_{i \in I} N_i \right\rangle = \left\{ \sum_{finite} x_{i_k} \mid x_{i_k} \in N_{i_k} \right\}$$

**定义 10.4** (内直和判定). 若满足以下条件, 则称和为直和, 记为  $\bigoplus N_i$ :

$$\left( \sum_{j \neq i} N_j \right) \cap N_i = \{0\}, \quad \forall i \in I$$

**定理 10.5** (直和泛性质). 设  $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ , 存在标准嵌入映射  $j_i : N_i \rightarrow M$ 。对于任意模  $Y$  和同态  $\psi_i : N_i \rightarrow Y$ , 存在唯一同态  $\psi : M \rightarrow Y$ , 使得  $\psi \circ j_i = \psi_i$ 。

$$\text{Hom}_R\left(\bigoplus_{i \in I} N_i, Y\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(N_i, Y)$$

**证明.** 设  $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ 。直和定义的关键在于:  $M$  中的每一个元素  $x$  都可以唯一地表示为有限和形式  $x = \sum_{i \in I} j_i(x_i)$ , 其中  $x_i \in N_i$ , 且只有有限个  $x_i \neq 0$ 。

### 1. 泛性质的证明

(i) 存在性 (*Existence*):

给定一族同态  $\{\psi_i : N_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$ 。我们要构造  $\psi : M \rightarrow Y$ 。对于任意  $x = \sum_{i \in I} j_i(x_i) \in M$ , 定义:

$$\psi(x) := \sum_{i \in I} \psi_i(x_i)$$

由于  $x$  的表达式中只有有限个  $x_i$  非零, 且  $\psi_i(0) = 0$ , 上述右边的求和在  $Y$  中只有有限项非零, 因此定义良好。显然  $\psi$  保持加法和数乘 (由  $\psi_i$  的线性及求和符号的线性性保证)。验证图表交换性: 对于任意  $k \in I$  和  $n \in N_k$ , 元素  $j_k(n)$  在  $M$  中的分解只有第  $k$  项为  $n$ , 其余为 0。因此:

$$(\psi \circ j_k)(n) = \psi(j_k(n)) = \psi_k(n) + \sum_{i \neq k} \psi_i(0) = \psi_k(n)$$

即  $\psi \circ j_k = \psi_k$  成立。

(ii) 唯一性 (*Uniqueness*):

假设存在另一个同态  $\phi : M \rightarrow Y$  也满足  $\phi \circ j_i = \psi_i$  ( $\forall i \in I$ )。对于任意  $x = \sum_{i \in I} j_i(x_i) \in$

$M$ , 利用  $\phi$  的线性:

$$\phi(x) = \phi\left(\sum_{i \in I} j_i(x_i)\right) = \sum_{i \in I} \phi(j_i(x_i)) = \sum_{i \in I} (\phi \circ j_i)(x_i)$$

代入假设条件  $\phi \circ j_i = \psi_i$ , 得:

$$\phi(x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x_i)$$

这正是我们定义的  $\psi(x)$ 。故  $\phi = \psi$ 。

## 2. 同构式的推导

定义映射

$$\begin{aligned}\Gamma : \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{i \in I} N_i, Y\right) &\longrightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(N_i, Y) \\ F &\longmapsto (F \circ j_i)_{i \in I}\end{aligned}$$

- **满射性:** 对应泛性质的存在性。对于右边任意一族  $(\psi_i)_{i \in I}$ , 存在  $\psi$  使得  $\psi \circ j_i = \psi_i$ , 即  $\Gamma(\psi) = (\psi_i)_{i \in I}$ 。
- **单射性:** 对应泛性质的唯一性。若  $\Gamma(F) = \Gamma(G)$ , 即对所有  $i$  都有  $F \circ j_i = G \circ j_i$ 。令  $\psi_i = F \circ j_i$ , 由唯一性知  $F = G$ 。
- **保持加法:**  $\Gamma(F + G) = ((F + G) \circ j_i)_i = (F \circ j_i + G \circ j_i)_i = \Gamma(F) + \Gamma(G)$ 。

综上,  $\text{Hom}_R(\bigoplus N_i, Y) \cong \prod \text{Hom}_R(N_i, Y)$ 。 □

### 直观理解: 对偶性

直和是直积的对偶概念 (Coproduct)。要构造走出直和的映射, 只需给出走出每一个分量的映射。

## 有限情况与无限情况的对比

**命题 10.6** (有限双积). 当索引集  $I$  有限时 (例如  $i = 1, \dots, r$ ), 直和与直积同构 ( $M \cong \bigoplus M_i \cong \prod M_i$ )。此时, 投影  $\pi$  与嵌入  $j$  满足:

1. 正交性:  $\pi_k \circ j_l = \delta_{kl} \cdot \text{Id}_{M_l}$

2. 完备性:  $\sum_{l=1}^r j_l \circ \pi_l = \text{Id}_M$

**例 10.7** (无限维函数空间). 设  $P = \text{Map}(X, M)$  是  $X$  到  $M$  的所有函数。

- $P \cong \prod_{x \in X} M$  (直积, 允许无限多非零项)。
- 令  $P_x$  为单点支撑函数子模, 则  $\sum_{x \in X} P_x$  是直和 (有限支撑函数)。
- 若  $X$  无限, 则  $\bigoplus P_x \subsetneq \prod P_x$ 。

## 11 单模与半单模 (Simple & Semisimple Modules)

### 单模与舒尔引理 (Schur's Lemma)

**定义 11.1** (单模/不可约模). 非零模  $M$  称为单模, 如果其子模只有  $\{0\}$  和  $M$  自身。

**引理 11.2** (Schur 引理). 设  $M, N$  为单  $R$ -模,  $\phi: M \rightarrow N$  为同态。

1. 若  $\phi \neq 0$ , 则  $\phi$  为同构。
2.  $D = \text{End}_R(M)$  是一个除环 (Division Ring)。

**证明:** *Schur* 引理. (1) 证明非零同态即为同构设  $\phi: M \rightarrow N$  是非零的  $R$ -模同态。

- **单射性:** 考察核  $\text{Ker}(\phi)$ 。它是  $M$  的子模。因为  $M$  是单模,  $\text{Ker}(\phi)$  只能是  $\{0\}$  或  $M$ 。若  $\text{Ker}(\phi) = M$ , 则  $\phi$  为零映射, 与假设矛盾。故  $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$ , 即  $\phi$  是单射。
- **满射性:** 考察像  $\text{Im}(\phi)$ 。它是  $N$  的子模。因为  $N$  是单模,  $\text{Im}(\phi)$  只能是  $\{0\}$  或  $N$ 。若  $\text{Im}(\phi) = \{0\}$ , 则  $\phi$  为零映射, 与假设矛盾。故  $\text{Im}(\phi) = N$ , 即  $\phi$  是满射。

综上,  $\phi$  既单且满, 故为同构。

(2) 证明自同态环是除环设  $D = \text{End}_R(M)$ 。显然  $D$  是一个环 (具有加法和复合运算)。取任意非零元素  $\phi \in D$ 。令  $N = M$ , 应用上述结论 (1), 可知  $\phi: M \rightarrow M$  是一个同构。因此,  $\phi$  存在逆映射  $\phi^{-1}$ , 且  $\phi^{-1}$  也是  $R$ -模同态 (即  $\phi^{-1} \in D$ )。既然  $D$  中每一个非零元都可逆, 故  $D$  是除环。  $\square$

**定理 11.3** (Schur 引理 II - 代数闭域情形). 设  $G$  为群,  $V$  为  $\mathbb{C}$  上的有限维不可约表示。则:

$$\text{End}_G(V) \cong \mathbb{C} \cdot \text{Id}$$

即唯一的自同态是标量变换。证明利用了  $\mathbb{C}$  上特征值存在的性质。

**证明:** *Schur* 引理 **II.** 任取  $\phi \in \text{End}_G(V)$ 。由于  $V$  是复数域  $\mathbb{C}$  上的有限维向量空间，根据线性代数基本定理， $\phi$  作为线性变换必有特征值。设  $\lambda \in \mathbb{C}$  是  $\phi$  的一个特征值。构造映射  $\psi = \phi - \lambda \cdot \text{Id}_V$ 。

1.  **$\psi$  是  $G$ -同态:** 因为  $\phi$  与群作用交换，而标量变换  $\lambda \cdot \text{Id}$  与任何线性变换交换，所以它们的差  $\psi$  依然在  $\text{End}_G(V)$  中。
2.  **$\text{Ker}(\psi) \neq 0$ :** 因为  $\lambda$  是特征值，存在非零特征向量  $v$  使得  $\phi(v) = \lambda v$ ，即  $\psi(v) = 0$ 。
3. **应用不可约性:**  $\text{Ker}(\psi)$  是  $V$  的非零子模（不变子空间）。因为  $V$  是不可约的（单模），其非零子模只能是  $V$  本身。

故  $\text{Ker}(\psi) = V$ ，这意味着对任意  $v \in V$  都有  $\psi(v) = 0$ ，即  $\phi(v) = \lambda v$ 。所以  $\phi = \lambda \cdot \text{Id}$ 。  $\square$

### 注意 (NOTE): 代数闭域的关键性

上述证明严重依赖于“特征值存在”这一事实，这要求基域是代数闭域（如  $\mathbb{C}$ ）。若是实数域  $\mathbb{R}$ ，例如旋转群  $SO(2)$  在  $\mathbb{R}^2$  上的作用是不可约的，但其自同态环同构于  $\mathbb{C}$ （旋转 + 伸缩），比  $\mathbb{R}$  大，并不是所有自同态都是标量变换。

## 半单模 (Semisimple Modules)

**定义 11.4.** 模  $M$  称为半单模，如果它是单模的直和： $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ 。

**定理 11.5** (半单模的等价条件). 以下命题等价：

1.  $M$  是半单模（单模的直和）。
2.  $M$  是单模的和 ( $M = \sum S_i$ )。
3.  $M$  是完全可约的： $\forall N \subseteq M, \exists N' \subseteq M$  使得  $M = N \oplus N'$ 。

**证明:** 半单模等价条件。我们将按照 (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (1) 的顺序进行证明。

(1)  $\Rightarrow$  (2):

若  $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ ，则  $M$  显然由  $\{S_i\}_{i \in I}$  生成。即  $M = \sum_{i \in I} S_i$ 。

(2)  $\Rightarrow$  (3):

假设  $M = \sum_{i \in I} S_i$ ，其中  $S_i$  为单模。设  $N$  是  $M$  的任意子模。我们要寻找  $N$  的直和

补。考虑  $M$  中与  $N$  独立的单模集合族：

$$\mathcal{F} = \{J \subseteq I \mid N \cap \left( \sum_{j \in J} S_j \right) = \{0\}\}$$

该集合族关于包含关系是非空的（至少包含空集）且归纳有序的。由 Zorn 引理，存在极大元  $J_{max} \subseteq I$ 。令  $M' = \sum_{j \in J_{max}} S_j$ 。由直和判定条件知  $N \cap M' = \{0\}$ ，且  $M'$  实际上是直和  $\bigoplus_{j \in J_{max}} S_j$ 。我们要证明  $M = N + M'$ 。只需证明对于任意  $i \in I$ ，都有  $S_i \subseteq N + M'$ 。

- 若  $S_i \subseteq M'$ ，显然成立。
- 若  $S_i \not\subseteq M'$ ，考虑交集  $(N + M') \cap S_i$ 。这是一个  $S_i$  的子模。因为  $S_i$  是单模，该交集只能是  $\{0\}$  或  $S_i$ 。若为  $\{0\}$ ，则  $N \cap (M' + S_i) = \{0\}$ （需简单验证），这意味着可以将  $i$  加入  $J_{max}$ ，这与  $J_{max}$  的极大性矛盾。因此必有  $(N + M') \cap S_i = S_i$ ，即  $S_i \subseteq N + M'$ 。

综上，所有  $S_i$  都在  $N + M'$  中，故  $M = N \oplus M'$ 。

(3)  $\Rightarrow$  (1):

假设  $M$  是完全可约的。第一步：证明  $M$  包含单子模（若  $M \neq 0$ ）。取  $0 \neq x \in M$ 。由 Zorn 引理，循环模  $Rx$  包含一个极大子模  $K$ 。由于  $M$  完全可约，其子模  $Rx$  也是完全可约的（完全可约模的子模性质）。故  $Rx = K \oplus S$ ，其中  $S \cong Rx/K$  是单模。所以  $M$  包含单子模。

第二步：构造直和分解。考虑  $M$  中一族单子模的直和  $P = \bigoplus_{\alpha} S_{\alpha}$ 。由 Zorn 引理，存在一个极大的这样的直和  $P_{max}$ 。由条件 (3)，存在补模  $K$  使得  $M = P_{max} \oplus K$ 。若  $K \neq 0$ ，由第一步可知  $K$  必定包含一个单子模  $S'$ 。显然  $P_{max} \cap S' = \{0\}$ （因为  $S' \subseteq K$ ），这意味着  $P_{max} \oplus S'$  是一个更大的单模直和，与  $P_{max}$  的极大性矛盾。故必须  $K = 0$ ，即  $M = P_{max}$  是单模的直和。  $\square$

## 12 自由模 (Free Modules)

### 定义与秩

**定义 12.1 (自由模).**  $M$  是自由  $R$ -模，若存在子集  $X \subseteq M$ （基）满足：

1.  $M = \langle X \rangle$ （生成性）；

2.  $X$  是  $R$ -线性无关的。

### 注意 (NOTE): 秩的唯一性

标准例子是  $R^n$ 。

- 若  $R$  是交换环或体，则基的势（秩）唯一，即  $R^n \cong R^m \implies n = m$ 。
- 对一般非交换环，秩可能不唯一。若秩唯一，称该环为 **IBN 环**。

## 13 正合列与同调代数 (Exact Sequences)

### 正合列 定义

定义 13.1. 序列  $M' \xrightarrow{\Phi} M \xrightarrow{\Psi} M''$  在  $M$  处正合，若：

$$\text{Im}(\Phi) = \text{Ker}(\Psi)$$

这意味着  $\Psi \circ \Phi = 0$  且所有进入核的元素都来自上一步的像。

例 13.2 (常见类型). •  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\Phi} M$  正合  $\iff \Phi$  单射。

- $M \xrightarrow{\Psi} M'' \rightarrow 0$  正合  $\iff \Psi$  满射。
- 短正合列  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0 \iff M'' \cong M/i(M')$ 。

例 13.3 (具体实例：乘  $n$  映射). 设  $A$  为交换群， $n \in \mathbb{N}$ 。存在正合列：

$$0 \longrightarrow A[n] \longrightarrow A \xrightarrow{\times n} A \longrightarrow A/nA \longrightarrow 0$$

其中  $A[n]$  是  $n$ -扭子群 (Kernel)， $A/nA$  是余核 (Cokernel)。

### 短五引理 (The Short Five Lemma)

考虑如下交换图表，其中两行均为短正合列：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{p'} & C' & \longrightarrow 0 \end{array}$$

**定理 13.4** (3-Lemma). 1. 若  $a, c$  单射  $\Rightarrow b$  单射。

2. 若  $a, c$  满射  $\Rightarrow b$  满射。

3. 若  $a, c$  同构  $\Rightarrow b$  同构。

证明方法称为图表追踪 (*Diagram Chasing*)。

证明：图表追踪法。设交换图表如下：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{p'} & C' & \longrightarrow 0 \end{array}$$

### 1. 单射性证明 (Injectivity)

假设  $a$  和  $c$  是单射。设  $x \in B$  且  $b(x) = 0$ 。我们要证明  $x = 0$ 。

1. 将  $x$  映至  $C'$ :  $p'(b(x)) = p'(0) = 0$ 。
2. 利用交换性:  $c(p(x)) = p'(b(x)) = 0$ 。
3. 因为  $c$  是单射, 故  $p(x) = 0$ 。
4. 利用上行正合性:  $x \in \text{Ker}(p) = \text{Im}(i)$ , 故存在  $y \in A$  使得  $i(y) = x$ 。
5. 将  $y$  映至  $B'$ :  $b(i(y)) = b(x) = 0$ 。
6. 利用交换性:  $i'(a(y)) = b(i(y)) = 0$ 。
7. 因为下行正合,  $i'$  是单射, 故  $a(y) = 0$ 。
8. 因为  $a$  是单射, 故  $y = 0$ 。
9. 回推  $x$ :  $x = i(y) = i(0) = 0$ 。得证  $b$  是单射。

### 2. 满射性证明 (Surjectivity)

假设  $a$  和  $c$  是满射。任取  $y' \in B'$ 。我们要找到  $x \in B$  使得  $b(x) = y'$ 。

1. 将  $y'$  映至  $C'$ : 令  $z' = p'(y')$ 。
2. 因为  $c$  是满射, 存在  $z \in C$  使得  $c(z) = z'$ 。
3. 因为上行正合,  $p$  是满射, 存在  $x_0 \in B$  使得  $p(x_0) = z$ 。

4. 比较  $b(x_0)$  与  $y'$ :

$$p'(b(x_0)) = c(p(x_0)) = c(z) = z' = p'(y')$$

这说明  $p'(y' - b(x_0)) = 0$ 。

5. 利用下行正合性:  $y' - b(x_0) \in \text{Ker}(p') = \text{Im}(i')$ 。故存在  $w' \in A'$  使得  $i'(w') = y' - b(x_0)$ 。

6. 因为  $a$  是满射, 存在  $w \in A$  使得  $a(w) = w'$ 。

7. 构造解  $x = x_0 + i(w)$ 。验证:

$$\begin{aligned} b(x) &= b(x_0) + b(i(w)) \\ &= b(x_0) + i'(a(w)) \quad (\text{交换性}) \\ &= b(x_0) + i'(w') \\ &= b(x_0) + (y' - b(x_0)) \\ &= y' \end{aligned}$$

得证  $b$  是满射。

### 3. 同构性证明

若  $a, c$  均为同构, 则它们既单且满。由 (1) 和 (2) 可知  $b$  既单且满, 故  $b$  也是同构。□