



电路理论

Circuit Theory

作者：Xu Samuel

组织：Shanghai Jiao Tong Univ.

时间：2023.06.05

目录

第 1 章	电路理论	1
1.1	电路理论基础	1
1.1.1	集中参数电路	1
1.1.2	电路变量	1
1.1.3	拓扑约束关系	1
1.1.3.1	电路图论	1
1.1.3.2	基尔霍夫定律	2
1.1.3.3	特勒根定理	3
1.1.4	元件约束关系	3
1.1.4.1	分类	3
1.1.4.2	电阻	3
1.1.4.3	独立电源	4
1.1.4.4	受控源	5
1.1.4.5	运算放大器	5
1.1.4.6	理想变压器	5
1.1.4.7	回转器	6
1.2	电路分析	6
1.2.1	电路分类	6
1.2.2	等效变换	6
1.2.3	回路分析法	7
1.2.4	节点分析法	7
1.2.5	矩阵方法	7
1.2.5.1	一般支路特性方程	7
1.2.5.2	基本回路矩阵	8
1.2.5.3	基本割集矩阵	8
1.2.6	端口特性法	9
1.3	电路定理	9
1.3.1	齐次性定理和叠加原理	9
1.3.2	置换定理	10
1.3.3	戴维南和诺顿定理	10
1.3.4	互易定理	10
1.3.5	最大功率传递定理	11
1.4	动态电路	11
1.4.1	动态元件	11
1.4.2	动态电路分析法	12
1.5	动态电路的时域分析	12
1.5.1	一阶电路分析	12
1.5.2	二阶电路分析	14
1.6	动态电路的复频域分析	14
1.6.1	拉普拉斯变换	14
1.6.2	电路约束的复频域形式	15

1.6.3	复频域电路分析	16
1.7	正弦稳态电路分析	17
1.7.1	相量	17
1.7.2	电路约束的相量形式	17
1.7.3	正弦稳态电路分析	17
1.7.4	正弦稳态电路功率	18
1.8	三相电路	18
1.9	总结	19

第 1 章 电路理论

1.1 电路理论基础

1.1.1 集中参数电路

集中参数元件：当实际电路的尺寸远小于其使用时电磁量的最高工作频率所对应的波长时，可以不必考虑电磁量的空间分布，相应的电路元件称为集中参数元件。

集中参数电路：由集中参数元件组成的电路。集中参数电路可以看成电磁空间的一个点，电路变量是时间的函数。要满足：集中参数条件 $d \ll \lambda$ ，其中 $\lambda = \frac{c}{f}$ 。亦称集总电路。

分布参数电路：电路变量是时间、空间的函数。

1.1.2 电路变量

表 1.1: 电路变量

电路变量	定义	单位	参考方向	实际方向
电流 $i(t)$	$\frac{dq}{dt}$	安培 A	假定为正电荷运动的方向	正电荷运动的方向
电压 $u(t)$	$\frac{dw}{dq}$	伏特 V	假定为电位降低的方向	电位降低的方向

当参考方向与实际方向相同，值为正；反之，值为负。

关联参考方向：电流的参考方向与电压的参考方向一致

取关联参考方向时，一段支路吸收的功率为

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt}$$

单位为瓦特 W

1.1.3 拓扑约束关系

1.1.3.1 电路图论

网络图 G ：一组节点和一组支路的集合，且每条支路的两端终止在两个节点上。

连通图：图中的任意两节点之间至少存在一条由支路构成的路径，则称该图为连通图，否则为非连通图。

有向图：图中的每一条支路规定一个方向所得到的图。

平面图：如果将图画在平面上，且不出现两条支路交叉于一个非节点处，那么称图为平面图。

子图 G_i ：每个节点都是 G 中的节点，每条支路都是 G 中的支路。

回路：连通子图，且每个节点关联的支路数恰好是 2 条

网孔：平面图的回路，且回路所限定的区域内没有支路

树：对任意一个连通图 G ，如果其子图 G_i 满足：连通；包含 G 中所有节点；不包含回路，则称 G_i 为 G 的一个树。设 G 有 n 个节点， b 条支路，构成树的各支路称为树支，有 $n-1$ 条，其余支路称为连支，有 $b-n+1$ 条。

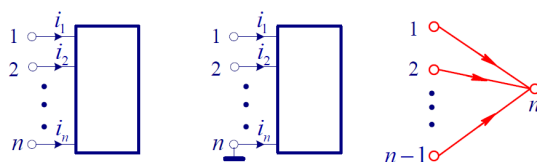
基本回路：在选定树之后，如果每次只接上一条连支，就可以形成由一条连支和其他有关树支组成的回路，该回路称为基本回路。设 G 有 n 个节点， b 条支路，则有 $b-n+1$ 个基本回路。

割集：连通图 G 的割集是一组不包括节点的支路集合，其满足若移去该集的所有支路，则 G 成为两个独立的部分；若保留其中任一支路不去掉，剩下的图仍是连通的。

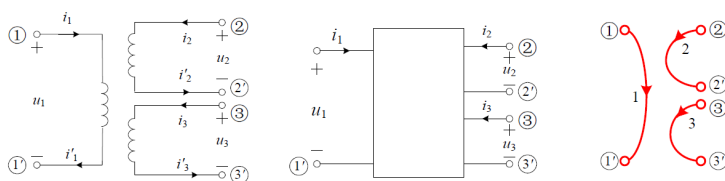
基本割集：仅包含一条树支的割集称为基本割集。设 G 有 n 个节点， b 条支路，则有 $n - 1$ 个基本割集。

如何将电路化为电路拓扑图？对于二端元件，可以直接用一条支路来表示，如果各支路都有参考方向，则可用有向图来表示，反之则用无向图来表示。对于多端元件，可以选取任一端钮作为参考节点，剩下的端钮与之建立支路。对于多端元件的两个端钮，如果在任一时间，从一个端钮流入的电流等于从另一个端钮流出的电流，则称这两个端钮为一个端口。对于多端口元件，可以在每个端口内部建立支路。有了各类元件的有向图后，就能将电路转化为电路拓扑图。

n 端元件及其有向图：



多端口元件及其有向图：



1.1.3.2 基尔霍夫定律

定理 1.1 (KCL)

对于集总电路的任一节点，在任一时刻流入该节点的电流之和等于流出该节点的电流之和

$$\sum i(t) = 0$$

对于任一割集，任一闭合面，上式同样也成立



定理 1.2 (KVL)

对于集总电路的任一回路，在任一时刻，沿回路的各支路电压的代数和为零：

$$\sum u(t) = 0$$



对于任何一个电路，转换为网络图 G ，设 G 有 n 个节点， b 条支路：

- 基本割集数为 $n - 1$ ，独立 KCL 方程为 $n - 1$ 个
- 基本回路数为 $b - n + 1$ ，独立 KVL 方程为 $b - n + 1$ 个

KCL、KVL（拓扑约束）提供的独立方程数为 b ，电流和电压未知量个数为 $2b$ ，剩下 b 个独立方程由元件约束（VCR）提供。

关联矩阵 \mathbf{A}_a ：描述图中节点对支路关联关系的矩阵。设 n_i 代表节点， b_k 代表支路，箭头代表参考电流方向

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & b_k \leftarrow n_i \\ -1 & b_k \rightarrow n_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

定理 1.3 (KCL 矩阵形式)

设 i_b 为各支路电流；关联矩阵的秩 $r(\mathbf{A}_a) = n - 1$

$$\mathbf{A}_a \mathbf{i}_b = 0$$

将 \mathbf{A}_a 划去一行变为 \mathbf{A} ，称为降阶关联矩阵；降阶关联矩阵满秩

$$\mathbf{A} \mathbf{i}_b = 0$$

**定理 1.4 (KVL 矩阵形式)**

设 u_b 为各支路电压， u_n 为取某节点为参考节点的其余各节点电压，要求 \mathbf{A} 被划去的一行对应该参考节点

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_n$$



为什么要用矩阵形式？用“量”来表达电路的图信息：

- 用“量”表达图中节点与支路之间的关系，亦即表达了电路的图信息——关联矩阵。
- 用“量”表达图中基本回路与支路之间的关系——基本回路矩阵。
- 用“量”表达图中基本割集与支路之间的关系——基本割集矩阵。

1.1.3.3 特勒根定理**定理 1.5 (功率定理)**

设集总电路具有 b 个元件， n 个节点，各元件电压、电流为关联参考方向，则

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0$$

**定理 1.6 (似功率定理)**

设两个结构完全相同的集总电路具有 b 个元件， n 个节点，各元件电压、电流为关联参考方向，则

$$\sum_{k=1}^b u_k^1(t) i_k^2(t) = 0$$

$$\sum_{k=1}^b u_k^2(t) i_k^1(t) = 0$$

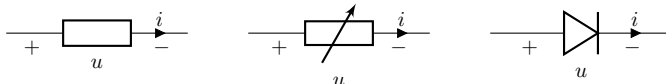
$$\sum_{k=1}^b u_k(t_1) i_k(t_2) = 0$$



上述定理可通过 KCL、KVL 的矩阵形式证明。

1.1.4 元件约束关系**1.1.4.1 分类**

无源元件： $\forall t, w(t) \geq 0$ ，反之为有源元件

1.1.4.2 电阻

电阻是一个二端元件，VCR为曲线

$$f(u, i) = 0$$

线性电阻：VCR 为 $u(t) = Ri(t)$ 或 $i(t) = Gu(t)$ ，其中 R 为电阻， G 为电导

非线性电阻：比如二极管、隧道二极管、充气二极管。有两种表示方式，静态电阻和动态电阻。

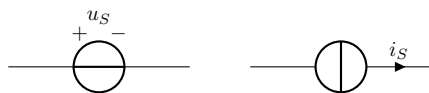
理想二极管：VCR 为

$$\begin{cases} u = 0, & i \geq 0 \\ i = 0, & u \leq 0 \end{cases}$$

功率： $p = ui = i^2 R = \frac{u^2}{R}$

能量： $w(t) = \int_{-\infty}^t p(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^t u(\xi) i(\xi) d\xi$

1.1.4.3 独立电源



电压源：二端元件，VCR为 $u = u_s$ ，不允许短路 电流源：二端元件，VCR为 $i = i_s$ ，不允许开路
有几种典型的独立源信号波形，包括单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 、单位冲激函数 $\delta(t)$ 等：

单位阶跃函数

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

延时单位阶跃函数

$$\varepsilon(t - t_0)$$

单位冲激函数（狄拉克函数）

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

单位延时冲激函数

$$\delta(t - t_0)$$

单位斜坡函数

$$r(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) d\tau$$

单位对偶冲激函数

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

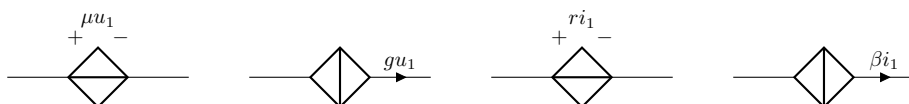
冲激函数是用强度而非幅度来表征的。冲激函数是阶跃函数的导数。冲激函数具有筛分性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

任意波形可以用冲激函数的积分来表示

$$f(t) = \int_0^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

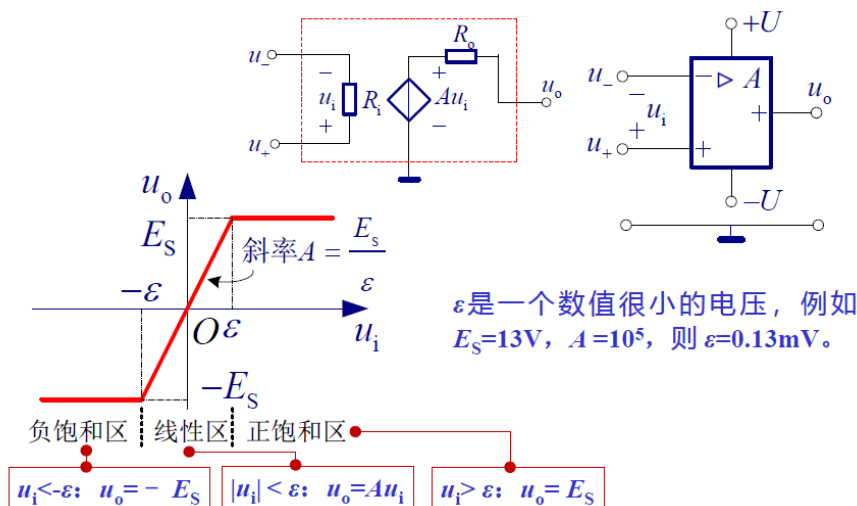
1.1.4.4 受控源



受控源是一种双口电路元件，它含有两条支路：控制支路和受控支路。受控支路的电压或电流受控制支路电压或电流的控制。根据控制量和被控量的电路变量类型分为以下几种：

- VCVS: $i_1 = 0$, $u_2 = \mu u_1$, 电压放大倍数 μ
- CCVS: $u_1 = 0$, $u_2 = r i_1$, 转移电阻 r
- VCCS: $i_1 = 0$, $i_2 = g u_1$, 转移电导 g
- CCCS: $u_1 = 0$, $i_2 = \beta i_1$, 电流放大倍数 β

1.1.4.5 运算放大器

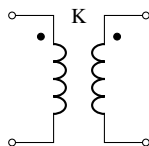


线性区的电路模型： R_i 表示运算放大器两输入端间的输入电阻； R_o 表示运算放大器的输出电阻。

理想运放只工作在线性区，其 VCR 包含两个条件：**虚短路**： $A \rightarrow +\infty$ ，则 $u_i \rightarrow 0$ ；**虚断路**： $R_i \rightarrow 0$ ， $R_o \rightarrow 0$ ，则 $i_1 \rightarrow 0$

运放的负反馈接法：以同相放大器为例，可以保证运放工作在线性区。

1.1.4.6 理想变压器



理想变压器是二端口元件，是铁芯变压器的理想化模型，它的唯一参数只是一个称之为变比的常数 n 。图中标有“.”的两个端钮称为同名端，用来表示线圈的相互位置和绕向关系。它是一个非能元件。可用于阻抗变换。

设变比 n ，则电压-电流的关系为

$$u_1 = n u_2$$

$$i_1 = -\frac{1}{n} i_2$$

1.1.4.7 回转器

它是一个非能元件。可用于电感和电容之间的回转。

电压-电流的关系为

$$u_1 = -ri_2$$

$$u_2 = ri_1$$

1.2 电路分析

1.2.1 电路分类

电路按照以下特性分类：

线性——非线性：电路列出的方程是线性方程——电路列出的方程是非线性方程

时变——非时变：含时变元件，列出的方程参数随时间变化——所含元件全是非时变元件，列出的方程参数不随时间变化

电阻——动态：不含动态元件，列出的方程为代数方程——所含元件全是非时变元件，列出的方程为微分方程或积分方程

1.2.2 等效变换

n 端电路需 $n - 1$ 个方程来描述其外特性（VCR）

如果两个端点一一对应的 n 端电路N1和N2具有相同的外特性，则二者相互等效，并互称等效电路。从一个网络变换成它的等效网络，称等效变换。

线性电阻串联：等效为电阻 $R = \sum R_i$

线性电阻并联：等效为电阻 $G = \sum G_i$

电压源并联：等效为电源 $u = \sum u_{si}$

电流源串联：等效为电源 $i = \sum i_{si}$

电压源与电流源串联：等效为电源 $i = i_s$

电压源和电流源并联：等效为电源 $u = u_s$

电压源与线性非时变电阻的串联：戴维南支路 $u = u_s - Ri$

电流源与线性非时变电阻的并联：诺顿支路 $i = i_s - Gu$

诺顿支路和戴维南支路互为等效： $u_S = Ri_S, \frac{1}{G} = R$

无伴电源可以转移：无伴电压源支路可以转移到与之任一端连接的所有支路中与各电阻串联，原支路短路。无伴电流源支路可以转移到与之形成回路的任一回路中的所有支路中与各电阻并联，原支路开路。

所有含有独立电源和线性非时变电阻的单端口电路都可以等效变换成戴维南支路和诺顿支路。如何变换？利用诺顿支路和戴维宁支路互相转化和无伴电源转移。

T 形网络和 Π 形网络的等效变换

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

对称网络化简：等电压节点可短路，零电流支路可断路

含有受控源的网络化简：类似含有独立电源网络化简。

1.2.3 回路分析法

1. 设回路/网孔电流为未知量：引入 $b - n + 1$ 个独立电流未知量，自动满足 KCL
2. 列 KVL： $b - n + 1$ 个方程，引入额外的电压未知量
3. 用 VCR 做代入消元：消去额外的电压未知量
4. 解方程：解出电流未知量
5. 由解得的回路/网孔电流求出支路电流、电压

对于有 m 个回路的线性电阻电路，将最后 m 个方程写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{m1} & \cdots & R_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ \vdots \\ i_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{S11} \\ \vdots \\ u_{Smm} \end{bmatrix}$$

简记为

$$\mathbf{RI} = \mathbf{U}_S$$

- 对角元素 R_{kk} ：回路 k 中所有电阻的总和，称为回路 k 的自电阻。自电阻总为正。
- 非对角元素 R_{kj} ：回路 k 和回路 j 公共支路的电阻，称为互电阻。互电阻可正可负。如果回路电流在公共支路上的方向相同，则互电阻取正，相反则取负。
- 右边常数项 u_{Skk} ：回路 k 中所有的电压源电压升的代数和。电流源可以转化成电压源。

1.2.4 节点分析法

1. 设节点电压为未知量：引入 $n - 1$ 个电压未知量，自动满足 KVL
2. 列 KCL： $n - 1$ 个独立方程，引入额外的电流未知量
3. 用 VCR 做代入消元：消去额外的电流未知量
4. 解方程：解出电压未知量
5. 求出支路电流、电压

对于有 n 个独立节点的线性电阻电路，将最后的 n 个方程写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n1} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{S11} \\ \vdots \\ i_{Snn} \end{bmatrix}$$

简记为

$$\mathbf{GU} = \mathbf{I}_S$$

- G_{kk} ：与节点 k 相关联支路的电导的总和，称为节点 k 的自电导。自电导总为正。
- G_{kj} ：连接在节点 k 、 j 之间的各支路电导总和的负值，称为节点 k 、 j 间的互电导。互电导总为负。
- 右边常数项 i_{Skk} ：流入节点 k 的所有电流源电流的代数和（流入节点的电流取正号，流出节点的电流取负号）。电压源可以转化成电流源。

1.2.5 矩阵方法

1.2.5.1 一般支路特性方程

$$\begin{cases} \mathbf{u}_b = \mathbf{R}_b \mathbf{i}_b - \mathbf{R}_b \mathbf{i}_S + \mathbf{u}_S \\ \mathbf{i}_b = \mathbf{G}_b \mathbf{u}_b - \mathbf{G}_b \mathbf{u}_S + \mathbf{i}_S \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_b = \begin{bmatrix} G_1 & & \\ & \ddots & \\ & & G_b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_S = [u_{S1}, u_{S2}, \dots, u_{Sb}]^T$$

$$\mathbf{i}_S = [i_{S1}, i_{S2}, \dots, i_{Sb}]^T$$

1.2.5.2 基本回路矩阵

基本回路：在选定树之后，如果每次只接上一条连支，就可以形成由一条连支和其他有关树支组成的回路，该回路称为基本回路。设 G 有 n 个节点， b 条支路，则有 $b - n + 1$ 个基本回路。

对于一个具有 b 条支路（branches）， l 个基本回路（loops）的连通图，定义基本回路矩 $\mathbf{B} = [b_{ik}]_{l \times b}$ ，其行对应基本回路，列对应支路，且

$$b_{ik} = \begin{cases} 1 & b_k \in l_i, \text{ 同向} \\ -1 & b_k \in l_i, \text{ 异向} \\ 0 & b_k \notin l_i \end{cases}$$

前 l 列取连支，后 $b - l$ 列取树支，则 \mathbf{B} 有以下形式

$$\mathbf{B} = [\mathbf{1}_l \quad \mathbf{B}_t]$$

KVL:

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_b = [\mathbf{1}_l \quad \mathbf{B}_t] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} = \mathbf{u}_l + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t = 0$$

KCL:

$$\mathbf{i}_b = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_l$$

1.2.5.3 基本割集矩阵

基本割集：仅包含一条树支的割集称为基本割集。设 G 有 n 个节点， b 条支路，则有 $b - n + 1$ 个基本割集。

对一个支路（branches）数为 b 、割集（cutsets）数为 c 的连通图，定义一个基本割集矩阵 $\mathbf{Q} = [q_{ik}]_{c \times b}$ ，其中行对应割集，列对应支路，且

$$q_{ik} = \begin{cases} 1 & b_k, c_i \text{ 有关联, 同向} \\ -1 & b_k, c_i \text{ 有关联, 异向} \\ 0 & b_k, c_i \text{ 无关联} \end{cases}$$

KCL:

$$\mathbf{Q}\mathbf{i}_b = 0$$

KVL:

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}_t$$

1.2.6 端口特性法

主要分析线性二端口电路的端口特性方程。

表 1.2: 二端口参数组合

非独立变量 y_1, y_2	独立变量 x_1, x_2	参数矩阵 \mathbf{P}
u_1, u_2	i_1, i_2	开路电阻矩阵 \mathbf{R}
i_1, i_2	u_1, u_2	短路电导矩阵 \mathbf{G}
u_1, i_2	i_1, u_2	混合参数矩阵 \mathbf{H}
i_1, u_2	u_1, i_2	混合参数矩阵 $\hat{\mathbf{H}}$
u_1, i_1	$u_2, -i_2$	传输参数矩阵 \mathbf{A}
u_2, i_2	$u_1, -i_1$	传输参数矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

参数矩阵互化：对下式作行列变换

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$$

二端口电路串联：

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$$

二端口电路并联：

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$$

二端口电路 1 串 2 并：

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$$

二端口电路 1 并 2 串：

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}_1 + \hat{\mathbf{H}}_2$$

注意，上述公式成立是有条件的，串联后端口电流约束条件必须得到保证。

二端口电路级联：（无条件成立）

$$\mathbf{A} = \prod \mathbf{A}_i$$

1.3 电路定理

1.3.1 齐次性定理和叠加原理

齐次性定理和叠加原理是线性网络具有的基本性质。在线性电路中激励和响应之间具有线性性质。

定理 1.7 (齐次性定理)

在只有一个激励（电压源和电流源） w 的线性电阻电路中，取电路中任意支路电流或支路电压为响应 y ，当激励增大或缩小 a 倍（ a 为实数）时，响应也将同样增大或缩小 a 倍。齐次性定理只在电路具有唯一解的假定下才能成立。



对单一激励的线性、非时变电路，指定响应对激励之比定义为**网络函数**，记为 H 。若响应与激励在同一端口，则 H 属策动点函数；若响应与激励不在同一端口，则 H 属转移函数。

定理 1.8 (叠加定理)

在线性电路（由线性电阻、线性受控源、独立源组成）中，任一支路电流（或电压）都是电路中各个独立电源单独作用时，在该支路产生的电流（或电压）的代数和。设 $y(t)$ 为电流/电压响应， M 为激励总数， H_k 为网络函数， $x_k(t)$ 为电压源/电流源激励，则

$$y(t) = \sum_{k=1}^M H_k x_k(t)$$

单独作用指的是一个电源作用，其余不作用；不作用的电压源短路，不作用的电流源开路。叠加定理只在电路具有唯一解的假定下才能成立。



1.3.2 置换定理

定理 1.9 (置换定理)

在具有唯一解的任意线性或非线性网络中，若已知第 k 条支路的电压和电流为 u_k 和 i_k ，则不论该支路是什么元件组成的，总可以用下列的任何一个元件去置换：电压值为 u_k 的电压源；电流值为 i_k 的电流源。置换后电路的全部电压和电流都保持原值不变。



应用置换定理需要回答：置换什么？用什么置换？置换条件？

1.3.3 戴维南和诺顿定理

定理 1.10 (戴维南定理)

任何一个含独立电源和线性电阻、受控源的一端口电路，就其端口来说，都可以等效为一个电压源 u_{OC} 串联电阻 R_o 支路。开路电压 u_{OC} 和短路电流 i_{SC} ，满足 $R_o = u_{OC}/i_{SC}$ 。



定理 1.11 (诺顿定理)

任何一个含独立电源和线性电阻、受控源的一端口电路，就其端口来说，都可以等效为一个电流源 i_{SC} 并联电导 G_o 支路。



简单叙述一下戴维南定理的证明过程：设电路内部含有 n 个独立电源 w_k ，由叠加定理 $u = Hi + \sum H_k w_k$ ，式中 $H = -R_o$ ， $\sum H_k w_k = u_{OC}$ ，从而证明了戴维南定理。

在证明戴维南定理和诺顿定理时用到了叠加定理，说明定理只适用于线性一端口电路。此外，如果一端口电路和外部电路之间存在控制量和受控电源的控制关系时，戴维南定理和诺顿定理不适用。最后，并非所有含独立电源的一端口电路都存在等效的戴维南或诺顿支路，比如电流源和电阻串联（ u_{OC} 不存在）、电压源和电阻并联（ i_{SC} 不存在）。

求电路的戴维南或诺顿等效电路以及其等效电阻，第一种方法是应用前面提到的等效变换方法求解；第二种方法是应用支路分析法、网孔分析法、节点分析法、叠加定理等方法求解；第三种方法，断路求开路电压，短路求短路电流，进而求出等效电阻；第四种方法，在端口处外加电流源或电压源，独立源置零，受控源保留，求端口电压或电流，进而求等效电阻，这个方法用到了叠加定理。

1.3.4 互易定理

互易电路：对于不含独立电源的电路，其激励端口和响应端口互易后描述该电路端口特性的响应特性不变。

定理 1.12 (互易定理 1)

互易电路，如果在端口 1 施加电压源激励 u_{S1} ，在端口 2 得到电流响应 i_2 ；反之，在端口 2 施加电压源激励 u_{S2} ，在端口 1 得到电流响应 i_1 ；在电路具有唯一解的情况下，有

$$\frac{i_2}{u_{S1}} = \frac{i_1}{u_{S2}}$$

**定理 1.13 (互易定理 2)**

互易电路，如果在端口 1 施加电流源激励 i_{S1} ，在端口 2 得到电压响应 u_2 ；反之，在端口 2 施加电流源激励 i_{S2} ，在端口 1 得到电压响应 u_1 ；在电路具有唯一解的情况下，有

$$\frac{u_2}{i_{S1}} = \frac{u_1}{i_{S2}}$$

**定理 1.14 (互易定理 3)**

互易电路，如果在端口 1 施加电流源激励 i_{S1} ，在端口 2 得到电流响应 i_2 ；反之，在端口 2 施加电压源激励 u_{S2} ，在端口 1 得到电压响应 u_1 ；在电路具有唯一解的情况下，有

$$\frac{i_2}{i_{S1}} = \frac{u_1}{u_{S2}}$$



互易定理可用特勒根定理证明。

对互易二端口电路，下面的关系成立： $r_{12} = r_{21}$ ， $g_{12} = g_{21}$ ， $h_{12} = -h_{21}$ ， $\hat{h}_{12} = -\hat{h}_{21}$ ， $|\mathbf{A}| = |\hat{\mathbf{A}}| = 1$

1.3.5 最大功率传递定理

定理 1.15 (最大功率传递定理)

由含独立电源线性单口网络传递给负载 R_L 的功率为最大的条件是：负载 R_L 应与戴维南（或诺顿）等效电阻相等。



1.4 动态电路

1.4.1 动态元件

电容：一个二端元件，如果在任一时刻 t ，它的电荷 $q(t)$ 同它的端电压 $u(t)$ 之间的关系可以用 $u-q$ 平面上的一条曲线来确定，则此二端元件称为电容元件。特性方程为 $q = Cu$ ，伏安关系为

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad (t \geq t_0)$$

电容具有连续性质：电容电压不能跃变，即若 $i(t)$ 在 $[t_a, t_b]$ 内有界， $u_C(t) \in C(t_a, t_b)$ 。电容具有记忆性质，即电容电压取决于电流的全部历史。一个已充电电容等效于一个未充电电容与电压源串联的电路。电容的储能为 $w = Cu^2/2$ 。电容串联 $1/C = \sum 1/C_i$ ，电容并联 $C = \sum C_i$ 。

电感：一个二端元件，如果在任一时刻 t ，它的电流 $i(t)$ 同它的磁链 $\psi(t)$ 之间的关系可以用 $i-\psi$ 平面上的一条曲线来确定，则此二端元件称为电感元件。特性方程为 $\psi = Li$ ，伏安关系为

$$u = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \quad (t \geq t_0)$$

电感具有连续性质：电感电流不能跃变。电感具有记忆性质，即电感电流取决于电压的全部历史。一个有初始电流的电感等效于一个初始电流为零的电感与电流源并联的电路。电感的储能为 $w = Li^2/2$ 。电感并联 $1/L = \sum 1/L_i$ ，电感串联 $L = \sum L_i$ 。

注意：若冲激电流通过电容，电容电压可以跃变；若冲激电压加于电感，电感电流可以跃变。

耦合电感：一个二端口元件，自感互感方向相同（“.” 号在同侧），则

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

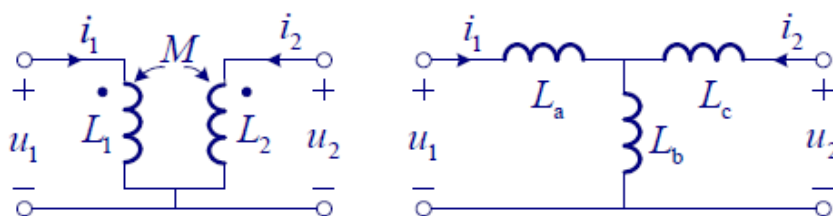
自感互感方向相反（“.” 号在异侧），则

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

全耦合时， $M_{max} = \sqrt{L_1 L_2}$ ；定义耦合系数 $k = M/M_{max}$ 。耦合电感可以进行去耦 T 形等效，若反接则 M 取负。

$$L_b = M, \quad L_a = L_1 - M, \quad L_c = L_2 - M$$

去耦 T 形等效可以推导出耦合电感并联和串联等效电感公式。



1.4.2 动态电路分析法

时域分析法：经典法、状态变量法、卷积积分、数值法

复频域分析法：拉普拉斯变换法、状态变量法、傅里叶变换

换路：电路拓扑发生改变。在电路分析中，换路瞬间完成，并将换路时刻作为分析计算的开始时间。电容电压、电感电流满足换路定理：

$$u(t_{0+}) = u(t_{0-}) + \frac{1}{C} \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} i(\tau) d\tau$$

$$i(t_{0+}) = i(t_{0-}) + \frac{1}{L} \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} u(\tau) d\tau$$

初始状态：求解电路微分方程初始条件所必需的电容电压、电感电流的初始值。

电路的**全响应**等于**零输入响应**（没有外加输入、仅由非零初始状态引起的响应）加上**零状态响应**（零初始状态，仅由外加输入引起的响应）。

1.5 动态电路的时域分析

1.5.1 一阶电路分析

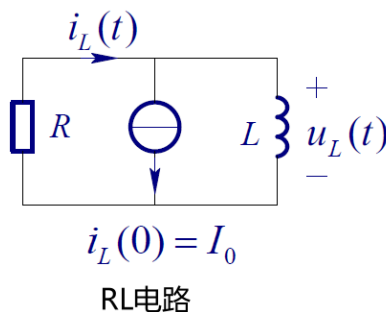
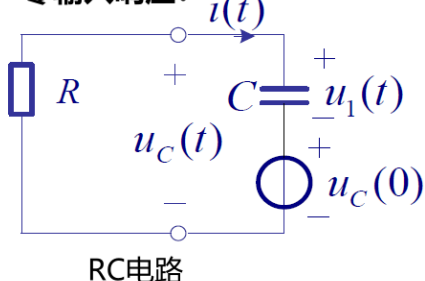
一阶电路：可用一阶微分方程（状态方程）描述电路随时间演化的状态的电路称为一阶电路。比如 RC 电路、RL 电路，它们的微分方程可写成：

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = Y_0$$

其中, y 为一阶电路的状态变量。 τ 称为时间常数。对于 RC 电路来说, $y = u_C$, $\tau = RC$; 对于 LC 电路来说, $y = i_L$, $\tau = L/R$ 。零输入响应为

$$y(t) = y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0)$$

零输入响应:



直流激励下的零状态响应为

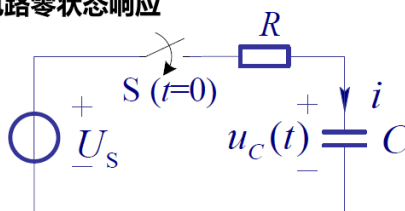
$$y(t) = y(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t \geq 0)$$

单位阶跃输入 $\varepsilon(t)$ 作用下的零状态响应为

$$y(t) = y(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$$

单位冲激输入 $\delta(t)$ 作用下的零状态响应, 即上式对时间求导。

RC电路零状态响应



直流激励下的全响应为

$$y(t) = y(\infty) + [y(0_+) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

定理 1.16 (线性一阶电路叠加定理)

电路的全响应等于零输入响应加上零状态响应, 零输入响应和零状态响应都满足线性性。

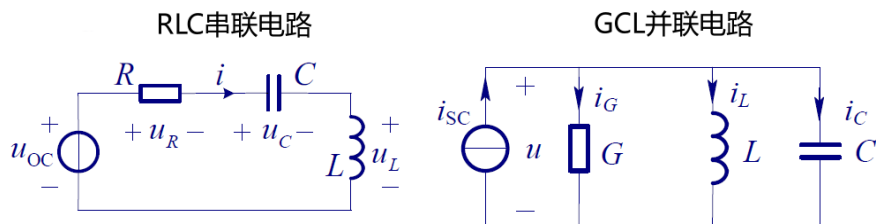


三要素法可用于电路任一变量的零输入响应和直流作用下的零状态响应、全响应。该方法将一阶电路的状态变量 y 从仅限于 RC 电路的 u_C , 和 RL 电路的 i_L 拓展到任意电路变量, 可通过叠加定理证明。其步骤为:

- 利用置换定理求初始值
- 用开路代替电容、短路代替电感, 求稳态值
- 计算电路的时间常数
- 根据三要素, 写出表达式

$$y(t) = y(\infty) + [y(0_+) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

1.5.2 二阶电路分析



RLC 串联电路对应的微分方程为

$$\ddot{u}_C + \frac{R}{L}\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

特征根为

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

记 $R_d = 2\sqrt{L/C}$, 有以下几种情况

- 过阻尼: 不等负实根, $R > R_d$
- 临界阻尼: 相等负实根, $R = R_d$
- 欠阻尼: 共轭复数根, $R < R_d$

以过阻尼为例, 其全响应为 $u_C(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + U_S$ 。

GCL 并联电路可类似地分析。

1.6 动态电路的复频域分析

1.6.1 拉普拉斯变换

信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

拉普拉斯逆变换为

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

f 称为原函数, F 称为象函数。常见函数的拉氏变换:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n$$

$$\mathcal{L}[\varepsilon(t)] = s^{-1}$$

$$\mathcal{L}[t] = s^{-2}$$

$$\mathcal{L}[t^n/n!] = s^{-(n+1)}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{s + \alpha}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} t^n/n!] = \frac{1}{(s + \alpha)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos \omega t] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

拉氏变换的基本性质：已知 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$

- 线性性质 $\mathcal{L}[af + bg] = aF + bG$
- 微分性质 $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0_-)$
- 积分性质 $\mathcal{L}[\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau] = F(s)/s$
- 时移性质 $\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s)$
- 频移性质 $\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha)$
- 初值定理 $f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
- 终值定理 $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
- 卷积定理 $\mathcal{L}[f * g] = F(s)G(s)$

拉普拉斯逆变换法：展开为简单分式之和，再逐项求出其拉普拉斯变换

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} \\ &= B_{m-n} s^{m-n} + \cdots + B_1 s + B_0 + \frac{N_1(s)}{D(s)} \end{aligned}$$

前面几项可以逆变换为冲激函数及其各阶导数之和。 $D(s) = 0$ 的根称为 $F(s)$ 的极点，分三种情况：互异实根、共轭复根、重根。

当为互异实根时，可以通过待定系数法拆成几项形如 $\frac{k_i}{s - s_i}$ 的项，对应原函数 $k_i e^{s_i t}$ 。

当为共轭复根时，可以通过配方法拆成形如 $\frac{k_1 s + k_2}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$ ，通过 $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$ 和 $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos \omega t] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$ 求原函数。

当出现重根时，利用 $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} t^n / n!] = \frac{1}{(s + \alpha)^{n+1}}$ 求原函数。

1.6.2 电路约束的复频域形式

KCL, KVL 形式不变

$$\sum I(s) = 0$$

$$\sum U(s) = 0$$

电阻 VCR 形式不变

$$U_R(s) = R I_R(s)$$

电容 VCR 为

$$U_C(s) = \frac{u_C(0_-)}{s} + \frac{1}{sC} I_C(s)$$

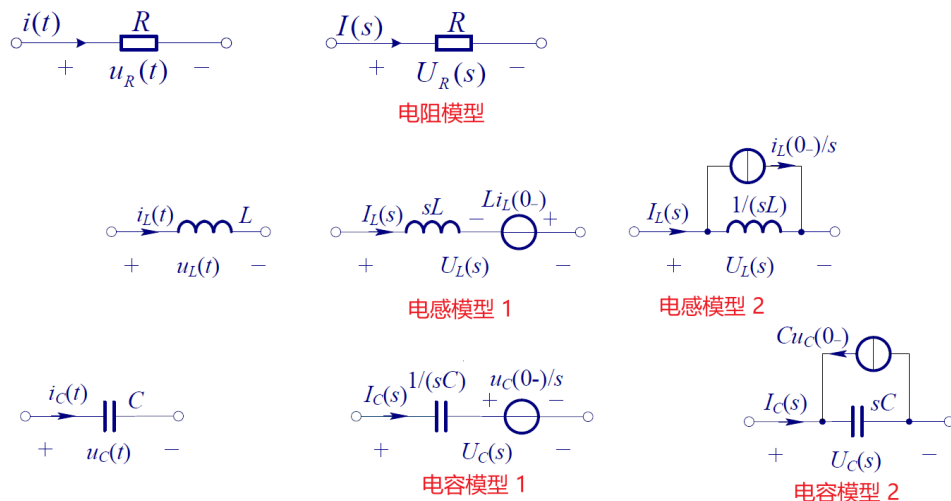
电感 VCR 为

$$I_L(s) = \frac{i_L(0_-)}{s} + \frac{1}{sL} U_L(s)$$

耦合电感 VCR 为

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) - i_1(0_-)/s \\ I_2(s) - i_2(0_-)/s \end{bmatrix}$$

各元件的 s 域模型：（戴维宁电路模型或诺顿电路模型）



各元件的 s 域模型可以这样记忆：首先，将一个有初始电压的电容等效为一个零状态电容串联一个电压源 $u_C(0_-)\varepsilon(t)$ ，或者一个零状态电容并联一个反向的冲激电流源 $Cu_C(0_-)\delta(t)$ （相当于在 0 时刻给电容瞬间充电到初始电压）；将一个有初始电流的电感等效为一个零状态电感并联一个电流源 $i_L(0_-)\varepsilon(t)$ ，或者一个零状态电容串联一个反向的冲激电压源 $Li_L(0_-)\delta(t)$ （相当于在 0 时刻让电感瞬间带有一个初始电流）。然后再把上面这些等效电路转成 s 域模型。

1.6.3 复频域电路分析

s 域分析步骤：首先作 s 域模型图，利用 s 域 KCL、KVL、VCR 分析，然后求拉普拉斯逆变换。

广义阻抗： $Z(s) = U(s)/I(s)$ ，对于零状态情况下的电容来说 $Z(s) = 1/sC$ ，对于电感来说 $Z(s) = sL$ ；广义导纳： $Y(s) = I(s)/U(s)$ ，对于零状态情况下的电容来说 $Y(s) = sC$ ，对于电感来说 $Y(s) = 1/sL$ 。

网络函数：在 s 域，单一激励情况下的网络函数定义为

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{零状态响应}]}{\mathcal{L}[\text{激励}]} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = [N(s)/D(s)] \cdot [P(s)/Q(s)] = \frac{A(s)}{B(s)}$$

$B(s) = 0$ 的根，为 $Y(s)$ 的极点——决定零状态响应各分量随时间变化的规律； $A(s) = 0$ 的根，为 $Y(s)$ 的零点——决定零状态响应各分量的大小； $D(s)$ 为电路的特征多项式， $D(s) = 0$ 的根为特征根或固有频率，也是网络函数的极点——决定固有响应随时间变化的规律； $Q(s) = 0$ 的根——决定强制响应各分量随时间变化的规律。

极零点图：将网络函数的零点和极点标示在 s 平面上。通常用“○”表示零点，用“×”表示极点。极点分布与冲激响应（ $X(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ ）有一定的关系：

- 极点全都在 s 平面的开左半平面上——电路渐近稳定
- 有一个实极点或一对共轭复极点在 s 平面的开右半平面上——电路不稳定
- 极点全在 s 平面的闭左半平面上，且位于虚轴上的为单极点——电路临界稳定或振荡
- 极点全都在 s 平面的闭左半平面上，且位于虚轴上的为重极点——电路不稳定

电路变量的固有频率是零输入响应象函数 $Y(s)$ 的极点，电路中所有电路变量的固有频率组成电路的固有频率，固有频率数取决于电路的独立储能元件数，关于电路的固有频率数有以下的结论：对于无源 RLC 电路，固有频率数 $n = n_C + n_L - l_C - q_L$ ，这四项分别为电容元件数、电感元件数、相互独立的全电容回路数、相互独立的全电感割集数；对于有源电路， $0 \leq n \leq n_C + n_L - l_C - q_L$ 。

1.7 正弦稳态电路分析

1.7.1 相量

相量是正弦量的一种数学表示, 对于给定的正弦量 (电压或电流) $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$, 略去共有的 $e^{j\omega t}$, 可以写成相量形式 $\dot{X}_m = X_m e^{j\varphi} = X_m \angle \varphi$ 。

考虑到瞬时值不能刻画周期量的整体大小和做功的能力, 人为引入**有效值**的概念, 有效值规定为

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$$

正弦量有效值 $X = X_m / \sqrt{2}$, 对应的有效值相量为 $\dot{X} = X \angle \varphi$

- 线性性质: 若 $f_1(t)$ 对应相量 \dot{A}_1 , $f_2(t)$ 对应相量 \dot{A}_2 , 则 $a f_1 + b f_2$ 对应 $a \dot{A}_1 + b \dot{A}_2$
- 微分性质: 若 $f(t)$ 对应相量 \dot{A} , 则 $f'(t)$ 对应 $j\omega \dot{A}$

这两个性质再求解常系数微分方程在正弦激励下的特解很管用, 考虑常系数微分方程

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

引入相量 \dot{A} 和 \dot{X} , 则微分方程可化为代数方程

$$[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_n] \dot{X} = \dot{A}$$

在实际分析电路中, 可跳过列微分方程这一步, 而直接建立电路的相量模型。

1.7.2 电路约束的相量形式

KCL, KVL 形式不变

$$\sum \dot{I} = 0$$

$$\sum \dot{U} = 0$$

电阻 VCR 形式不变

$$\dot{U} = R \dot{I}$$

电容 VCR 为

$$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}$$

电感 VCR 为

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I}$$

耦合电感 VCR 为

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

特别地, 对于铁心变压器 (满足 $M = \sqrt{L_1 L_2}$, $\sqrt{L_1 / L_2} = n$, $L_1, L_2 \rightarrow \infty$)

$$\dot{U}_1 = n \dot{U}_2$$

$$\dot{I}_1 = -\frac{1}{n} \dot{I}_2$$

1.7.3 正弦稳态电路分析

分析步骤: 首先作相量模型图, 应用一般电路分析方法进行分析, 然后将结果转换为时域形式。

阻抗: $Z = \dot{U} / \dot{I}$, 对于电容来说 $Z = 1 / j\omega C$, 对于电感来说 $Z(s) = j\omega L$; **广义导纳:** $Y = \dot{I} / \dot{U}$, 对于电容来说 $Y = j\omega C$, 对于电感来说 $Y = 1 / j\omega L$ 。

相量图法：通过作电路中各相量的相量图来定性分析电路，分析步骤：先在复数坐标中画出参考相量，一般绘在实轴上。参考相量可选电压相量，也可选电流相量，然后利用元件 VCR、KVL、KCL 求出其他相量，并绘在复数坐标中，最后比较有关相量的相位差。

网络函数：对于相量模型，单一激励情况下的网络函数定义为

$$H(j\omega) = \frac{\text{响应相量}}{\text{激励相量}} = |H(j\omega)| \angle \varphi(\omega)$$

网络函数（或响应）随频率变化的规律称为频率响应。 s 域下的网络函数和相量模型下的网络函数满足：

$$H(s) \longleftrightarrow H(j\omega)$$

谐振：对于任何含有电感和（或）电容的单口网络，在一定的条件下呈现电阻性，其端口电压与电流同相，则称此单口网络发生谐振。串联 RLC 电路谐振时动态元件的电压与激励电压之比为 RLC 电路的**品质因数** Q 。

1.7.4 正弦稳态电路功率

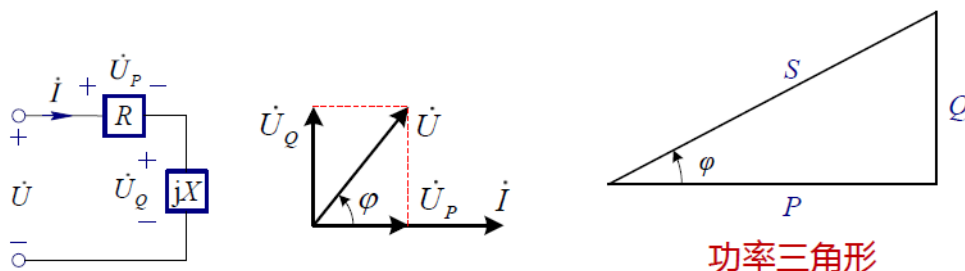
瞬时功率： $p = ui$

平均功率/有功功率： $P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$, $\lambda = \frac{P}{UI} = \cos \varphi$, λ 为功率因数, φ 为功率因数角。有功功率表征电路中实际消耗的功率。对于阻抗为 $R + jX$ 的元件，有功功率是消耗在 R 上的功率。

无功功率： $Q = UI \sin \varphi$ 。无功功率表征一端口电路与外电路之间能量往返的规模。对于阻抗为 $R + jX$ 的元件，无功功率是在 jX 上的“功率”——电压与电流有效值之积。单位为 var 。

视在功率： $S = UI$ 。单位为 $V \cdot A$ 。

复功率： $\tilde{S} = P + jQ = \dot{U} \dot{I}^*$



正弦稳态功率叠加原理：频率相同的正弦量，其平均功率不满足叠加原理；不同频率的正弦电流（电压）产生的平均功率等于每一正弦电流（电压）单独作用时所产生的平均功率之和。

复功率守恒：在任意复杂的电路网络中，某些支路发出的复功率之和等于其余各支路吸收的复功率之和。

正弦稳态最大功率传递定理：给定电源 U_S 及其阻抗 $Z_S = R_S + jX_S$ ，求负载阻抗为 $Z_L = Z_S^*$ 时，负载阻抗获得的有功功率（负载电阻获得的功率）为最大 $U_S^2/4R_S$ 。

1.8 三相电路

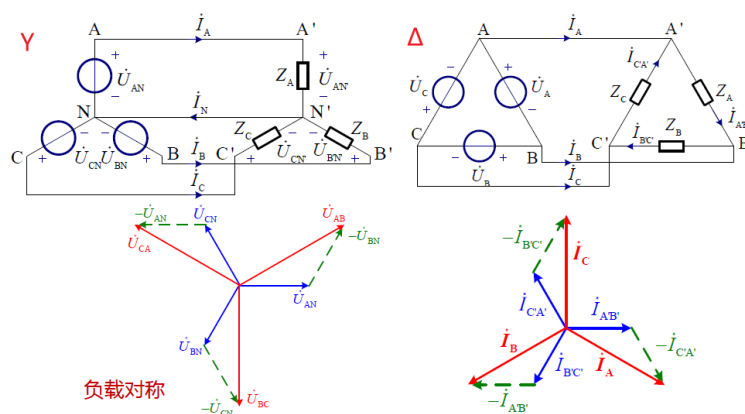
相电压/电流：每相电源或负载的电压/电流

线电压：端线（火线）之间的电压

线电流：流过端线（火线）的电流

中线电流：流过中线的电流

分析三相电路时，先通过 $Y - \Delta$ 变换等等效变换方法化为 Y 形连接，然后判断负载是否对称，若负载对称，则采用一相分析法，若负载不对称，则用一般正弦稳态电路分析。



1.9 总结

