数学

A Cheat Sheet on Maths

作者：Xu Samuel

组织：Shanghai Jiao Tong Univ.

时间：2023.06.05

目录

第 1 章 数学分析

1.1 积分法

凑微分法：常见的 $\varphi(x)$ 有 x^2、kx，当被积函数的 sin 次数为奇数次时 $\varphi(x)=\cos x$，当被积函数的 cos 次数为奇数次时 $\varphi(x)=\sin x$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)$$

第二换元法：

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F(\varphi^{-1}(x))+C$$

三角代换：

- $\sqrt{a^2-x^2}: x=a\sin t$
- $\sqrt{x^2+a^2}: x=a\tan t$
- $\sqrt{x^2-a^2}: x=a\sec t$

分母含因子 x 作倒代换：$x=1/t$

分部积分法：凑微分函数的顺序依次是：指数函数，三角函数，幂函数。通常，对数函数、反三角函数看成 $u(x)$。

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$$

需要记忆的不定积分公式：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\ (a>0)$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\ (a\neq 0)$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{-a^2+x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\ (a\neq 0)$$

定积分 N-L 公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b:=F(b)-F(a)$$

定积分有时可以化简。当 f 为连续函数

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

当 f 为连续周期函数且周期为 T

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

当 f 为连续奇函数

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$$

当 f 为连续偶函数

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

Wallis 公式：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n=2k\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n=2k+1\end{cases}$$

1.2 求导法

1.2.1 链式法则

对于向量值函数 $\boldsymbol{f}:D\to\mathbb{R}^m$，$D\subset\mathbb{R}^n$，坐标分量形式为 $y_i=f_i(x_1,\cdots x_n),(i=1,\cdots,m)$，它的**Jacobi 矩阵**为

$$J=\frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

全微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}=J\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。有链式法则：

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(t_1,\cdots,t_k)}\frac{\partial(t_1,\cdots,t_k)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$$

1.2.2 隐函数求导

如果 m 维向量值函数 $\boldsymbol{F}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots y_m)$ 的各分量函数 F_i 在 $P_0(\xi_1,\cdots,\xi_n,\eta_{10},\cdots\eta_m)$ 的某一邻域内有连续偏导数，$\boldsymbol{F}(P_0)=\boldsymbol{0}$，$\left|\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right|\neq 0$

那么在 P_0 的某一邻域内，$\boldsymbol{F}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots y_m)=\boldsymbol{0}$ 可确定唯一隐映射 $\boldsymbol{f}:D_{\boldsymbol{f}}\to\mathbb{R}^m$，$(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(y_1,\cdots y_m)$，$D_{\boldsymbol{f}}\subset\mathbb{R}^n$

它有连续偏导数，且它的 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial(y_1,\cdots,y_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=-\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}^{-1}\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$$

1.3 数项级数

定义法：部分和有极限

Cauchy 判别法（正项级数）

比较判别法（正项级数）：n 足够大，$a_n\leqslant b_n$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；一般把 a_n 对 $1/n$ 展开，让后借助 p 次调和级数。

根值判别法（正项级数）：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\rho$$

$\rho<1$ 收敛，$\rho>1$ 发散。

比值判别法（正项级数）：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$$

$\rho<1$ 收敛，$\rho>1$ 发散。

Raabe 判别法（正项级数）：

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r$$

$r>1$ 收敛，$r<1$ 发散。

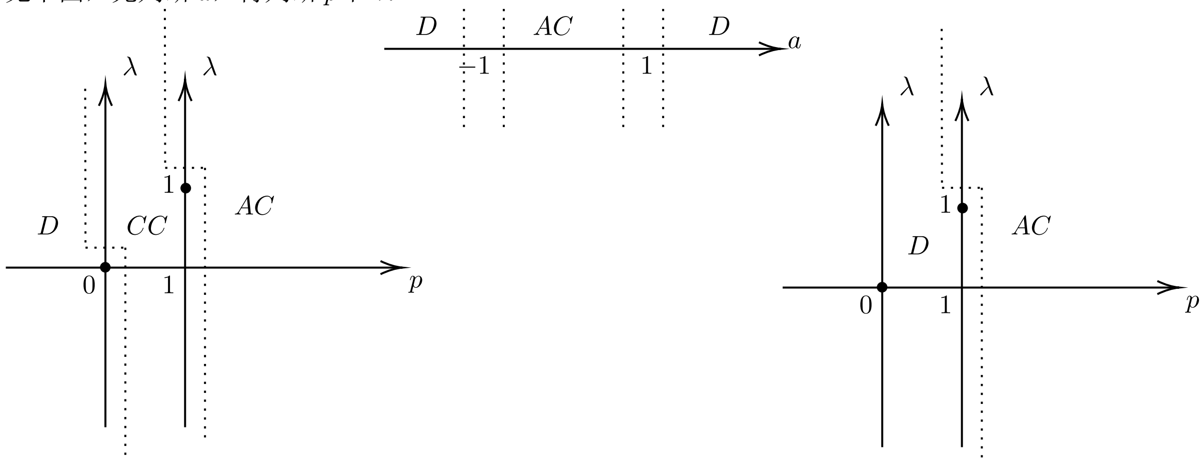
Leibniz 判别法：a_n 单调减少且收敛于 0，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ 收敛。

Abel 判别法：在 D 上，a_n 对单调有界，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛；**Dirichlet 判别法**：在 D 上，a_n 单调趋于 0，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和有界。满足上述条件之一，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。

万能参照级数项：

$$A_n=\frac{a^n}{n^p(\ln n)^\lambda}$$

见下图，先判断 a，再判断 p 和 λ



1.4 函数列与函数项级数

1.4.1 判断一致收敛

先求出极限函数。若极限函数或和函数难确定, 常用Cauchy准则；若极限函数或函数易计算, 常用定义或确界极限。

定义法：$\forall x\in D$，$|f_n(x)-f(x)|\leqslant a_n\to 0$。

Cauchy 一致收敛准则：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，对 $\forall n>m>N$，$\forall x\in D$，有 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$。

确界极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$。

命题：设 $f_n(x)\in C[a,b]$，且 $f_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛，则 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

Weierstrass M-判别法（函数项级数）：$|u_n(x)|\leqslant M_n$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛。

Abel 判别法（函数项级数）：在 D 上，$v_n(x)$ 对 n 单调且一致有界，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛；**Dirichlet 判别法**（函数项级数）：在 D 上，$v_n(x)$ 对 n 单调且一致趋于 0，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数一致有界。满足上述条件之一，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 D 上一致收敛。

Dini 定理：在 $[a,b]$ 上，$f_n(x)$ 连续且对 n 单调，$f(x)$ 连续。

1.4.2 判断不一致收敛

如果不点态收敛，那么一定不一致收敛。除此之外常用点列极限判断不一致收敛，或者利用连续性定理的逆否命题。

点列极限：$\exists\{x_n\}\in D$，有 $|f_n(x_n)-f(x_n)|\nrightarrow 0$

连续性命题的逆否命题：$f_n(x)\in C(D)$，$f(x)\notin C(D)$

对于函数项级数来说，如果 $u_n(x)$ 不一致收敛于 0，则级数也不一致收敛。

命题：设 $u_n(x) \in C[a,b)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上不一致收敛。

1.4.3 一致收敛的性质

若内闭一致收敛，则和函数保持函数项的连续性。若满足使式子有定义的条件，则一致收敛的函数项级数可逐项求导或积分，即求和号与求导或积分号可互换。

1.4.4 幂级数

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$：

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$$

收敛半径

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

幂级数**收敛区间**为 $(-r, r)$，x 在收敛区间内绝对收敛，在端点处是否收敛另需判断。收敛区间并上收敛端点是**收敛域**。

Abel I：若幂级数在 $x_1 \neq 0$ 收敛，则在 $|x| < |x_1|$ 绝对收敛；若在 x_2 发散，则在 $|x| > |x_2|$ 发散。条件收敛点到 x_0 的距离就是幂级数的收敛半径。

Abel II：幂级数在收敛区间内有内闭一致收敛性，若在收敛区间的端点也收敛，则内闭一致收敛性可以扩大到相应的闭端点。

Abel III：若幂级数在收敛区间的右端点收敛，则和函数在右端点左连续；若幂级数在收敛区间的左端点收敛，则和函数在左端点右连续。

幂级数与其导数级数和其积分级数有相同的收敛半径，但端点处的敛散性不一定相同。

计算和函数：凑标准形式 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n = -\ln(1-x)$，$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1/(1-x)^2$

在 x_0 处无穷阶可导的函数 $f(x)$的**Taylor 级数**与**Maclaurin 级数**（$x_0 = 0$）为

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

“$\sim$”而非“$=$”表示在有些点处 Taylor 级数没办法收敛到 $f(x)$。要能在 x_0 的邻域内取到“$=$”，需要满足其 Taylor 公式的余项 $R_n(x) \to 0\ (n \to 0)$，或者需要满足在 x_0 的邻域内所有 $|f^{(n)}(x)|$ 不大于某个正值。

1.4.5 Fourier 级数

在 $[-\pi, \pi]$ 上可积与绝对可积，且以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 的 **Fourier 级数**为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x$$

奇函数的 Fourier 级数为正弦级数，$a_n = 0$；偶函数的 Fourier 级数为余弦级数，$b_n = 0$。若 f 仅在 $[0, \pi]$ 上可积与绝对可积，可以奇延拓或偶延拓到 $[-\pi, \pi]$。

“$\sim$”而非“$=$”表示在有些点处 Fourier 级数没办法收敛到 $f(x)$。如果能满足**Dirichlet条件**，即在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，且在一个周期内只有有限个极值点，则

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{为连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{为间断点} \end{cases}$$

下面是一些零散的定理和推论：

Parseval 等式（能量等式）：$f(x)$ 可积与平方可积

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

Fourier 级数的必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n/n$ 收敛。

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$

1.5 线面积分

空间曲线：

- 参数方程：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$
- 切向量：$\boldsymbol{\tau}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$
- 一般式：$F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$
- 切向量：$\boldsymbol{\tau}=\nabla F(M_0)\times\nabla G(M_0)$
- 弧微元：$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t=\sqrt{1+y_x^2+z_x^2}\mathrm{d}x$

空间曲面：

- 一般式：$F(x,y,z)=0$
- 法向量：$\boldsymbol{n}=\nabla F(M_0)$
- 参数方程：$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$
- 法向量：$\boldsymbol{n}=(x_u,y_u,z_u)|_{M_0}\times(x_v,y_v,z_v)|_{M_0}=(\partial(y,z)/\partial(u,v),\partial(z,x)/\partial(u,v),\partial(x,y)/\partial(u,v))$
- 面积微元：$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=||(x_u,y_u,z_u)\times(x_v,y_v,z_v)||\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u)^2}$

积分的定义遵循以下步骤：积分区域分割为小区域、小区域内近似、求和取极限。所有线面积分都满足线性性、可加性。第一类线面积分与方向无关，第二类线面积分与曲线方向和曲面侧向有关，方向相反，积分变号。计算线面积分：首先将第二类线面积分转换为第一类线面积分，用弧微元和面积微元将第一类线面积分转换为重积分，确定积分区域，然后将二重积分化为二次积分进行计算（区域切割、换元、对称性）。

重积分：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$$

第一类曲线积分：

$$\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i.z_i)\Delta s_i$$

第一类曲面积分：

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$$

第二类曲线积分：

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}^\circ)\mathrm{d}s=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

第二类曲面积分：

$$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}^\circ)\mathrm{d}S = \iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Green 公式和 Stokes 公式

$$\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

Gauss 公式

$$\oiint_{\partial\Omega^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$