Universidade de São Paulo ⋆ Escola de Engenharia de São Carlos

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação

⋆ 44a. Turma de Engenharia Elétrica ⋆

Prof. B. J. Mass – *bjmass@sc.usp.br* – tel. (16) 33 73 93 61 – sala 3005 – campus 1

www.sel.eesc.usp.br:8085/Disciplinas → Graduação → sel326/Controle de Sistemas Lineares (B. J. Mass) → sel0326bjm → tdm_bjm_tredici

Lista de Exercícios No. 7

Versão 1.0

Vers. 1.0 distr. em 10/out/13 - Qui.
Sols. aceitas até 10:10h de 17/out/13 - Qui.
(Um atraso de Δh horas implica um fator de correção $e^{-\Delta h/6{,}5}$)

***Estabilidade**: Forma Real de Jordan e Estabilidade*

Os sistemas considerados

Consideraremos aqui apenas sistemas lineares, de tempo contínuo, na forma

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}\\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

onde

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} A & - & n\times n & \mathbf{u} & - & l\times 1\\ B & - & n\times l & \mathbf{y} & - & m\times 1\\ C & - & m\times n & \mathbf{x} & - & n\times 1\\ D(nula) & - & m\times l & \dot{\mathbf{x}} & - & n\times 1\end{array}$$

cujas funções de transferência sejam estritamente próprias, sem pares canceláveis de polos e zeros, i.e., com um único bloco de Jordan associado a cada um dos distintos autovalores de A. Empregaremos (A, B, C) para indicar um sistema assim, concentrando nossa atenção na respectiva matriz A.

Um exemplo motivador

Consideremos um sistema (A, B, C) com

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

de modo que o sistema é claramente **l-instável**; alguma de suas trajetórias de entrada nula começa nas proximidades de um ponto de equilíbrio e afasta-se deste arbitrariamente. Basta que uma trajetória apresente essa característica para que o sistema seja considerado **l-instável**. Para estabilidade de Liapunov é necessário que toda e qualquer trajetória iniciando nas imediações de um ponto de equilíbrio seja contida e não se afaste arbitrariamente. Neste exemplo temos

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0\\ 0 & e^{5t} & 0\\ 0 & 0 & e^{0t}\end{bmatrix},$$

e notamos que o autovalor -3 só afeta (só incide ou só age sobre) a variável x_1; o autovalor 5 só age sobre x_2 e o autovalor 0 sobre x_3. Em razão disso uma trajetória de entrada nula que inicie por exemplo em $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, afasta-se arbitrariamente de $\mathbf{x}_0$; uma trajetória que inicie em $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ por exemplo, permanece em $\mathbf{x}_0$. Por outro lado, uma trajetória que inicie em $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, converge arbitrariamente para a origem. Há três tipos qualitativos de comportamentos para as trajetórias; basta um caso insatisfatório e o sistema considerado é l-instável.

O que é necessário para generalizar a análise acima? Revisar os conceitos envolvendo formas de Jordan de uma matriz quadrada.

Bloco de Jordan

Um bloco de Jordan associado a um autovalor real r é uma matriz $k \times k$, da forma

$$L = \begin{bmatrix} r & 1 & & O & \\ & r & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & O & & r & 1 \\ & & & & r \end{bmatrix}$$

com k elementos idênticos a r na diagonal principal, $k-1$ elementos unitários na superdiagonale e todos os restantes nulos. O menor bloco de Jordan possível é um bloco 1×1.

Bloco real de Jordan

Um bloco real de Jordan associado a um par não real de autovalores conjugados $a \pm bi$, é uma matriz quadrada com a forma

$$L = \begin{bmatrix} R & I & & O & \\ & R & I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & O & & R & I \\ & & & & R \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad R = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um bloco real de Jordan tem estrutura análoga a de um bloco de Jordan, mas com dimensão genérica $2k \times 2k$. O menor bloco real de Jordan possível tem dimensão 2×2.

Matriz bloco diagonal

Uma matriz bloco diagonal é uma matriz quadrada com blocos quadrados ao longo da diagonal, sendo nulos todos os elementos fora desses blocos. Os blocos ao longo da diagonal podem ter dimensões quaisquer, logicamente não excedendo a própria matriz. Uma matriz diagonal é um caso particular com blocos 1×1 ao longo da diagonal. Qualquer matriz quadrada pode ser considerada bloco diagonal, com um único bloco ao longo da diagonal.

Matriz real de Jordan
Ou forma canônica real de Jordan, é uma matriz bloco diagonal com a estrutura

$$J = \begin{bmatrix} L_1 & & & \\ & L_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_s \end{bmatrix}$$

onde cada L_i é um bloco de Jordan ou um bloco real de Jordan; fora dos L_i os elementos de J são nulos.

Exemplo 2: A matriz

$$J = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \tag{2}$$

é uma matriz real de Jordan que pode ser reescrita como

$$J = \begin{bmatrix} L_1 & & & \\ & L_2 & & \\ & & L_3 & \\ & & & L_4 \end{bmatrix}$$

onde

$$L_1 = [\,-7\,], \quad L_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad L_4 = [\,6\,]$$

De passagem notamos que um sistema (J, B, C) com a J acima é l-instável.

Uma propriedade notável
Uma propriedade de nosso interesse garante que para calcular a exponencial matricial de uma matriz bloco diagonal basta calcular a exponencial matricial de cada bloco. Isto nos permite escrever

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tL_1} & & & & \\ & e^{tL_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{tL_{s-1}} & \\ & & & & e^{tL_s} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Exemplo 3: Para um sistema (A, B, C) com A igual à matriz (2) acima podemos escrever

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{tL_1} & & & \\ & e^{tL_2} & & \\ & & e^{tL_3} & \\ & & & e^{tL_4} \end{bmatrix}$$

onde

$$e^{tL_1} = e^{-7t}, \quad e^{tL_2} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes e^{-2t}, \quad e^{tL_3} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes e^{tR_3}, \quad e^{tL_4} = e^{6t}$$

e

$$R_3 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad e^{tR_3} = e^{-3t} \begin{bmatrix} cos(4t) & sin(4t) \\ -sin(4t) & cos(4t) \end{bmatrix}$$

Obs.: Se A tem dimensão $p \times q$ e B tem dimensão $r \times s$, o **produto tensorial** de A por B é uma matriz de dimensão $pr \times qs$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1q}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2q}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \cdots & a_{pq}B \end{bmatrix},$$

que proporciona economia, ajudando a memorizar a estrutura de expressões elaboradas. Em lugar de

$$e^{tL_3} = e^{-3t} \begin{bmatrix} cos(4t) & sin(4t) & tcos(4t) & tsin(4t) \\ -sin(4t) & cos(4t) & -tsin(4t) & tcos(4t) \\ 0 & 0 & cos(4t) & sin(4t) \\ 0 & 0 & -sin(4t) & cos(4t) \end{bmatrix}$$

podemos escrever simplesmente

$$e^{tL_3} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes e^{tR_3}$$

O importante aqui é que a análise de e^{tA} pode ser reduzida à análise de blocos separados e independentes, com estrutura mais fácil de lembrar.

Blocos afetam apenas certas variáveis de estados

A forma (3) acima mostra que em relação a uma trajetória de estados, cada variável de estado é afetada apenas por um bloco L_i, e cada bloco afeta apenas certas variáveis de estado.

Exemplo 4:
Para um sistema (A, B, C) com A igual à (2) acima, o bloco L_1 afeta somente x_1; o bloco L_2 somente x_2 e x_3; o bloco L_3 somente x_4, x_5, x_6, x_7; o bloco L_4 somente x_8. Poderiamos escrever por exemplo

$$\begin{bmatrix} x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \end{bmatrix} = e^{tL_3} \begin{bmatrix} x_4(0) \\ x_5(0) \\ x_6(0) \\ x_7(0) \end{bmatrix}$$

É fácil perceber que para entrada nula só $x_8(t)$ apresentará comportamento divergente.

Exercícios

Em cada um dos exercícios abaixo interessa-nos a estabilidade de um sistema da forma (A, B, C), para o qual a matriz A é especificada.

1. Para A igual à (2), uma trajetória de estado com entrada nula afasta-se indefinidamente das proximidades de qualquer ponto de equilíbrio se $x_8(0) \neq 0$, o que não ocorre se $x_8(0) = 0$. Explique.
   Resposta: A variável $x_8(t)$ é a única afetada por um autovalor com parte real positiva, ...

2. Suponha que A é bloco-diagonal, 18×18, da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_6 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

   e para $i = 2, 3, 4, 5, 6$, A_i é obtida permutando-se as colunas de A_1. Determine a estabilidade sem calcular autovalor algum; explique e justifique corretamente.
   Pista: Verifique o posto de A_1, ...

3. Suponha A real, 20×20, tal que $a_{ii} = -i$ para $i = 1, 2, 3, \cdots, 20$; os elementos a_{12} e a_{21} não especificados mas os restantes nulos. Determine a estabilidade em função de a_{12} e a_{21}, justificando corretamente.
   Pista: Há três casos: $a_{12}a_{21} < 0$, $a_{12}a_{21} = 0$, $a_{12}a_{21} > 0$. ...

4. A é real, 20×20, com $a_{ii} = -i$ para $i = 1, 2, 3, \cdots, 20$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 1$ e os restantes nulos. O que se pode dizer sobre a estabilidade sem calcular autovalores? Justifique corretamente.
   Resposta: Não pode ser a-estável. ...

5. Sem calcular autovalores, caracterize o tipo de estabilidade que devemos associar a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Justifique corretamente.
Pista: Bloco-diagonal. ...

6. Determine os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -6 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

e classifique o sistema correspondente quanto a estabilidade. Explique e justifique a abordagem empregada.
Pista: Bloco-triangular; forma companheira.

7. Diga tudo o que é pertinente ou relevante do ponto de vista de estabilidade de um sistema com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pista: Considerar os pontos abaixo:

i - O conjunto dos pontos de equilíbrio.

ii - A localização de cada autovalor.

iii - A repetição (multiplicidade algébrica) de possíveis autovalores imaginários.

iv - O possível cancelamento de polos por zeros (número de blocos de Jordan associados a cada autovalor distinto).

8. Determine a forma de Jordan de A, sabendo que A tem exatamente três autovalores reais, r_1, r_2, r_3, e que (A, B, C) é l-estável mas não a-estável.
   Pista: Há só duas possibilidades, âmbas com $r_3 = 0$.

9. Cada um dos elementos de $\Lambda = \{-5, -20, -3i, 3i\}$ corresponde a pelo menos um dos autovalores de A, e cada autovalor de A está representado em Λ. O que se pode garantir sobre a estabilidade de (A, B, C), sabendo que A é 5×5?
   Pista: Um dos autovalores tem que ter multiplicidade algébrica 2 (é repetido).

10. Examine a sequência

$$U_1 = [\,0\,] \quad \longrightarrow \quad e^{tU_1} = [\,1\,]$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad e^{tU_2} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad e^{tU_3} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad e^{tU_4} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/3! \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e determine e^{tU_k}, para

$$U_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Resposta:

$$e^{tU_k} = \begin{bmatrix} t^0/0! & t^1/1! & t^2/2! & \cdots & t^{k-2}/(k-2)! & t^{k-1}/(k-1)! \\ 0 & t^0/0! & t^1/1! & \cdots & t^{k-3}/(k-3)! & t^{k-2}/(k-2)! \\ 0 & 0 & t^0/0! & \cdots & t^{k-4}/(k-4)! & t^{k-3}/(k-3)! \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t^0/0! & t^1/1! \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t^0/0! \end{bmatrix}$$

11. Queremos aplicar realimentação de estado ao sistema descrito por

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u$$

de tal forma que o sistema de malha fechada seja l-estável mas não a-estável e não tenha autovalor nulo. Determine uma matriz de realimentação $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ que satisfaça esses requisitos.
Sugestão: Passe para variáveis de estados e note que dois autovalores terão que ser imaginários.

12. Sem empregar calculadora, determine a estabilidade do sistema declarado abaixo. Esclareça e justifique sua abordagem.

```
≫  a = [0 1 0 0; 0 0 -1 0; 0 0 0 1; 0 0 100 0];
≫  b = [0; 0,1237; 0; -1,2621]; c = [1 0 0 0];
≫  x0 = [1; 1; 1; 1]; x = [];
≫  for i = 1:50
≫      t(i) = (i - 1)*0.01; x = [x expm(t(i)*a)*x0];
≫  end
≫  plot(t, x(1,:), 'k'), grid, hold
≫  plot(t, x(2,:), 'b')
≫  plot(t, x(3,:), 'r')
```

Pista: Matriz bloco-triangular.

13. Verifique se é possível aplicar as ideias comentadas na apresentação desta lista (blocos de Jordan), para analisar trajetórias de estados de entrada nula para o sistema declarado no Exer. 12 acima.
Resposta: Não sem uma transformação de variáveis. Como declarada a matriz A não está na forma de Jordan.

14. É possível, sem recurso numérico, ter pelo menos uma ideia da forma de Jordan da matriz A do Exer. 12 acima?
Resposta: Sim; só há duas possibilidades (lembrar que A é bloco-triangular).

15. Sem calcular autovalores, classifique a estabilidade do sistema declarado abaixo

```
≫ a = [-0.05 -6 0 0; -10E-3 -0,15 0 0; 1 0 0 13; 0 1 0 0];
≫ b = [-0,2; 0,03; 0; 0]; c = [1 0 0 0];
≫ x0 = [1; 0; 1; 0]; x = [];
≫ for i = 1:40
≫     t(i) = (i - 1)*0.01; x = [x expm(t(i)*a)*x0];
≫ end
≫ plot(t, x(1,:), 'k'), grid, hold
≫ plot(t, x(3,:), 'r')
```

esclarecendo e justificando a abordagem empregada.
Pista: Note que a matriz A é bloco-triangular inferior.

16. Sem calcular autovalores, determine a estabilidade do sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_t$$

esclarecendo e justificando a abordagem empregada.
Pista: A é bloco-triangular. ...

17. O que se pode dizer a respeito do conjunto $\mathbf{N}(A)$ de todos os pontos de equilíbrio do motor representado por

$$A = \begin{bmatrix} -b/J & K_m/J & 0 \\ -K_b/L_t & -R_t & K_g/L_t \\ 0 & 0 & -R_f/L_f \end{bmatrix}$$

se todos os parâmetros são positivos?
Sugestão: Considere em que condições as duas primeiras colunas são linearmente independentes.

18. Do ponto de vista de estabilidade, que tipo de trajetórias de estados (de entrada nula) podemos esperar para o motor do Exer. 17 acima, partindo das imediações de um ponto de equilíbrio?
Sugestões: A é bloco-triangular; um dos blocos é 2×2. ...

Final da LE-07

Arquivo original:	"tdm13le07.tex"
Arquivo p/ impressão: ...	"tdm13le07.pdf"
Versão:	1.0
No. de páginas:	10
Concluído em:	10/10/2013 - 08:59h