代数学笔记 Chapter 7：代数结构

根据手写笔记整理

2025 年 12 月 25 日

本章导读

本笔记基于讲座板书整理，涵盖了以下核心主题：

- **代数 (Algebra) 的定义**：从环与模的双重身份出发。
- **结构同态**：将外部数乘内化为到中心的环同态。
- **典型例子**：幺半群代数、多项式代数及其泛性质。
- **Frobenius 定理**：实数上的有限维可除代数分类 $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$。
- **整性 (Integrality)**：有限代数与整元的等价命题证明。

目录

1 代数 (Algebra) 的基础定义

代 数 的 定 义 与 公 理

给定一个交换幺环 R（作为标量环，Scalar Ring）。一个 R-**代数 (Algebra)** A 是一个六元组 $(A, 0, 1, +, \cdot, \bullet)$，满足以下结构要求：

定义 1.1 (带幺结合 R-代数). A 同时具备以下三重身份，且相互兼容：

1. **加法群**：$(A, 0, +)$ 是阿贝尔群。
2. **环结构**：$(A, 0, 1, +, \bullet)$ 是含幺结合环。
   - 结合律：$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$
   - 分配律：$x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$
   - 幺元：$1 \bullet x = x \bullet 1 = x$
3. R-**模结构**：$(A, 0, +, \cdot)$ 是一个 R-模。
   - 特别地，要求 $1_R \cdot x = x$。
4. **兼容性（双线性）**：数乘 $\cdot$ 与内部乘法 $\bullet$ 是 R-双线性的。

$$a \cdot (x \bullet y) = (a \cdot x) \bullet y = x \bullet (a \cdot y), \quad \forall a \in R, x, y \in A \tag{1}$$

直观理解：双线性的几何意义

双线性公式 $a \cdot (x \bullet y) = (a \cdot x) \bullet y = x \bullet (a \cdot y)$ 是代数的灵魂。它意味着标量 a 可以在乘法链中**自由滑动 (Slide)**。无论是先缩放 x，还是先缩放 y，或者是算完乘积后再缩放，结果都是一样的。

2 代数的构造例子

幺 半 群 代 数 与 多 项 式 代 数

2.1 幺半群代数 (Monoid Algebra)

设 $(M, e, *)$ 是一个幺半群，R 是交换环。我们可以构造 **幺半群代数** $R[M]$：

- **作为模**：$R[M]$ 是以 M 为基的自由 R-模。任意元素 x 可唯一写为 $x = \sum_{g \in M} x(g) e_g$，其中系数 $x(g)$ 只有有限个非零。
- **作为环**：乘法由基底乘法扩张而来：$e_g \bullet e_h = e_{g*h}$。
- **单位元**：$1_A = e_e$。

若 M 是群，则称为**群代数** (Group Algebra)。若 $M = (\mathbb{N}, +)$，则对应多项式环 $R[x]$。

2.2 多项式代数与泛性质

自由交换代数 $R[x_1, \dots, x_n]$ 具有如下泛性质：

定理 2.1 (多项式代数的泛性质). *设 A 是任意交换 R-代数。对于任意选定的 n 个元素 $a_1, \dots, a_n \in A$，存在**唯一**的 R-代数同态 $\Phi : R[x_1, \dots, x_n] \to A$，满足：*

$$\Phi(x_i) = a_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

这建立了一一对应：

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}(R[x_1, \dots, x_n], A) \cong \mathrm{Map}(\{x_1, \dots, x_n\}, A)$$

补充：泛性质的证明与双射的由来

> **注意 (NOTE): 什么是“泛性质”(Universal Property)?**
>
> “泛性质”通常描述一个对象在一个范畴中最“自由”、最“一般”的特性。对于多项式环 $R[x_1, \dots, x_n]$ 来说，它的“自由性”体现在：变元 x_i 没有任何预设的代数关系（除了交换律）。因此，我们可以把 x_i 映射到目标代数 A 中的**任何**位置，而不会受到约束。一旦基底（变元）的去向确定了，整个结构的映射就唯一确定了。

定理证明：存在性与唯一性. 我们以单变元 $R[x]$ 为例（多变元情形同理）。设 A 是交换 R-代数，选定 $a \in A$。

1. 唯一性 (Uniqueness): 假设存在 R-代数同态 $\Phi : R[x] \to A$ 满足 $\Phi(x) = a$。由于 Φ 是 R-代数同态，它必须保持加法、乘法和标量乘法：

$$\begin{aligned}\Phi\left(\sum_{i=0}^{n} c_i x^i\right) &= \sum_{i=0}^{n} \Phi(c_i x^i) \quad \text{(加法保持)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \Phi(x)^i \quad \text{(标量提出与乘法保持)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} c_i a^i \quad \text{(代入条件}\Phi(x) = a\text{)}\end{aligned}$$

上式表明，对于任意多项式 $f(x)$，$\Phi(f(x))$ 的值完全被 a 和 f 的系数决定。因此，如果这样的同态存在，它必须是唯一的（即**求值同态**）。

2. 存在性 (Existence): 直接定义映射 $\Phi : R[x] \to A$ 为"代入求值"：

$$\Phi\left(\sum_{i=0}^{n} c_i x^i\right) := \sum_{i=0}^{n} c_i a^i$$

我们需要验证这是一个良定义的 R-代数同态：

- **良定义**：多项式的表示是唯一的（系数唯一），所以映射结果唯一。
- **保持运算**：设 $f = \sum c_i x^i, g = \sum d_j x^j$。
  - 加法：$\Phi(f+g) = \sum(c_k + d_k)a^k = \sum c_k a^k + \sum d_k a^k = \Phi(f) + \Phi(g)$。
  - 乘法：$f \cdot g = \sum_k (\sum_{i+j=k} c_i d_j) x^k$。

$$\Phi(fg) = \sum_k (\sum_{i+j=k} c_i d_j) a^k = \left(\sum c_i a^i\right)\left(\sum d_j a^j\right) = \Phi(f)\Phi(g)$$

- **结构映射**：$\Phi(1_R) = 1_A$ (将 x^0 映为 1_A)。

故 Φ 是合法的代数同态。 □

直观理解：双射的一一对应关系

公式 $\mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}(R[x_1, \ldots, x_n], A) \cong \mathrm{Map}(\{x_1, \ldots, x_n\}, A)$ 揭示了"代数结构"与"集合映射"之间的深刻联系。

- **从左到右 (α)**：给定一个复杂的代数同态 Φ，我们只需要限制在变元集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上，看看 x_i 去哪了。

$$\Phi \longmapsto (x_i \mapsto \Phi(x_i))$$

  这是一组简单的坐标选取。

- **从右到左** (β)：给定一组目标点 $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$，我们利用泛性质构造唯一的求值同态。

$$(x_i \mapsto a_i) \longmapsto \text{求值同态}\Phi_{a_1,\dots,a_n}$$

这两个过程互逆，说明确定一个多项式环的同态，**当且仅当**确定其变元的像。这大大简化了寻找同态的问题。

3 结构同态 (Structure Morphism)

代数的中心与等价定义

我们可以通过**结构同态**给出一个更现代的代数定义。

定义 3.1 (结构同态). 设 A 是一个环。映射 $\phi_0 : R \to A$ 定义为 $a \mapsto a \cdot 1_A$。由于代数的双线性要求，$\phi_0(R)$ 的像必须落在 A 的**中心** $Z(A)$ 中：

$$Z(A) = \{z \in A \mid z \bullet x = x \bullet z, \forall x \in A\}$$

命题 3.2 (代数的等价定义). 给定交换环 R。一个 R-代数等价于：

$$\text{一个环 } A \text{ 连同一个环同态 } \phi : R \to Z(A)\text{。}$$

证明思路.

- ($\Rightarrow$) 若 A 是代数，定义 $\phi(a) = a \cdot 1_A$。由双线性可知 $\phi(a)$ 与任意 x 可交换，故落在中心。
- ($\Leftarrow$) 若给定 $\phi : R \to Z(A)$，定义数乘 $a \cdot x := \phi(a) \bullet x$。因为 $\phi(a) \in Z(A)$，它可与 x 交换，从而满足双线性条件 $(a \cdot x) \bullet y = (\phi(a)x)y = \phi(a)(xy) = a \cdot (xy)$ 以及 $x \bullet (a \cdot y) = x\phi(a)y = \phi(a)xy = a \cdot (xy)$。

□

4 Frobenius 定理

实数上的可除代数

定义 4.1 (可除代数 Division Algebra). 一个代数 D 称为可除代数，如果它是结合代数，且其中任意非零元素均可逆（即 D 是除环）。

定理 4.2 (Frobenius). $\mathbb{R}$ 上有限维结合可除代数只有三种（同构意义下）：

$$\mathbb{R}\ \textit{(实数)},\quad \mathbb{C}\ \textit{(复数)},\quad \mathbb{H}\ \textit{(四元数)}$$

Frobenius 定理的详细证明. 设 D 是 $\mathbb{R}$ 上的有限维结合可除代数。

第一步：交换子代数的性质若 D 中存在元素 $x \notin \mathbb{R}$，考察由 x 生成的子代数 $\mathbb{R}[x]$。由于 D 有限维，$\mathbb{R}[x]$ 也是有限维的。因为 D 无零因子，$\mathbb{R}[x]$ 是整环且有限维，故 $\mathbb{R}[x]$ 是一个域。$\mathbb{R}[x]$ 是 $\mathbb{R}$ 的有限扩域，由代数基本定理，$\mathbb{R}[x] \cong \mathbb{C}$。**结论：**$D$ 中任何非实元素 x 都满足二次方程 $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ $(\Delta < 0)$。特别地，我们总能找到 $I \in D$ 使得 $I^2 = -1$。

第二步：算子分解与 A^+ 的结构固定 $I \in D$ 使得 $I^2 = -1$。定义线性变换 $T : D \to D$ 为 $T(x) = IxI^{-1} = -IxI$。易知 $T^2 = Id$，故 D 分解为特征子空间直和 $D = A^+ \oplus A^-$：

- $A^+ = \{x \in D \mid Ix = xI\}$ (与 I 交换的部分)
- $A^- = \{x \in D \mid Ix = -xI\}$ (与 I 反交换的部分)

断言 1：$A^+ \cong \mathbb{C}$。

- 显然 $\mathbb{R}[I] \subseteq A^+$，故 $\mathbb{C} \subseteq A^+$。
- 取任意 $y \in A^+$。由于 y 与 I 交换，且 y 与 y 交换，故 $\mathbb{R}[I, y]$ 是一个交换子代数（即一个域）。
- 它是 $\mathbb{R}$ 的有限扩域且包含 $\mathbb{C}$。由于 $\mathbb{C}$ 是代数闭域，它没有真代数扩域。
- 故 $\mathbb{R}[I, y] = \mathbb{C}$，即 $y \in \mathbb{C}$。所以 $A^+ = \mathbb{C}$。

第三步：A^- 的结构与构造 J 若 $D \neq \mathbb{C}$，则 $A^- \neq \{0\}$。

1. **维数对应**：取 $0 \neq y \in A^-$。定义映射 $L_y : A^+ \to A^-$ 为 $a \mapsto ay$。
   - 若 $a \in A^+$，则 $I(ay) = a(Iy) = a(-yI) = -(ay)I$，故 $ay \in A^-$。
   - 由于 D 是除环，此映射是单射。故 $\dim A^+ \leq \dim A^-$。
   - 同理利用 $R_y : A^- \to A^+$ 可证 $\dim A^- \leq \dim A^+$。
   - 故 $\dim A^- = \dim A^+ = 2$。总维数 $\dim D = 4$。

2. **寻找** J：任意取 $u \in A^-, u \neq 0$。考察 u^2：

$$u^2 I = u(uI) = u(-Iu) = -(uI)u = -(-Iu)u = Iu^2$$

故 u^2 与 I 交换，即 $u^2 \in A^+ = \mathbb{C}$。设 $u^2 = \alpha + \beta I$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$。又因为 $u \in A^-$，u 与 u^2 交换：

$$u(\alpha + \beta I) = (\alpha + \beta I)u \implies \alpha u + \beta uI = \alpha u + \beta Iu$$

$$\implies \beta(uI - Iu) = 0$$

代入 $Iu = -uI$ 得 $2\beta uI = 0$。因 $u, I \neq 0$，故 $\beta = 0$。

结论：$u^2 = \alpha \in \mathbb{R}$。若 $\alpha > 0$，则 $u = \pm\sqrt{\alpha} \in \mathbb{R} \subset A^+$，矛盾。故 $u^2 < 0$。令 $J = \frac{u}{\sqrt{-\alpha}}$，则 $J^2 = -1$ 且 $J \in A^-$ (即 $IJ = -JI$)。

第四步：生成四元数令 $K = IJ$。

- $K^2 = IJIJ = I(-IJ)J = -I^2J^2 = -(-1)(-1) = -1$。
- $1, I, J, K$ 线性无关（这是基底扩充的自然结果）。
- 乘法表符合四元数定义 $(IJ = K, JK = I, KI = J$ 等$)$。

综上，$\dim D > 2 \implies D \cong \mathbb{H}$。 □

5 有限代数与整性

整 元 与 三 个 等 价 命 题

我们需要区分两种“有限”：

注意 (NOTE): 有限代数 vs 有限生成代数

- **有限代数 (Finite Algebra)**：A 作为 R-**模**是有限生成的（类似于有限维向量空间）。
- **有限生成代数**：A 作为 **环**是有限生成的（即 $A \cong R[x_1, \ldots, x_n]/I$）。

本节讨论的是第一种：有限 R-模。

定义 5.1 (整元 Integral Element). $x \in A$ 称为在 R 上是整的，如果存在**首一** ***(Monic)*** 多项式 $f(t) \in R[t]$ 使得 $f(x) = 0$。

定理 5.2 (整性的等价判据). 设 $R \subseteq A$ 为交换环扩张，$x \in A$。以下命题等价：

1. $R[x]$ 是有限 R-代数（作为模有限生成）。
2. x 在 R 上整。
3. 存在一个**忠实** ***(Faithful)*** 的 $R[x]$-模 M，且 M 作为 R-模有限生成。

5.1 命题的形式化描述

设 $R \subseteq A$ 为交换环扩张，取定元素 $x \in A$。我们要讨论以下三个命题：

(1) $R[x]$ **是有限** R-**代数（Module-finite）**

> **注意 (NOTE): 形式化含义**
>
> $R[x]$ 作为 R-模是有限生成的。即存在有限个元素 $y_1, \ldots, y_m \in R[x]$，使得任意 $f \in R[x]$ 都可表示为：
>
> $$f = r_1 y_1 + \cdots + r_m y_m, \quad (r_i \in R)$$
>
> **注意：** 这里 $R[x]$ 既是环也是模。

(2) x **在** R **上是整的 (Integral)**

> **注意 (NOTE): 形式化含义**
>
> 存在 $n \geq 1$ 以及 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in R$，使得 x 满足首一多项式方程：
>
> $$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

(3) **存在忠实的有限生成** $R[x]$-**模**

> **注意 (NOTE): 形式化含义**
>
> 存在一个 $R[x]$-模 M，满足两个条件：
>
> (a) **有限生成 (R-finite)：** $M = \sum_{j=1}^{k} Re_j$，即 M 作为 R-模由有限个 e_j 生成。
>
> (b) **忠实 (Faithful)：** $\mathrm{Ann}_{R[x]}(M) = \{0\}$。即若 $y \in R[x]$ 使得 $y \cdot M = \{0\}$

(即 $\forall m \in M, y \cdot m = 0$)，则必有 $y = 0$。

5.2 定理的详细证明

定理 5.3 (Cayley-Hamilton 模形式). 上述三个命题等价：(1) $\iff$ (2) $\iff$ (3)。

证明. 我们按照 (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) 的顺序证明。

1. (2) $\Rightarrow$ (1)：**降幂法**假设 x 在 R 上整，即存在方程：

$$x^n = -(a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0), \quad a_i \in R$$

我们断言：集合 $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ 生成了 R-模 $R[x]$。对于任意 x^k $(k \geq n)$，利用归纳法：

- 当 $k = n$ 时，由方程直接可知 x^n 可由 S 线性表出。
- 假设 x^k 可由 S 表出，即 $x^k = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$。
- 则 $x^{k+1} = x \cdot x^k = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^{i+1}$。其中最高项 x^n 再次利用方程替换为低次项。

故所有 x 的幂次都落在 S 的生成空间内，即 $R[x] = R \cdot 1 + R \cdot x + \cdots + R \cdot x^{n-1}$。

2. (1) $\Rightarrow$ (3)：**自身的忠实性**假设 $R[x]$ 作为 R-模有限生成。令 $M = R[x]$。

- M 显然是一个 $R[x]$-模（通过代数乘法）。
- 由假设 (1)，M 在 R 上有限生成。
- **验证忠实性**：设 $y \in R[x]$ 使得 $y \cdot M = 0$。特别地，取 $1 \in M$（代数的单位元），则 $y \cdot 1 = 0 \implies y = 0$。

故 $M = R[x]$ 即为所求的模。

3. (3) $\Rightarrow$ (2)：**行列式技巧 (Determinant Trick)** 这是最关键的一步。设 M 由 $e_1, \ldots, e_n$ 作为 R-模生成，且 M 是忠实 $R[x]$-模。考察乘法算子 $\phi : m \mapsto x \cdot m$。这是一个 R-线性变换。由于 $x \cdot e_i \in M$，我们可以将其写为基底的线性组合：

$$x \cdot e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, \quad a_{ij} \in R$$

将所有方程联立，移项得到齐次方程组：

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}x - a_{ij})e_j = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

写成矩阵形式。令 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为 $n \times n$ 的 R-矩阵，$\mathbf{I}$ 为单位阵，$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)^T$：

$$(x\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

令 $\mathbf{B} = \mathrm{adj}(x\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 为系数矩阵的**伴随矩阵**。用 $\mathbf{B}$ 左乘方程组两边：

$$\mathbf{B}(x\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{e} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

利用伴随矩阵性质 $\mathbf{B}(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}$，我们得到：

$$\det(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot e_j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

令 $D(x) = \det(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) \in R[x]$。上式表明 $D(x)$ 零化了 M 的所有生成元，因此 $D(x)$ 零化整个模 M：

$$D(x) \cdot M = 0$$

利用忠实性：因为 M 是忠实的，所以 $D(x)$ 必须是 $R[x]$ 中的零元素，即 $D(x) = 0$。展开行列式 $D(x)$：

$$D(x) = \det \begin{pmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0$$

其中 $c_k \in R$。方程 $D(x) = 0$ 正是说明 x 满足一个首一的 R-系数多项式。故 x 在 R 上整。 □

直观理解：技巧点拨：行列式技巧的本质

步骤 (3) $\Rightarrow$ (2) 的证明本质上是线性代数中 **Cayley-Hamilton 定理**的推广。在经典线性代数中，我们说“矩阵 A 满足其特征多项式 $\chi_A(A) = 0$”。在这里，我们将元素 x 看作模 M 上的线性算子（即矩阵 A），反过来构造了一个多项式，使得 x 是它的根。**为什么需要忠实性？** 如果 M 不忠实（比如 $M = 0$），那么 $D(x)$ 仅仅是零化了 M，并不能推出 $D(x)$ 本身为 0（多项式本身成立）。忠实性保证了“算子作用为零”等价于“算子本身为零”。

6 交换代数：整扩充 (Integral Extensions)

整 元 与 整 闭 包 基 础

本章导读

本节主要讨论交换环扩充 $R \subseteq A$ 中的"整性"。这推广了代数数论中"代数整数"的概念。核心工具是利用模的有限生成性将非线性的代数方程问题转化为线性的矩阵行列式问题。

6.1 整元与整扩充的定义

定义 6.1 (整元). *设 $R \subseteq A$ 为交换环扩充。元素 $x \in A$ 称为在 R 上***整** *(integral over R),如果 x 满足一个 R 上的***首一***多项式方程:*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_i \in R$$

定义 6.2 (整扩充). *如果 A 中所有元素都在 R 上整,称 A 是 R 的整扩充。*

例 6.3 (二次域的代数整数). *设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 为二次域,d 无平方因子。K 中的代数整数环 $\mathcal{O}_K$ 为:*

$$\mathcal{O}_K = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}], & d \equiv 2, 3 \pmod 4 \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right], & d \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

6.2 整性的等价刻画

定理 6.4 (整性的判别准则). *设 $x \in A$,以下三条等价:*

1. *x 在 R 上整。*
2. *$R[x]$ 作为 R-模是有限生成的(即 $R[x]$ 是有限 R-代数)。*
3. *存在一个***忠实** *(Faithful) 的 $R[x]$-模 M,且 M 作为 R-模是有限生成的。*

补充基础:零化子与忠实模

定义 6.5 (零化子与忠实模). *设 R 为环,M 为 R-模。*

1. **零化子 *(Annihilator)*:** *M 的零化子定义为 R 中所有能让 M 中元素变为 0 的元素的集合:*

   $$\mathrm{Ann}_R(M) := \{r \in R \mid r \cdot m = 0, \forall m \in M\}$$

   它是 R 的一个理想。

2. **忠实模 *(Faithful Module)*:** *如果 $\mathrm{Ann}_R(M) = \{0\}$,即只有 0 元素能作用在 M 上使其全为 0,则称 M 为忠实 R-模。*

命题 (1) ⇒ (2) 的证明

命题重述：若 x 在 R 上整，则 $R[x]$ 是有限生成的 R-模。

证明. 设 x 在 R 上整，根据定义，存在 $n \geq 1$ 以及 $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$，使得 x 满足首一多项式方程：

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

移项可得 x^n 的表达式：

$$x^n = -(a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)$$

这意味着 x^n 可以被集合 $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ 线性表出，即 $x^n \in \sum_{i=0}^{n-1} Rx^i$。

对于更高次的幂 x^{n+k} $(k \geq 1)$，我们可以利用归纳法证明。假设 x^{n+k-1} 已经被 $\{1, \ldots, x^{n-1}\}$ 线性表出，则：

$$x^{n+k} = x \cdot x^{n+k-1} = x \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} r_j x^j \right) = \sum_{j=0}^{n-1} r_j x^{j+1}$$

展开后，出现的最高次项为 x^n，再次代入 $x^n = -\sum a_i x^i$ 即可降次。因此，对于任意 $m \in \mathbb{N}$，x^m 都落在由 $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ 生成的 R-子模中。所以 $R[x] = \sum_{i=0}^{n-1} Rx^i$，即 $R[x]$ 是有限生成的 R-模（生成元个数不超过 n）。 □

命题 (2) ⇒ (3) 的证明

命题重述：若 $R[x]$ 是有限 R-代数，则存在一个忠实的有限生成 $R[x]$-模。

证明. 直接取 $M = R[x]$。我们需要验证它满足题目要求的两个性质：

1. **有限生成性**：由条件 (2) 已知，$M = R[x]$ 作为 R-模是有限生成的。

2. **忠实性**：我们需要证明 $\mathrm{Ann}_{R[x]}(M) = \{0\}$。设 $y \in R[x]$ 满足 $y \cdot m = 0$ 对任意 $m \in M$ 成立。因为 $M = R[x]$ 是一个含幺环，取特例 $m = 1$（环中的乘法单位元）。则有：

$$y \cdot 1 = 0 \implies y = 0$$

这说明只有 0 元素能零化整个 M。因此 M 是忠实的。

综上，存在 $M = R[x]$ 满足所有条件。 □

命题 (3) ⇒ (1) 的完整证明

命题重述：若存在一个忠实的 $R[x]$-模 M，且 M 作为 R-模是有限生成的，则 x 在 R 上整。

证明. **第一步：建立线性方程组**
因为 M 作为 R-模是有限生成的，设其生成元为 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$，即 $M = \sum_{i=1}^n Re_i$。由于 M 是 $R[x]$-模，所以 x 作用在 M 上封闭。对于每个生成元 e_i，存在 $a_{ij} \in R$，使得 x 的作用可以表示为：

$$x \cdot e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, \quad (i = 1, \dots, n)$$

将上述等式移项整理，得到关于 e_j 的齐次线性方程组：

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} x - a_{ij}) e_j = 0, \quad (i = 1, \dots, n)$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号。

第二步：矩阵形式与行列式技巧
令矩阵 B 为系数矩阵,其元素为 $B_{ij} = \delta_{ij}x - a_{ij}$,即 $B = xI_n - A$,其中 $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$。令列向量 $\vec{e} = (e_1, \dots, e_n)^T$。上述方程组可写为矩阵形式：

$$B \cdot \vec{e} = 0$$

在方程两边左乘 B 的伴随矩阵 B^* (Adjugate Matrix)。根据线性代数性质 $B^*B = \det(B)I_n$，我们有：

$$B^*(B\vec{e}) = (B^*B)\vec{e} = (\det(B)I_n)\vec{e} = \det(B)\vec{e} = 0$$

这意味着标量 $D = \det(B)$ 作用在每一个生成元 e_i 上都等于 0：

$$D \cdot e_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

由于 e_i 生成整个模 M，因此对于任意 $m \in M$，都有 $D \cdot m = 0$。即 $D \in \mathrm{Ann}_{R[x]}(M)$。

第三步：利用忠实性得出整性方程
题目条件指出 M 是**忠实**的 $R[x]$-模，这意味着 $\mathrm{Ann}_{R[x]}(M) = \{0\}$。因此，必须有：

$$D = \det(xI_n - A) = 0$$

注意这里的“0”是指 $R[x]$ 环中的零元素。展开行列式 $D = \det(xI_n - A)$，这是一个关于 x 的多项式：

$$D = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0$$

其中系数 c_k 由矩阵 A 的元素（属于 R）通过加法和乘法构成，因此 $c_k \in R$。最高次项 x^n 的系数为 1，故这是一个**首一多项式**。结论：x 满足 R 上的首一多项式方程，即 x 在 R 上整。 □

6.3 整闭包与传递性

整闭包的性质

定义 6.6 (整闭包). R 在 A 中的整闭包定义为 $\widetilde{R} := \{x \in A \mid x \text{ 在} R \text{ 上整}\}$。

命题 6.7. $\widetilde{R}$ 是 A 的子环（即整元的和、差、积仍为整元）。

详细证明. 我们要利用有限生成模的性质来证明整元的和与积仍为整元。

第一步：$R[x]$ 作为 R-模是有限生成的
因为 x 在 R 上整，设 x 满足 n 次首一多项式：

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad a_i \in R$$

这表明 x^n 可以由 $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ 线性表出。归纳可知，任意 x^k $(k \geq n)$ 都在由这些低次幂生成的 R-子模中。因此，$R[x]$ 由有限集合 $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ 生成：

$$R[x] = R \cdot 1 + R \cdot x + \cdots + R \cdot x^{n-1}$$

第二步：$R[x, y]$ 作为 $R[x]$-模是有限生成的
同理，因为 y 在 R 上整，设 y 满足 m 次首一多项式：

$$y^m + b_{m-1}y^{m-1} + \cdots + b_0 = 0, \quad b_i \in R$$

注意 $R \subseteq R[x]$，所以系数 b_i 也属于 $R[x]$。这意味着 y 在 $R[x]$ 上也是整的。因此，$R[x, y]$（即 $(R[x])[y]$）由有限集合 $\{1, y, \ldots, y^{m-1}\}$ 作为 $R[x]$-模生成：

$$R[x, y] = \sum_{j=0}^{m-1} R[x] \cdot y^j$$

第三步：利用“塔式性质”传递有限性
我们将第一步的结果代入第二步。$R[x, y]$ 中的任意元素 z 可以写成：

$$z = \sum_{j=0}^{m-1} c_j(x)y^j, \quad \text{其中} c_j(x) \in R[x]$$

而每个系数 $c_j(x)$ 又可以写成 $\sum_{i=0}^{n-1} r_{ij}x^i$ $(r_{ij} \in R)$。代入得：

$$z = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} r_{ij}x^i \right) y^j = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} r_{ij}(x^i y^j)$$

这说明 $R[x,y]$ 作为 R-模，是由乘积集合 $\{x^iy^j \mid 0 \le i < n, 0 \le j < m\}$ 生成的。这是一个包含 $n \times m$ 个元素的有限集合。因此，$R[x,y]$ 是**有限生成 R-模**。

第四步：结论

显然 $x+y \in R[x,y]$ 且 $xy \in R[x,y]$。由于 $R[x,y]$ 是有限生成 R-模，且包含单位元 1（因此是忠实的），根据前面的判定定理（命题 1.3 (2) $\Rightarrow$ (1)），$R[x,y]$ 中的**每一个元素**都在 R 上整。故 $x+y$ 和 xy 均为整元。 $\square$

直观理解：塔式结构

$$R \xrightarrow{\text{有限}} R[x] \xrightarrow{\text{有限}} R[x,y] \implies R \xrightarrow{\text{有限}} R[x,y]$$

就像搭积木，高度有限 $\times$ 宽度有限 $=$ 总体积有限。

7 非交换环与模论：半单性

半 单 模 与 矩 阵 环

本章导读

本节进入非交换环论的核心。我们研究那些可以“彻底分解”为简单构件的结构。这是理解群表示论的基础。

7.1 半单模的定义

定义 7.1 (半单模). *设 R 为环，M 为 R-模。以下条件等价，满足其一称 M 为半单模：*

1. *M 是简单模的和：$M = \sum S_i$。*
2. *M 是简单模的直和：$M = \bigoplus S_j$。*
3. *M 是完全可约的 (Completely Reducible)：任意子模都有补模。*

例 7.2 (矩阵环的半单性). *设 D 为体 (Division Ring)，则 $M_n(D)$ 是半单环。***分解：** *$M_n(D) \cong D^n \oplus \cdots \oplus D^n$ (n 个列向量空间的直和)。每个列向量空间 L_i 都是简单左理想。*

补充证明：为什么 L_k 是简单左理想？

命题 7.3. 设 D 是体，$R = M_n(D)$。令 L_k 为第 k 列非零、其余列为 0 的矩阵集合（即 $L_k = Re_{kk}$）。则 L_k 是 R 的简单左理想（简单 R-模）。

证明. 我们要证明 L_k 没有非平凡子模。设 N 是 L_k 的一个非零子模（即 $0 \neq N \subseteq L_k$）。我们需要证明 $N = L_k$。

第一步：取非零元并定位非零分量
因为 $N \neq 0$，存在一个非零矩阵 $A \in N$。由于 $A \in L_k$，它只有第 k 列有值。设 $A = (a_{ij})$，则存在某个行下标 p，使得 $a_{pk} \neq 0$。注意：因为 D 是体，所以 a_{pk} 可逆，存在逆元 $a_{pk}^{-1} \in D$。

第二步：利用矩阵单位“提取”基向量
我们引入矩阵单位 E_{ij}（第 i 行 j 列为 1，其余为 0）。回顾矩阵单位的乘法规则：$E_{rs}E_{tu} = \delta_{st}E_{ru}$。我们可以通过左乘 R 中的元素，把 A 变成标准基向量。构造矩阵 $X = E_{qp} \cdot a_{pk}^{-1} \in R$（这是在 R 中合法的操作）。将 X 左乘 A：

$$X \cdot A = (E_{qp}a_{pk}^{-1}) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}E_{ik} \right)$$

利用线性性和乘法规则，只有当 $i = p$ 时项不为 0：

$$= E_{qp}a_{pk}^{-1}a_{pk}E_{pk} = E_{qp} \cdot 1 \cdot E_{pk} = E_{qk}$$

因为 N 是左理想，对 R 的左乘封闭，所以 $X \cdot A \in N$。这意味着：对于任意 $q \in \{1, \ldots, n\}$，标准基矩阵 E_{qk} 都属于 N。

第三步：生成整个空间
既然所有“单点”基矩阵 $E_{1k}, E_{2k}, \ldots, E_{nk}$ 都在 N 里。对于 L_k 中任意元素 $B = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}E_{jk}$，它显然是这些基矩阵的线性组合。由于 N 对加法封闭（模的定义），所以 $B \in N$。因此 $L_k \subseteq N$。

结论： $N = L_k$。即 L_k 只有 $\{0\}$ 和它自身两个子模，得证 L_k 是简单模。 □

直观理解：传递性的代数本质

上述证明中构造 $X = E_{qp}a_{pk}^{-1}$ 的过程，本质上就是利用 D 的除法性质（a_{pk}^{-1} 存在），实现了从向量 A 到任意基向量 E_{qk} 的**传递性**。如果 D 不是体（例如整数环 $\mathbb{Z}$），则 a_{pk} 不一定可逆，这就“传不过去”了，会导致非平凡子理想的存在（如偶数向量）。

7.2 Wedderburn-Artin 定理

定理 7.4 (Wedderburn-Artin). R 是半单环当且仅当 R 同构于有限个**体上矩阵环**的直积：

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$$

补充证明：有限个半单环的直积仍为半单环

命题 7.5. 设 $A_1, A_2, \ldots, A_r$ 均为半单环。则它们的直积 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$ 也是半单环。

证明. 我们要证明 A 作为左 A-模是半单的（即可以分解为简单 A-模的直和）。

第一步：构造分量理想

对于每个 $i \in \{1, \ldots, r\}$，定义 A 的子集：

$$\tilde{A}_i = \{(0, \ldots, 0, a_i, 0, \ldots, 0) \mid a_i \in A_i\}$$

显然，$\tilde{A}_i$ 是 A 的左理想（事实上是双边理想）。对于 A 中的元素 $a = (a_1, \ldots, a_r)$ 和 $\tilde{x} \in \tilde{A}_i$（第 i 个分量为 x），其乘法作用为：

$$a \cdot \tilde{x} = (a_1, \ldots, a_r) \cdot (0, \ldots, x, \ldots, 0) = (0, \ldots, a_i x, \ldots, 0)$$

这意味着 A 在 $\tilde{A}_i$ 上的作用完全由分量环 A_i 决定。A 作为左 A-模自然分解为这些理想的直和：

$$_AA = \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{A}_r$$

第二步：利用分量环的半单性

因为 A_i 是半单环，根据定义，它作为左 A_i-模可以分解为简单左理想的直和：

$$_{A_i}A_i = \bigoplus_{j=1}^{k_i} S_{ij}$$

其中 S_{ij} 是 A_i 的简单子模。我们将这些 S_{ij} 嵌入到 A 中，定义 $\tilde{S}_{ij} = \{(0, \ldots, s, \ldots, 0) \mid s \in S_{ij}\} \subseteq \tilde{A}_i$。

第三步：验证简单性 (关键步骤)

我们需要证明 $\tilde{S}_{ij}$ 是**简单** A**-模**。

1. **它是 A-模**：同第一步，$\tilde{S}_{ij}$ 对 A 的左乘封闭。

2. **它没有非平凡子模**：假设 N 是 $\tilde{S}_{ij}$ 的非零 A-子模。取非零元 $\tilde{n} \in N$，对应 S_{ij} 中的非零元 n。因为 S_{ij} 是简单 A_i-模，所以 $A_i \cdot n = S_{ij}$。这意味着对于任意 $s \in S_{ij}$，存在 $c \in A_i$ 使得 $cn = s$。回到大环 A，构造 $C = (0, \ldots, c, \ldots, 0) \in A$。则 $C \cdot \tilde{n} = \tilde{s}$。这说明 N 包含了 $\tilde{S}_{ij}$ 的所有元素，即 $N = \tilde{S}_{ij}$。

结论： A 可以分解为简单 A-模的直和：

$$ {}_A A = \bigoplus_{i=1}^{r} \tilde{A}_i = \bigoplus_{i=1}^{r} \left(\bigoplus_{j=1}^{k_i} \tilde{S}_{ij} \right) $$

根据半单模的定义，直积环 A 是半单环。 □

预备知识：环与其正则模的自同态

引理 7.6 (正则模自同态同构). 设 R 为含幺环，将 R 视为自身的左 R-模（记为 ${}_R R$）。则有环同构：

$$ R \cong \mathrm{End}_R({}_R R)^{\mathrm{op}} $$

证明. 我们需要构造一个从 R 到 $\mathrm{End}_R({}_R R)$ 的**反同构**（即乘法顺序颠倒的同构）。

第一步：定义映射
对于任意 $r \in R$，定义“右乘映射” $\rho_r : R \to R$ 为：

$$ \rho_r(x) = x \cdot r, \quad \forall x \in R $$

我们构建映射 $\Phi : R \to \mathrm{End}_R({}_R R)$，令 $\Phi(r) = \rho_r$。

第二步：验证 ρ_r 是模自同态
我们需要检查 ρ_r 是否是 R-线性的（即与左乘标量可交换）。对于任意标量 $a \in R$ 和向量 $x \in R$（这里 R 既是标量也是向量）：

$$ \rho_r(a \cdot x) = (ax)r = a(xr) = a \cdot \rho_r(x) $$

这里利用了环乘法的**结合律**。这说明 $\rho_r \in \mathrm{End}_R({}_R R)$。

第三步：验证 Φ 是双射

- **单射性**：若 $\Phi(r) = 0$（零映射），则对于任意 x 有 $xr = 0$。取特例 $x = 1$（环的单位元），则 $1 \cdot r = r = 0$。故 $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$。

- **满射性**：设 $\psi \in \mathrm{End}_R({}_R R)$ 是任意一个自同态。令 $r = \psi(1)$。对于任意 $x \in R$，利用 ψ 的 R-线性性质：

$$\psi(x) = \psi(x \cdot 1) = x \cdot \psi(1) = x \cdot r = \rho_r(x)$$

这说明 $\psi = \rho_r = \Phi(r)$。即任意自同态本质上都是右乘某个元素。

第四步：验证乘法反转（Op 的由来）

我们需要检查 Φ 是否保持乘法结构。计算 $\Phi(ab)$ 对应的映射 ρ_{ab}：

$$\rho_{ab}(x) = x(ab)$$

计算 $\Phi(a)$ 和 $\Phi(b)$ 的复合映射 $\rho_a \circ \rho_b$：

$$(\rho_a \circ \rho_b)(x) = \rho_a(\rho_b(x)) = \rho_a(xb) = (xb)a = x(ba) = \rho_{ba}(x)$$

注意！我们发现：

$$\Phi(a) \circ \Phi(b) = \rho_{ba} = \Phi(ba) \neq \Phi(ab)$$

也就是说，映射的复合顺序与元素的乘法顺序是**相反**的。为了使等式成立，我们需要在 $\mathrm{End}_R({}_R R)$ 上采用反环的乘法定义（即 $f * g := g \circ f$），或者直接说 R 同构于 $\mathrm{End}_R({}_R R)^{\mathrm{op}}$。即：

$$\Phi(ab) = \rho_{ab} = \rho_b \circ \rho_a = \Phi(b) \circ \Phi(a) \quad (\text{在End 中})$$

这表明 Φ 是一个从 R 到 $\mathrm{End}_R({}_R R)^{\mathrm{op}}$ 的环同构。 □

直观理解：直观理解：为什么是反的？

这就好比穿袜子和穿鞋：

- **动作视角（End）**：先穿袜子 (f)，再穿鞋 (g)。复合动作是 $g \circ f$。
- **数据视角（Element）**：你的脚 x 经历的过程是：$x \xrightarrow{\text{袜子}} x_{\text{袜子}} \xrightarrow{\text{鞋}} x_{\text{全套}}$。
- 在左模 R 中，左乘 a (L_a) 和右乘 b (R_b) 是互相交换的：$L_a R_b = R_b L_a$（结合律 $(ax)b = a(xb)$）。
- 但是右乘之间不交换：先右乘 a 再右乘 b，等于右乘 ab 吗？

  $$x \xrightarrow{\cdot a} xa \xrightarrow{\cdot b} (xa)b = x(ab)$$

  是的，操作顺序是“先 a 后 b”，但这在函数复合记号里写成 $\rho_b \circ \rho_a$（因为函数是从右向左读的）。这就导致了符号上的“翻转”。

直观理解：直观理解

想象 A_1 是"红色积木"，A_2 是"蓝色积木"。它们的直积 A 就是把这两堆积木倒进同一个盒子里。因为红色积木本身是原子的（半单），蓝色积木也是原子的。在盒子里（直积环）并没有发生化学反应（因为交叉乘积为 0），所以它们依然保持原子的独立性。盒子里的东西依然是由原子组成的。

定理的详细证明

证明. 证明分两个方向进行：

1. 充分性 ($\Longleftarrow$)
假设 $R \cong \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$。

- 我们已知体上的矩阵环 $M_{n_i}(D_i)$ 是半单环（见前例，可分解为列向量空间的直和）。
- **积木原理：**有限个半单环的直积依然是半单环。因为直积环中，理想的运算是分量独立的，若每个分量环都能分解为简单理想的直和，则整个环 R 也能分解。

因此，R 是半单环。

2. 必要性 ($\Longrightarrow$)
假设 R 是半单环。我们将利用 R 作为自身的左模 $_RR$ 的结构来反推 R 的环结构。

第一步：模的分解与同构归类
因为 $_RR$ 是半单模且 R 含幺（$1 \in R$），所以 $_RR$ 可以分解为有限个简单左理想的直和：

$$_RR = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$$

我们将这些简单模按**同构类**分组。设 $S_1, \ldots, S_r$ 为互不同构的简单模代表元。将所有同构于 S_i 的项合并，记其重数（个数）为 n_i。则有同构：

$$_RR \cong S_1^{\oplus n_1} \oplus S_2^{\oplus n_2} \oplus \cdots \oplus S_r^{\oplus n_r}$$

第二步：利用自同态环同构
环论中有一个基本同构：环 R 同构于其左正则模 $_RR$ 的自同态环的**反环**：

$$R \cong \mathrm{End}_R(_RR)^{\mathrm{op}}$$

代入第一步的分解，得到：

$$R \cong \mathrm{End}_R\left(\bigoplus_{i=1}^{r} S_i^{\oplus n_i}\right)^{\mathrm{op}}$$

第三步：利用 Schur 引理对角化
根据 Schur 引理，若 S_i, S_j 是不同构的简单模，则 $\mathrm{Hom}_R(S_i, S_j) = 0$。这意味着不同构成分之间的“交叉同态”全为 0，自同态环分解为直积：

$$\mathrm{End}_R\left(\bigoplus_{i=1}^{r} S_i^{\oplus n_i}\right) \cong \prod_{i=1}^{r} \mathrm{End}_R(S_i^{\oplus n_i})$$

第四步：矩阵环结构的出现
考察单个分量 $\mathrm{End}_R(S_i^{\oplus n_i})$。这是 $S_i^{\oplus n_i}$ 到自身的线性变换集合。由于线性映射完全由它在每个基底分量 S_i 上的作用决定，这同构于在 $\mathrm{End}_R(S_i)$ 上的 $n_i \times n_i$ 矩阵环：

$$\mathrm{End}_R(S_i^{\oplus n_i}) \cong M_{n_i}(\mathrm{End}_R(S_i))$$

再次利用 Schur 引理，简单模 S_i 的自同态环 $\Delta_i := \mathrm{End}_R(S_i)$ 是一个**体** (Division Ring)。至此我们得到：

$$\mathrm{End}_R({}_R R) \cong \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\Delta_i)$$

第五步：处理反环与最终形式
回到 R 的结构，加上反环符号：

$$R \cong \left(\prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\Delta_i)\right)^{\mathrm{op}} \cong \prod_{i=1}^{r} (M_{n_i}(\Delta_i))^{\mathrm{op}}$$

利用矩阵转置的代数性质，矩阵环的反环同构于**其基环的反环**上的矩阵环（$A \mapsto A^T$）：

$$M_{n_i}(\Delta_i)^{\mathrm{op}} \cong M_{n_i}(\Delta_i^{\mathrm{op}})$$

令 $D_i = \Delta_i^{\mathrm{op}}$。由于 Δ_i 是体，其反环 D_i 依然是体。最终得到 Wedderburn-Artin 定理的标准形式：

$$R \cong \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$$

□

直观理解：为什么会出现 $D_i = \Delta_i^{\mathrm{op}}$？

$\mathrm{End}_R(S_i)$ 中的运算是函数的复合 $f \circ g$。但在左模 S_i 上，标量乘法 $(ab)v = a(bv)$ 对应的算符顺序是先 b 后 a。为了让矩阵乘法与标量乘法兼容，我们需要翻转乘法顺序，这就是反环 ${}^{\mathrm{op}}$ 的由来。对于交换域（如 $\mathbb{C}$），$D \cong D^{\mathrm{op}}$，所以通常忽略此区别；但在一般的体上，这是必须的。

注意 (NOTE): 关于反环

证明过程中用到同构 $R \cong \mathrm{End}_R({}_RR)^{\mathrm{op}}$。若分解为简单模直和 $R = \bigoplus n_i S_i$，则利用 Schur 引理可得 $\mathrm{End}_R(R) \cong \prod M_{n_i}(\mathrm{End}(S_i))$。

8 群表示论 (Group Representations)

Maschke 定理与群代数结构

本章导读

群表示论是将群的作用线性化。本节利用前面的模论工具，特别是 Wedderburn 定理，彻底解析了群代数 $\mathbb{C}[G]$ 的结构。

8.1 表示与模的对应

设 k 为域，G 为群。

$$G \text{ 的} k \text{ 上表示} V \iff \text{群代数} k[G]\text{-模} V$$

子表示对应子模，交织算子对应模同态。

8.2 Maschke 定理

定理 8.1 (Maschke). *设 G 为有限群，若 $char(k) \nmid |G|$，则 $k[G]$ 是半单环（即所有表示都是完全可约的）。*

***Maschke* 定理的详细证明.** 我们的目标是证明 $k[G]$ 是半单环。这等价于证明 G 的任意表示 V 都是完全可约的，即对于 V 的任意子表示 W，都存在一个补表示 U 使得 $V = W \oplus U$。

第一步：寻找向量空间的补空间与投影

首先忽略群 G 的结构，仅将 V 视为域 k 上的向量空间。因为 W 是 V 的子空间，由线性代数知识，必然存在一个（向量空间意义下的）补空间 U'，使得 $V = W \oplus U'$。定义对应的投影映射 $\pi : V \to W$，满足：

- 对于任意 $v \in V$，$\pi(v) \in W$。
- 对于任意 $w \in W$，$\pi(w) = w$（即 π 在 W 上是恒等映射）。

注意：此时的 π 只是 k-线性的，通常不是 G-线性的（即可能 $\pi(g \cdot v) \neq g \cdot \pi(v)$）。

第二步：利用“平均化”构造 G-同态

我们利用群 G 的作用来“修正”π，构造一个新的映射 $\phi : V \to V$。定义 ϕ 为 π 在群作用下的平均值：

$$\phi(v) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \pi(g^{-1} \cdot v)$$

此处用到了条件 $\mathrm{char}(k) \nmid |G|$，保证了 $|G|$ 在 k 中可逆，即 $\frac{1}{|G|}$ 有意义。

第三步：验证 ϕ 是 G-同态

我们需要证明 ϕ 与群作用可交换，即 $\forall h \in G, \phi(h \cdot v) = h \cdot \phi(v)$。

$$\begin{aligned} \phi(h \cdot v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \pi(g^{-1} \cdot (h \cdot v)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \pi((g^{-1} h) \cdot v) \end{aligned}$$

令 $s = g^{-1}h$，则 $g = hs^{-1}$。当 g 遍历群 G 时，s 也遍历群 G（群的重排原理）。代入上式：

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} (hs^{-1}) \cdot \pi(s \cdot v) \\ &= h \cdot \left(\frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} s^{-1} \cdot \pi(s \cdot v) \right) \end{aligned}$$

注意求和指标是哑变量，令 $t = s^{-1}$，则 t 依然遍历 G：

$$= h \cdot \left(\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t \cdot \pi(t^{-1} \cdot v) \right) = h \cdot \phi(v)$$

得证 ϕ 是 G-同态（即模同态）。

第四步：验证 ϕ 是到 W 的投影

1. **像在 W 中**：对于求和项中的 $g \cdot \pi(g^{-1} \cdot v)$，因为 π 的输出在 W 中，且 W 是子表示（G-不变子空间），所以 g 作用后仍在 W 中。故 $\phi(v) \in W$。

2. **W 上不动**：任取 $w \in W$。因为 W 是 G-不变的，所以 $\forall g \in G$，有 $g^{-1} \cdot w \in W$。由于 π 在 W 上是恒等的，所以 $\pi(g^{-1} \cdot w) = g^{-1} \cdot w$。代入 ϕ 的定义：

$$\phi(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot (g^{-1} \cdot w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (gg^{-1}) \cdot w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w = w$$

所以 ϕ 是一个从 V 到 W 的投影算子，且是 G-同态。

第五步：构造补表示
令 $U = \mathrm{Ker}(\phi)$。

- 因为 ϕ 是 G-同态，所以其核 U 是 G-不变子空间（即子表示）。
- 由线性代数性质，对于投影 ϕ，有 $V = \mathrm{Im}(\phi) \oplus \mathrm{Ker}(\phi) = W \oplus U$。

至此，我们找到了 W 的补表示 U。证明完成。 □

8.3 群代数 $\mathbb{C}[G]$ 的结构

在复数域 $\mathbb{C}$ 上，结合 Maschke 定理和 Wedderburn 定理：

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$$

其中 $n_i = \dim V_i$ 为不可约表示的维数。

- **维数公式：** $|G| = \sum_{i=1}^{r} (\dim V_i)^2$。
- **双边模视角：** 作为 $G \times G$ 的表示，

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{i=1}^{r} (V_i^\vee \otimes V_i)$$

  这解释了矩阵环 $M_n(\mathbb{C}) \cong V^* \otimes V$ 的几何意义。

定理的详细推导与证明

***1.* 结构分解与 *Schur* 引理的应用**. 我们已知 $\mathbb{C}[G]$ 是半单环（Maschke 定理）。根据 Wedderburn 定理，存在体 D_i 和整数 n_i 使得：

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$$

这里的 $M_{n_i}(D_i) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V_i^{\oplus n_i})$，其中 V_i 是对应的简单模（不可约表示）。根据 Schur 引理，简单模的自同态环 $D_i = \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V_i)$ 是一个体。**关键点：**在代数闭域（如 $\mathbb{C}$）上，有限维的体只有域本身。

- 设 $d \in D_i$。由于 V_i 是有限维的，d 有特征值 $\lambda \in \mathbb{C}$。

- 算子 $d-\lambda\cdot\mathrm{id}$ 不是可逆的（有非零核）。
- 但 D_i 是除环（体），非零元素皆可逆。故必须 $d-\lambda\cdot\mathrm{id}=0$，即 $d=\lambda\cdot\mathrm{id}$。

因此 $D_i\cong\mathbb{C}$。代入分解式得：

$$\mathbb{C}[G]\cong\bigoplus_{i=1}^{r}M_{n_i}(\mathbb{C})$$

同时，矩阵环 $M_{n_i}(\mathbb{C})$ 的唯一不可约模是 $\mathbb{C}^{n_i}$（列向量），故不可约表示 V_i 的维数 $\dim V_i=n_i$。 □

2. **维数公式的证明**. 比较同构式两边的复向量空间维数：

- **左边**： $\mathbb{C}[G]$ 的基底是群元素 $\{g\mid g\in G\}$，故 $\dim\mathbb{C}[G]=|G|$。
- **右边**：直和 $\bigoplus_{i=1}^{r}M_{n_i}(\mathbb{C})$ 的维数是各分量维数之和。对于每个矩阵环，$\dim M_{n_i}(\mathbb{C})=n_i\times n_i=n_i^2$。

联立得 Burnside 定理（维数公式）：

$$|G|=\sum_{i=1}^{r}n_i^2=\sum_{i=1}^{r}(\dim V_i)^2$$

□

3. **双边模与张量积视角的证明**. 我们要证明 $M_n(\mathbb{C})\cong V^\vee\otimes V$ 作为双边模（即 $G\times G$ 的表示）。

第一步：向量空间的同构
根据线性代数，线性映射空间与张量积有自然同构 $\Psi:V^*\otimes V\to\mathrm{End}(V)$：

$$\Psi(\alpha\otimes v)(u):=\alpha(u)\cdot v$$

其中 $\alpha\in V^*,v,u\in V$。这意味着 $n\times n$ 矩阵空间 $M_n(\mathbb{C})$ 本质上就是 $V^*\otimes V$。

第二步：群作用的兼容性
我们将 $\mathbb{C}[G]$ 视为双边模，群作用定义为 $(g,h)\cdot x=gxh^{-1}$（注：右作用通常取逆以满足同态性质）。对应到表示论语言，这即是 $G\times G$ 作用在算子 $T\in\mathrm{End}(V)$ 上：

$$(g,h)\cdot T=\rho(g)\circ T\circ\rho(h)^{-1}$$

现在看张量积 $V^*\otimes V$ 上的作用。

- V 感受左作用：$g\cdot v$。

- V^* 感受右作用（对偶作用）：对于 $\alpha \in V^*$，$(h \cdot \alpha)(u) = \alpha(h^{-1} \cdot u)$。即 α 变换为 $\alpha \circ \rho(h)^{-1}$。

验证映射 Ψ 是否保持这种作用：

$$\begin{aligned}
\Psi((h \cdot \alpha) \otimes (g \cdot v))(u) &= (h \cdot \alpha)(u) \cdot (g \cdot v) \\
&= \alpha(h^{-1}u) \cdot (gv) \\
&= g \cdot [\alpha(h^{-1}u) \cdot v] \\
&= g \cdot [\Psi(\alpha \otimes v)(h^{-1}u)] \\
&= (\rho(g) \circ \Psi(\alpha \otimes v) \circ \rho(h)^{-1})(u)
\end{aligned}$$

这正是矩阵空间的双边作用！因此，作为 $G \times G$ 模，第 i 个分量 $M_{n_i}(\mathbb{C})$ 同构于 $V_i^\vee \otimes V_i$。 □

直观理解：物理/几何直观：Rank 1 分解

公式 $M_n(\mathbb{C}) \cong V^* \otimes V$ 告诉我们，任何矩阵都可以写成形如 $\alpha \otimes v$ 的元素之和。$\alpha \otimes v$ 是一个**秩为 1** 的算符：它像一个“投影”，先用 α 探测输入向量的分量，再把结果投影到 v 的方向上。这在量子力学中对应于 $|v\rangle\langle\alpha|$ 符号。

9 李代数 (Lie Algebras)

定 义 与 基 本 例 子

本章导读

李代数研究的是“无穷小”的对称性，通常来源于李群的切空间。其核心运算是非结合的“李括号”。

9.1 李代数的定义

设 R 为交换环。李代数 $(L, [\cdot,\cdot])$ 是一个 R-模，配备双线性运算 $[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$，满足：

1. **反对称性：** $[x, x] = 0$（隐含 $[x, y] = -[y, x]$）。
2. **Jacobi 恒等式：** $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$。

9.2 重要例子

1. **结合代数导出的李代数**：设 A 为结合代数，定义 $[x, y] = xy - yx$（换位子）。

2. **导子代数 Der(A)**：满足莱布尼茨律 $\phi(xy) = \phi(x)y + x\phi(y)$ 的线性变换集合。

3. **$\mathfrak{sl}_2$ (迹为 0 的** 2×2 **矩阵)**：基底：

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   基本对易关系：

$$[e, f] = h, \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f$$

直观理解：物理意义

在 $\mathfrak{sl}_2$ 中，h 对应哈密顿量（能量算符），e 是升算符（提高本征值），f 是降算符（降低本征值）。这是量子力学角动量理论的基础。