物理

A Cheat Sheet on Physics

作者：Xu Samuel

组织：Shanghai Jiao Tong Univ.

时间：2023.06.05

目录

第 1 章 力学 1

1.1 基本定义 1
1.2 运动学 1
1.3 牛顿定律与动力学规律 1
1.3.1 牛顿定律 1
1.3.2 动量定理与动量守恒 2
1.3.3 动能定理与机械能守恒 2
1.3.4 角动量定理与角动量守恒 3
1.4 刚体 5
1.4.1 质点系与质心 5
1.4.2 刚体的定轴转动 5
1.4.3 刚体的平面平行运动 5
1.5 振动 6
1.5.1 简谐振动 6
1.5.2 阻尼振动 6
1.5.3 受迫振动 6
1.6 波动* 7
1.6.1 简谐波 7
1.6.2 波的干涉 7
1.6.3 驻波 7
1.6.4 波的衍射 8
1.6.5 多普勒效应 8
1.7 狭义相对论* 8
1.7.1 背景 8
1.7.2 基本假设 8
1.7.3 洛伦兹变换 8
1.7.4 时空效应 9

第 2 章 热学 10

2.1 基本定义 10
2.2 经典统计物理学* 10
2.2.1 理想气体的微观模型和统计假设 10
2.2.2 理想气体的状态参量和状态方程 10
2.2.3 Maxwell 速度分布律 11
2.2.4 Boltzmann 分布律 11
2.2.5 气体分子碰撞 12
2.3 热力学 12
2.3.1 热力学第一定律 12
2.3.2 热力学第二定律 12
2.3.3 范德瓦尔斯气体 13

第 1 章 力学

1.1 基本定义

质点：把实际物体看成是一个无大小和形状、无内部结构、仅占据空间位置、具有一定质量的点，这个点称为质点.

质点系：一系列质点

刚体：刚性的质点系，其中任何两个点部位间距都恒定不变.

参考系：物体的运动或静止都是相对于某一个选定的物体而言的，研究物体运动时所选定的这个参考物体，称为参考系.

1.2 运动学

运动学是经典力学的一个分支，它关心物体或物体系统的几何运动而不涉及加在物体上的力. 质点的位移、路程、速度、加速度、角速度、角加速度的定义为

$$\Delta \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r},\quad s=\int_{t_0}^{t}\Delta \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}t,\quad \boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t},\quad \boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t},\quad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{\beta}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}$$

矢量不好处理，所以物体的运动可以使用直角坐标、平面自然坐标、平面极坐标等坐标系进行分解：

直角坐标（$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$）分量形式：$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}$

平面自然坐标（$\boldsymbol{n},\boldsymbol{\tau}$）分量形式：$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{a}=\dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}+\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$

平面极坐标（$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta$）分量形式：$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r+\theta\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{v}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{e}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\boldsymbol{e}_\theta$

伽利略变换讲的是若 S' 系在 S 系中平动，则 A 在 S 系中的位矢、速度和加速度与 A 在 S' 系中的位矢、速度和加速度的关系

$$\boldsymbol{r}_A=\boldsymbol{r}_{S'}+\boldsymbol{r}'_A,\ \boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}_{S'}+\boldsymbol{v}'_A,\ \boldsymbol{a}_A=\boldsymbol{a}_{S'}+\boldsymbol{a}'_A$$

若 S' 系绕 S 系中以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 如图匀速定轴转动，则 A 在 S 系中的速度和加速度与 A 在 S' 系中的速度和加速度的关系为

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}'_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_A$$

$$\boldsymbol{a}_A=\boldsymbol{a}'_A-2\boldsymbol{v}'_A\times\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{r}'_A$$

1.3 牛顿定律与动力学规律

1.3.1 牛顿定律

牛顿第一定律：不受外力作用的物体必定作速度恒定的运动. 这对于一些参考系不成立，这些参考系称为非惯性系，否则称为惯性系.

牛顿第二定律：惯性系下，物体加速度的大小跟作用力成正比，跟物体的质量成反比，且加速度的方向跟作用力的方向相同，其数学形式为 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$. 由牛顿第二定律可推出冲量动量关系（$\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 的关系），功能关系（W 与 E 的关系），力矩角动量关系（$\boldsymbol{\Gamma}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 的关系）.

由于在非惯性系中牛顿第二定律不成立，故引入一个假想的形式上的力——**惯性力** $\boldsymbol{F_i}$，使得 $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F_i}$，也能满足与牛顿第二定律具有同样形式的关系式 $\boldsymbol{F}'=m\boldsymbol{a}'$.

平动非惯性系中的惯性力 $\boldsymbol{F_i}=-m\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{S'}}$.

转动非惯性系中的惯性力 $\boldsymbol{F_i}=\boldsymbol{F_c}+\boldsymbol{F_{cor}}+\boldsymbol{F_t}=m\omega_{S'}^2\boldsymbol{r}'+2m\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\omega}_{S'}+m\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{\beta}_{S'}$，前两项分别称为离心力和科里奥利力.

1.3.2 动量定理与动量守恒

冲量 $\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$，是力的时间积累量，动量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$.

定理 1.1 (动量定理)

对于质点，力为质点提供的冲量等于质点的动量增量，即 $\boldsymbol{I}=\Delta\boldsymbol{p}$；对于质点系，外力为质点系提供的冲量等于质点系的动量增量，即 $\boldsymbol{I}_e=\Delta\boldsymbol{p}$. ♡

为使得在所有惯性系中动量定理形式一致，认为在非惯性系中，惯性力也提供冲量.

定理 1.2 (动量守恒定律)

过程中，若合外力 $\boldsymbol{F}_e=0$，则 $\boldsymbol{p}$ 守恒；过程中，若合外力在某一轴上的分力 $\boldsymbol{F}_{ex}=0$，则 $\boldsymbol{p}_x$ 守恒. ♡

变质量物体问题：变质量物体做平动，比如雨滴在充满湿气的空气中下落、正在喷气的火箭上升，设主体质量 m，速度 $\boldsymbol{v}$，受力 $\boldsymbol{F}$，吸附/分离部分速度 $\boldsymbol{v}'$，则有

$$\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

设火箭升空时燃料质量 m_1，燃料以外的火箭质量为 m_2，燃料相对喷出速度为 u，则火箭所能达到的最大速率为

$$v=u\ln\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)$$

1.3.3 动能定理与机械能守恒

功 $W=\int_a^b\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，是力的时间积累量，动能 $E_k=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$.

定理 1.3 (动能定理)

对于质点，合力对质点作功等于质点的动能增量，即 $W=\Delta E_k$；对于质点系，所有内力和所有外力对质点系作功等于质点系的动能增量，即 $W_i+W_e=\Delta E_k$. ♡

为使得在所有惯性系中动能定理形式一致，认为在非惯性系中，惯性力也作功.

做功与路径无关的保守力作功可以等效为对应势能减少，势能是位置的函数. 设势能函数 $E_p(\boldsymbol{r})$，保守力关于位置的函数 $\boldsymbol{F_c}(\boldsymbol{r})$，则有 $\boldsymbol{F_c}=-\nabla E_p$. 质点系的机械能是质点系的内势能和动能之和，即 $E=E_k+E_p$.

定理 1.4 (机械能定理)

对于质点系，所有非保守内力和所有外力对质点系作功等于质点系的机械能增量，即 $W_{inc}+W_e=\Delta E$. ♡

定理 1.5 (机械能守恒定律)

过程中，若 $\mathrm{d}W_{inc}=0$，$\mathrm{d}W_e=0$，则 E 守恒. ♡

二体碰撞问题：两个物体发生一维碰撞，假设物体 1 质量 m_1，碰撞前速度 v_{10}，碰撞后速度 v_1，物体 2 质量 m_2，碰撞前速度 v_{20}，碰撞后速度 v_2，则有

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_{10}+m_2v_{20}$$

若弹性碰撞，能量未损失，则有

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2$$

若完全非弹性碰撞，则有

$$v_1 = v_2$$

若非弹性碰撞，恢复系数 e，则有

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{20} - v_{10}}$$

解得

$$v_1 = v_{10} - \frac{(1+e)\, m_2 \,(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = v_{20} - \frac{(1+e)\, m_1 \,(v_{20} - v_{10})}{m_1 + m_2}$$

当 $e = 1$ 时为弹性碰撞，当 $e = 0$ 时为完全非弹性碰撞.

一维质点周期运动：设质点在一维势能场 $U(x)$ 内作从 x_1 到 x_2 再返回 x_1 的一维周期运动，根据机械能守恒有

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + U(x) = E$$

解得

$$\Delta t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}}$$

故周期为

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}}$$

1.3.4 角动量定理与角动量守恒

力矩 $\Gamma = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$，角动量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$.

定理 1.6 (角动量定理)

对于质点，质点所受力相对某参考点的力矩等于质点相对于该参考点角动量随时间的变化率，即 $\Gamma = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$；对于质点系，质点系所受外力相对某参考点的合力矩等于质点系相对于该参考点角动量随时间的变化率，即 $\Gamma_e = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$.

为使得在所有惯性系中角动量定理形式一致，认为在非惯性系中，惯性力也产生力矩.

定理 1.7 (角动量守恒定律)

过程中，若合外力矩 $\Gamma_e = 0$，则 $\boldsymbol{L}$ 守恒；过程中，若合外力矩在某一轴上的分力矩 $\Gamma_{ex} = 0$，则 L_x 守恒.

有心力场下质点的运动问题：质点在有心力场中运动，比如天体运动中，行星在力场 $\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r}$ 中运动，采用极坐标运动分解，则有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r\frac{v_r}{v_\theta},\ v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\ v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

由能量、角动量守恒得

$$mrv_\theta = L,\ \frac{1}{2}m\left(v_r^2 + v_\theta^2\right) - \frac{GMm}{r} = E$$

得

$$v_\theta = \frac{L}{mr},\ v_r = \sqrt{\left(\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r}\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=r^2\sqrt{\left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2\left(1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}\right)-\left(\frac{1}{r}-\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2}$$

引入

$$p=\frac{L^2}{GMm^2},\ \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}},\ u=\frac{1}{r}-\frac{1}{p}$$

则

$$\mathrm{d}\theta=\frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{(\varepsilon/p)^2-u^2}}$$

两边积分并化简得

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)}$$

取 $\theta_0=0$，就是圆锥曲线的极坐标标准方程，所以行星运动的轨道是圆锥曲线. 研究其性质：

- 若 $E>0$，即 $\varepsilon>1$，轨道是双曲线的一支；
- 若 $E=0$，即 $\varepsilon=1$，轨道是抛物线；
- 若 $E<0$，即 $\varepsilon<1$，轨道是椭圆.

半长轴、半短轴分别是

$$A=-\frac{GMm}{2E},\ B=\frac{L}{\sqrt{-2Em}}$$

引入面积速度的概念，其定义为径矢单位时间内扫过的面积，则有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|=\frac{L}{2m}$$

所以行星运动的面积速度恒定. 设近日点速度v_1，根据牛顿第二定律有

$$\frac{mv_1^2}{B^2/A}=\frac{GMm}{(A-C)^2}\Rightarrow v_1=\frac{B}{A-C}\sqrt{\frac{GM}{A}}$$

故面积速度

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}(A-C)v_1^2=\frac{B}{2}\sqrt{\frac{GM}{A}}$$

故行星运动周期

$$T=\frac{\pi AB}{\mathrm{d}S/\mathrm{d}t}$$

得

$$\frac{A^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}$$

定理 1.8 (开普勒三定律)

若行星绕太阳运动，忽略引力对太阳运动的影响，则有

1. 太阳位于行星运动的圆锥曲线轨道的焦点；
2. 行星运动的面积速度恒定；
3. $A^3/T^2=GM/4\pi^2$.

推广至质点在任意有心力场中运动，则同样地由能量、角动量守恒得

$$mrv_\theta=L,\ \frac{1}{2}m\left(v_r^2+v_\theta^2\right)+V(r)=E$$

$$v_\theta=\frac{L}{mr},\ v_r=\sqrt{\left(\frac{2E}{m}-\frac{2V(r)}{m}\right)-\frac{L^2}{m^2r^2}}$$

将能量表达式的 v_θ 消去，得到

$$\frac{1}{2}mv_r^2+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)=E$$

其中 $L^2/2mr^2$ 可等效为一种势能，称为**离心势能**.

1.4 刚体

1.4.1 质点系与质心

质点系的质心位置

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum m_i}$$

定理 1.9 (质心运动定理)

质点系质心加速度由外力确定，与内力无关，即 $\boldsymbol{F}_e = m\boldsymbol{a}_c$

定理 1.10 (König's theorem)

质点系的角动量可分解为质心角动量和质点系相对质心角动量之和，即 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_c + \boldsymbol{L}'$；质点系的动能可分解为质心动能和质点系相对质心动能之和，即 $E_k = E_{kc} + E_k'$.

1.4.2 刚体的定轴转动

运动学分析：选取 z 轴为固定转轴，各点的位矢可以分解为 $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{z}_i$，其中 $\boldsymbol{R}_i$ 是旋转的圆运动径矢. 各点的圆运动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角加速度 $\boldsymbol{\beta}$ 都是相同的.

动力学量：刚体的**动能**

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J\omega^2$$

刚体的重力势能

$$E_p = \sum m_i g h_i = mgh_c$$

刚体**角动量**的 z 轴分量

$$L_z = \sum \boldsymbol{R}_i \times (m_i \boldsymbol{v}_i) = \sum m_i R_i^2 \omega = J\omega$$

其中，$J = \sum m_i R_i^2$ 称为刚体对某转轴的**转动惯量**.

刚体的定轴转动的**动力学规律**：

- **质心运动定理**：$\boldsymbol{F}_e = m\boldsymbol{a}_c$
- **动能定理**：内力做功和为零，故外力作功等于动能增量，即 $W_e = \Delta E_k$
- **转动定理**：$M_{ez} = J\beta$

定理 1.11 (平行轴定理)

刚体对 A 轴的转动惯量 J_A 等于刚体对通过质心 C 且与 A 轴平行的 C 轴的转动惯量 J_C 加上刚体的质量和两平行轴之间的垂直距离 d 平方的乘积，即

$$J_A = J_C + md^2$$

1.4.3 刚体的平面平行运动

运动学分析：将刚体中的每一个点部位的运动都投影到平行平面 σ 上，选取一参考点 M，任何一点相对于任意选取的参考点都有相同的角速度 $\boldsymbol{\omega}$，点 P 的速度可以表示为 $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_M + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_{PM}$. 假如 $\boldsymbol{v}_P = 0$，称 P 点为瞬心. 从动力学角度考量，一般选取质心或瞬心作为参考点.

动力学量：刚体的**动能**

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2$$

刚体**角动量**的垂直于 σ 分量

$$L_z = J\omega + L_{cz}$$

刚体的定轴转动的**动力学规律**：

- **质心运动定理**：$\boldsymbol{F}_e = m\boldsymbol{a}_c$
- **动能定理**：$W_e = \Delta E_k$
- **质心轴转动定理**：$M_{ez} = J_c\beta$

1.5 振动

1.5.1 简谐振动

运动学：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$，$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$，$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$，还可以使用复数描述，即 $\widetilde{x} = A\angle\varphi \cdot e^{j\omega t}$. ω 为角频率，周期 $T = 2\pi/\omega$，频率 $f = 1/T$. 可以用相位 $\omega t + \varphi$ 来表征振动状态，$\Delta\varphi = (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1)$ 为 x_1 和 x_2 的相位差.

动力学：$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$，这个微分方程可以由牛顿第二定律得到，也可以由对能量表达式求导而得. 对于弹簧振子 $\omega = \sqrt{k/m}$，单摆 $\omega = \sqrt{l/g}$，A 和 φ 由初始条件给出.

能量：机械能 $E = \frac{1}{2}kA^2$ 守恒，平均动能和势能 $\langle E_k\rangle = \langle E_p\rangle = \frac{1}{4}kA^2$.

两个振幅相同、频率不同的简谐振动的合成：设 $x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi)$，$x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi)$，则

$$x = 2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right)$$

一个高频振动受一个低频振动的调制，低频振动的频率称为拍频 $f = f_2 - f_1$

1.5.2 阻尼振动

$$-kx - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

设 $\omega_0^2 = k/m$，$2\alpha = b/m$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$$

特征方程两个根为 $r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

- **欠阻尼** $\alpha < \omega_0$：$x = (A_1\cos\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}t + A_2\sin\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}t)e^{-\alpha t}$
- **临界阻尼** $\alpha = \omega_0$：$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$
- **过阻尼** $\alpha > \omega_0$：$x = (A_1 e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}t})e^{-\alpha t}$

1.5.3 受迫振动

$$-kx - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0\cos\omega t = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

设 $\omega_0^2 = k/m$，$2\alpha = b/m$，$f_0 = F_0/M$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t$$

解为通解 x_0（阻尼振动已给出）加特解 $x^* = A\cos(\omega t + \varphi)$，当 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$，$A$ 最大，发生共振.

1.6 波动*

1.6.1 简谐波

波是振动状态在空间的传播，不但具有时间周期性，还具有空间周期性. 用波长 λ 来描述波的空间周期性，表示振动状态在一个周期 T 的时间内传播的距离，把单位时间内振动状态的传播距离称为波速 $v=\lambda/T$. 把某一时刻振动相位相同的各点构成的曲面称为波阵面.

运动学：将处在空间位置 $\boldsymbol{r}$ 处的质元在 t 时刻的振动状态用 $y=y(\boldsymbol{r},t)$ 表示，假定平面简谐波沿 x 轴正方向传播，则

$$y=y(x,t)=A\cos(\omega t+\varphi-kx)$$

其中波数 $k=2\pi/\lambda$. 波速 $v=\omega/k=\lambda/T$. 一般给出原点的振动方程和波的传播方向就能确定波的运动方程.

动力学：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

v 取决于介质的弹性和惯性. 对于一维弦，$v=\sqrt{T/\mu}$，T 为绳上张力，μ 为线密度；对于细棒，$v=\sqrt{Y/\rho}$，Y 为杨氏模量，ρ 为体密度；对于固体，$v=\sqrt{G/\rho}$，G 为切变模量，ρ 为体密度.

能量：一维弦线元动能和势能为

$$\mathrm{d}E_k=\frac{1}{2}\mu\mathrm{d}x\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2,\ \mathrm{d}E_p=\frac{1}{2}T\mathrm{d}x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

对于平面简谐波 $y=A\cos(\omega t-kx)$，有 $\mathrm{d}E_p=\mathrm{d}E_k$，$\mathrm{d}E=\mu\mathrm{d}x\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx)$，质元处于最大位移处能量为零，处于零位移处能量最大，平均能量 $\langle\mathrm{d}E\rangle=\frac{1}{2}\mu\mathrm{d}x\omega^2A^2$，能量密度 w 和能流密度 s 为

$$w=\frac{\mathrm{d}E}{S\mathrm{d}x}=\rho\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx),\ \langle w\rangle=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$$

$$s=wv,\ I=\langle s\rangle=\frac{1}{2}\rho\omega^2vA^2$$

利用能流守恒，可以倒写出球面简谐波和柱面简谐波的运动方程.

1.6.2 波的干涉

满足相干条件，即频率相同、振动方向相互平行、相位差恒定的两列波在空间中产生干涉现象，某些点的振动始终加强，另一些点的振动始终减弱.

两列波 $y_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1-kr_1)$，$y_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2-kr_2)$ 的相位差 $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2-k(r_1-r_2)$，当

- $\Delta\varphi=2n\pi$，干涉加强，$A=A_1+A_2$，$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}$
- $\Delta\varphi=(2n+1)\pi$，干涉减弱，$A=|A_1-A_2|$，$I=I_1+I_2-2\sqrt{I_1I_2}$

在均匀介质中传播的波遇到另外一种介质时，在这两种介质的分界面上会发生反射和折射现象。波从波疏介质进入波密介质发生反射时相位突变 π，称为半波损失.

1.6.3 驻波

没有波形的推进，参与波动的各个质元处于稳定的振动状态，具有这种特征的波称为驻波. 两列振幅相同的相干波在同一直线上沿相反方向传播时叠加会产生驻波，是一种特殊的干涉现象. 各振动质元的振幅各不相同，但却保持不变，振幅为零的点称为波节，振幅最大的点称为波腹.

两列波 $y_1=\cos(\omega t-kx)$，$y_2=A\cos(\omega t+kx)$ 合成为驻波

$$y=2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$$

两端固定的弦问题：允许波长和频率满足 $n\lambda/2=L$，$f=v/\lambda$，这些允许频率所对应的驻波称为弦的简正

模，相应的频率称为弦的简正频率，分为基频 f_1 和 n 次倍频 f_n

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}},\ f_n = nf_1$$

对于弦上发生的任何可能的一般运动，总可以看成是一系列简正模的线性叠加. 距离一端 L/k 的点受击而振动时，以该点为波节的模式不出现，即 nk 次倍频对应的简正模不出现.

1.6.4 波的衍射

波在一种介质中传播，遇到有小孔的挡板时，穿过小孔的那部分波会朝各个方向散开，遇到障碍物时则会绕行，被称为波的衍射现象. 实验表明：当孔的线度可与波长相比拟时，衍射现象明显，孔越小，衍射越明显.

惠更斯原理：波动传到的各点都可视为发射球面子波的波源，在其后的任一时刻，这些子波波阵面的包络面就决定新的波阵面。

1.6.5 多普勒效应

观测者 R，波源 S，两者速度沿着 SR 分量分别为 v_r, v_s，两者相向运动，波源频率为 f，波速 u，则观测频率

$$f_r = \frac{u+v_r}{u-v_S}f$$

1.7 狭义相对论*

1.7.1 背景

物理规律都是相对于一定参考系表述出来的，在经典力学中，力学基本运动定律对所有惯性系成立. 人们从长期实践中总结出了电磁场的基本规律，宏观电磁现象的普遍规律可以表为麦克斯韦方程组，那么电磁现象的基本规律究竟适用于什么参考系？

由电磁场的基本规律推可知真空中的光速 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$，在惯性系 S 中，光沿任意方向的速度值都相同，如果按照伽利略变换，在相对于上述惯性系运动的其它惯性系 S' 中，光沿各个方向的速度值并不一定都是相同的. 迈克耳孙——莫雷实验否定了这一结果.

1.7.2 基本假设

相对性原理：一切物理规律在任何惯性系中形式相同，所有惯性系都是等价的.

光速不变原理：真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为 c，与光源运动无关.

1.7.3 洛伦兹变换

观测：S 系的空间各点事先放置了无穷系列的虚拟时钟，这些虚拟时钟与该惯性系保持相对静止，且彼此同步（彼此同步是可以做到的，任意两钟可以使用在两钟中点发出的一束光进行同步）. 一个事件在 S 系下的时空坐标 (x, y, z, t) 是由该事件发生处的观察者记录下来的该事件发生时的空间坐标以及由该观察者用该处的虚拟时钟记录下来的该事件发生时的时间.

两个惯性系 S 和 S'，坐标轴彼此平行，S' 系相对于 S 系以速度 u 沿 x 轴正方向运动，两个系的坐标原点重合时，同时开始计时（取 $t = t' = 0$）. 在这两个惯性系 S、S' 中观测同一个物理事件，测量结果分别为

(x,y,z,t)，(x',y',z',t')，满足洛伦兹变换：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{cases}$$

洛伦兹逆变换为（取 u 为 $-u$）：

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'+ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t'+ux'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{cases}$$

当 $u \ll c$ 时，洛伦兹变换近似为伽利略变换.

洛伦兹速度变换：

$$\begin{cases} v_x' = \dfrac{v_x-u}{1-uv_x/c^2} \\ v_y' = \dfrac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_x/c^2} \end{cases}$$

1.7.4 时空效应

“同时”的相对性：S 系下“异地”发生的两个“同时”事件，在 S' 系下不“同时”.

“动钟变慢”：在同一地点相继发生两个事件的惯性系中所测得的时间间隔最短，在与它作相对运动的其它惯性系中，测得的时间间隔就长一些.

“动尺收缩”：物体的长度在与其相对静止的参考系中测得的最长，在其它参考系中测得的都较短些.

多普勒效应：波源 S，观察者 R，S 在 R 所在的参考系内以速度大小 v、方向与 SR 的夹角为 θ 运动，R 接受到的频率 f_r 与波源频率满足

$$f_r = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-v\cos\theta/c}f$$

双生子佯谬：双生子 A 和 B，其中 A 留在地球上，B 乘极高速的飞船到宇宙空间去旅行，经过若干年飞船返回到地球，A 和 B 重逢时，B 比 A 更年轻.

第 2 章 热学

2.1 基本定义

平衡态：如果一个热力学系统是孤立系统，则不论其初始状态如何复杂，经过充分长时间后，系统将达到一种宏观性质不随时间变化的稳定状态，此状态称为平衡态. 从微观角度看，组成系统的大量分子处于连续不断的无规则运动中，由于碰撞，每个分子的速度在不断变化，但是如果大量分子运动的平均效果不随时间改变，这种平均效果的不变在宏观上就表现为系统达到了平衡态.

状态参量：为了确定热力学系统的状态，需要一些宏观物理量，这些确定热力学系统状态的宏观物理量称为系统的状态参量. 状态参量是描写平衡态的宏观物理量. 对于气体：有三个状态参量，几何状态参量体积 V，力学状态参量压强 p，以及温度 T.

状态方程：系统处于平衡态时，状态参量之间的关系式. 对于气体，$f(p,V,T)=0$.

过程：系统从原平衡态过渡到另一个平衡态

准静态过程：在过程中每一时刻，系统都处于平衡态

2.2 经典统计物理学*

2.2.1 理想气体的微观模型和统计假设

理想气体的**微观模型**：

- 分子线度与分子间距相比较可忽略，分子被看作质点；
- 除了碰撞一瞬间外，忽略分子之间以及分子与容器壁间的相互作用力，且忽略重力的影响；
- 气体分子的运动遵守经典力学规律，碰撞为弹性碰撞.

尽管分子数目巨大，难以确定具体的运动情况，但总体上符合统计规律性，可以用统计的方法来研究.

平衡态理想气体的**统计假设**：当理想气体处在平衡态时，

- 容器内任一位置处的分子数密度不比其他位置处的分子数密度占优势；
- 分子沿任一方向的运动不比其他方向的运动占优势.

由统计假设可以推导出：

$$\langle v_x\rangle = \langle v_y\rangle = \langle v_z\rangle = 0$$

$$\left\langle v_x^2\right\rangle = \left\langle v_y^2\right\rangle = \left\langle v_z^2\right\rangle = \frac{1}{3}\left\langle v^2\right\rangle$$

2.2.2 理想气体的状态参量和状态方程

压强：假定容器体积为 V，分子数为 N，分子质量为 μ，分子按照速度分组，第 i 组分子速度为 $\boldsymbol{v}_i$，分子数密度为 n_i，$n=\sum n_i$，则一个分子对器壁的冲量为 $2\mu v_{ix}$. 而 $\mathrm{d}t$ 时间内撞击面积为$\mathrm{d}A$ 容器壁的分子数为 $n_i v_{ix}\mathrm{d}t\mathrm{d}A$，得总冲量为

$$\mathrm{d}I = \sum_{v_{ix}>0} 2\mu n_i v_{ix}^2 \mathrm{d}A\mathrm{d}t = \sum \mu n_i v_{ix}^2 \mathrm{d}A\mathrm{d}t$$

则压强

$$p = \frac{F}{\mathrm{d}A} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t\mathrm{d}A} = \sum \mu n_i v_{ix}^2 = \mu n\left\langle v_x^2\right\rangle = \frac{1}{3}\mu n\left\langle v^2\right\rangle$$

温度：温度是物质热运动强度的量度，是分子不规则运动平均平动动能的量度. 可以从温度更一般的定义推导出温度与平均平动动能的关系为

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{3}{2}kT$$

状态方程：由温度与平均动能的关系与压强表达式可以得到**理想气体状态方程**

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

其中，m 为气体质量，M 为气体摩尔质量，R 为摩尔气体常数.

内能：气体的内能是气体分子做无规则热运动的总能量加上气体分子之间的相互作用势能.

定理 2.1 (能量均分定理)

在温度为 T 的平衡态下，在每一个自由度上有相等的平均动能，其大小为

$$\frac{1}{2}kT$$

♡

对于由有 t 个平动自由度、r 个转动自由度和 s 个振动自由度的气体分子组成的处于平衡态的热力学系统，分子的平均动能

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{1}{2}(t+r+s)kT$$

平均能量

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_k + s\cdot\frac{1}{2}kT = \frac{1}{2}(t+r+2s)kT = \frac{i}{2}kT$$

故理想气体的内能

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT$$

理想气体的内能仅是温度的单值函数，与气体的压强、体积无关。

2.2.3 Maxwell 速度分布律

设 $\frac{\mathrm{d}N}{N}$ 表示 $v \to v+\mathrm{d}v$ 内的分子数在总分子数 N 中占的比率，满足

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = f(v)\mathrm{d}v$$

$f(v)$ 为分子速率分布函数，满足归一化条件，即 $\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v = 1$. 处于平衡态的理想气体的速率分布函数为

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right)v^2$$

最概然速率 v_p、方均根速率 $\sqrt{\langle v^2\rangle}$、平均速率 $\langle v\rangle$ 分别是

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}},\ \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},\ \langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

设 $\frac{\mathrm{d}N}{N}$ 表示 $v_x \to v_x+\mathrm{d}v_x$，$v_y \to v_y+\mathrm{d}v_y$，$v_z \to v_z+\mathrm{d}v_z$ 内的分子数在总分子数 N 中占的比率，满足

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = f(\boldsymbol{v})\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z$$

$f(\boldsymbol{v})$ 为分子速度分布函数. 处于平衡态的理想气体的速率分布函数为

$$f(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{\mu\boldsymbol{v}^2}{2kT}\right)$$

2.2.4 Boltzmann 分布律

设质量为 μ 的粒子在任意外场中的势能为 $U(\boldsymbol{r})$，则处于平衡态的理想气体在该外场中粒子数密度按位置的分布为

$$n(\boldsymbol{r}) = n_0\exp\left(-\frac{U(\boldsymbol{r})}{kT}\right)$$

定理 2.2 (Maxwell - Boltzmann 分布律)

$$f_{MB}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{v})f_B(\boldsymbol{r})=f_0\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{\varepsilon_k+\varepsilon_p}{kT}\right)$$

2.2.5 气体分子碰撞

平均自由程 $\langle\lambda\rangle$：一个气体分子在任意两次连续碰撞之间所经过的各段自由路程的平均值
平均碰撞频率 $\langle Z\rangle$：一个气体分子在单位时间内受到的平均碰撞次数
设 $\langle v\rangle$ 为分子平均运动速率，$\langle u\rangle$ 为分子平均相对运动速率，有

$$\langle v\rangle=\langle\lambda\rangle\langle Z\rangle,\ \langle Z\rangle=n\pi d^2\langle u\rangle,\ \langle u\rangle=\sqrt{2}\langle v\rangle$$

从而可得

$$\langle Z\rangle=\sqrt{2}n\pi d^2\langle v\rangle,\ \langle\lambda\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}$$

2.3 热力学

2.3.1 热力学第一定律

Q 表示系统吸收的热量，A 表示系统对外做功，则气体的热力学第一定律表述为

$$\delta Q=\mathrm{d}U+\delta A=\mathrm{d}U+p\mathrm{d}V$$

理想气体热容、摩尔热容、定压摩尔热容、定体摩尔热容的定义为

$$C=\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T},\ C_m=\frac{\delta Q_m}{\mathrm{d}T},\ C_{p,m}=\left(\frac{\delta Q_m}{\mathrm{d}T}\right)_p,\ C_{V,m}=\left(\frac{\delta Q_m}{\mathrm{d}T}\right)_V$$

$$C_{V,m}=\frac{i}{2}R,\ C_{p,m}=C_{V,m}+R,\ \gamma=\frac{C_{p,m}}{C_{V,m}}$$

几种过程：

- 等容过程 $V=C$：$A=0$，$Q=\Delta U=\nu C_{V,m}\Delta T$
- 等温过程 $pV=C$：$\Delta U=0$，$Q=A=\nu RT\ln(V_2/V_1)$
- 等压过程 $p=C$：$Q=\nu C_{p,m}\Delta T$，$\Delta U=\nu C_{V,m}\Delta T$，$A=\nu R\Delta T$
- 绝热过程 $pV^\gamma=C$：$Q=0$，$\Delta U=-A=\nu C_{V,m}\Delta T$
- 多方过程 $pV^n=C$：$C_m=C_{V,m}-R/(n-1)$
- 自由膨胀：$A=Q=\Delta U=0$

2.3.2 热力学第二定律

在任何一个循环过程中，系统所作的净功在数值上等于 $p-V$ 图上循环曲线所包围的面积.

热力学系统（工作物质）只与两个恒温热源交换热量的循环过程，没有另外的散热、漏气等因素存在，进行卡诺循环的热机称为卡诺热机. 理想气体准静态过程卡诺循环由两个等温过程和两个绝热过程组成.

顺时针进行为正循环，吸热 Q_1，放热 Q_2，对外做功 A，则 $Q_1-Q_2=A$，热机效率定义以及卡诺循环热机效率为

$$\eta=\frac{A}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1},\ \eta=1-\frac{T_2}{T_1}$$

逆时针进行为逆循环，吸热 Q_2，放热 Q_1，外界做功 A，则 $Q_1-Q_2=A$. 致冷系数定义以及卡诺循环致冷系数为

$$w=\frac{Q_2}{A}=\frac{Q_2}{Q_1-Q_2},\ w=\frac{T_2}{T_1-T_2}$$

热力学第二定律（卡尔文表述）：不可能从单一热源吸收热量，使之完全转化为功，而不引起其他变化，即第二类永动机是不可能制成的.

热力学第二定律（克劳修斯表述）：不可能把热量从低温物体传向高温物体，而不引起其他变化.

若在过程中，系统由初态到达末态，与此同时外界也发生了变化。如果可以使系统由末态回到初态，同时外界也恢复到原来的状态，则称该过程为**可逆过程**. 热力学第二定律的开尔文表述的实质是指出功变热过程的不可逆性；热力学第二定律的克劳修斯表述的实质是指出了热传导过程的不可逆性.

定理 2.3 (卡诺定理)

在相同的高温热源与相同的低温热源之间工作的一切可逆卡诺热机的效率都相等，与工作物质无关，且效率都为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

在相同的高温热源与相同的低温热源之间工作的一切不可逆卡诺热机的效率都不可能高于同样热源之间的可逆卡诺热机的效率，即

$$\eta \leqslant 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

♡

定理 2.4 (克劳修斯等式)

对于可逆循环，有

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

♡

定义热力学系统的平衡态的状态函数——熵 S

$$S_b - S_a = \int_a^b \frac{\delta Q}{T}, \ \mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}$$

理想气体熵公式：

$$S = \nu C_{V,m} \ln T + \nu R \ln V + S_0$$

定理 2.5 (熵增原理)

对于不可逆绝热过程，有

$$\Delta S > 0$$

对于可逆绝热过程，有

$$\Delta S = 0$$

♡

定理 2.6 (克劳修斯不等式)

对于不可逆循环，有

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$$

♡

2.3.3 范德瓦尔斯气体

范德瓦尔斯气体状态方程

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$$

范德瓦尔斯气体状态方程内能

$$U = \nu C_{V,m} T - \nu^2 \frac{a}{V}$$