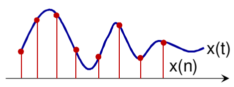
Amostragem



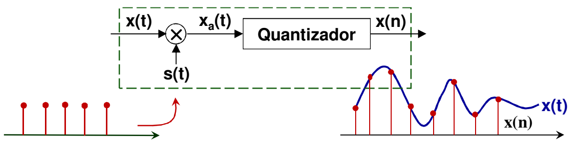
Introdução

- A teoria da Amostragem é a base matemática para se obter um sinal x(n) discreto no tempo a partir de um sinal x(t) contínuo no tempo.
- A obtenção de uma sequência de amostras x(n) a partir de um sinal x(t) contínuo no tempo pode ser representada pela seguinte relação:

$$x(n) = x(t)\big|_{t=nT_a} = x(nT_a)$$

- Em que:
  - n um número inteiro,
  - T_a é o período de amostragem do sinal,
  - $F_a = 1/T_a$ é a frequência de amostragem
- Na prática a operação de amostragem é executada por um conversor AD (analógico-digital) que inclui também a quantização das amplitudes das amostras.

Representação matemática



- O sinal s(t) é um trem de impulsos periódicos tal que:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_a)$$

- Como o sinal amostrado é o produto de s(t) por x(t), então:

$$x_a(t) = x(nT_a) = x(t)s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_a)$$

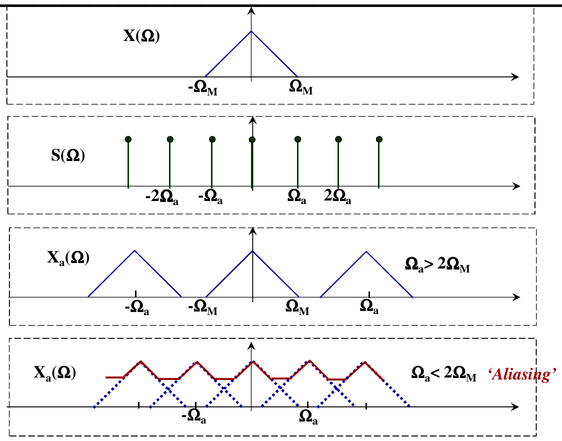
- Calculando a transformada de Fourier tem-se:

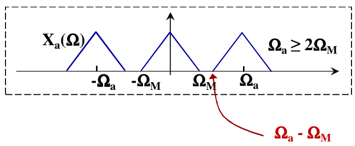
$$S(\Omega) = \frac{2\pi}{T_a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_a), \quad em\,que: \Omega_a = 2\pi/T_a$$

$$X_a(\Omega) = \frac{1}{2\pi}X(\Omega) * S(\Omega) \quad (Teor.\ da\ Convolução)$$

$$\boxed{X_a(\Omega) = \frac{1}{T_a}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_a)}$$

- $X_a(\Omega)$ consiste de cópias regularmente espaçadas de $X(\Omega)$
- O espaçamento é dado por múltiplos inteiros de Ω_a.
- Estas cópias são superpostas como mostra a figura abaixo:



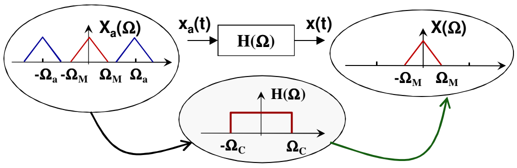


- Observe que para não haver superposição de Espectros:

$$\Omega_a - \Omega_M \geq \Omega_M \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Omega_a \geq 2\Omega_M}$$

- Se a condição acima é satisfeita as réplicas de $X(\Omega)$ não irão se superporem.
- Em cada período tem-se uma réplica exata de $X(\Omega)$.
- Portanto o sinal x(t) pode ser recuperado a partir de $x_a(t)$ através de um filtro passa-baixas com corte em $\Omega_c = \Omega_M$

Recuperação de x(t)



$$\Omega_c = \Omega_M \text{ ou } \Omega_c = \Omega_a/2$$

- **Se a condição $\Omega_a \geq 2\Omega_M$ não é satisfeita, as réplicas de $X(\Omega)$ se sobrepõem, modificando o espectro do sinal original.**
- **O sinal na banda básica aparecerá distorcido e não poderá ser recuperado. Este efeito é conhecido como 'aliasing'.**

Teorema da amostragem

- **A discussão anterior forma a base para se enunciar o teorema da amostragem.**

Um sinal x(t), contínuo no tempo e limitado em banda tal que a frequência máxima de seu espectro seja Ω_M, isto é:

$X(\Omega) = 0, |\Omega| \geq |\Omega_M|$

pode ser recuperado unicamente a partir de suas amostras $x(n) = x(nT_a)$, tomadas em intervalos regularmente espaçados tais que:

$\Omega_a = 2\pi/T_a \geq 2\Omega_M$ ou $F_a \geq 2F_M$

- **Ω_M ou F_M => Frequência de Nyquist.**
- **Ω_a ou F_a => Taxa de Nyquist.**