代数学笔记 Chapter 6：模论基础 (Module Theory)

根据手写笔记整理

2025 年 12 月 16 日

本章导读

本章主要介绍模（Module）的概念。模是线性空间在环上的推广。

- 掌握模的公理化定义，理解其与线性空间的联系。
- 理解 $\mathbb{Z}$-模即为阿贝尔群。
- 理解模定义的等价描述（环同态到自同态环）。
- **核心难点**：理解 $R^{\text{op}} \cong \text{End}_R({}_RR)$ 及其背后的“左右”对偶关系。

目录

1 模 (Modules) 与线性空间 (Linear Spaces)

模定义的引入

模的概念是对线性空间的自然推广。我们将标量域 k 替换为一般的幺环 R。

左 R-模 (Left R-Module)	线性空间 (V/k)
设 R 是幺环。M 是 R 上的左模，记为 $(M, 0, +, \cdot)$。 **基本结构：** • $0 \in M$ • $+ : M \times M \to M$ • $\cdot : R \times M \to M$	设 k 是域。V 是 k 上的线性空间，记为 $(V, 0, +, \cdot)$。**基本结构：** • $0 \in V$ • $+ : V \times V \to V$ • $\cdot : k \times V \to V$

公理体系 (Axioms)

1. $(M, 0, +)$ 是**阿贝尔群**。 2. 数乘满足以下律 ($x, y \in M, a, b \in R$)： • $(a \cdot b)x = a \cdot (b \cdot x)$ • $(a + b)x = ax + bx$ • $a(x + y) = ax + ay$ • $1 \cdot x = x$	1. $(V, 0, +)$ 是**加法群** (Abelian)。 2. 数乘满足以下律 ($x, y \in V, a, b \in k$)： • $(ab)x = a(bx)$ • $(a + b)x = ax + bx$ • $a(x + y) = ax + ay$ • $1 \cdot x = x$

2 重要的模例子

两个基本例示

例 2.1 (线性空间). *若 $R = k$ 为域，则 k-线性空间 $\iff$ k-模。*

例 2.2 (阿贝尔群即 $\mathbb{Z}$-模). *$\mathbb{Z}$-模 $\iff$ 加法群（阿贝尔群）。*

设 M 是加法群，则可定义**唯一**的 $\mathbb{Z}$-模结构。对于 $n \in \mathbb{Z}, x \in M$，数乘定义如下：

$$n \cdot x = \begin{cases} \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ 个}} & (n \in \mathbb{N}_+, n > 0) \\ 0 & (n = 0) \\ -mx = \underbrace{(-x) + \cdots + (-x)}_{m \text{ 个}} & (n = -m, m \in \mathbb{N}_+) \end{cases} \tag{1}$$

3 模定义的结构等价性

环作用与同态

我们可以从“表示论”的角度来理解模。定义一个模，本质上是定义环 R 到群自同态环的映射。

命题 3.1. *设 R 为幺环，M 为加法群。以下两个陈述等价：*

(i) M 是左 R-模。

(ii) 存在环同态 $\Phi : R \to \mathrm{End}(M)$。

其中 $\mathrm{End}(M)$ 是 M 的自同态环（加法为逐点加，乘法为复合）。

证明. **1.** $(i) \Rightarrow (ii)$：**由模构造同态**

假设 M 是左 R-模。构造映射 $\Phi : R \to \mathrm{End}(M)$：

$$a \mapsto \Phi(a), \quad \text{其中}\Phi(a)(x) = a \cdot x$$

即 $\Phi(a)$ 是“左乘 a”这一变换。验证 Φ 是环同态：

- 加法：$(a + b)x = ax + bx \implies \Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$。
- 乘法：$(ab)x = a(bx) \implies \Phi(ab) = \Phi(a) \circ \Phi(b)$。
- 单位元：$1 \cdot x = x \implies \Phi(1) = \mathrm{id}_M$。

2. $(ii) \Rightarrow (i)$：**由同态定义模**

假设存在环同态 $\Phi : R \to \mathrm{End}(M)$。定义数乘 $R \times M \to M$：

$$(a, x) \mapsto a \cdot x := \Phi(a)(x)$$

容易验证该运算满足模的所有公理（因为 Φ 保持了环的运算结构）。 □

4 反环与正则模的自同态环

P20: $R^{op} \quad \cong \quad \mathrm{End}_R(R)$

本节讨论一个深刻的同构，它揭示了“左乘”与“右乘”在非交换环中的对偶关系。

定义 4.1 (反环 R^{op}). 设 R 为环。R^{op} 与 R 集合、加法相同，但乘法定义为：

$$a \cdot_{\mathrm{op}} b = b \cdot a$$

即运算顺序颠倒。

注意 (NOTE): 符号说明

${}_RR$ 表示 R 视作自身的**左** R-**模**。即标量从左边作用：$r \cdot x = rx$（环原本的乘法）。

定理 4.2. $R^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_R({}_RR)$。

直观理解：为什么是反环？

$\mathrm{End}_R({}_RR)$ 中的元素 f 必须与左乘交换，即 $f(rx) = rf(x)$。在非交换环中，只有**右乘**才能与左乘完美交换（结合律 $(rx)a = r(xa)$）。然而，右乘的复合顺序与元素乘积顺序是相反的：先右乘 a 再右乘 b，等于右乘 (ab)，但在函数记号里是 $f_b \circ f_a$。为了修正这个顺序，我们需要 R^{op}。

证明 $R^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_R(R)$. 我们分步构造映射并验证。

1. **构造映射**
   定义 $\Psi : R^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_R(R)$，对于 $a \in R$，定义 ρ_a 为右乘映射：

$$\rho_a(x) = xa$$

2. **验证 ρ_a 是模同态**
   我们需要验证 ρ_a 属于 $\mathrm{End}_R(R)$（即它是左 R-线性的）。对于任意 $r \in R$ 和 $x \in R$：

$$\rho_a(r \cdot x) = (rx)a = r(xa) = r \cdot \rho_a(x)$$

   这利用了环的结合律。

3. **验证 Ψ 是环同态**

- 加法：显然 $\rho_{a+b} = \rho_a + \rho_b$。
- 乘法：计算 $\Psi(a \cdot_{\text{op}} b)$。

$$\text{左边} = \Psi(ba) = \rho_{ba} \implies \text{作用于} x : x(ba)$$

$$\text{右边} = \Psi(a) \circ \Psi(b) = \rho_a \circ \rho_b \implies x \xrightarrow{\rho_b} xb \xrightarrow{\rho_a} (xb)a$$

由结合律 $x(ba) = (xb)a$，故 $\Psi(a \cdot_{\text{op}} b) = \Psi(a) \circ \Psi(b)$，乘法保持。

4. 验证双射

- 单射：若 $\rho_a = 0$（零映射），则 $\rho_a(1) = 1 \cdot a = a = 0$。故核为 $\{0\}$。
- 满射：设 $f \in \text{End}_R(R)$ 为任意自同态。令 $a = f(1)$。对于任意 $x \in R$，我们有：

$$f(x) = f(x \cdot 1) \overset{\text{左线性}}{=} xf(1) = xa = \rho_a(x)$$

因此 $f = \rho_a = \Psi(a)$。

□

本章导读

本章主要整理了模（Module）的基本理论。模可以看作是线性空间在环上的推广，或者是阿贝尔群的推广。我们将探讨模同态、子模、商模、同构定理，并进一步延伸到左右模的区别、双模以及模论在群表示论中的应用（群代数）。最后，我们将讨论模的分解工具：外直积与内直和。

5 模同态与子模

基 本 定 义

5.1 模同态 (Module Homomorphism)

设 M, M' 为 R-模。映射 $\phi : M \to M'$ 称为 **R-模同态 **（R-module homomorphism），如果它满足：

1. **加法保持**：$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ （即 ϕ 是加法群同态）。
2. **数乘保持**：$\phi(ax) = a\phi(x)$ （即 ϕ 与标量乘法交换）。

记 $\mathrm{Hom}_R(M, N) = \{M \to N \text{ 的} R\text{-同态}\}$。

注意 (NOTE): 同态集合的关系

由于模同态首先是群同态，我们有包含关系：

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M, N)$$

对于同态 ϕ，我们定义：

- ** 核 (Kernel)**: $\mathrm{Ker}(\phi) = \phi^{-1}(0) = \{x \in M \mid \phi(x) = 0\} \leq M$
- ** 像 (Image)**: $\mathrm{Im}(\phi) = \phi(M) = \{\phi(x) \mid x \in M\} \leq M'$

二者均为各自所在的模的 ** 子模 **。

5.2 子模 (Submodule)

定义 5.1 (子模). 设 M 为左 R-模，$N \subseteq M$。若 N 满足：*1.* $\forall x, y \in N$, $x + y \in N$（加法封闭）*2.* $\forall a \in R, x \in N$, $a \cdot x \in N$（数乘封闭）则称 N 为 M 的 **R-子模 **，记作 $N \leq M$。

直观理解：子模的类比

- 当 $R = \mathbb{Z}$ 时，$\mathbb{Z}$-模即为阿贝尔群，子模即为 ** 子群 **。
- 当 R 为域时，R-模即为线性空间，子模即为 ** 子空间 **。
- 把 R 看作自身的左 R-模，其子模即为 ** 左理想 **。

5.3 生成子模 (Generated Submodule)

设 $S \subseteq M$，由 S 生成的子模 $\langle S \rangle$ 定义为包含 S 的最小子模，即所有包含 S 的子模的交集。显式表达为：

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid a_i \in R, x_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

特例： 若 $S = \{x\}$，则 $\langle x \rangle = Rx = \{ax \mid a \in R\}$ 称为由 x 生成的 ** 循环子模 **。若 $M = Rx$，则 M 为 ** 循环模 **。

6 商模与同构定理

6.1 商模运算的良定义 (Well-definedness)

6.1.1 问题背景

设 R 是环，M 是左 R-模，N 是 M 的子模。我们在商集合 $M/N = \{x + N \mid x \in M\}$ 上定义加法和数乘运算如下：

$$(x + N) + (y + N) := (x + y) + N \tag{2}$$

$$a \cdot (x + N) := (ax) + N \tag{3}$$

为什么需要证明良定义？ 因为陪集的表示法不唯一。例如 $x + N$ 和 $x' + N$ 可能是同一个集合（只要 $x - x' \in N$）。我们需要确保我们选用了 x 还是 x' 来计算，最终得到的**结果集合**是完全一样的。

6.1.2 详细证明

命题 6.1. 上述定义的加法和数乘运算与代表元的选取无关，是良定义的 *(Well-defined)*。

证明. **1. 加法的良定义性**

假设有两个陪集 $A, B \in M/N$。设 x, x' 是 A 的不同代表元，即 $A = x + N = x' + N$。这意味着 $x - x' \in N$。设 y, y' 是 B 的不同代表元，即 $B = y + N = y' + N$。这意味着 $y - y' \in N$。

我们需要证明：用 (x, y) 计算的结果与用 (x', y') 计算的结果相同，即：

$$(x + y) + N = (x' + y') + N$$

考察两个结果代表元的差：

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y')$$

因为 N 是子模，对加法封闭，且 $x - x' \in N, y - y' \in N$，所以：

$$(x - x') + (y - y') \in N$$

即 $(x + y) - (x' + y') \in N$。根据陪集相等的充要条件，得证：

$$(x + y) + N = (x' + y') + N$$

2. 数乘的良定义性

设 x, x' 是同一个陪集的代表元，即 $x + N = x' + N$ (意味着 $x - x' \in N$)。任取环中元素 $a \in R$。我们需要证明：

$$(ax) + N = (ax') + N$$

考察结果代表元的差：

$$ax - ax' = a(x - x')$$

因为 N 是 R-子模，它对数乘封闭（吸收性）。由于 $x - x' \in N$，故对于任意 $a \in R$，有 $a(x - x') \in N$。即 $ax - ax' \in N$。得证：

$$(ax) + N = (ax') + N$$

□

6.2 模的第一同构定理 (First Isomorphism Theorem)

6.2.1 定理陈述

定理 6.2. 设 M, M' 为左 R-模，$\phi : M \to M'$ 是一个 R-模同态。令 $K = \ker(\phi)$ 为 ϕ 的核。则存在唯一的 R-模同构映射 $\overline{\phi} : M/K \to \mathrm{Im}(\phi)$，使得 $\overline{\phi} \circ \pi = \phi$（其中 $\pi : M \to M/K$ 是自然投影）。即：

$$M/\ker(\phi) \cong \mathrm{Im}(\phi)$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & M' \\
M/K \arrow[ur, dashed, "\cong", "\overline{\phi}"']
\end{tikzcd}$$

6.2.2 详细证明步骤

证明分为三个关键部分：(1) 构造映射并证明良定义；(2) 证明它是同态；(3) 证明它是双射。

证明. **第一步：构造映射 $\overline{\phi}$ 并证明良定义**

定义映射 $\overline{\phi} : M/K \to \mathrm{Im}(\phi)$ 规则为：

$$\overline{\phi}(x + K) = \phi(x)$$

检验良定义：假设 $x + K = y + K$，即选了不同的代表元。这意味着 $x - y \in K$。由 $K = \ker(\phi)$ 的定义，知 $\phi(x - y) = 0$。利用 ϕ 的线性性质：

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi(x - y) = 0 \implies \phi(x) = \phi(y)$$

所以，$\overline{\phi}(x + K)$ 的值与 x 的选取无关，映射是良定义的。

第二步：验证 $\overline{\phi}$ 是模同态

我们需要验证 $\overline{\phi}$ 保持加法和数乘运算。设 $\bar{x} = x + K, \bar{y} = y + K$。

1. **保持加法：**

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}(\bar{x} + \bar{y}) &= \overline{\phi}((x + y) + K) && \text{(商模加法定义)} \\
&= \phi(x + y) && \text{(映射定义)} \\
&= \phi(x) + \phi(y) && (\phi \text{ 是同态}) \\
&= \overline{\phi}(\bar{x}) + \overline{\phi}(\bar{y})
\end{aligned}$$

2. **保持数乘**：

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}(a \cdot \bar{x}) &= \overline{\phi}((ax) + K) && \text{(商模数乘定义)} \\
&= \phi(ax) && \text{(映射定义)} \\
&= a\phi(x) && \text{(ϕ 是同态)} \\
&= a \cdot \overline{\phi}(\bar{x})
\end{aligned}$$

第三步：验证 $\overline{\phi}$ 是同构（双射）

1. **满射性 (Surjectivity)**：对于像集 $\mathrm{Im}(\phi)$ 中的任意元素 z，根据定义，存在 $x \in M$ 使得 $\phi(x) = z$。取 M/K 中的元素 $x + K$，则有：

$$\overline{\phi}(x + K) = \phi(x) = z$$

故 $\overline{\phi}$ 是满射。

2. **单射性 (Injectivity)**：只需证明 $\ker(\overline{\phi}) = \{0_{M/K}\} = \{K\}$。假设 $\overline{\phi}(x + K) = 0$。

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}(x + K) = 0 &\implies \phi(x) = 0 && \text{(映射定义)} \\
&\implies x \in \ker(\phi) && \text{(核的定义)} \\
&\implies x \in K && \text{(因为$K = \ker(\phi)$)} \\
&\implies x + K = K = 0_{M/K} && \text{(陪集性质)}
\end{aligned}$$

因为核仅包含零元素，所以 $\overline{\phi}$ 是单射。

结论：$\overline{\phi}$ 是一个良定义的、双射的 R-模同态，因此它是一个同构。 $\square$

7 左模、右模与双模

非 交 换 环 下 的 结 构

7.1 右模与反环 (Opposite Ring)

当环 R 非交换时，左模（$a \cdot x$）与右模（$x \cdot a$）有本质区别。

- ** 右模公理 **：需满足 $x \cdot (ab) = (x \cdot a) \cdot b$。

- ** 反环 R^{op}**：集合与加法同 R，乘法定义为 $a * b := ba$。

命题 7.1 (左右转换). *左 R-模与右 R^{op}-模是一一对应的。转换规则：若 M 是左 R-模，定义右乘 $x * a := a \cdot x$，则 M 成为右 R^{op}-模。*

7.2 双模 (Bimodule)

设 R, S 为环。M 称为 **(R, S)-双模 **（R-S-bimodule），若：1. M 是左 R-模；2. M 是右 S-模；3. 左右运算兼容（结合律）：$\forall a \in R, s \in S, x \in M$，有

$$(a \cdot x) \cdot s = a \cdot (x \cdot s)$$

例 7.2. - *环 R 自身是 (R, R)-双模。其于双模即为 ** 双边理想 **。*

- *$M_{n\times m}(k)$ 是 $(M_n(k), M_m(k))$-双模。*

8 群表示与模

群 代 数 的 模

设 k 为域，G 为群，V 为 k-线性空间。若 G 作用在 V 上且保持线性结构，称 V 为 G 的 ** 线性表示 **。这等价于群同态 $\rho : G \to GL(V)$。

直观理解：表示即模

G 在 V 上的表示 $\iff$ V 是群代数 $k[G]$ 上的左模。

** 群代数 $k[G]$** 的元素是形式和 $\sum c_i g_i$。其乘法（卷积）定义为：

$$(c \cdot c')(g) = \sum_{h\in G} c(h)c'(h^{-1}g)$$

模的作用定义为：$(\sum c_i g_i) \cdot v = \sum c_i(g_i \cdot v)$。

1. 从形式和的乘法出发

设两个群代数元素 $A, B \in k[G]$，它们可以写成以群元素为基底的形式和：

$$A = \sum_{h\in G} c(h) \cdot h, \quad B = \sum_{k\in G} c'(k) \cdot k$$

其中 $c(h)$ 和 $c'(k)$ 是标量系数（对应函数值）。

计算它们的乘积 $A \cdot B$。根据环的分配律（每一项都要乘以每一项）：

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \left(\sum_{h \in G} c(h) \cdot h \right) \cdot \left(\sum_{k \in G} c'(k) \cdot k \right) \\ &= \sum_{h \in G} \sum_{k \in G} \underbrace{c(h) c'(k)}_{\text{系数相乘}} \cdot \underbrace{(h \cdot k)}_{\text{基底相乘}} \end{aligned}$$

2. 重新分组（合并同类项）

上式展开后包含 $|G| \times |G|$ 个项。我们需要将这些项整理成标准形式，即按基底 g 进行归类：

$$A \cdot B = \sum_{g \in G} C_{\text{new}}(g) \cdot g$$

我们的目标是求出 g 前面的系数 $C_{\text{new}}(g)$（即公式中的 $(c \cdot c')(g)$）。

核心问题：在双重求和 $\sum_h \sum_k$ 中，哪些项 (h, k) 的乘积最终贡献给了 g？

这些项必须满足条件：

$$h \cdot k = g$$

如果我们固定了第一项的基底 h，那么第二项的基底 k 就被唯一确定了：

$$k = h^{-1} g$$

3. 导出公式

因此，目标元素 g 的总系数，就是所有满足 $h \cdot k = g$ 的项的系数之和。我们遍历所有可能的 h：

$$\begin{aligned} (c \cdot c')(g) &= \sum_{h \in G} (\text{第一项在} h \text{ 处的系数}) \times (\text{第二项在} k \text{ 处的系数}) \\ &= \sum_{h \in G} c(h) \cdot c'(k) \quad (\text{代入} k = h^{-1} g) \\ &= \sum_{h \in G} c(h) \cdot c'(h^{-1} g) \end{aligned}$$

这正是卷积公式的由来。

4. 为什么叫“卷积”?(类比分析)

这个名称来源于分析学中函数的卷积，二者在结构上完全一致，只是运算符号不同。

- **实数域上的卷积**（加法群 $\mathbb{R}$）：我们要凑出和为 x 的项（即 $t+(x-t)=x$）。

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot g(x-t)\,dt$$

- **群上的卷积**（乘法群 G）：我们要凑出积为 g 的项（即 $h\cdot(h^{-1}g)=g$）。

$$(c*c')(g)=\sum_{h\in G} c(h)\cdot c'(h^{-1}g)$$

9 直积与直和

模 的 分 解 与 合 成

9.1 外直积 (External Direct Product)

设 $M_1,\ldots,M_r$ 为 R-模。定义 ** 外直积 ** $M_1\times\cdots\times M_r$ 为笛卡尔积集合，按分量定义加法和数乘。它构成一个新的 R-模。

9.2 内直和 (Internal Direct Sum)

设 $N_1,\ldots,N_r$ 是模 M 的子模。定义求和映射：

$$\Sigma: N_1\times\cdots\times N_r\to M,\quad (x_1,\ldots,x_r)\mapsto\sum x_i$$

若 Σ 为 ** 同构 **，称 M 是 N_i 的 ** 内直和 **，记作 $M=N_1\oplus\cdots\oplus N_r$。

定理 9.1 (内直和判定). *$M=N_1\oplus N_2$ 当且仅当满足以下两个条件：*

1. *** 和生成 **：$M=N_1+N_2$ （即 Σ 满射）*
2. *** 独立性 **：$N_1\cap N_2=\{0\}$ （即 Σ 单射）*

证明. 根据定义，$M = N_1 \oplus N_2$ 意味着加法映射

$$\Sigma : N_1 \times N_2 \to M, \quad (n_1, n_2) \mapsto n_1 + n_2$$

是一个 R-模同构（即既是满射又是单射）。我们将分别证明必要性（$\Rightarrow$）和充分性（$\Leftarrow$）。

1. 必要性 ($\Rightarrow$)：假设 $M = N_1 \oplus N_2$。

由于 Σ 是同构，它必然是满射和单射。

- **满射性推出和生成:** 因为 Σ 是满射，所以对于任意 $m \in M$，存在 $(n_1, n_2) \in N_1 \times N_2$ 使得 $\Sigma(n_1, n_2) = m$。即 $n_1 + n_2 = m$。这正是 $M = N_1 + N_2$ 的定义。
- **单射性推出独立性**：因为 Σ 是单射，其核 $\ker(\Sigma) = \{(0, 0)\}$。设元素 $x \in N_1 \cap N_2$。考察 $N_1 \times N_2$ 中的元素 $(x, -x)$（注意 $-x \in N_2$ 因为 $x \in N_2$ 且 N_2 是子模）。计算其映射值：

  $$\Sigma(x, -x) = x + (-x) = 0$$

  这意味着 $(x, -x) \in \ker(\Sigma)$。由单射性知 $(x, -x) = (0, 0)$，即 $x = 0$。所以 $N_1 \cap N_2 = \{0\}$。

2. 充分性 ($\Leftarrow$)：假设 $M = N_1 + N_2$ 且 $N_1 \cap N_2 = \{0\}$。

我们需要证明映射 $\Sigma : (n_1, n_2) \mapsto n_1 + n_2$ 是同构。

- **证明 Σ 是满射:** 由条件 $M = N_1 + N_2$ 可知，对任意 $m \in M$，都存在 $n_1 \in N_1, n_2 \in N_2$ 使得 $m = n_1 + n_2$。即 $m = \Sigma(n_1, n_2)$。故 Σ 满射。
- **证明 Σ 是单射**：我们需要证明 $\ker(\Sigma) = \{(0, 0)\}$。设 $(n_1, n_2) \in \ker(\Sigma)$，即 $\Sigma(n_1, n_2) = 0$。这意味着：

  $$n_1 + n_2 = 0 \implies n_1 = -n_2$$

  观察等式两边：

  - 左边 $n_1 \in N_1$。
  - 右边 $-n_2 \in N_2$（因为 $n_2 \in N_2$）。

  因此，元素 n_1 既属于 N_1 又属于 N_2，即 $n_1 \in N_1 \cap N_2$。由条件 $N_1 \cap N_2 = \{0\}$，可得 $n_1 = 0$。进而 $n_2 = -n_1 = 0$。所以 $\ker(\Sigma) = \{(0, 0)\}$，故 Σ 单射。

□

综上，Σ 是双射同态，即同构。所以 $M = N_1 \oplus N_2$。

本章导读

本文档总结了模论的核心概念，包括直积与直和的泛性质、单模与半单模的结构定理、自由模的性质，以及同调代数中的正合列工具。内容基于手写笔记的详细解读，重点在于理解代数对象的结构及其映射关系（泛性质）。

10 直积与直和 (Direct Product & Direct Sum)

直积的泛性质 (Universal Property of Product)

设 R 为环，$\{M_i\}_{i\in I}$ 为一族 R-模。

定义 10.1 (直积). 令 $P = \prod_{i\in I} M_i$ 为笛卡尔积，配备逐分量运算。存在一组标准**投影映射** $\pi_i : P \to M_i$，定义为 $\pi_i((x_j)_{j\in I}) = x_i$。

定理 10.2 (直积泛性质). 对于任意 R-模 Q 和一族同态 $\phi_i : Q \to M_i$，存在**唯一**的同态 $\phi : Q \to P$，使得对于所有 $i \in I$，下图交换（即 $\pi_i \circ \phi = \phi_i$）：

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\pi_i"] \\ Q \arrow[ur, dashed, "\exists! \phi"] \arrow[r, "\phi_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

这导出了如下同构式：

$$\mathrm{Hom}_R(Q, \prod_{i\in I} M_i) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(Q, M_i) \tag{4}$$

直观理解：映射方向

要构造映射**进入**直积 P，只需要给出**进入**每一个分量 M_i 的映射。

证明. 我们分两步进行：先证明泛性质中的存在性与唯一性，再由此推导同构式。

1. 泛性质的证明

设 $P = \prod_{i\in I} M_i$ 的元素记为序列 $(x_i)_{i\in I}$，其中投影 $\pi_k((x_i)_{i\in I}) = x_k$。

(i) 存在性 (Existence):
给定一族同态 $\{\phi_i : Q \to M_i\}_{i\in I}$，我们要构造 $\phi : Q \to P$。对任意 $q \in Q$，定义 $\phi(q)$ 为第 i 个分量取值为 $\phi_i(q)$ 的序列，即：

$$\phi(q) := (\phi_i(q))_{i\in I}$$

首先验证 ϕ 是 R-模同态。对于任意 $q_1, q_2 \in Q$ 和 $r \in R$：

$$\begin{aligned}
\phi(q_1 + q_2) &= (\phi_i(q_1 + q_2))_{i\in I} \\
&= (\phi_i(q_1) + \phi_i(q_2))_{i\in I} \quad (\text{由}\phi_i \text{ 的同态性}) \\
&= (\phi_i(q_1))_{i\in I} + (\phi_i(q_2))_{i\in I} \quad (\text{由直积的逐点加法定义}) \\
&= \phi(q_1) + \phi(q_2)
\end{aligned}$$

同理可证 $\phi(r \cdot q) = r \cdot \phi(q)$。其次验证图表交换性：对于任意 $k \in I$，

$$(\pi_k \circ \phi)(q) = \pi_k((\phi_i(q))_{i\in I}) = \phi_k(q)$$

故 $\pi_k \circ \phi = \phi_k$ 成立。存在性得证。

(ii) 唯一性 (Uniqueness):
假设存在另一个同态 $\psi : Q \to P$ 也满足 $\pi_i \circ \psi = \phi_i$ $(\forall i \in I)$。设 $\psi(q) = (y_i)_{i\in I}$。根据投影的定义，$y_i = \pi_i(\psi(q))$。由假设条件，$\pi_i(\psi(q)) = \phi_i(q)$。这意味着 $\psi(q)$ 的每一个分量 y_i 都被唯一确定为 $\phi_i(q)$。因此 $\psi(q) = (\phi_i(q))_{i\in I} = \phi(q)$，即 $\psi = \phi$。

2. 同构式的推导

定义映射

$$\begin{aligned}
\Psi : \mathrm{Hom}_R(Q, P) &\longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(Q, M_i) \\
f &\longmapsto (\pi_i \circ f)_{i\in I}
\end{aligned}$$

我们需要证明 Ψ 是群同构（双射且保持加法）。

- **满射性 (Surjectivity)**：对应于泛性质的**存在性**。对于右侧任意一个元素（即一族同态）$(\phi_i)_{i\in I}$，由上述证明可知，存在 $\phi \in \mathrm{Hom}_R(Q, P)$ 使得 $\pi_i \circ \phi = \phi_i$。这意味着 $\Psi(\phi) = (\phi_i)_{i\in I}$。

- **单射性 (Injectivity)**：对应于泛性质的**唯一性**。若 $\Psi(f) = \Psi(g)$，则对所有 i，$\pi_i \circ f = \pi_i \circ g$。令 $\phi_i = \pi_i \circ f$，则 f 和 g 都是满足“投影后等于 ϕ_i”的映射。由唯一性可知 $f = g$。

- **保持加法**：Hom 集合与直积集合均具备阿贝尔群结构。$\Psi(f+g) = (\pi_i \circ (f+g))_i = (\pi_i \circ f + \pi_i \circ g)_i = \Psi(f) + \Psi(g)$。

综上，$\mathrm{Hom}_R(Q,P) \cong \prod \mathrm{Hom}_R(Q,M_i)$。 □

直和与子模的和 (Direct Sum)

定义 10.3 (子模的和). 设 $N_i \subseteq M$ 为子模。它们的和定义为：

$$\sum_{i\in I} N_i := \left\langle \bigcup_{i\in I} N_i \right\rangle = \{\sum_{finite} x_{i_k} \mid x_{i_k} \in N_{i_k}\}$$

定义 10.4 (内直和判定). 若满足以下条件，则称和为**直和**，记为 $\bigoplus N_i$：

$$\left(\sum_{j\neq i} N_j\right) \cap N_i = \{0\}, \quad \forall i \in I$$

定理 10.5 (直和泛性质). 设 $M = \bigoplus_{i\in I} N_i$，存在标准**嵌入映射** $j_i : N_i \to M$。对于任意模 Y 和同态 $\psi_i : N_i \to Y$，存在**唯一**同态 $\psi : M \to Y$，使得 $\psi \circ j_i = \psi_i$。

$$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} N_i, Y) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N_i, Y)$$

证明. 设 $M = \bigoplus_{i\in I} N_i$。直和定义的关键在于：$M$ 中的每一个元素 x 都可以**唯一**地表示为有限和形式 $x = \sum_{i\in I} j_i(x_i)$，其中 $x_i \in N_i$，且只有有限个 $x_i \neq 0$。

1. 泛性质的证明

(i) 存在性 (Existence):
给定一族同态 $\{\psi_i : N_i \to Y\}_{i\in I}$。我们要构造 $\psi : M \to Y$。对于任意 $x = \sum_{i\in I} j_i(x_i) \in M$，定义：

$$\psi(x) := \sum_{i\in I} \psi_i(x_i)$$

由于 x 的表达式中只有有限个 x_i 非零，且 $\psi_i(0) = 0$，上述右边的求和在 Y 中只有有限项非零，因此定义良好。显然 ψ 保持加法和数乘（由 ψ_i 的线性及求和符号的线性性保证）。验证图表交换性：对于任意 $k \in I$ 和 $n \in N_k$，元素 $j_k(n)$ 在 M 中的分解只有第 k 项为 n，其余为 0。因此：

$$(\psi \circ j_k)(n) = \psi(j_k(n)) = \psi_k(n) + \sum_{i\neq k} \psi_i(0) = \psi_k(n)$$

即 $\psi \circ j_k = \psi_k$ 成立。

(ii) 唯一性 (Uniqueness):
假设存在另一个同态 $\phi : M \to Y$ 也满足 $\phi \circ j_i = \psi_i$ $(\forall i \in I)$。对于任意 $x = \sum_{i\in I} j_i(x_i) \in$

M，利用 ϕ 的线性：

$$\phi(x) = \phi\left(\sum_{i\in I} j_i(x_i)\right) = \sum_{i\in I} \phi(j_i(x_i)) = \sum_{i\in I} (\phi \circ j_i)(x_i)$$

代入假设条件 $\phi \circ j_i = \psi_i$，得：

$$\phi(x) = \sum_{i\in I} \psi_i(x_i)$$

这正是我们定义的 $\psi(x)$。故 $\phi = \psi$。

2. 同构式的推导

定义映射

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} N_i, Y) &\longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N_i, Y) \\ F &\longmapsto (F \circ j_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

- **满射性**：对应泛性质的**存在性**。对于右边任意一族 $(\psi_i)_{i\in I}$，存在 ψ 使得 $\psi \circ j_i = \psi_i$，即 $\Gamma(\psi) = (\psi_i)_{i\in I}$。
- **单射性**：对应泛性质的**唯一性**。若 $\Gamma(F) = \Gamma(G)$，即对所有 i 都有 $F \circ j_i = G \circ j_i$。令 $\psi_i = F \circ j_i$，由唯一性知 $F = G$。
- **保持加法**：$\Gamma(F + G) = ((F + G) \circ j_i)_i = (F \circ j_i + G \circ j_i)_i = \Gamma(F) + \Gamma(G)$。

综上，$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus N_i, Y) \cong \prod \mathrm{Hom}_R(N_i, Y)$。 □

直观理解：对偶性

直和是直积的对偶概念（Coproduct）。要构造**走出**直和的映射，只需给出**走出**每一个分量的映射。

有限情况与无限情况的对比

命题 10.6 (有限双积). *当索引集 I 有限时（例如 $i = 1, \dots, r$），直和与直积同构（$M \cong \bigoplus M_i \cong \prod M_i$）。此时，投影 π 与嵌入 j 满足：*

1. *正交性：$\pi_k \circ j_l = \delta_{kl} \cdot \mathrm{Id}_{M_l}$*
2. *完备性：$\sum_{l=1}^r j_l \circ \pi_l = \mathrm{Id}_M$*

例 10.7 (无限维函数空间). *设 $P = \mathrm{Map}(X, M)$ 是 X 到 M 的所有函数。*

- $P \cong \prod_{x\in X} M$（直积，允许无限多非零项）。
- 令 P_x 为单点支撑函数子模，则 $\sum_{x\in X} P_x$ 是直和（有限支撑函数）。
- 若 X 无限，则 $\bigoplus P_x \subsetneq \prod P_x$。

11 单模与半单模 (Simple & Semisimple Modules)

单模与舒尔引理 (Schur's Lemma)

定义 11.1 (单模/不可约模)**.** 非零模 M 称为单模，如果其子模只有 $\{0\}$ 和 M 自身。

引理 11.2 (Schur 引理)**.** 设 M, N 为单 R-模，$\phi : M \to N$ 为同态。

1. 若 $\phi \neq 0$，则 ϕ 为同构。

2. $D = \mathrm{End}_R(M)$ 是一个除环 *(Division Ring)*。

证明：*Schur* 引理. **(1) 证明非零同态即为同构**设 $\phi : M \to N$ 是非零的 R-模同态。

- **单射性：**考察核 $\mathrm{Ker}(\phi)$。它是 M 的子模。因为 M 是单模，$\mathrm{Ker}(\phi)$ 只能是 $\{0\}$ 或 M。若 $\mathrm{Ker}(\phi) = M$，则 ϕ 为零映射，与假设矛盾。故 $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$，即 ϕ 是单射。
- **满射性：**考察像 $\mathrm{Im}(\phi)$。它是 N 的子模。因为 N 是单模，$\mathrm{Im}(\phi)$ 只能是 $\{0\}$ 或 N。若 $\mathrm{Im}(\phi) = \{0\}$，则 ϕ 为零映射，与假设矛盾。故 $\mathrm{Im}(\phi) = N$，即 ϕ 是满射。

综上，ϕ 既单且满，故为同构。

(2) 证明自同态环是除环设 $D = \mathrm{End}_R(M)$。显然 D 是一个环（具有加法和复合运算）。取任意非零元素 $\phi \in D$。令 $N = M$，应用上述结论 (1)，可知 $\phi : M \to M$ 是一个同构。因此，ϕ 存在逆映射 ϕ^{-1}，且 ϕ^{-1} 也是 R-模同态（即 $\phi^{-1} \in D$）。既然 D 中每一个非零元都可逆，故 D 是除环。 □

定理 11.3 (Schur 引理 II - 代数闭域情形)**.** 设 G 为群，V 为 $\mathbb{C}$ 上的有限维不可约表示。则：

$$\mathrm{End}_G(V) \cong \mathbb{C} \cdot \mathrm{Id}$$

即唯一的自同态是标量变换。证明利用了 $\mathbb{C}$ 上特征值存在的性质。

证明：*Schur* 引理 *II*. 任取 $\phi \in \mathrm{End}_G(V)$。由于 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维向量空间，根据线性代数基本定理，ϕ 作为线性变换必有特征值。设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 ϕ 的一个特征值。构造映射 $\psi = \phi - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$。

1. **ψ 是 G-同态**：因为 ϕ 与群作用交换，而标量变换 $\lambda \cdot \mathrm{Id}$ 与任何线性变换交换，所以它们的差 ψ 依然在 $\mathrm{End}_G(V)$ 中。
2. $\mathrm{Ker}(\psi) \neq 0$：因为 λ 是特征值，存在非零特征向量 v 使得 $\phi(v) = \lambda v$，即 $\psi(v) = 0$。
3. **应用不可约性**：$\mathrm{Ker}(\psi)$ 是 V 的非零子模（不变子空间）。因为 V 是不可约的（单模），其非零子模只能是 V 本身。

故 $\mathrm{Ker}(\psi) = V$，这意味着对任意 $v \in V$ 都有 $\psi(v) = 0$，即 $\phi(v) = \lambda v$。所以 $\phi = \lambda \cdot \mathrm{Id}$。 □

注意 (NOTE): 代数闭域的关键性

上述证明严重依赖于“特征值存在”这一事实，这要求基域是代数闭域（如 $\mathbb{C}$）。若是实数域 $\mathbb{R}$，例如旋转群 $SO(2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的作用是不可约的，但其自同态环同构于 $\mathbb{C}$（旋转 + 伸缩），比 $\mathbb{R}$ 大，并不是所有自同态都是标量变换。

半 单 模 (Semisimple Modules)

定义 11.4. 模 M 称为半单模，如果它是单模的直和：$M = \bigoplus_{i\in I} S_i$。

定理 11.5 (半单模的等价条件)**.** *以下命题等价：*

1. *M 是半单模（单模的直和）。*
2. *M 是单模的和（$M = \sum S_i$）。*
3. *M 是**完全可约的**：$\forall N \subseteq M, \exists N' \subseteq M$ 使得 $M = N \oplus N'$。*

证明：半单模等价条件. 我们将按照 (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (1) 的顺序进行证明。

(1) $\implies$ (2):
若 $M = \bigoplus_{i\in I} S_i$，则 M 显然由 $\{S_i\}_{i\in I}$ 生成。即 $M = \sum_{i\in I} S_i$。

(2) $\implies$ (3):
假设 $M = \sum_{i\in I} S_i$，其中 S_i 为单模。设 N 是 M 的任意子模。我们要寻找 N 的直和

补。考虑 M 中与 N 独立的单模集合族：

$$\mathcal{F} = \{J \subseteq I \mid N \cap \left(\sum_{j\in J} S_j\right) = \{0\}\}$$

该集合族关于包含关系是非空的（至少包含空集）且归纳有序的。由 Zorn 引理，存在极大元 $J_{max} \subseteq I$。令 $M' = \sum_{j\in J_{max}} S_j$。由直和判定条件知 $N \cap M' = \{0\}$，且 M' 实际上是直和 $\bigoplus_{j\in J_{max}} S_j$。我们要证明 $M = N + M'$。只需证明对于任意 $i \in I$，都有 $S_i \subseteq N + M'$。

- 若 $S_i \subseteq M'$，显然成立。
- 若 $S_i \not\subseteq M'$，考虑交集 $(N + M') \cap S_i$。这是一个 S_i 的子模。因为 S_i 是单模，该交集只能是 $\{0\}$ 或 S_i。若为 $\{0\}$，则 $N \cap (M' + S_i) = \{0\}$（需简单验证），这意味着可以将 i 加入 J_{max}，这与 J_{max} 的极大性矛盾。因此必有 $(N + M') \cap S_i = S_i$，即 $S_i \subseteq N + M'$。

综上，所有 S_i 都在 $N + M'$ 中，故 $M = N \oplus M'$。

(3) $\implies$ (1):
假设 M 是完全可约的。第一步：证明 M 包含单子模（若 $M \neq 0$）。取 $0 \neq x \in M$。由 Zorn 引理，循环模 Rx 包含一个极大子模 K。由于 M 完全可约，其子模 Rx 也是完全可约的（完全可约模的子模性质）。故 $Rx = K \oplus S$，其中 $S \cong Rx/K$ 是单模。所以 M 包含单子模。

第二步：构造直和分解。考虑 M 中一族单子模的直和 $P = \bigoplus_\alpha S_\alpha$。由 Zorn 引理，存在一个极大的这样的直和 P_{max}。由条件 (3)，存在补模 K 使得 $M = P_{max} \oplus K$。若 $K \neq 0$，由第一步可知 K 必定包含一个单子模 S'。显然 $P_{max} \cap S' = \{0\}$（因为 $S' \subseteq K$），这意味着 $P_{max} \oplus S'$ 是一个更大的单模直和，与 P_{max} 的极大性矛盾。故必须 $K = 0$，即 $M = P_{max}$ 是单模的直和。 □

12 自由模 (Free Modules)

定义与秩

定义 12.1 (自由模). *M 是自由 R-模，若存在子集 $X \subseteq M$（基）满足：*

1. *$M = \langle X \rangle$（生成性）；*

2. X 是 R-线性无关的。

注意 (NOTE): 秩的唯一性

标准例子是 R^n。

- 若 R 是交换环或体，则基的势（秩）唯一，即 $R^n \cong R^m \implies n = m$。
- 对一般非交换环，秩可能不唯一。若秩唯一，称该环为 **IBN** 环。

13 正合列与同调代数 (Exact Sequences)

正合列定义

定义 13.1. 序列 $M' \xrightarrow{\Phi} M \xrightarrow{\Psi} M''$ 在 M 处正合，若：

$$\operatorname{Im}(\Phi) = \operatorname{Ker}(\Psi)$$

这意味着 $\Psi \circ \Phi = 0$ 且所有进入核的元素都来自上一步的像。

例 13.2 (常见类型).
- $0 \to M' \xrightarrow{\Phi} M$ 正合 $\iff$ Φ 单射。
- $M \xrightarrow{\Psi} M'' \to 0$ 正合 $\iff$ Ψ 满射。
- 短正合列 $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$ $\iff$ $M'' \cong M/i(M')$。

例 13.3 (具体实例：乘 n 映射). 设 A 为交换群，$n \in \mathbb{N}$。存在正合列：

$$0 \longrightarrow A[n] \longrightarrow A \xrightarrow{\times n} A \longrightarrow A/nA \longrightarrow 0$$

其中 $A[n]$ 是 n-扭子群（*Kernel*），A/nA 是余核（*Cokernel*）。

短五引理 (The Short Five Lemma)

考虑如下交换图表，其中两行均为短正合列：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "p'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

定理 13.4 (3-Lemma). *1.* 若 a, c 单射 $\Longrightarrow b$ 单射。

2. 若 a, c 满射 $\Longrightarrow b$ 满射。

3. 若 a, c 同构 $\Longrightarrow b$ 同构。

证明方法称为**图表追踪** ***(Diagram Chasing)***。

证明：图表追踪法. 设交换图表如下：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{p'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

1. 单射性证明 (Injectivity)

假设 a 和 c 是单射。设 $x \in B$ 且 $b(x) = 0$。我们要证明 $x = 0$。

1. 将 x 映至 C'：$p'(b(x)) = p'(0) = 0$。
2. 利用交换性：$c(p(x)) = p'(b(x)) = 0$。
3. 因为 c 是单射，故 $p(x) = 0$。
4. 利用上行正合性：$x \in \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(i)$，故存在 $y \in A$ 使得 $i(y) = x$。
5. 将 y 映至 B'：$b(i(y)) = b(x) = 0$。
6. 利用交换性：$i'(a(y)) = b(i(y)) = 0$。
7. 因为下行正合，i' 是单射，故 $a(y) = 0$。
8. 因为 a 是单射，故 $y = 0$。
9. 回推 x：$x = i(y) = i(0) = 0$。得证 b 是单射。

2. 满射性证明 (Surjectivity)

假设 a 和 c 是满射。任取 $y' \in B'$。我们要找到 $x \in B$ 使得 $b(x) = y'$。

1. 将 y' 映至 C'：令 $z' = p'(y')$。
2. 因为 c 是满射，存在 $z \in C$ 使得 $c(z) = z'$。
3. 因为上行正合，p 是满射，存在 $x_0 \in B$ 使得 $p(x_0) = z$。

4. 比较 $b(x_0)$ 与 y'：
$$p'(b(x_0)) = c(p(x_0)) = c(z) = z' = p'(y')$$
这说明 $p'(y' - b(x_0)) = 0$。

5. 利用下行正合性：$y' - b(x_0) \in \mathrm{Ker}(p') = \mathrm{Im}(i')$。故存在 $w' \in A'$ 使得 $i'(w') = y' - b(x_0)$。

6. 因为 a 是满射，存在 $w \in A$ 使得 $a(w) = w'$。

7. 构造解 $x = x_0 + i(w)$。验证：
$$\begin{aligned} b(x) &= b(x_0) + b(i(w)) \\ &= b(x_0) + i'(a(w)) \quad (\text{交换性}) \\ &= b(x_0) + i'(w') \\ &= b(x_0) + (y' - b(x_0)) \\ &= y' \end{aligned}$$
得证 b 是满射。

3. 同构性证明

若 a, c 均为同构，则它们既单且满。由 (1) 和 (2) 可知 b 既单且满，故 b 也是同构。 □

线性代数与模论的桥梁

14 基本设定：将线性空间视为模

设 V 是域 k 上的有限维线性空间，且 k 是代数闭域（如 $\mathbb{C}$）。设 $A \in \mathrm{End}_k(V)$ 是 V 上的一个线性算子。

我们将 V 视为多项式环 $R = k[T]$ 上的模。定义的标量乘法如下：对于任意多项式 $f(T) = \sum a_i T^i \in k[T]$ 和向量 $v \in V$，

$$f(T) \cdot v \triangleq f(A)v = \sum a_i A^i v$$

直观理解：

$k[T]$ 是域上的单变元多项式环，具有欧几里得除法性质，因此它是欧几里得整环（ED），进而必然是主理想整环（PID）。这保证了后续所有关于 PID 的模论定理均可适用。

PID 上有限生成模的结构

15 秩与挠子模

设 R 是整环，M 是 R 上有限生成模。

定义 15.1 (挠子模与零化子).

- **零化子：** $\mathrm{Ann}(x) = \{a \in R \mid ax = 0\}$。
- **挠子模：** $M_{\mathrm{tor}} = \{x \in M \mid \exists a \neq 0, ax = 0\} = \bigcup_{a \neq 0} M[a]$。
- **无挠：** *若 $M_{\mathrm{tor}} = 0$，称 M 无挠。*

定理 15.2 (PID 上模的结构定理 - 第一阶段). *设 R 是 PID，M 是有限生成 R-模。则：*

$$M \cong M_{\mathrm{tor}} \oplus R^r$$

其中 $r = \mathrm{rank}(M)$ 是 M 的秩，且 R^r 为自由部分。

证明. 证明分为三个步骤：

第一步：证明商模 M/M_{tor} 是无挠的。

设 $\bar{M} = M/M_{\text{tor}}$。取 $\bar{x} \in \bar{M}$。若存在非零元素 $a \in R$ 使得 $a \cdot \bar{x} = 0$，这意味着在原模 M 中，代表元 ax 落入了 M_{tor} 中，即 $ax \in M_{\text{tor}}$。根据挠子模的定义，存在非零元素 $b \in R$ 使得 $b(ax) = 0$。由于 R 是整环，且 $a \neq 0, b \neq 0$，故 $ba \neq 0$。因为 $(ba)x = 0$，所以 x 本身就是挠元素，即 $x \in M_{\text{tor}}$。在商模中，这意味着 $\bar{x} = 0$。因此，$\bar{M}$ 中唯一的挠元素是 0，即 $\bar{M}$ 是无挠模。

第二步：证明 M/M_{tor} 是自由模。

我们利用 PID 的一个核心性质：**PID 上有限生成的无挠模是自由模**。（注：这通常通过证明"PID 上自由模的子模是自由模"来推导。因为 M/M_{tor} 有限生成且无挠，它可以嵌入到一个有限秩的自由模中，从而其自身也是自由的。）

由于 M 是有限生成的，商模 $\bar{M}$ 也是有限生成的。结合第一步的结论（无挠），可知 $\bar{M}$ 是一个有限生成的自由模。设其秩为 r，则：

$$\bar{M} = M/M_{\text{tor}} \cong R^r$$

第三步：序列的分裂 (Splitting)。

我们有如下短正合列：

$$0 \longrightarrow M_{\text{tor}} \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} R^r \longrightarrow 0$$

其中 π 是自然投射。因为末项 R^r 是**自由模**，所以它是**投射模** (Projective Module)。根据同调代数中的分裂引理，以投射模结尾的短正合列必分裂。

具体构造如下：设 $e_1, \dots, e_r$ 是 R^r 的一组基。由于 π 是满射，我们可以为每一个 e_i 选取原像 $u_i \in M$，使得 $\pi(u_i) = e_i$。定义线性映射 $\sigma : R^r \to M$，使得 $\sigma(e_i) = u_i$。这构成了一个右逆（Section），即 $\pi \circ \sigma = \text{id}_{R^r}$。

对于任意 $m \in M$，我们可以将其分解为：

$$m = (m - \sigma(\pi(m))) + \sigma(\pi(m))$$

容易验证：

- $\pi(m - \sigma(\pi(m))) = \pi(m) - \pi(\sigma(\pi(m))) = \pi(m) - \pi(m) = 0$，故第一项属于 $\text{Ker}(\pi) = M_{\text{tor}}$。
- 第二项 $\sigma(\pi(m))$ 属于 $\text{Im}(\sigma)$，这是一个同构于 R^r 的子模。

这就建立了直和分解：

$$M \cong M_{\text{tor}} \oplus R^r$$

□

直观理解：为什么有限维线性空间对应纯挠模？

对于线性空间 V，我们已知 $\dim_k V < \infty$。

- $R = k[T]$ 作为 k-线性空间是无限维的（基为 $1, T, T^2, \dots$）。
- 若秩 $r \geq 1$，则 R^r 包含 $k[T]$，导致 $\dim_k M = \infty$，矛盾。

结论：对于有限维线性空间 V，必有秩 $r = 0$。即 V 是 **纯挠模** ($V = M_{\text{tor}}$)。

挠 模 的 精 细 分 解

16 准素分解 (Primary Decomposition)

对于挠模 M_{tor}，我们可以根据零化子的素因式分解将其拆开。

定理 16.1 (准素分解定理). *设 R 是 PID，M 是有限生成挠模。则：*

$$M \cong \bigoplus_p M(p)$$

其中 p 遍历 R 中互不相伴的素元，$M(p) = \{x \in M \mid \exists k, p^k x = 0\}$ 称为 p-准素子模。

证明. 由于 M 是有限生成挠模，存在非零元素 $a \in R$ 使得 $aM = 0$（即 a 是 M 的零化子）。由于 R 是 PID（甚至是唯一分解整环 UFD），我们可以将 a 分解为互不相伴的素元幂积：

$$a = u p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

其中 u 是单位，p_i 是互异素元。

证明分为两步：证明 M 是各部分的和，以及证明该和为直和。

第一步：证明 $M = \sum_{i=1}^k M(p_i)$。

定义 $q_i = a/p_i^{e_i} = u \prod_{j \neq i} p_j^{e_j}$。由于 p_i 互不相同，集合 $\{q_1, \dots, q_k\}$ 的最大公约数为 1。根据 PID 的性质（贝祖等式），存在 $b_1, \dots, b_k \in R$，使得：

$$\sum_{i=1}^k b_i q_i = 1$$

对于任意 $x \in M$，作用上述等式：

$$x = 1 \cdot x = \left(\sum_{i=1}^{k} b_i q_i \right) x = \sum_{i=1}^{k} (b_i q_i x)$$

令 $x_i = b_i q_i x$。我们需要验证 $x_i \in M(p_i)$。计算 x_i 被 $p_i^{e_i}$ 作用的结果：

$$p_i^{e_i} \cdot x_i = p_i^{e_i}(b_i q_i x) = b_i(p_i^{e_i} q_i)x = b_i a x$$

因为 a 零化整个模 M，故 $b_i a x = 0$。这说明 x_i 被 p_i 的幂次零化，即 $x_i \in M(p_i)$。因此，任意 x 可分解为 $M(p_i)$ 中元素之和。

第二步：证明和是直和（即交集为 0）。

我们需要证明 $M(p_i) \cap \sum_{j \neq i} M(p_j) = \{0\}$。设 y 属于该交集。

- 一方面，$y \in M(p_i) \implies \exists n, p_i^n y = 0$。
- 另一方面，$y \in \sum_{j \neq i} M(p_j)$。注意到右边这部分的零化子是 $\prod_{j \neq i} p_j^{e_j}$，也就是 q_i 的倍数（忽略单位）。因此 q_i 可以零化 y，即 $q_i y = 0$。

由于 p_i^n 与 q_i 互质，存在 $u, v \in R$ 使得 $u p_i^n + v q_i = 1$。作用在 y 上：

$$y = 1 \cdot y = (u p_i^n + v q_i) y = u(p_i^n y) + v(q_i y) = u(0) + v(0) = 0$$

证毕。 $\square$

注意 (NOTE): 对应到线性代数

在 $k[T]$ 中，由于 k 代数闭，不可约多项式（素元）形如 $p(T) = T - \lambda$。因此，$M(p)$ 实际上就是 **广义特征子空间：**

$$V(T - \lambda) = \{ v \in V \mid (A - \lambda I)^k v = 0 \text{ for some } k \}$$

17 循环分解 (Cyclic Decomposition)

现在我们将目光聚焦于单个 p-准素模 $M(p)$。

定理 17.1 (p-模的循环分解). 设 M 是有限生成 p-模。则存在唯一的一组整数 $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$，使得：

$$M \cong R/(p^{n_1}) \oplus R/(p^{n_2}) \oplus \cdots \oplus R/(p^{n_k})$$

为了证明该定理，我们首先需要一个关键的“提升”引理，它允许我们将商模中的关系“无损”地拉回原模中。

引理 17.2 (技术引理：循环子模的提升). *设 $x \in M$ 是模中阶最大的元素，即 $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(M) = (a)$。设 d 是 a 的因子（$d \mid a$）。若存在 $y \in M$，使得在商模 $M/\langle x \rangle$ 中有 $d \cdot [y] = 0$（即 y 在商模中的阶整除 d），则存在 $c \in R$，使得 $y' = y - cx$ 满足 $d \cdot y' = 0$。*

引理的证明. 由 $d[y] = 0$ 知 $dy \in \langle x \rangle$，故存在 $r \in R$ 使得 $dy = rx$。设 $a = d \cdot d'$。我们在等式两边同乘 d'：

$$d'(dy) = d'(rx) \implies ay = (d'r)x$$

因为 $\mathrm{Ann}(M) = (a)$，所以 $ay = 0$，故 $(d'r)x = 0$。这说明 $d'r \in \mathrm{Ann}(x) = (a)$。即 $a \mid d'r$。代入 $a = dd'$，得 $dd' \mid d'r$，在整环中消去 d' 得 $d \mid r$。于是可设 $r = dc$。回到原方程：$dy = (dc)x = d(cx) \implies d(y - cx) = 0$。取 $y' = y - cx$ 即证。 □

循环分解定理的证明. 我们对模 M 的生成元个数进行归纳，或者对 M 的长度进行归纳。

第一部分：存在性

1. **选取最大元素**：由于 M 是有限生成 p-模，其零化子必为 p^N 的形式。选取 $x_1 \in M$，使得其零化子理想 (p^{n_1}) 极大（即 n_1 最大）。此时 $\mathrm{Ann}(x_1) = \mathrm{Ann}(M) = (p^{n_1})$。

2. **归纳假设与提升**：令 $\bar{M} = M/\langle x_1 \rangle$。对 $\bar{M}$ 应用归纳假设，存在分解：

$$\bar{M} = \bigoplus_{i=2}^{k} \langle \bar{y}_i \rangle$$

其中 $\bar{y}_i$ 在商模中的阶为 p^{n_i}，且 $n_2 \leq n_3 \leq \cdots \leq n_k$。注意：由于 x_1 是最大阶元素，商模中任意元素的阶不可能超过 n_1，故 $n_i \leq n_1$。这意味着 $p^{n_i} \mid p^{n_1}$。应用上述**技术引理**：对于每个 $\bar{y}_i$，我们在商模中有 $p^{n_i}\bar{y}_i = 0$。因为 $p^{n_i} \mid \mathrm{Ann}(x_1)$，我们可以找到代表元 $y_i \in M$（即 $\bar{y}_i = y_i + \langle x_1 \rangle$），使得在原模中严格成立：

$$p^{n_i} y_i = 0$$

3. **验证直和**：我们要证明 $M = \langle x_1 \rangle \oplus \langle y_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle y_k \rangle$。

- **生成性**：对于任意 $m \in M$，其像 $\bar{m}$ 可由 $\bar{y}_i$ 线性表出。这意味着 $m - \sum c_i y_i \in \langle x_1 \rangle$，故 $m \in \langle x_1, y_2, \ldots, y_k \rangle$。
- **独立性**：设 $ax_1 + \sum_{i=2}^{k} c_i y_i = 0$。取模 $\langle x_1 \rangle$ 投影到商模：

$$\sum_{i=2}^{k} c_i \bar{y}_i = 0$$

由于 $\bar{M}$ 是直和，故对所有 i，有 $c_i\bar{y}_i = 0$。这意味着 c_i 必须被 $\bar{y}_i$ 的阶 p^{n_i} 整除。即 $c_i = p^{n_i}d_i$。回到原模中：$c_iy_i = d_i(p^{n_i}y_i) = d_i(0) = 0$（这是因为我们通过引理特选了 y_i）。于是原方程只剩下 $ax_1 = 0$。这意味着这一项也为 0。

至此，存在性得证。

第二部分：唯一性

为了证明指数序列 $\{n_i\}$ 的唯一性，我们引入模的几何不变量。考虑降链子模 p^jM 和商空间 $V_j = p^jM/p^{j+1}M$。这是一个 $R/(p)$-向量空间。设 $M \cong \bigoplus_{i=1}^k R/(p^{n_i})$。计算 V_j 的维数 b_j：

- 对于单个循环模 $C = R/(p^n)$，若 $j < n$，则 $p^jC/p^{j+1}C \cong R/(p)$，贡献 1 个维数；若 $j \geq n$，则为 0。
- 利用直和的性质，总维数 b_j 等于各分量维数之和。

$$b_j = \dim_{R/(p)} V_j = \#\{i \mid n_i > j\}$$

这表明，序列 $b_0, b_1, b_2, \dots$ 完全由模 M 的结构决定（不依赖于分解）。而 b_j 的物理意义是：分解中指数大于 j 的因子的个数（即 Ferrers 图的第 j 列高度）。反之，指数为 k 的因子个数可以通过 $b_{k-1} - b_k$ 唯一算出。因此，指数序列 $\{n_i\}$ 是唯一的。 $\square$

若当标准形的生成与唯一性

18 预备知识与定理陈述

18.1 前提假设：PID 模结构定理

我们假定以下关于 PID 上有限生成模 M 的结构定理成立：

1. **秩与挠分解**：$M \cong M_{\text{tor}} \oplus R^r$。
2. **准素分解**：挠模可分解为 $M_{\text{tor}} \cong \bigoplus_p M(p)$，其中 p 为素元。
3. **循环分解**：准素模可分解为 $M(p) \cong \bigoplus_i R/(p^{n_i})$，其中 $n_1 \leq n_2 \leq \dots$。

18.2 主定理：若当标准形

定理：若当标准形 (JCF). 设 V 是代数闭域 k（如 $\mathbb{C}$）上的 n 维向量空间，$A \in \mathrm{End}_k(V)$ 是线性算子。则存在 V 的一组基，使得 A 在该基下的矩阵表示为分块对角矩阵：

$$J = \mathrm{diag}(J(\lambda_1, m_1), J(\lambda_2, m_2), \dots, J(\lambda_s, m_s))$$

其中每个 $J(\lambda, m)$ 为若当块：

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{m\times m}$$

且在不计若当块顺序的意义下，该矩阵唯一。 □

19 证明过程

19.1 第一步：建立模论框架

设 $R = k[T]$ 为多项式环。由于 k 是域，且多项式环具有欧几里得除法，R 是一个 **主理想整环 (PID)**。

我们将 V 视为 R-模，标量乘法定义为：

$$\forall f(T) \in R, v \in V, \quad f(T) \cdot v \triangleq f(A)v$$

引理 19.1 (模的类型判定)**.** *V 是 $k[T]$ 上的有限生成纯挠模。*

证明. 由于 $\dim_k V = n < \infty$，且 V 由有限个基向量生成，V 是有限生成 R-模。根据 PID 结构定理，$V \cong R^r \oplus M_{\mathrm{tor}}$。若 $r \geq 1$，则 V 包含 R 的副本。但 $R = k[T]$ 作为 k-线性空间是无限维的（基为 $1, T, T^2, \dots$），这将导致 $\dim_k V = \infty$，与已知矛盾。因此，必须有 $r = 0$，即 $V = M_{\mathrm{tor}}$。 □

19.2 第二步：准素分解（广义特征子空间）

根据 PID 上的准素分解定理：

$$V \cong \bigoplus_p V(p)$$

其中 $p(T)$ 遍历 V 的零化多项式（最小多项式）的素因子。

由于 k 是**代数闭域**，$k[T]$ 中的不可约多项式（素元）均为一次式：

$$p(T) = T - \lambda_i, \quad \lambda_i \in k$$

即 λ_i 为 A 的特征值。

对应的准素子模为：

$$V(T - \lambda_i) = \{v \in V \mid \exists k, (T - \lambda_i)^k \cdot v = 0\} = \mathrm{Ker}((A - \lambda_i I)^\infty)$$

这正是线性代数中的**广义特征子空间** V^{λ_i}。此时我们将空间分解为：

$$V = \bigoplus_i V^{\lambda_i}$$

这对应矩阵的初步分块对角化。

19.3 第三步：循环分解（若当块的代数结构）

考察单个广义特征子空间 $M = V^\lambda$。这是一个 $(T - \lambda)$-准素模。根据 PID 上的循环分解定理，存在整数 $n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_s$，使得：

$$M \cong \bigoplus_{j=1}^{s} R/\left((T - \lambda)^{n_j}\right)$$

这表明，每个广义特征子空间可以进一步分解为若干个**循环子空间**的直和。

19.4 第四步：矩阵实现 (The Realization)

这是证明的核心：我们需要展示代数结构 $R/((T - \lambda)^n)$ 对应的正是若当块。

设 $W \cong R/((T - \lambda)^n)$ 为其中一个循环因子。我们需要在 W 中选取一组 k-基，使得乘 T 算子（即 A）的矩阵形式为若当块。

1. 选取基底令 $N = T - \lambda$（对应算子的幂零部分）。在商环中选取如下基底（由高次幂向低次幂排列）：

$$\begin{aligned}
e_1 &= (T - \lambda)^{n-1} \cdot \bar{1} \\
e_2 &= (T - \lambda)^{n-2} \cdot \bar{1} \\
&\vdots \\
e_{n-1} &= (T - \lambda) \cdot \bar{1} \\
e_n &= \bar{1}
\end{aligned}$$

其中 $\bar{1}$ 是商模的生成元。注意 $(T-\lambda)^n \cdot \bar{1} = 0$。

2. 算子作用分析考察算子 T 在这组基上的作用。利用恒等式 $T = \lambda + (T-\lambda)$：

对于 e_1：

$$Te_1 = (\lambda + (T-\lambda))(T-\lambda)^{n-1} = \lambda e_1 + (T-\lambda)^n = \lambda e_1 + 0$$

对于 e_k $(k > 1)$：

$$Te_k = (\lambda + (T-\lambda))(T-\lambda)^{n-k} = \lambda(T-\lambda)^{n-k} + (T-\lambda)^{n-k+1} = \lambda e_k + e_{k-1}$$

3. 矩阵形式将上述变换写成矩阵形式（第 j 列为 Te_j 的坐标）：

- $Te_1 = \lambda e_1 \implies$ 第 1 列为 $(\lambda, 0, \ldots, 0)^T$
- $Te_2 = e_1 + \lambda e_2 \implies$ 第 2 列为 $(1, \lambda, \ldots, 0)^T$
- $\ldots$
- $Te_n = e_{n-1} + \lambda e_n \implies$ 第 n 列为 $(0, \ldots, 1, \lambda)^T$

所得矩阵正是 n 阶若当块 $J(\lambda, n)$。

19.5 第五步：唯一性

若当标准形的唯一性等价于模分解中不变量的唯一性。

1. **代数不变量**：根据 PID 模结构定理，有限生成模的初等因子（Elementary Divisors）组 $\{(T-\lambda_i)^{n_{ij}}\}$ 是唯一的。
2. **几何对应**：初等因子 $(T-\lambda)^n$ 唯一对应一个大小为 n 的特征值为 λ 的若当块。
3. **结论**：因此，若当块的特征值、大小及数量由算子 A 唯一确定（不计排列顺序）。

20 证明总结

整个证明流程可以用以下逻辑链概括：

$$
\begin{tikzcd}
\text{线性算子}A \arrow[rr, "\text{视作模}"] & & \text{有限生成}k[T]\text{-挠模} \arrow[d, "\text{PID 结构定理}"] \\
\text{若当标准形}J \arrow[u, dashed, "\text{基底实现}"] & & \bigoplus_i \left(\bigoplus_j k[T]/\langle (T-\lambda_i)^{n_{ij}} \rangle\right) \arrow[ll, "\text{循环分解}"']
\end{tikzcd}
$$

□