群论笔记 Chapter 1：基础概念与结构

整理自手写笔记

2025 年 11 月 25 日

目录

1 群的定义与基本性质 (Groups: Definition & Basics)

群 的 公 理 化 定 义

定义 1.1 (群 Group). 设 G 是一个非空集合，$*$ 是定义在 G 上的一个二元运算（即 $G \times G \to G$ 的映射）。如果 $(G, *)$ 满足以下四个公理，则称 $(G, *)$ 为一个群：

1. **封闭性 *(Closure)*:** 对于任意 $a, b \in G$，都有 $a * b \in G$。
2. **结合律 *(Associativity)*:** 对于任意 $a, b, c \in G$，都有 $(a * b) * c = a * (b * c)$。
3. **存在单位元 *(Identity Element)*:** 存在一个元素 $e \in G$，使得对于任意 $a \in G$，都有：
$$a * e = e * a = a$$
(注：群的单位元是唯一的)
4. **存在逆元 *(Inverse Element)*:** 对于任意 $a \in G$，都存在一个元素 $b \in G$（记作 a^{-1}），使得：
$$a * b = b * a = e$$
(注：每个元素的逆元是唯一的)

术语百科 (Terminology)

阿贝尔群 (Abelian Group) / 交换群: 若群 G 还满足 **交换律 (Commutativity)**，即对于任意 $a, b \in G$，都有：

$$a * b = b * a$$

则称 G 为阿贝尔群。

NOTE: 群的阶

群的阶 (Order of a Group): 群 G 中元素的个数称为群的阶，记作 $|G|$。

- 若 $|G| < \infty$，称为**有限群**。
- 若 $|G| = \infty$，称为**无限群**。

2 子群 (Subgroups) 与生成元

子群的判定与构造

2.1 子群定义

设 $(G, e, *)$ 是一个群。若 H 是 G 的非空子集 ($H \subseteq G$)，且满足以下三个条件，则称 H 为 G 的子群，记作 $H \leq G$：

1. $e \in H$ (单位元在 H 中)
2. $\forall a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$ (运算封闭)
3. $\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$ (逆元封闭)

例 2.1 (常见子群链). *数系的加法群链：*

$$(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$$

例 2.2 (线性群 Linear Groups).

- $GL_n(\mathbb{R})$: *一般线性群 (可逆矩阵)。*
- $SL_n(\mathbb{R})$: *特殊线性群* ($\det = 1$)。
- $O(n)$: *正交群 (保范数变换)。*
- $SO(n)$: *特殊正交群 (旋转群)。*
- *关系：* $SO(n) \leq O(n) \leq GL_n(\mathbb{R})$。

2.2 生成子群 (Generated Subgroup)

设 $S \subseteq G$ 为群的子集，由 S 生成的子群记为 $\langle S \rangle$。

$$\langle S \rangle = \{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_r \mid \beta_i \in S \text{ or } \beta_i^{-1} \in S, r \in \mathbb{N}\}$$

这等价于包含 S 的**最小**子群，也是所有包含 S 的子群的**交集**。

2.3 整数群 $\mathbb{Z}$ 的子群结构

这是一个经典的群论结论，刻画了循环群 $\mathbb{Z}$ 的所有理想/子群形式。

定理 2.3. *整数加法群 $\mathbb{Z}$ 的任意子群 I 都形如 $n\mathbb{Z}$ (其中 $n \in \mathbb{N}$)。即 $\mathbb{Z}$ 是主理想环。*

证明. 设 $I \subseteq \mathbb{Z}$ 是一个子群。

- 若 $I = \{0\}$，则取 $n = 0$，结论成立。
- 若 $I \neq \{0\}$，则 I 中必含有非零整数。因 I 包含逆元，故 I 中必有正整数。设 a 为 I 中**最小的**正整数。

  1. 证明 $a\mathbb{Z} \subseteq I$: 由于 $a \in I$，根据封闭性，对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，$ka \in I$。故 $a\mathbb{Z} \subseteq I$。

  2. 证明 $I \subseteq a\mathbb{Z}$: 任取 $x \in I$。由带余除法，存在 $q, r \in \mathbb{Z}$ 使得：

  $$x = qa + r, \quad 0 \leq r < a$$

  移项得 $r = x - qa$。因为 $x \in I$ 且 $a \in I \Rightarrow qa \in I$，由子群性质知 $r \in I$。

  由于 $r \in I$ 且 $0 \leq r < a$，而 a 是 I 中**最小**的正整数：

  - 必须有 $r = 0$。

  因此 $x = qa$，即 $x \in a\mathbb{Z}$。

综上，$I = a\mathbb{Z}$。 □

3 阶与循环群 (Order & Cyclic Groups)

衡 量 元 素 与 群 的“大 小”

3.1 元素的阶 (Order of an Element)

设 $a \in G$。

定义 3.1. *元素 a 的阶 $|a|$ 定义为满足 $a^n = e$ 的**最小正整数** n。若不存在这样的 n，则称 a 为无限阶元素。*

重要性质： 若 $a^m = e$，则 $|a|$ 整除 m ($|a| \mid m$)。

3.2 循环群 (Cyclic Groups)

若群 G 由单个元素生成，即 $G = \langle a \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$，则称 G 为循环群。

类型	符号与同构	备注
无限循环群	$C_\infty \cong (\mathbb{Z}, +)$	生成元为 1 或 -1
有限循环群 (n 阶)	$C_n \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$	模 n 加法群

表 1: 循环群的分类

直观理解：C_n 的子群唯一性

对于 n 阶有限循环群 $C_n = \langle a \rangle$，其子群结构非常完美：对于 n 的每一个正因子 d ($d \mid n$)，**存在且仅存在一个**阶为 d 的子群。该子群由 $a^{n/d}$ 生成。

4 拉格朗日定理 (Lagrange's Theorem)

有 限 群 论 的 基 石

4.1 定理与证明

定理 4.1 (拉格朗日定理). 设 G 是有限群，H 是 G 的子群。则 H 的阶整除 G 的阶，即：

$$|H| \mid |G|$$

且 $|G| = [G : H] \cdot |H|$，其中 $[G : H]$ 是 H 在 G 中的指数（左陪集的个数）。

基于陪集的证明. 定义左陪集 $aH = \{ah \mid h \in H\}$。

1. **建立双射：**映射 $f : H \to aH$ ($h \mapsto ah$) 是双射，故所有陪集的大小相等，均为 $|H|$。
2. **构成划分：**定义等价关系 $a \sim b \iff a^{-1}b \in H$。等价类即为左陪集。群 G 被划分为 k 个互不相交的陪集之并：

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_kH$$

3. **计数：** $|G| = \sum_{i=1}^{k} |a_iH| = k \cdot |H|$。

$\square$

4.2 数论应用详解：欧拉定理 (Euler's Theorem)

为了利用群论证明欧拉定理，我们首先需要引入描述群“大小”的数论函数。

定义 4.2 (欧拉函数 Euler's Totient Function). 设 n 为正整数。欧拉函数 $\phi(n)$ 定义为小于等于 n 的正整数中与 n **互质**的数的个数。即：

$$\phi(n) = |\{k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq n, \gcd(k, n) = 1\}|$$

例子：

- *若 $n = p$ (素数)，则 $1, \ldots, p-1$ 都与 p 互质，故 $\phi(p) = p - 1$。*
- *若 $n = 10$，与 10 互质的数为 $\{1, 3, 7, 9\}$，故 $\phi(10) = 4$。*

关键构造：模 n 乘法群

考虑模 n 的剩余类环 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$。我们需要从中提取出一个关于**乘法**构成群的子集。

定义集合 G 为 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 中所有**可逆元**（单位元）组成的集合：

$$G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \gcd(a, n) = 1\}$$

- **群的阶**：根据 $\phi(n)$ 的定义，显然有 $|G| = \phi(n)$。
- **封闭性**：若 $\gcd(a, n) = 1, \gcd(b, n) = 1$，则 $\gcd(ab, n) = 1$，故封闭。
- **单位元**： $\bar{1} \in G$。
- **逆元**：由贝祖等式，若 $\gcd(a, n) = 1$，存在 x, y 使 $ax + ny = 1$，即 $ax \equiv 1 \pmod{n}$，故 $\bar{a}$ 存在逆元 $\bar{x}$。

结论： $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}, \cdot)$ 是一个阶为 $\phi(n)$ 的有限阿贝尔群。

欧拉定理的证明

定理 4.3 (欧拉定理 Euler's Theorem). 设 $n \in \mathbb{Z}^+$，对于任意整数 a，若 $\gcd(a,n)=1$，则：

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

基于拉格朗日定理的证明. **步骤 1：转化为群语言**因为 $\gcd(a,n)=1$，所以 a 在模 n 下对应的剩余类 $\bar{a}$ 属于群 $G=(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$。回顾群 G 的阶为 $|G|=\phi(n)$，单位元为 $e=\bar{1}$。

步骤 2：考虑元素的阶设 $\bar{a}$ 在群 G 中的阶为 k。根据元素的阶的定义，k 是满足 $\bar{a}^k=\bar{1}$ 的最小正整数。

步骤 3：应用拉格朗日定理推论根据拉格朗日定理的推论（Lagrange's Corollary）：**在有限群中，任意元素的阶整除群的阶。**

$$k \mid |G| \implies k \mid \phi(n)$$

这意味着存在整数 m，使得 $\phi(n)=k\cdot m$。

步骤 4：计算幂次在群 G 中进行运算：

$$\bar{a}^{\phi(n)} = \bar{a}^{k\cdot m} = (\bar{a}^k)^m$$

因为 $\bar{a}^k=\bar{1}$ (阶的定义)，所以：

$$(\bar{a}^k)^m = (\bar{1})^m = \bar{1}$$

步骤 5：还原为同余式上述群方程 $\bar{a}^{\phi(n)}=\bar{1}$ 在数论语言中即表示：

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

证毕。 □

NOTE: 费马小定理作为特例

当 $n=p$ (素数) 时：

1. $\phi(p)=p-1$。
2. 若 $p \nmid a$，则 $\gcd(a,p)=1$。
3. 代入欧拉定理公式直接得到：$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$。

5 典型群案例：D_n 与 S_n

具 体 的 非 交 换 群 实 例

5.1 深度解析：二面体群 D_n (Dihedral Groups)

二面体群 D_n 是正 n 边形 $(n \geq 3)$ 的全特对称群。它是理解**非交换群**结构的最佳入门模型。

5.1.1 1. 生成元与定义关系 (Generators & Relations)

D_n 的 $2n$ 个元素可以完全由两个核心变换生成：

- **旋转 (Rotation)** r：绕中心逆时针旋转 $2\pi/n$。
- **反射 (Reflection)** s：关于某条固定对称轴的翻转。

群的**展示 (Presentation)** 为：

$$D_n = \langle r, s \mid r^n = e, \quad s^2 = e, \quad srs = r^{-1} \rangle$$

直观理解：核心运算规则：s 是“开关”

D_n 非交换的本质在于关系式 $srs = r^{-1}$，它通常变形为以下两种**交换规则**，用于化简运算：

1. **右交换律**：$sr = r^{-1}s$ （或 $sr = r^{n-1}s$）
2. **左交换律**：$rs = sr^{-1}$

直观口诀：只要 s 从 r 的左边跳到右边（或反之），r 的指数就要变符号（取逆）。

5.1.2 2. 元素的标准型 (Standard Form)

利用上述交换规则，任何复杂的乘积都可以化简为以下形式之一：

- **旋转型**：r^k (其中 $0 \le k < n$) ——共 n 个。
- **反射型**：sr^k (其中 $0 \le k < n$) ——共 n 个。

集合表示：$D_n = \{e, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$。

5.1.3 3. 实例对比：D_3 vs D_4

特性	D_3 (正三角形)	D_4 (正方形)
阶 (Order)	$2 \times 3 = 6$	$2 \times 4 = 8$
同构	$\cong S_3$ (全对称群)	不同构于 S_4 (它是 S_4 的子群)
中心 $Z(G)$	$\{e\}$ (无非平凡中心)	$\{e, r^2\}$ (旋转 $180°$ 与所有元素交换)
几何意义	3 个旋转 + 3 个中线反射	4 个旋转 + 2 个对角线反射 + 2 个对边中线反射

表 2: D_3 与 D_4 的结构对比

5.1.4 4. 运算实战演练

例题：在 D_4 中，计算 $x = (sr)(sr^3)$。

解：

$$\begin{aligned}
x &= s \cdot (r \cdot s) \cdot r^3 && \text{(结合律)} \\
&= s \cdot (sr^{-1}) \cdot r^3 && \text{(利用 } rs = sr^{-1} \text{ 交换)} \\
&= s^2 \cdot r^{-1} \cdot r^3 && \text{(结合 } s^2\text{)} \\
&= e \cdot r^2 && \text{(利用 } s^2 = e\text{)} \\
&= r^2
\end{aligned}$$

几何解释：先沿轴翻转再转 $270°$，然后再沿轴翻转再转 $90°$，最终效果等于旋转 $180°$。

NOTE: 注意

在矩阵表示中，r 对应旋转矩阵，s 对应反射矩阵（如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$）。此时行列式 $\det(s) = -1$，$\det(r) = 1$。这也是为什么 s 的出现会改变旋转方向（r 变 r^{-1}）的代数原因。

5.2 全对称群 S_n (Symmetric Groups)

- **定义**：集合 $\{1, \ldots, n\}$ 上所有双射（置换）构成的群。
- **阶**：$|S_n| = n!$。
- **重要子群**：**交错群** A_n，由所有**偶置换**组成。

$$|A_n| = \frac{n!}{2}, \quad A_n \trianglelefteq S_n$$

> 术语百科 (Terminology)
>
> **凯莱定理 (Cayley's Theorem)**：任何群 G 都同构于某个对称群 $S(X)$ 的子群。（群本质上是变换群）

6 群作用 (Group Action)

群与外部集合的交互

定义 6.1. *群 G 在集合 X 上的作用是一个映射 $G \times X \to X$ (记为 $g \cdot x$)，满足：*

1. **单位元**：$e \cdot x = x, \forall x \in X$。
2. **结合律、相容性**：$(a * b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$。

> NOTE: 同态观点
>
> 群 G 在 X 上的作用等价于一个群同态 $\rho : G \to S(X)$，其中 $\rho(g)$ 是 X 上的一个置换。

7 陪集分解与自同构结构 (Coset Decomposition & Automorphism Structure)

从集合划分到群的结构

7.1 左乘作用与陪集划分 (Left Cosets & Partition)

我们将子群的概念与“群作用”结合，研究群 G 自身的内部结构。

7.1.1 1. 左乘作用 (Left Multiplication Action)

设 H 是 G 的一个子群。我们可以让群 H 作用在群 G 上。定义作用 $\lambda: H \times G \to G$ 为：

$$h \cdot g = hg \quad (\text{左乘})$$

或者更常见地，考虑 H 作用在 G 上的**左陪集**构造。

7.1.2 2. 左陪集的定义

对于任意 $a \in G$，由 a 确定的 H 的**左陪集 (Left Coset)** 定义为：

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

这里，a 称为该陪集的**代表元 (Representative)**。

7.1.3 3. 右陪集 (Right Cosets)

同理，定义 H 的**右陪集**为：

$$Ha = \{ha \mid h \in H\}$$

NOTE: 左右陪集的区别

一般情况下，左陪集不等于右陪集 ($aH \neq Ha$)。

- 若 G 是阿贝尔群，则显然 $aH = Ha$。
- 若 $aH = Ha$ 对所有 a 成立，这将引出**正规子群**的概念。

7.1.4 4. 陪集构成的划分 (Partition by Cosets)

这是群论中最基础的结构定理之一。左陪集并不是随意重叠的集合，它们完美地将 G 切分。

定义 G 上的关系 $\sim_L$：

$$a \sim_L b \iff a^{-1}b \in H \iff b \in aH$$

这是一个**等价关系**（满足自反、对称、传递）。因此，等价类 $[a]$ 正是左陪集 aH。

命题 7.1 (划分性质). *群 G 是其所有左陪集的***不相交并集** ***(Disjoint Union)***:

$$G = \bigsqcup_{a \in I} aH$$

其中 I 是代表元的集合。这意味着：

1. *任意两个陪集要么完全相等，要么互不相交 ($aH = bH$ 或 $aH \cap bH = \emptyset$)。*
2. *每个元素 $g \in G$ 恰好属于一个左陪集。*

直观理解：回顾：拉格朗日定理的基础

Recall Lagrange's Theorem: 正是基于上述“不相交划分”的性质，我们才能断言：

$$|G| = (\text{陪集的个数}) \times (\text{每个陪集的大小})$$

即 $|G| = [G : H] \cdot |H|$。若没有陪集划分的**互不相交**和**等势**（大小相等）性质，拉格朗日定理将不复存在。

7.2 正规子群 (Normal Subgroups)

当左陪集与右陪集重合时，产生了一类特殊的子群。

定义 7.2 (正规子群). 设 $N \leq G$。若对于任意 $g \in G$，都有 $gN = Ng$，则称 N 为 G 的**正规子群**，记作 $N \trianglelefteq G$。

等价判定条件：

1. $gN = Ng$
2. $gNg^{-1} = N$ (对共轭作用封闭)
3. $\forall n \in N, \forall g \in G \Rightarrow gng^{-1} \in N$

7.3 自同构与结构链 (Automorphisms & The Structure Chain)

我们深入研究从群 G 到自身的映射，这揭示了群的对称性。

7.3.1 1. 自同构群 Aut(G)

令 $\mathrm{Aut}(G)$ 表示 G 到 G 的所有**群同构 (Isomorphisms)** 组成的集合。

$$\mathrm{Aut}(G) = \{\sigma : G \to G \mid \sigma \text{ is bijective and homomorphic}\}$$

$\mathrm{Aut}(G)$ 在映射复合运算下构成一个群。显然，它是全变换群 $S(G)$ 的子群。

7.3.2 2. 内自同构 Inn(G)

由共轭作用诱导的同构。对于固定的 $a \in G$，定义映射 $\phi_a : G \to G$ 为：

$$\phi_a(x) = axa^{-1}$$

- ϕ_a 是一个自同构（保持运算，且是双射）。
- 所有此类映射的集合称为**内自同构群**，记为 $\mathrm{Inn}(G)$。

7.3.3 3. 正规结构链 (The Normal Chain)

我们有以下重要的群包含链：

$$\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G) \leq S(G)$$

关键证明：为什么 *Inn(G)* 是 *Aut(G)* 的正规子群？. 设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ 是任意自同构，$\phi_a \in \mathrm{Inn}(G)$ 是由 a 诱导的内自同构。我们需要证明 $\sigma \circ \phi_a \circ \sigma^{-1}$ 仍然是一个内自同构。

对于任意 $x \in G$：

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \phi_a \circ \sigma^{-1})(x) &= \sigma(\phi_a(\sigma^{-1}(x))) \\
&= \sigma(a \cdot \sigma^{-1}(x) \cdot a^{-1}) \quad (\text{展开内自同构}) \\
&= \sigma(a) \cdot \sigma(\sigma^{-1}(x)) \cdot \sigma(a^{-1}) \quad (\sigma \text{ 是同态}) \\
&= \sigma(a) \cdot x \cdot (\sigma(a))^{-1}
\end{aligned}$$

观察结果，这正是由元素 $\sigma(a)$ 诱导的内自同构！即：

$$\sigma \circ \phi_a \circ \sigma^{-1} = \phi_{\sigma(a)} \in \mathrm{Inn}(G)$$

因此，$\mathrm{Inn}(G)$ 对 $\mathrm{Aut}(G)$ 的共轭作用封闭，故 $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$。 □

NOTE: 群论中心 $Z(G)$ 的联系

存在群同态 $G \to \mathrm{Aut}(G)$ ($a \mapsto \phi_a$)。其核 (Kernel) 是群的中心 $Z(G)$，像 (Image) 是 $\mathrm{Inn}(G)$。由同态基本定理可得：

$$G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$$

直观理解：群论哲学

Action comes first, Group comes after. 群的本质在于作用。正规子群本质上是共轭作用下的不变子群。

阅读说明 (Reading Guide)

本文档基于抽象代数课程笔记整理，涵盖了群作用（Group Action）的核心理论。内容从基础的轨道与稳定子出发，深入探讨了共轭作用在对称群 S_n 中的表现，系统介绍了经典矩阵群（$O(n), SU(n)$），重点推导了 $SU(2) \to SO(3)$ 的同态关系。最后，通过轨道-稳定子定理和类方程，解决了 p-群中心非平凡性及 $SO(3)$ 有限子群分类等经典问题。

第 一 部 分： 群 作 用 的 基 本 构 造

8 轨道与稳定子 (Orbits and Stabilizers)

8.1 基本定义

设群 G 作用在集合 X 上，记作 $G \curvearrowright X$。

术语百科 (Terminology)

- **轨道 (Orbit)**: 元素 x 在群作用下能到达的所有位置的集合。

$$Orb(x) = G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

- **稳定子群 (Stabilizer)**: 群 G 中使 x 保持不动的元素集合（也称不动子群）。

$$G_x = Stab_G(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

例 8.1 (S_n 作用在集合 $\{1, \ldots, n\}$ 上). 考虑对称群 S_n 作用在集合 $[n] = \{1, \ldots, n\}$ 上。对于元素 $n \in [n]$，其稳定子为：

$$Stab_{S_n}(n) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\} \cong S_{n-1}$$

直观上，固定了第 n 个位置，剩下的 $n-1$ 个元素可以任意排列。

8.2 群对子集的作用：点与集合的区别

当考虑群 G 作用在 X 的子集 $E \subseteq X$ 上时，我们需要区分两种“固定”的概念。

定义 8.2 (中心化子与正规化子). *1.* **逐点固定 *(Pointwise Fixing)***: 对应 **中心化子 *(Centralizer)***。

$$G_E = C_G(E) = \{g \in G \mid \forall x \in E, g \cdot x = x\} = \bigcap_{x \in E} G_x$$

2. **集合固定 *(Setwise Fixing)***: 对应 **正规化子 *(Normalizer)***。

$$N_G(E) = \{g \in G \mid g \cdot E = E\}$$

注：$g \cdot E = E$ 指集合作为一个整体不变，内部元素可以互换。

直观理解："木头人" vs "关门换座"

- **中心化子** ($C_G(E)$) 就像玩"木头人"，E 里的每个元素都必须钉在原地，完全不能动。
- **正规化子** ($N_G(E)$) 就像"关起门来换座位"，E 里的元素可以在 E 的范围内互换位置，只要不跑出 E 的范围即可。

显然，$C_G(E) \subseteq N_G(E)$。

第二部分：共轭作用与对称群结构

9 共轭作用 (Conjugation Action)

考虑群 G 作用在自身 G 上，作用法则为 $g \cdot x = gxg^{-1}$。在此作用下：

- **轨道**：称为 **共轭类 (Conjugacy Class)**，记为 $Cl(x)$ 或 x^G。
- **稳定子**：即为元素的 **中心化子** $C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$。

9.1 对称群 S_n 的共轭类：圈型定理

在对称群 S_n 中，共轭类的结构由置换的轮换分解形式完全决定。我们需要严格证明这一点。

引理 9.1 (共轭作用引理). 设 $\sigma = (i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ 是 S_n 中的一个 k-轮换，$\tau \in S_n$ 是任意置换。则 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 也是一个 k-轮换，且形式为：

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i_1)\ \tau(i_2)\ \dots\ \tau(i_k))$$

即：共轭作用的效果是将原轮换中的元素 x 替换为 $\tau(x)$。

证明. 我们需要验证映射 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 对集合中元素的作用效果。

- 对于轮换中的元素 $\tau(i_j)$ (其中 $1 \leq j < k$)：

$$(\tau\sigma\tau^{-1})(\tau(i_j)) = \tau(\sigma(\tau^{-1}(\tau(i_j)))) = \tau(\sigma(i_j)) = \tau(i_{j+1})$$

  这表明 $\tau(i_j)$ 被映射到了 $\tau(i_{j+1})$。

- 对于最后一个元素 $\tau(i_k)$：

$$(\tau\sigma\tau^{-1})(\tau(i_k)) = \tau(\sigma(i_k)) = \tau(i_1)$$

- 对于不在轮换中的元素 $y \notin \{\tau(i_1), \dots, \tau(i_k)\}$：这意味着 $\tau^{-1}(y) \notin \{i_1, \dots, i_k\}$。由于 σ 保持这些元素不动（即 $\sigma(\tau^{-1}(y)) = \tau^{-1}(y)$），则：

$$(\tau\sigma\tau^{-1})(y) = \tau(\sigma(\tau^{-1}(y))) = \tau(\tau^{-1}(y)) = y$$

综上，$\tau\sigma\tau^{-1}$ 的确就是 $(\tau(i_1)\ \dots\ \tau(i_k))$。 □

定理 9.2 (S_n 共轭判定). 两个置换 $\sigma, \mu \in S_n$ 是共轭的，当且仅当它们具有相同的 ***圈型 (Cycle Type)***（即不相交轮换的长度列表相同）。

证明. **必要性 ($\Rightarrow$)**: 设 $\mu = \tau\sigma\tau^{-1}$。任意置换 σ 可唯一分解为不相交轮换之积：$\sigma = C_1C_2\dots C_m$。根据共轭运算的同态性质：

$$\mu = \tau(C_1C_2\dots C_m)\tau^{-1} = (\tau C_1\tau^{-1})(\tau C_2\tau^{-1})\dots(\tau C_m\tau^{-1})$$

由引理可知，每个 $\tau C_j\tau^{-1}$ 都是一个与 C_j 长度相同的轮换。又因为 C_j 不相交，变换后的轮换集也是不相交的。因此 μ 的轮换分解长度与 σ 完全一致。

充分性 ($\Leftarrow$): 假设 σ 和 μ 有相同的圈型。我们将它们按轮换长度递减排列，并上下对齐书写（包括长度为 1 的单点轮换）：

$$\sigma = (a_1\dots a_{k_1})(b_1\dots b_{k_2})\dots$$

$$\mu = (x_1\dots x_{k_1})(y_1\dots y_{k_2})\dots$$

定义置换 τ 为“上下对应”的映射：

$$\tau(a_j) = x_j, \quad \tau(b_j) = y_j, \quad \dots$$

由于 σ 和 μ 均遍历 $\{1, \dots, n\}$，且结构完全对应，τ 是一个良定义的双射（即 $\tau \in S_n$）。根据引理，直接计算 $\tau\sigma\tau^{-1}$：

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1)\dots\tau(a_{k_1}))\dots = (x_1\dots x_{k_1})\dots = \mu$$

故存在 τ 使得它们共轭。 □

例 9.3 (S_4 的共轭类). *$n=4$ 的整数分拆对应 S_4 的 5 个共轭类：*

1. $1+1+1+1$: *恒等元 e。*
2. $2+1+1$: *对换，如 (12)。*
3. $3+1$: *三轮换，如 (123)。*
4. 4: *四轮换，如 (1234)。*
5. $2+2$: *双对换，如 $(12)(34)$。（注意：这与恒等元构成了 Klein 四元群 V_4）。*

9.2 S_4 的正规群列

S_4 是可解群，拥有如下正规群列（Composition Series）：

$$S_4 \trianglerighteq A_4 \trianglerighteq V_4 \trianglerighteq \langle(12)(34)\rangle \trianglerighteq \{e\}$$

其中 $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ 是 Klein 四元群。

第三部分：经典矩阵群与表示论初步

10 从几何到代数：广义几何群

群不仅是由乘法表定义的抽象对象，更是“保持某种几何结构不变”的变换集合。我们从最熟悉的欧几里得几何出发，推广到更一般的线性空间。

10.1 双线性形式与 $O(V, B)$

在向量空间 V 上，距离和角度的概念通常由**双线性形式 (Bilinear Form)** 定义。

定义 10.1 (双线性形式)**.** 设 V 是域 k 上的线性空间。映射 $B: V \times V \to k$ 称为双线性形式，如果它对两个变量都满足线性性：

- $B(u+v, w) = B(u, w) + B(v, w)$
- $B(u, v+w) = B(u, v) + B(u, w)$
- $B(\lambda u, v) = \lambda B(u, v) = B(u, \lambda v)$

基于形式 B，我们可以定义保持该形式不变的群：

$$G = \{g \in GL(V) \mid B(g \cdot u, g \cdot v) = B(u, v), \forall u, v \in V\}$$

根据 B 的对称性，这些群分为两大类：

10.1.1 1. 对称形式 → 正交群 (Orthogonal Group)

若 $B(u, v) = B(v, u)$（对称），则 G 称为**正交群**，记为 $O(V, B)$。

- **经典例子** $O(n)$: 当 $V = \mathbb{R}^n$，且 $B(x, y) = x^T y = \sum x_i y_i$（标准点积）时，这就是保持向量长度和夹角不变的经典正交群。
- **闵可夫斯基** $O(3, 1)$: 在相对论时空 $\mathbb{R}^4$ 中，度量形式为 $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$。保持此形式不变的群即为洛伦兹群。

10.1.2 2. 反对称形式 → 辛群 (Symplectic Group)

若 $B(u, v) = -B(v, u)$（反对称，或称交错形式），则 G 称为**辛群**，记为 $Sp(V, B)$ 或 $Sp(2n)$。

> **NOTE: 辛几何的物理意义**
>
> 辛形式 B 并不测量长度，而是测量“有向面积”。辛群是经典力学（哈密顿力学）的数学基础，辛变换保持相空间中的体积形式（刘维尔定理）。

11 复数域上的几何：$U(n)$ 与 $SU(n)$

当基础域从实数 $\mathbb{R}$ 变为复数 $\mathbb{C}$ 时，我们使用**埃尔米特形式 (Hermitian Form)** 来定义几何。

11.1 酉群 (Unitary Group)

埃尔米特形式 $H(u,v)$ 对第一个变量线性，对第二个变量共轭线性（$H(u,\lambda v)=\bar{\lambda}H(u,v)$），且满足共轭对称性 $H(u,v)=\overline{H(v,u)}$。

定义 **酉群** $U(n)$ 为保持标准埃尔米特内积不变的矩阵群：

$$U(n)=\{g\in GL_n(\mathbb{C})\mid g\bar{g}^T=I_n\}$$

这里的 $\bar{g}^T$ 常记为 $g^\dagger$（共轭转置）。

- **几何意义**：保持复向量空间中的“模长”不变。
- **行列式**：对于 $g\in U(n)$，有 $|\det(g)|=1$。即 $\det(g)$ 是单位圆上的复数 $e^{i\theta}$。

11.2 特殊酉群 (Special Unitary Group)

定义 11.1 ($SU(n)$)**.**

$$SU(n)=\{g\in U(n)\mid \det(g)=1\}=U(n)\cap SL_n(\mathbb{C})$$

直观理解：为什么叫“特殊 (Special)”？

在群论中，“特殊 (Special)”一词通常意味着**行列式为 1**。

- $U(n)$ 包含了所有的复数旋转和相位的变化（$\det(g)$ 可以是任何模为 1 的复数）。
- $SU(n)$ 剔除了相位因子 $e^{i\theta}$ 的整体缩放，只保留了“纯粹”的旋转部分。
- 例如，$SU(2)$ 同构于单位四元数群，在量子力学中描述自旋（Spin），而 $SU(3)$ 则对应强相互作用的色荷对称性。

12 群表示论：将抽象具体化

群表示论的核心思想是将抽象的群元素“具象化”为线性变换（矩阵）。

定义 12.1 (线性表示). *群 G 在线性空间 V 上的一个表示是一个群同态 $\rho : G \to GL(V)$。这使得我们可以用矩阵乘法来计算抽象群的运算。*

例 12.2 (S_3 的矩阵表示). *考虑对称群 S_3（3 个元素的置换群）。虽然它是抽象定义的，但我们可以把它看作是对三维空间基向量 e_1, e_2, e_3 的置换。*

设 $V = \mathbb{R}^3$。对于置换 $\sigma = (1\ 2) \in S_3$（交换元素 1 和 2），它对应的线性变换作用在基底上为：

$$e_1 \mapsto e_2, \quad e_2 \mapsto e_1, \quad e_3 \mapsto e_3$$

其对应的矩阵为：

$$\rho((1\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

同理，对于 3-轮换 $\tau = (1\ 2\ 3)$（$1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1$）：

$$\rho((1\ 2\ 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

威力展示： *抽象群中的运算 $(1\ 2)(1\ 2\ 3) = (2\ 3)$ 可以直接通过矩阵乘法验证：*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

结果矩阵确实对应着置换 $(2\ 3)$（交换 e_2, e_3）。

12.1 几何群实例深入：正方体群为何同构于 S_4？

在进入定量理论之前，我们通过一个经典的几何实例来整合上述概念。正方体的旋转群 G 和 4 次对称群 S_4 虽然定义不同，但它们在代数结构上是完全相同的（同构）。

12.1.1 1. 确定群的阶数

首先，我们需要知道正方体旋转群 G 有多少个元素。利用群作用的计数思想（即将在下一部分形式化的轨道-稳定子理论）：

- 设 G 作用在正方体的 6 个面 $F = \{f_1, \ldots, f_6\}$ 上。
- 任意面都可以转到任意面，故轨道大小为 6。
- 固定一个面（如顶面）后，正方体还可以绕垂直轴旋转 $0°, 90°, 180°, 270°$，故稳定子大小为 4。

$$|G| = 6 \times 4 = 24$$

12.1.2 2. 寻找 4 个被作用对象：体对角线

正方体有 8 个顶点，连接相对顶点的线段称为 **体对角线 (Space Diagonals)**。共有 $8/2 = 4$ 条体对角线，记为 $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$。

任意一个正方体的旋转操作 $g \in G$，都会将一条体对角线移动到另一条体对角线的位置。因此，群 G 作用在集合 D 上。这定义了一个从 G 到 4 次对称群 S_4 的同态映射：

$$\phi : G \to S_D \cong S_4$$

12.1.3 3. 建立一一对应 (同构证明)

由于 $|G| = 24$ 且 $|S_4| = 24$，要证明 $G \cong S_4$，我们只需展示 G 中的旋转类型与 S_4 的共轭类（圈型）是一一对应的：

正方体旋转类型	数量	S_4 对应圈型	数量
恒等旋转 $(0°)$	1	$1+1+1+1$ (e)	1
绕面心轴 $\pm 90°$ (3 轴 $\times 2$)	6	4-轮换 (如 1234)	6
绕面心轴 $180°$ (3 轴 $\times 1$)	3	双对换 (如 (12)(34))	3
绕顶点轴 $\pm 120°$ (4 轴 $\times 2$)	8	3-轮换 (如 123)	8
绕棱心轴 $180°$ (6 轴 $\times 1$)	6	对换 (如 12)	6
总计	**24**		**24**

直观理解：几何直观：绕棱心旋转对应“对换”

最难想象的是最后一种情况：绕连接相对棱中点的轴旋转 180°。

- 想象连接“左前棱”和“右后棱”中点的轴。
- 旋转 180° 会交换这两条棱上的顶点，这导致其中两条体对角线互换位置，而另外两条体对角线也被迫互换位置？
- **修正细节**：实际上，在 S_4 中，“绕棱心旋转”对应的是 **单对换 (Transposition)** 形式，例如 (12)。这意味着有两条对角线交换了位置，而另外两条保持原位（或者说整体翻转但占据同一空间位置，视作不动）。
- 这一行对应的正是 S_4 中 6 个形如 (ab) 的元素。

结论：映射 ϕ 是双射，故 $G \cong S_4$。

第 四 部 分： 定 量 理 论 与 几 何 应 用

13 轨道-稳定子定理与类方程

13.1 轨道-稳定子定理

定理 13.1. 设有限群 G 作用在集合 X 上，对于任意 $x \in X$，有：

$$|Orb(x)| \cdot |Stab_G(x)| = |G|$$

或者写作指数形式：$|Orb(x)| = [G : G_x]$。

证明思路：构造双射 $\Phi : G/G_x \to Orb(x)$，定义为 $gG_x \mapsto g \cdot x$。验证良定义性：$aG_x = bG_x \iff a^{-1}b \in G_x \iff a^{-1}b \cdot x = x \iff b \cdot x = a \cdot x$。

13.2 类方程 (Class Equation)

将集合 X 划分为不相交的轨道，利用上述定理可得：

$$|X| = \sum_{[x] \in Orb(X)} [G : G_x]$$

特别地，对于共轭作用，$X = G$，不动点集为中心 $Z(G)$，公式变为：

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \notin Z(G)} [G : C_G(x)]$$

14 应用实例

14.1 应用一：p-群的中心非平凡

定理 14.1. *若 $|G| = p^r$ $(r \geq 1)$，则中心 $Z(G) \neq \{e\}$。*

证明. 考察类方程：

$$|G| = |Z(G)| + \sum [G : C_G(x)]$$

- 左边 $|G| = p^r$，能被 p 整除。
- 求和项中，对于 $x \notin Z(G)$，指数 $[G : C_G(x)]$ 必须是 $|G|$ 的真因子且大于 1，因此也能被 p 整除。

因此，$|Z(G)|$ 必须能被 p 整除。又因为 $e \in Z(G) \implies |Z(G)| \geq 1$，所以 $|Z(G)| \geq p > 1$。 □

14.2 应用二：$SO(3)$ 有限子群分类

我们的目标是找出所有 $SO(3)$ 的有限子群 G。这等价于寻找所有可能的正多面体对称群。

14.2.1 1. 极点集与计数方程

定义 14.2 (极点 Pole)**.** *对于任意非单位旋转 $g \in G \setminus \{e\}$，g 确定了一个旋转轴。该轴与单位球面 S^2 的两个交点称为 g 的***极点***。记 G 的所有极点构成的集合为 P。群 G 作用在集合 P 上。*

为了分类 G，我们计算集合 $S = \{(g, p) \mid g \in G \setminus \{e\}, p \in P, g \cdot p = p\}$ 的基数 $|S|$。我们用两种方法计算：

方法一：按群元素 g 计数每个非单位旋转 g 恰好有两个极点（轴的两端）。

$$|S| = \sum_{g \in G \setminus \{e\}} 2 = 2(|G| - 1)$$

方法二：按极点 p 计数对于每个极点 $p \in P$，它的稳定子群 G_p 是所有以 p 为轴的旋转构成的群（包含 e）。只有 G_p 中的非单位元会对 $|S|$ 做出贡献。

$$|S| = \sum_{p \in P} (|G_p| - 1)$$

建立方程设 P 在 G 作用下分裂为 k 个轨道 $O_1, O_2, \ldots, O_k$。对于同一轨道 O_i 中的点，稳定子阶数相同，记为 $n_i = |G_p|$ $(p \in O_i)$。根据轨道-稳定子定理，$|O_i| = |G|/n_i$。将求和按轨道分组：

$$\sum_{p \in P} (|G_p| - 1) = \sum_{i=1}^{k} |O_i|(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} \frac{|G|}{n_i}(n_i - 1) = |G| \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

联立两种计数结果：

$$2(|G| - 1) = |G| \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

两边同时除以 $|G|$，令 $N = |G|$，得到核心丢番图方程：

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \tag{1}$$

其中 $n_i \geq 2$ 是整数（因为极点是旋转轴点，至少有非平凡旋转，故稳定子阶数 ≥ 2）。

14.2.2 2. 方程的求解与分类

我们需要寻找上述方程的整数解。注意 $1 - \frac{1}{n_i} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$。方程左边 $2 - \frac{2}{N} < 2$。这意味着 $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} < 2 \implies \frac{k}{2} < 2 \implies k < 4$。所以轨道数 k 只能是 2 或 3。

情形一：$k = 2$ **(两个轨道)** 方程变为：

$$2 - \frac{2}{N} = (1 - \frac{1}{n_1}) + (1 - \frac{1}{n_2})$$

化简得 $\frac{2}{N} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$。因为极点总是成对出现（南极北极），且 p 是极点意味着 $G_p \neq \{e\}$，容易推导这种情况对应于只有一个旋转轴的情形。

- **解**: $n_1 = n_2 = N$。

- **群结构**: 循环群 C_N。几何上对应棱锥底面的旋转对称。

情形二：$k = 3$ (三个轨道) 方程变为：

$$2 - \frac{2}{N} = (1 - \frac{1}{n_1}) + (1 - \frac{1}{n_2}) + (1 - \frac{1}{n_3})$$

整理得：

$$1 + \frac{2}{N} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$$

不妨设 $2 \le n_1 \le n_2 \le n_3$。由于 LHS > 1，这就限制了 n_i 的取值。

1. **若 $n_1 \ge 3$:** 则 RHS $\le \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1$，矛盾。故必须 $n_1 = 2$。方程化为: $\frac{1}{2}+\frac{2}{N} = \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}$。
2. **若 $n_2 \ge 4$:** 则 RHS $\le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$，矛盾（因为 $N < \infty$）。故 n_2 只能是 2 或 3。

- **子情形 A:** $n_2 = 2$ 方程化为 $\frac{2}{N} = \frac{1}{n_3} \implies N = 2n_3$。设 $n_3 = n$。**解**: $(2, 2, n)$，且 $N = 2n$。**群结构**: **二面体群** D_n。对应正 n 棱柱的对称群。
- **子情形 B:** $n_2 = 3$ 方程化为 $\frac{2}{N} = \frac{1}{6} - (1 - \frac{1}{n_3}) + \frac{1}{n_3} \dots$ 实际上是 $\frac{1}{6} + \frac{2}{N} = \frac{1}{n_3}$。即 $\frac{1}{n_3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{N} > 0$。故 $3 \le n_3 < 6$，即 n_3 可取 3, 4, 5。
  - $n_3 = 3$: $\frac{2}{N} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \implies N = 12$。**解**: $(2, 3, 3)$，对应 **正四面体群 (A_4)**。
  - $n_3 = 4$: $\frac{2}{N} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \implies N = 24$。**解**: $(2, 3, 4)$，对应 **正八面体/正方体群 (S_4)**。
  - $n_3 = 5$: $\frac{2}{N} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{30} \implies N = 60$。**解**: $(2, 3, 5)$，对应 **正二十面体/正十二面体群 (A_5)**。

综上所述，除去循环群和二面体群外，仅存在三种特殊的有限旋转群，分别对应三种柏拉图立体的对称性。

直观理解：为什么正方体群 $\cong S_4$?

正方体的旋转群阶数为 24。正方体内部有 **4 条体对角线**。任意旋转都会重排这 4 条对角线。可以证明，该群到对角线置换群的映射是同构的，因此它同构于 S_4。