Médias estatísticas
e
Funções densidade de probabilidade

Média de uma variável aleatória

⇨ **Seja x uma v. a. discreta que assume os valores x_1, x_2, ... x_n.**

✓ **Se um experimento é repetido N vezes e m_1, m_2, ... m_n são os números de resultados favoráveis a x_1, x_2, ... x_n. Então o valor médio de x é definido como:**

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\left[m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n\right]$$

$$se\ N \to \infty \quad então \quad p_{\mathbf{x}}(x_i) = \frac{m_i}{N}$$

✓ **Logo o valor médio de x é determinado pela seguinte equação:**

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_{\mathbf{x}}(x_i)$$

- Para o caso de eventos igualmente prováveis as probablidades $p_x(x_i)$ são iguais para todo i, assim :

$$p_{\mathbf{x}}(x_i) = m/N = 1/n \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad pois: N = m \times n$$

- Neste caso o valor médio de x é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- para variáveis aleatórias contínuas o valor médio é dado por:

$$\bar{x} = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

⇨ média de uma função de uma variável aleatória:

✓ **Sendo y = g(x) tem-se que:**

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} y p_{\mathbf{y}}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_{\mathbf{x}}(x) dx$$

✓ **Para o caso discreto:**

$$\bar{y} = \overline{g(x)} = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) p_{\mathbf{x}}(x_i)$$

✓ **Variáveis aleatórias múltiplas: z = g(x,y)**

$$\bar{z} = \int_{-\infty}^{\infty} z p_{\mathbf{z}}(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) p_{\mathbf{xy}}(x,y) dx dy$$

✓ **Caso discreto:**

$$\bar{z} = \overline{g(x,y)} = \sum_{i=1}^{n} g(x_i, y_i) p_{\mathbf{x}}(x_i, y_i)$$

resultados importantes (propriedades)

- **Soma de variáveis aleatórias:**

$$\overline{x+y+z} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$

- **Multiplicação por uma constante (ganho):**

$$\overline{kx} = k\bar{x}$$

- **Média com funções de variáveis aleatórias:**

$$z = g_1(x)g_2(y) \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = \overline{g_1(x)g_2(y)}$$

- ✓ **Se x e y forem independentes:**

$$\bar{z} = \overline{g_1(x)}.\overline{g_2(y)}$$

consequência: => $\overline{xy} = \bar{x}\,\bar{y}$

Valor quadrático médio

✓ **Para o caso de eventos igualmente prováveis:**

$$\boxed{\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

✓ **admitindo duas v. a. independentes:**

$$\overline{(x+y)^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} + 2\bar{x}\bar{y}$$

✓ **Considerando um caso mais geral define-se os momentos de uma variável aleatória como segue:**

- **n-ésimo momento**

$$E\left[x^n\right] = \overline{x^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_{\mathbf{x}}(x)dx$$

- **n-ésimo momento central**

$$E\left[(x-m)^n\right] = \overline{(x-m)^n} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^n p_{\mathbf{x}}(x)dx$$

- **Variância e desvio padrão**

$$\sigma_x^2 = \overline{(x-m)^2} = \overline{x^2} - m^2$$

OBS: $\sigma_{\mathbf{x}}$ é o desvio padrão

Mediana

⇨ **A mediana mede a localização do centro da distribuição dos dados:**

- ✓ **"Sendo ordenados em ordem crescente os valores da amostra, a mediana é o valor que a divide ao meio, isto é, 50% dos valores da amostra são menores ou iguais à mediana e os outros 50% são maiores ou iguais à mediana."**

- ✓ **A mediana é determinada da seguinte maneira: Se n é ímpar, a mediana é o valor central dos dados. Se n é par, a mediana é a média dos dois elementos centrais.**

- ✓ **Representando os valores da amostra ordenada por : $x_1, x_2, \ldots , x_N$, então uma expressão para o cálculo da mediana é dada por:**

$$med = \begin{cases} x_{(N+1)/2} & se\ N\ é\ ímpar \\ \dfrac{1}{2}\left(x_{N/2} + x_{(N/2)+1}\right) & se\ N\ é\ par \end{cases}$$

- **Exemplo:**
  - x = [1 2 2 3 4 5 6 6 7 7 8]
    - mediana = 5
    - média = 4,63
  - x = [1 2 2 3 4 5 6 6 7 7 8 9]
    - mediana = (5 + 6)/2 = 5.5
    - média = 5

- **Como medida de localização, a mediana é mais robusta do que a média, pois não é tão sensível aos dados.**
- **A mediana é aplicada em processamento de sinais para filtrar ruídos**
  - **Veja as funções: medfilt1 e medfilt2 no Matlab.**
  - **Em imagens a mediana filtra muito bem o ruído *salt and pepper.***

apêndice

distribuições de probabilidade

Função densidade de probabilidade (fdp)

- **Se a função distribuição de probabilidade, F(x), é contínua e diferenciável, então a pdf é determinada por:**

$$p_{\mathbf{x}}(x) = p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

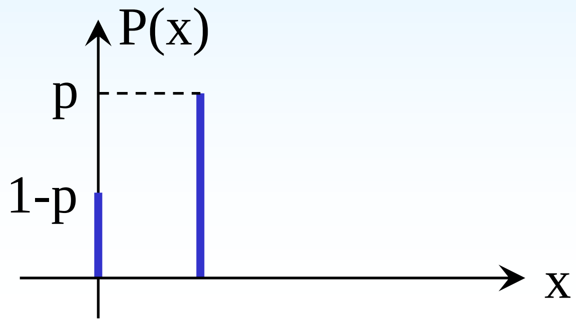
  - **p(x) Mede o quão rápido F(x) está aumentando ou o quanto é provável um resultado estar em torno de algum valor.**

- **Propriedades:**

  - $p_{\mathbf{x}}(x) \geq 0$
  - $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p_{\mathbf{x}}(x)dx$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{x}}(x)dx = 1$
  - $P(a < x \leq b) = \int_{a}^{b} p_{\mathbf{x}}(x)dx$

⇨ **Uma v.a. aleatória de Bernoulli apresenta a seguinte pdf:**

$$p(k) = P(X = k) = p^k (1 - p)^{1-k} \qquad k = 0,1$$



✓ **Média e variância**

$$\bar{x} = p \qquad \overline{\sigma_x^2} = p(1 - p)$$

⇨ **A v.a. aleatória de Bernoulli é associada a experimentos com dois resultados, como por exemplo os estados “zero” e “um” de um sistema de comunicação digital.**

- **Seja uma variável (processo) composta de N observações independentes com probabilidades iguais a *p*. Esta variável apresenta uma distribuição binomial se:**

$$p(k) = P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, N$$

- **Em que x = k representa o número de observações tomadas e,**

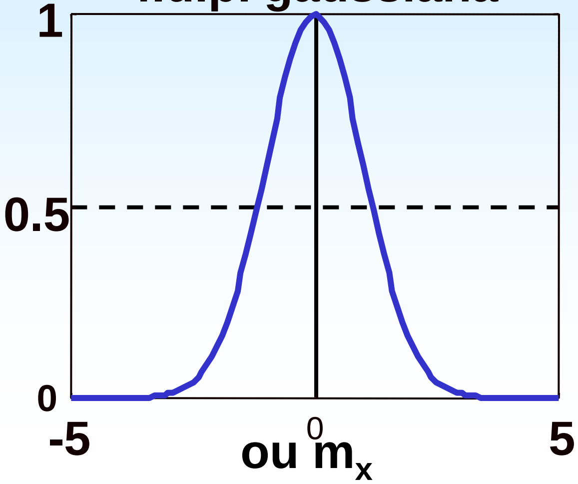
$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!\,(N-k!)}$$

✓ **Média e variância**

$$\bar{x} = Np \qquad \sigma_x^2 = Np(1-p)$$

⇨ **Uma v.a. aleatória gaussiana apresenta a seguinte fdp:**

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-(x-m_x)^2 / 2\sigma_x^2}$$



➢ **"Uma v. a. gaussiana é completamente determinada pela sua média e pela sua variância"**

$$\bar{x} = m_x \qquad \overline{x^2} = \sigma_x^2 + m_x^2$$

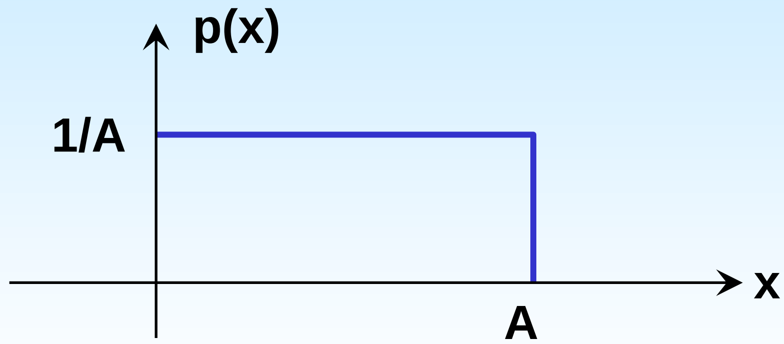
➢ **P(-σ < x< σ) ≈ 0.7**

➢ **P(x < 4) ≈ 1**

distribuição uniforme

⇨ **Uma v.a. aleatória uniformemente distribuída apresenta a seguinte pdf:**

$$p(x) = \begin{cases} 1/A, & 0 \le x \le A \\ 0, & c.c. \end{cases}$$



➢ **Valor médio:**

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_{0}^{A} x \frac{1}{A} dx = \frac{A}{2}$$

➢ **Variância:**

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{A}{2} \right)^2 \frac{1}{A} dx = \frac{A^2}{12}$$

➢ **Exemplo de aplicação: "ruído de quantização na conversão AD"**

distribuição de Poisson

⇨ **Uma v. a. X tem uma distribuição de Poisson com parâmetro α se ela assume valores 0, 1, 2, n, ... tal que:**

$$P(X = k) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \qquad k = 0, 1, \cdots$$

⇨ **Função densidade e distribuição de probabilidades:**

$$p_x(x) = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \delta(x - k) \qquad F_x(x) = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha^k}{k!} \qquad 0 \le x < N + 1$$

- **O valor médio e a variância são iguais:**

$$\bar{x} = \alpha \qquad e \qquad \sigma_x^2 = \alpha$$

⇨ **Exemplo: o número de chamadas telefônicas em algum intervalo de tempo**

⇨ **Uma v. a. X tem uma distribuição exponencial com parâmetro λ se sua pdf é dada por:**

$$P(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

✓ **Média e variância**

$$\bar{x} = \frac{1}{\lambda} \qquad \sigma_x^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

distribuição de Rayleigh

⇨ **Uma v. a. X tem uma distribuição de Rayleigh se sua pdf é dada por:**

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} u(x) \qquad \sigma > 0$$

✓ **Média, valor quadrático médio e variância:**

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma \qquad \overline{x^2} = 2\sigma^2 \qquad \sigma_x^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$$

⇨ **A função *u*(*x*) é a degrau unitário, isto é, *u*(*x*) = 1, *x* ≥ 0, *u*(*x*) = 0, *x* < 0. Assim, *p*(*x*) = 0 para *x* < 0.**

⇨ **Um exemplo da pdf de Rayleigh: ela é utilizada na modelagem de flutuações aleatórias da envoltória de certas formas de onda.**

⇨ **Uma v. a. X tem uma distribuição chi-quadrado se ela assume valores tais que:**

$$y = \sum_{i=0}^{N-1} x_i^2$$

⇨ **Função distribuição de probabilidades:**

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{N/2}\,\Gamma(N/2)}\, y^{N-2/2} e^{-y/2} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

✓ **Média e variância**

$$\bar{y} = N \qquad \sigma_y^2 = 2N$$