群论笔记 Chapter 4：自由群与群的表现

整理自抽象代数笔记

2025 年 12 月 4 日

本章导读

本章通过构造性方法，从最基础的集合出发引入代数结构。主要逻辑路径如下：

1. **字半群 (Word Monoid)**：定义了符号的“拼接”运算。
2. **自由群 (Free Group)**：通过引入逆元和商结构，构造出“最自由”的群对象。
3. **群的表现 (Group Presentation)**：这是本章的核心工具，即通过“生成元”和“关系”来定义群 $\langle S \mid R \rangle$。
4. **泛性质 (Universal Property)**：贯穿全章的灵魂，它给出了判断同态存在性和唯一性的判据，是证明群同构的强力工具。

1 自由群 (Free Groups)

自由对象的构造

在进入抽象定义之前，我们先通过一个直观的物理模型来理解什么是“自由群”。

直观理解：直观理解：自由意味着“无额外约束”

想象你在一个网格上移动。

- **生成元** S：代表你可以走的基本方向，比如 a (向北), b (向东)。
- **逆元** S^{-1}：代表反方向移动，即 a^{-1} (向南), b^{-1} (向西)。

- 自由的含义：

    1. **非交换性**：先向北再向东 (ab)，和你所在的位置与先向东再向北 (ba) 是不同的路径（除非网格闭合，但在这里我们假设它是无限延伸的树状结构）。因此 $ab \neq ba$。
    2. **唯一的约束 (物理回退)**：唯一的“抵消”发生在你刚走了一步马上又退回来。例如，向北走一步 (a) 再向南走一步 (a^{-1})，相当于没动 (e)。即 $aa^{-1} = e$。

自由群就是由这些路径组成的群，除了“原路返回抵消”之外，没有其他的瞬间移动规则（比如转圈回到原点 $a^4 = e$ 是不存在的）。

1.1 严格的数学构造

为了从数学上严格定义上述直观，我们采用“构造-商”的三步走方法。

证明步骤：构造自由群 $W(S)$ 的三个步骤

第一步：扩充字母表 (The Alphabet)
设 S 为生成元集合。我们引入形式逆元集合 $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$。现在的总字母表是 $\Sigma = S \cup S^{-1}$。

第二步：形成字 (Words)
考虑由 Σ 中元素组成的所有有限长度的字符串（即自由半群 $M(\Sigma)$）。例如：$w = aba^{-1}bb^{-1}a$。

第三步：定义等价与消去 (Reduction)
我们在字符串集合上引入等价关系 $\sim$。如果在字符串中出现相邻的互逆对（如 xx^{-1} 或 $x^{-1}x$），我们可以将其**删去**；反之，也可以在任意位置**插入**互逆对。

$$w_1 x x^{-1} w_2 \sim w_1 w_2$$

自由群定义为商集：

$$W(S) := M(S \cup S^{-1}) / \sim$$

即，自由群的元素不是字符串本身，而是字符串的**等价类**。

1.2 既约字与唯一性 (Reduced Words)

在商集中判断两个元素是否相等通常很困难，但在自由群中，我们有一个完美的代表元。

定义 1.1 (既约字 Reduced Word). 如果一个字 w 中**不包含**任何形式为 ss^{-1} 或 $s^{-1}s$ 的相邻子片段，则称 w 为**既约字**。

定理 1.2 (既约字的唯一性). 自由群 $W(S)$ 中的每一个等价类，都包含**唯一**的一个既约字。

注意 (NOTE): 操作意义

这意味着要在自由群中计算 $w_1 \cdot w_2$，我们只需要将它们拼接起来，然后不断地消去中间出现的 ss^{-1}，直到无法消去为止。最终剩下的结果就是唯一的答案。
例：在 $W(\{a,b\})$ 中计算 $x = aba^{-1}$ 和 $y = ab^{-1}$ 的乘积：

$$x \cdot y = (aba^{-1}) \cdot (ab^{-1}) = ab\underbrace{a^{-1}a}_{e}b^{-1} = a\underbrace{bb^{-1}}_{e} = a$$

1.3 几何视角：基本群

P14 笔记提供了一个非常漂亮的几何解释。

例 1.3 (圆束的拓扑结构). 考虑 n 个圆圈在一点相切的图形（称为 ***Bouquet of*** n ***circles***，像一朵花）。

- 这个图形的**基本群** ***(Fundamental Group)*** 同构于 n 个生成元的自由群 F_n。
- **对应关系**：
  - 每一个圆圈对应一个生成元 a_i。
  - 绕圆圈顺时针转一圈对应 a_i。
  - 绕圆圈逆时针转一圈对应 a_i^{-1}。
- **路径即元素**：一个复杂的路径，比如"先绕圈 *1*，再反向绕圈 *2*"，就对应代数元素 $a_1a_2^{-1}$。除非你原路退回，否则路径无法收缩成一个点（单位元）。

1.4 自由群的泛性质 (Universal Property)

泛性质是自由群最核心的特征。它告诉我们：**要定义从自由群出发的同态，只需要指定生成元的去向。**

定理 1.4 (自由群的泛性质). 设 $W(S)$ 是由集合 S 生成的自由群，$j : S \to W(S)$ 是包含映射。对于任意群 G' 和任意集合映射 $\phi_0 : S \to G'$，存在**唯一**的群同态 $\phi : W(S) \to G'$，使得下图交换（即 $\phi(s) = \phi_0(s)$ 对所有 $s \in S$ 成立）：

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\phi_0"'] & W(S) \arrow[d, dashed, "\exists!\phi"] \\
& G'
\end{tikzcd}
$$

证明. 我们将证明分为“存在性”和“唯一性”两部分。

第一部分：存在性 (Construction of ϕ)

构造同态的过程需要克服 $W(S)$ 的商结构带来的障碍。我们采取“三步走”策略：

证明步骤：Step 1: 扩充映射到形式逆元

我们首先需要处理逆元。在 $S \cup S^{-1}$ 上定义映射 $\Phi_1 : S \cup S^{-1} \to G'$：

$$
\Phi_1(x) = \begin{cases} \phi_0(x) & \text{若} x \in S \\ (\phi_0(a))^{-1} & \text{若} x = a^{-1} \in S^{-1} \end{cases}
$$

这一步确保了形式上的逆元被映射为群 G' 中的真实逆元。

证明步骤：Step 2: 延拓到自由半群 (Word Monoid)

任何字 $w \in M(S \cup S^{-1})$ 都是字母序列 $x_1 x_2 \dots x_n$。利用半群的乘法性质，我们自然地定义 $\Phi_2 : M(S \cup S^{-1}) \to G'$ 为：

$$
\Phi_2(x_1 x_2 \dots x_n) = \Phi_1(x_1) \cdot \Phi_1(x_2) \cdots \Phi_1(x_n)
$$

显然，Φ_2 保持乘法运算（即 $\Phi_2(w \cdot w') = \Phi_2(w) \cdot \Phi_2(w')$），因此它是一个**半群同态**。

证明步骤：Step 3: 下降到商群 (Pass to Quotient)

这是最关键的一步。自由群 $W(S)$ 定义为 $M(S \cup S^{-1})/\sim$，其中 $\sim$ 由 $aa^{-1} \sim e$ 生成。为了让 Φ_2 诱导出一个在 $W(S)$ 上良定义 (well-defined) 的映射 ϕ，我们需要验证：**等价的字映射到相等的群元素**。
只需验证基本约化关系 aa^{-1} 和 $a^{-1}a$：

$$
\begin{aligned}
\Phi_2(aa^{-1}) &= \Phi_1(a) \cdot \Phi_1(a^{-1}) \\
&= \phi_0(a) \cdot (\phi_0(a))^{-1} \\
&= e_{G'} \quad (\text{群} G' \text{ 的单位元})
\end{aligned}
$$

同理 $\Phi_2(a^{-1}a) = e_{G'}$。这意味着，如果我们对字 w 进行消去操作变成 w'，它们在 G' 中的像保持不变（$\Phi_2(w) = \Phi_2(w')$）。因此，我们可以合法地定义 $\phi([w]) = \Phi_2(w)$。这就是我们寻找的群同态 $\phi : W(S) \to G'$。

第二部分：唯一性 (Uniqueness)

假设存在两个同态 ϕ 和 ψ 都满足条件 $\phi|_S = \phi_0$ 和 $\psi|_S = \phi_0$。我们需要证明 $\phi(w) = \psi(w)$ 对任意 $w \in W(S)$ 成立。

- 任意元素 $w \in W(S)$ 都可以写成生成元及其逆的乘积形式：$w = s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \dots s_n^{\epsilon_n}$，其中 $s_i \in S, \epsilon_i \in \{1, -1\}$。
- 因为 ϕ 是群同态，所以：
$$\phi(w) = \phi(s_1)^{\epsilon_1} \dots \phi(s_n)^{\epsilon_n}$$
- 利用初始条件 $\phi(s) = \phi_0(s)$：
$$\phi(w) = \phi_0(s_1)^{\epsilon_1} \dots \phi_0(s_n)^{\epsilon_n}$$
- 对 ψ 进行同样的推导，会得到完全相同的表达式。

因此 $\phi(w) = \psi(w)$。唯一性得证。 □

直观理解：直观总结

构造告诉我们：只有一种方法可以定义这个映射，就是把字里的每个字母替换成它在 G' 里的像，然后乘起来。
良定义告诉我们：这种替换是安全的，因为 S 里的 a 和 a^{-1} 在 G' 里也会刚好抵消，不会产生矛盾。

2 群的表现 (Group Presentation)

群 表 现 的 定 义 与 性 质

大多数具体的群都不是自由的，它们满足某些特定的“关系”（Relations）。例如在 $\mathbb{Z}^2$ 中，$ab = ba$；在 D_n 中 $a^n = e$。

2.1 定义

定义 2.1 (群的表现). 一个群的表现记为 $\langle S \mid R\rangle$，其中：

- S：生成元集合。
- R：关系集，是自由群 $W(S)$ 中的子集（即一组字）。

这定义的群 G 实质上是自由群 $W(S)$ 模去由 R 生成的最小正规子群 $N(R)$ 的商群：

$$G \cong W(S)/N(R)$$

这意味着在 G 中，对于任意 $w \in R$，我们强制规定 $w = e$。

2.2 群表现的泛性质 (判定定理)

我们如何验证一个具体群 G 是否同构于某个表现 $\langle S \mid R\rangle$？我们需要利用以下泛性质（P19 笔记核心）。

命题 2.2 (表现的泛性质). 设群 G 由 S 生成，且满足关系 R（即 R 中的字在 G 中计算结果为幺元）。则 $G \cong \langle S \mid R\rangle$ 当且仅当它满足以下性质：

对于任意群 G' 和任意映射 $\phi_0 : S \to G'$，**如果** $\phi_0(S)$ 在 G' 中也满足关系 R（即 $\forall f \in R, \Phi_*(f) = e_{G'}$），**则存在唯一的群同态** $\phi : G \to G'$ 使得 $\phi|_S = \phi_0$。

3 经典实例详解：二面体群 D_n

证 明 实 战

我们来运用上述泛性质，详细证明二面体群的展示。

$$D_n \cong \langle a, b \mid a^n = e,\ b^2 = e,\ bab^{-1} = a^{-1}\rangle$$

证明步骤：利用泛性质构建同态

第一步：区分“抽象群”与“具体群”

- 令 $\widetilde{D_n}$ 为由展示 $\langle A, B \mid A^n = e, B^2 = e, BAB^{-1} = A^{-1}\rangle$ 定义的抽象群。

- 令 D_n 为正 n 边形的几何对称群，由旋转 a $(360°/n)$ 和反射 b 生成。

第二步：利用自由群性质构造预映射考虑自由群 $F_{\{A,B\}}$。显然存在唯一的同态 $\widetilde{\Phi}: F_{\{A,B\}} \to D_n$，满足：

$$\widetilde{\Phi}(A) = a, \quad \widetilde{\Phi}(B) = b$$

第三步：验证关系 (关键步骤) 我们需要检查 D_n 中的几何元素 a 和 b 是否满足抽象展示中的关系：

1. 旋转 n 次回到原位：$a^n = e \quad (\checkmark)$
2. 反射 2 次回到原位：$b^2 = e \quad (\checkmark)$
3. 旋转后反射 vs 反射后反向旋转：几何上容易验证 $bab^{-1} = a^{-1} \quad (\checkmark)$

第四步：应用泛性质下降为商群同态因为目标群 D_n 中的像满足关系集 R，根据群表现的泛性质，同态 $\widetilde{\Phi}$ 在商群 $\widetilde{D_n}$ 上是良定义的 (Well-defined)。即存在唯一的同态：

$$\Phi: \widetilde{D_n} \to D_n$$

满足 $\Phi(A) = a, \Phi(B) = b$。
第五步：结论至此，我们构造了从抽象展示到具体几何群的同态。*(注：要证明同构，通常还需要证明 Φ 是满射（显然，因为 a, b 生成 D_n）且是单射（通常通过比较群的阶数 $|D_n| = 2n$ 来完成）。)*

4 其他重要群的表现

常 见 群 列 表

4.1 考克斯特群 (Coxeter Groups)

这是对对称群和二面体群的推广。设 S 为生成元集，对任意 $\alpha, \beta \in S$，定义指数 $m(\alpha, \beta)$。

$$W(S) = \left\langle S \;\middle|\; (\alpha\beta)^{m(\alpha,\beta)} = e \right\rangle$$

其中要求 $m(\alpha, \alpha) = 1$ (即 $\alpha^2 = e$)，且当 $\alpha \neq \beta$ 时 $m(\alpha, \beta) \geq 2$。

例 4.1 (无限二面体群 D_∞). 取 $S = \{a, b\}$，令 $m(a, b) = \infty$。

$$D_\infty = \langle a, b \mid a^2 = e, b^2 = e \rangle$$

群名称	符号	群表现 (Presentation)
循环群	C_n	$\langle a \mid a^n = e \rangle$
二面体群	D_n	$\langle a, b \mid a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$
四元数群	Q_8	$\langle a, b \mid a^4 = e, a^2 = b^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$
对称群	S_n	$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \mid \alpha_i^2 = e, (\alpha_i \alpha_{i+1})^3 = e, \ldots \rangle$

表 1: 常见群的生成元与关系

这里 ab 的阶是无穷大，群元素形如 $ab, aba, abab\ldots$，对应直线上整数点的反射群。