EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

SEL 0343

Marcelo bj.

① Para a sequência $x(n) = (5)^n \mu(-n)$ Pede-se

a) Valor de $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)$

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (5)^n \mu(-n) = \sum_{n=-\infty}^{0} (5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\therefore \quad S = \frac{1}{1-1/5} = 5/4$$

b) Energia de $x(n)$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{0} 5^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (1/25)^n$$

$$E_x = \frac{1}{1-1/25} = 25/24$$

c) Se $x(n)$ é a entrada do sistema $y(n) = n\,x(n)$ encontre a energia na saída do sistema.

$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [n\,x(n)]^2 \mu(-n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} n^2 5^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{25}\right)^n$$

como $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^n = \frac{a(1+a)}{(1-a)^3}$ $a<0$ então

$$E_y = \frac{1}{25} \frac{1+1/25}{(1-1/25)^3} = \frac{13 \times 25}{12}$$

1. Admitindo $T_a = 10^{-3}$ s, determine os sinais de tempo contínuo para:

a) $x(n) = A\cos(\pi/_2\, n) \Rightarrow x(t) = A\cos(2\pi F t)$

admitindo $t = nT_a$

$$2\pi F n T_a = \frac{\pi}{2} n \Rightarrow F = \frac{1}{4}\frac{1}{T_a} = 125\,Hz$$

$$\therefore\ x(t) = A\cos(250\pi t)$$

b) $x(n) = A\cos\frac{\pi}{6} n \Rightarrow x(t) = A\cos(2\pi F t)$

como anteriormente:

$$2\pi F n T_a = \frac{\pi}{6} n \Rightarrow F = \frac{1}{12 T_a} = 83{,}33\,Hz$$

$$\therefore\ x(t) = A\cos(166{,}67\pi t)$$

c) $x(n) = \mu(n) - \mu(n-5)$

$$x(nT_a) = u(nT_a) - u(nT_a - 4T_a)$$

$$\therefore\ x(t) = \mu(t) - \mu(t - 0.004)$$

d) Pergunta: as soluções para os itens (a) e (b) são únicas?

CONVOLUÇÃO

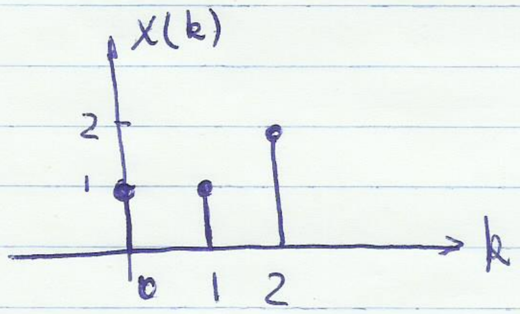
① Convolução de duas sequências finitas

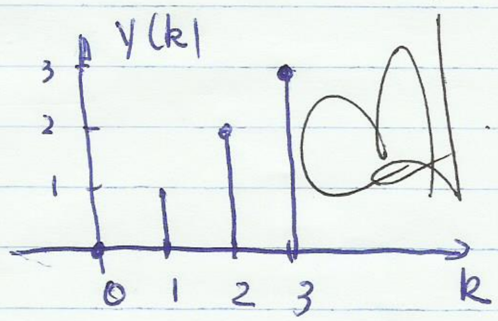
$$x(n) = [\underset{\uparrow}{1}\ 1\ 2] \qquad y(n) = [\underset{\uparrow}{0}\ 1\ 2\ 3]$$

$n=0 \quad N=3 \qquad\qquad n=0 \quad M=4$

$$L = N+M-1 = 6$$

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, y(n-k) = \sum_{k=0}^{2} x(k)\, y(n-k)$$





$$n<0 \Rightarrow z(n) = \sum_{k=0}^{2} x(k)\, \underbrace{y(n-k)}_{\text{sempre negativo}} = 0$$

$n=0 \quad z(0) = x(0)y(0) + x(1)y(-1) + x(2)y(-2) = 0$

$n=1 \quad z(1) = \underset{1}{x(0)}\,\underset{1}{y(1)} + \underset{1}{x(1)}\,\underset{0}{y(0)} + \underset{1}{x(2)}\,\underset{0}{y(-1)} = 1$

$n=2 \quad z(2) = \underset{1}{x(0)}\,\underset{2}{y(2)} + \underset{1}{x(1)}\,\underset{1}{y(1)} + \underset{2}{x(2)}\,\underset{0}{y(0)} = 3$

$n=3 \quad z(3) = \underset{1}{x(0)}\,\underset{3}{y(3)} + \underset{1}{x(1)}\,\underset{2}{y(2)} + \underset{2}{x(2)}\,\underset{1}{y(1)} = 7$

$n=4 \quad z(4) = \underset{1}{x(0)}\,\underset{0}{y(4)} + \underset{1}{x(1)}\,\underset{3}{y(3)} + \underset{2}{x(2)}\,\underset{2}{y(2)} = 7$

$n=5 \quad z(5) = \underset{1}{x(0)}\,\underset{0}{y(5)} + \underset{1}{x(1)}\,\underset{0}{y(4)} + \underset{2}{x(2)}\,\underset{3}{y(3)} = 6$

$n=6 \quad z(6) = x(0)y(6) + x(1)y(5) + x(2)y(4) = 0 \ldots$

$$\therefore\ z(n) = [0\ 1\ 3\ 7\ 7\ 6]$$

CONVOLUÇÃO

② Convolução de duas sequências exponenciais.

$$x(n) = a^n \mu(n) \quad e \quad y(n) = b^n \mu(n)$$

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, y(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k \mu(k)\, b^{n-k} \mu(n-k)$$

como: $\mu(k) = 0$ para $k < 0$ e
$\mu(n-k) = 0$ para $k > n$

$$z(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = b^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^k *$$

$$= b^n \frac{1-(a/b)^{n+1}}{1-(a/b)} \quad , \quad n \geq 0$$

ou

$$z(n) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} \quad , \quad n \geq 0$$

OBS: Observe que se $a = b$ temos que retornar ao passo anterior (*)

$$(*) \quad z(n) = a^n \sum_{k=0}^{n} (1)^n$$

$$z(n) = (n+1)\, a^n \quad n \geq 0$$

① Caracterize o sistema

$$y(n) = \begin{cases} x(n) & n \text{ é par} \\ -x(n) & n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

• podemos escrever que $y(n) = (-1)^n x(n)$

a) linear ?

$$y(n) = (-1)^n \{ \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \dots \} = \alpha_1 (-1)^n x_1(n) + \alpha_2 (-1)^n x_2(n) + \dots$$

$$= \alpha_1 y_1(n) + \alpha_2 y_2(n) + \dots \Rightarrow \underline{\text{LINEAR}}$$

b) variante?

aplicando $x(n-N) \Rightarrow y_1(n) = (-1)^n x(n-N)$

atrasando o tempo $\Rightarrow y_2(n) = y(n-N) = (-1)^{n-N} x(n-N)$

$y_1(n) \neq y_2(n) \Rightarrow$ SISTEMA VARIANTE AO DESLOCAMENTO

c) O sistema é CAUSAL pois a saída no instante $n = n_0$ só depende de $x(n_0)$ não depende de valores futuros. Além disso ele não TEM MEMÓRIA

d) estabilidade

admitindo $x(n) = u(n)$

$y(n) = (-1)^n u(n) \Rightarrow |y(n)| = |(-1)^n u(n)| = 1 \quad u \geq 0$

∴ sistema é estável

FOURIER

- Mostre que $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})\, e^{jnw}\, dw$.

$$X(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, e^{-jkw} \quad \Leftarrow \text{definição}$$

Multiplicando ambos os lados por e^{jnw} e integrando entre $-\pi$ e π tem-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})\, e^{jnw}\, dw = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, e^{-jkw}\, e^{jnw}\, dw$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jkw}\, e^{jnw}\, dw$$

como $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jkw}\, e^{jnw}\, dw = \begin{cases} 2\pi, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})\, e^{jnw}\, dw = 2\pi\, x(n)$$

$$\therefore \quad x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})\, e^{jnw}\, dw$$

c.q.d

FOURIER

● Determine a transformada de Fourier da sequência.

$$x(n) = a^{|n|} \quad , \quad |a| < 1$$

• reescrevendo $x(n)$ de forma a eliminar o modulo em $|n|$ tem-se:

$$x(n) = \begin{cases} a^{n} , & n \geq 0 \quad \rightarrow x_1(n) \\ a^{-n} , & n < 0 \quad \longrightarrow x_2(n) \end{cases}$$

$$x(n) = a^{n}\mu(n) + a^{-n}\mu(-n-1)$$

por inspeção

$$a^{n} u(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} = X_1(e^{j\omega})$$

$$a^{-n}\mu(-n-1) \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} e^{j\omega n} - 1$$

$$= \frac{a e^{j\omega}}{1 - a e^{j\omega}} = X_2(e^{j\omega})$$

$$\therefore \quad X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega}) = \frac{1 - a^{2}}{1 - 2a\cos(\omega) + a^{2}}$$

—— // ——

OBS: Esta transf. é útil qdo trabalhamos com funções de autocorrelação.

Seja uma associação em série de dois sistemas LTI tais que:

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{2 - e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}} \quad e \quad H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega}}$$

$\Rightarrow$ polos $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{3}}{4}$

a) determine a equação de diferenças.

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega}) = \frac{2 - e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{8} e^{-j3\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega}) \left\{ 1 + \frac{1}{8} e^{-j3\omega} \right\} = \left\{ 2 - e^{-j\omega} \right\} X(e^{j\omega})$$

$$y(n) = -\frac{1}{8} y(n-3) + 2x(n) - x(n-1)$$

b) resposta ao impulso. (c.i. nulas)

$$y(n) = 2\delta(n) - \delta(n-1) - \frac{1}{8} y(n-3)$$

$y(0) = 2$

$y(1) = -1$

$y(2) = 0$

$y(3) = -\frac{1}{8} y(0) = -1/4 = -1/2^2$

$y(4) = -\frac{1}{8} y(1) = 1/8 = 1/2^3$

$y(5) = -1/8\, y(2) = 0$

$y(6) = -1/8\, y(3) = 1/2^5$

$y(7) = -1/2^6$

$y(8) = 0$

$y(9) = -1/2^8$

$y(10) = +1/2^9$

$y(0) = 2$

$y(1) = -1$

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n = 2, 5, 8, 11 \ldots \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, & n = 3, 7, 9, \ldots \\ +\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & n = 4, 6, 10, \ldots \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} = A \sum_{n=0}^{M} e^{-j\omega n}$$

$$= A\, \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{A\, e^{-j\omega M/2}}{e^{-j\omega/2}} \cdot \frac{e^{j\omega \frac{M}{2}} - e^{-j\omega \frac{M}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

$$= A\, e^{-j\cdot\omega(M-1)/2}\ \frac{\operatorname{sen}(\omega M/2)}{\operatorname{Sen}(\omega/2)}$$

O sinal contínuo no tempo: $x(t) = \text{sen}\, 20\pi t + \cos 40\pi t$

é amostrado tal que $x(n) = \text{sen}\, \frac{\pi}{5} n + \cos \frac{2\pi}{5} n$

a) Determine Fa

$$Fa = \frac{\Omega_0}{\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} Fa = \dfrac{20\pi}{\pi/5} = 100Hz & (I) \\ \text{ou} \\ Fa = \dfrac{40\pi}{2\pi/5} = 100Hz & II \end{cases}$$

$Fa = 100\ Hz$

b) A escolha na parte (a) é única? Se não, especifique uma outra F_a consistente com a informação dada.

$\Rightarrow$ Como $\omega_0 = \omega_0 + 2\pi k$, uma outra frequencia de amostragem poderia ser ($k = 1$)

$$Fa = \frac{\Omega_0}{\omega_0 + 2\pi} = \frac{20\pi}{\frac{\pi}{5} + 2\pi} = \frac{100}{11} Hz$$

OBS:

$x(t) = \text{sen}(20\pi t) + \text{sen}(40\pi t)$

$$x(n) = \text{sen}\left(\frac{20\pi n}{100/11}\right) + \text{sen}\left(\frac{40\pi n}{100/11}\right) = \text{sen}\left(\frac{11}{5}\pi n\right) + \text{sen}\left(\frac{22\pi}{5}n\right)$$

$$= \text{sen}\left[\left(\frac{\pi}{5} + 2\pi\right)n\right] + \text{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{5} + 4\pi\right)n\right] =$$

$$= \text{sen}\left(\frac{\pi}{5} n\right) + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5} n\right)$$

AMOSTRAGEM

TRANSFORMADA Z

Proakis 4.11

① Utilizando o método de divisão longa, determine a transformada z inversa de:

$$X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

admitindo (a) $x(n)$ causal e (b) $x(n)$ anticausal.

(a) $x(n)$ causal

$$
\begin{array}{l|l}
1+2z^{-1} & 1-2z^{-1}+z^{-2} \\
\hline
-1+2z^{-1}-z^{-2} & 1+4z^{-1}+7z^{-2}+10z^{-3}+\dots \\
\hline
4z^{-1}-z^{-2} & \\
-4z^{-1}+8z^{-2}-4z^{-3} & \\
\hline
7z^{-2}-4z^{-3} & \\
7z^{-2}+14z^{-3}-7z^{-4} & \\
\hline
10z^{-3}-7z^{-4} &
\end{array}
$$

$\therefore \; x(n) = \{\underline{\underline{1}} \;\; 4 \;\; 7 \;\; 10 \;\; 13 \;\; 16 \dots\}$

$$x(n) = (3n+1)\,u(n)$$

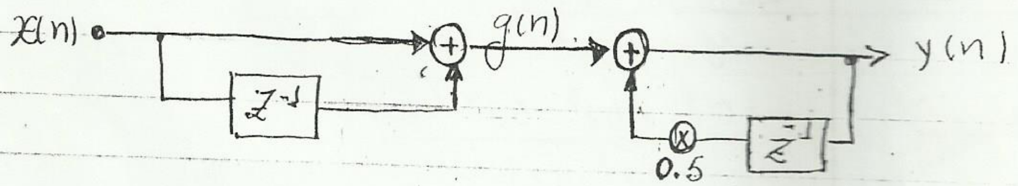
(b) $x(n)$ anticausal

$$
\begin{array}{l|l}
1-2z+z^{2} & 2z+5z^{2}+8z^{3}+11z^{4}+\dots \\
\hline
 & 2z+z^{2} \\
 & -2z+4z^{2}-2z^{3} \\
\hline
 & 5z^{2}-2z^{3} \\
 & -5z^{2}+10z^{3}-5z^{4} \\
\hline
 & 8z^{3}-5z^{4} \\
 & -8z^{3}+16z^{4}-8z^{5} \\
\hline
 & 11z^{4}-8z^{5}
\end{array}
$$

$x(n) = \{\dots \; 14 \;\; 8 \;\; 5 \;\; 2 \;\; \underline{0}\}$

$$x(n) = -(3n+1)\,u(-n-1)$$

18) Para o sistema mostrado na figura abaixo encontre: a equação de diferenças, a função de transferência e a resposta ao impulso do sistema. Este sistema é estável?



(a) equação de diferenças.

$$\begin{cases} y(n) = g(n) + 0.5y(n-1) \\ g(n) = x(n) + x(n-1) \end{cases}$$

$$\therefore \quad y(n) = 0.5y(n-1) + x(n) + x(n-1)$$