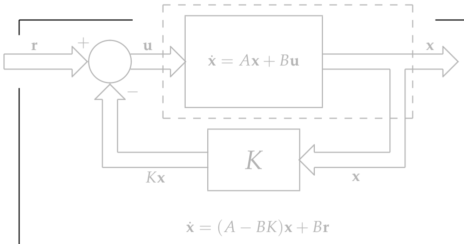

Universidade de São Paulo ⋆ Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação

⋆ 44a. Turma de Engenharia Elétrica ⋆

Prof. B. J. Mass – *bjmass@sc.usp.br* – tel. (16) 33 73 93 61 – sala 3005 – campus 1

Lista de Exercícios No. 4

Versão 1.0

Vers. 1.0 distr. em 12/set/13 - Qui.
Sols. aceitas até 10:10h de 19/set/13 - Qui.
(Um atraso de Δh horas implica um fator de correção $e^{-\Delta h/6,5}$)

Matriz de transição de estado: Cálculo via transformada de Laplace

As matrizes A, B, C, D

Para um sistema com apenas uma entrada e uma saída, é fácil passar da função de transferência para uma representação por variáveis de estado. Se, por exemplo, a função de transferência em questão apresentar a forma

$$G(s) = \frac{a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \tag{1}$$

então

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, D = [0] \tag{2}$$

constituem um quarteto que representa corretamente o sistema. Nesta representação a matriz A tem uma estrutura especial, conhecida como *forma companheira*; a representação em si

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

é conhecida como *forma canônica controlável*. A forma canônica controlável é uma das mais simples representações por variáveis de estados, podendo ser obtida, no caso de uma entrada e uma saída, diretamente à mão.

Motor CC

No caso de um motor de corrente contínua, tanto

$$G_1(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{a_0 s}{s(s^2 + b_1 s + b_0)}$$

como

$$G_2(s) = \frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{a_0}{s(s^2 + b_1 s + b_0)}$$

levam diretamente a

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b_0 & -b_1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_0 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = [0] \tag{4}$$

ou a

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b_0 & -b_1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = [0] \tag{5}$$

Uma transformação de variáveis
No caso de um motor CC, as variáveis de estado de maior interesse são por exemplo $x_1 = \theta(t),\ x_2 = \omega(t)$ e $x_3 = i(t)$. Apesar de não serem estas as variáveis em (4) ou (5), é possível recuperá-las através, por exemplo, da transformação

$$\bar{A}_1 = TA_1T^{-1}, \quad \bar{B}_1 = TB_1, \quad \bar{C}_1 = C_1T^{-1}, \quad \bar{D}_1 = D_1 \tag{6}$$

onde

$$T = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & (a_0K_B/K_T) & 1/L \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_0 & 0 \\ 0 & (-LK_B/K_T) & L \end{bmatrix} \tag{7}$$

supondo conhecidos os parâmetros K_B, K_T e L.

Um motor específico
Já conhecemos o motor Faulhaber-MicroMo 2642/012CR com

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{118181818,182}{s(s^2 + 11156,55115s + 2027709,80035)} \tag{8}$$

para o qual as folhas de dados fornecem

$$\left.\begin{array}{l} K_B = 2,9755 \cdot 10^{-6}\,\text{Nms} \\ K_T = 1,69 \cdot 10^{-2}\,\text{Nm}\,/\text{A} \\ L = 1,3 \cdot 10^{-4}\,\text{H} \end{array}\right\} \tag{9}$$

Exercícios

1. Para o motor em consideração obtenha as matrizes T e T^{-1}.

2. Empregue o MATLAB e obtenha a matriz A correspondendo às variáveis de estado $x_1 = \theta(t)$, $x_2 = \omega(t)$ e $x_3 = i(t)$.

3. Via MATLAB determine estimativas numéricas para as raízes não nulas r_1 e r_2, do polinômio característico de (8).

4. Obtenha $\Phi(t) = e^{tA}$ via Laplace; note que $\mathcal{L}[e^{tA}] = \Phi(s) = (sI - A)^{-1}$. Simplifique a transformada inversa de Laplace envolvida, recorrendo a uma tabela e escrevendo literalmente r_1 e r_2 onde for apropriado.

5. Escolha um vetor de estado inicial $\mathbf{x}(0)$ da seguinte maneira:

   i - O estado $x_1(0)$ deve ser igual aos dois algarismos mais significativos do **seu No. USP**, divididos por 100.

   ii - O estado $x_2(0)$ deve ser igual aos dois algarismos mais significativos seguintes do **seu No. USP**, divididos por 100.

   iii - O estado $x_3(0)$ deve ser igual aos três últimos algarismos do **seu No. USP**, divididos por 1000.

   iv - Se $0 \leq x_i(0) < 0,5$ atribua sinal positivo a $x_i(0)$; atribua sinal negativo se $x_i(0) \geq 0,5$.
   Exemplo: O No. USP 5890069 leva ao estado inicial

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -0,580 \\ -0,900 \\ 0,069 \end{bmatrix}$$

6. Determine uma boa estimativa para o estado $\mathbf{x}(t)$, para $t = 1,0\,\mathrm{s}$.

Apresente seus resultados ao professor dentro do prazo estipulado.

Final da LE 04

Arquivo original: .... "tdm13le04.tex"
Arquivo p/ impressão: ... "tdm13le04.pdf"
Versão: 1.0
No. de páginas: 3
Concluído em: .... 12/09/2013 - 08:25h