Revisão da Teoria de Probabilidades

Introdução

⇨ **Sinais determinísticos:**

✓ **Seus valores são conhecidos em todos os instantes de tempo: conhece-se uma descrição analítica ou gráfica.**

⇨ **Sinais aleatórios:**

✓ **Conhece-se somente algumas especificações parciais. Existem incertezas em relação ao seu comportamento. Eles são descritos com base em algumas médias estatísticas.**

⇨ **Probabilidade:**

✓ **Trata dos efeitos de possibilidades, utilizando médias de fenômenos que ocorrem sequencialmente ou simultaneamente.**

✓ **Exemplos: Emissão de elétrons, chamadas telefônicas, ruído, ...**

Introdução

- **Propósito da teoria de probabilidades:**
  - **Descrever e predizer tais médias em termos das probabilidades dos eventos.**
- **Estudo:**
  - **Variáveis e processos aleatórios permitem trabalhar com quantida-des que não são conhecidas totalmente, tais como:**
    - **Ruído, interferências,**
    - **Sinais de informação,**
    - **Sinais de voz, biológicos, etc..**
    - **Em transmissão digital o desempenho é medido através da probabilidade de erro de bits.**
  - **A base matemática é a teoria de probabilidades.**

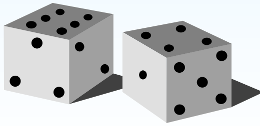
Espaço amostral e eventos

⇨ **Espaço amostral [S] é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Um elemento de S é chamado de ponto amostral (um resultado).** Exemplos:

- Considere o experimento do arremesso de um dado. Os resultados possíveis são: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Processamento de sinal. Num sistema de radar, a tensão de um ruído a qualquer tempo t pode ser vista como um numero real. O primeiro passo para modelar este ruído é considerar o espaço amorstral constituído de todos os números reais, i.e., $S = (-\infty, \infty)$.
- Sistems de comunicação óptica: Como a saída do fotodetector é um número de elétrons, o espaço amostral neste caso são os inteiros não negativos, $S = \{0,1,2,...\}$. 0 para considerar a possibilidade de não faver elétron observado.
- Sistemas de comunicação sem fio: receptores não coerentes medem a energia do sinal recebido. Como esta energia é uma quantitade não negativa, a modelamos com espaço amostral dos números reais, $S = [0,\infty)$.

Espaço amostral e eventos

- **Evento:** **é um subconjunto dos resultados possíveis de um espaço amostral.**
  - **Exemplos:** **No arremesso de um dado:**
    - **A = {1, 2} é um evento.**
    - **O = {o resultado é um número ímpar} é um evento.**



- **Evento complementar: $\bar{A}$ = S - A**
    - **$\bar{A}$ = {3, 4, 5, 6}**
    - **$\bar{O}$ = {resultado é um número par}**

Espaço amostral e eventos

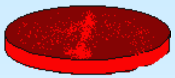
- **O conjunto de todos os resultados de um experimento é o evento certeza S.**
  - **Evento nulo: ϕ**
  - **Outro exemplo de espaço amostral:**
    - **O tempo de duração, antes de se danificar, de um circuito integrado:**
      - **$S = \{\tau : 0 \leq \tau \leq \infty \}$ em que τ representa o tempo de duração do CI.**

- **Conceito de Probabilidade**
  - **A probabilidade P(A) é um número que mede a possibilidade de ocorrência de um evento A.**
  - **Tem-se três definições de probabilidade:**

Definições de Probabilidade

1. Definição de Frequência Relativa

- **Considere o arremesso de uma moeda ideal:**



  - **Tem-se a certeza que o resultado é CARA ou COROA,**
  - **Eles são igualmente prováveis,**
  - **Se a moeda for arremessada um grande número de vezes, pode-se interpretar estes resultados como uma média.**
  - **Este exemplo é uma pista da definição de frequência relativa:**

- **A Probabilidade de ocorrência de um evento A é o seguinte limite:**

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_A}{N}$$

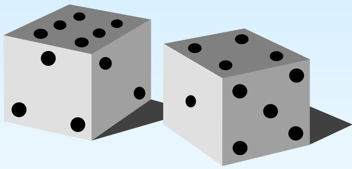
em que: n_A é o número de ocorrências de A, e N é o número de tentativas

  - **Segue desta definição que P(A) é um número positivo tal que:**

$$0 \le P(A) \le 1$$

Eventos Mutuamente Exclusivos

- **Dois eventos são mutuamente exclusivos se a ocorrência de um deles elimina a ocorrência do outro.**



- **Exemplo: Arremesso de dois dados**
  - ✓ **A1: o número total de pontos é 10: [4,6] - [6,4] - [5,5]**
  - ✓ **A2: o número total de pontos é 11: [5,6] - [6,5]**
  - ✓ **A3: pelo menos um dos resultados é 6**
    - **[A1 e A2]: são mutuamente exclusivos.**
    - **[A1 e A3] e [A2 e A3]: não são mutuamente exclusivos.**

Probabilidade Total

- **Considere um evento cujo resultado é um dos dois eventos A ou B.**
  - ✓ **Tal evento é denotado por A + B ou $A \cup B$**
  - ✓ **Se eles forem mutuamente exclusivos então:**

$$P(A+B) = \lim_{N\to\infty} \frac{n_A + n_B}{N} = P(A) + P(B)$$

⇨ **Se um experimento apresenta N resultados : A_1, A_2, ... A_N, mutuamente exclusivos, e nenhum mais, então:**

$$P(A_1 + A_2 + \cdots A_N) = 1$$

✓ **desse modo, S = {A_1, A_2, ..., A_N}, é o evento certeza.**

⇨ **Se A_1, A_2, ... A_N, não forem mutuamente exclusivos, então:**

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_N) < P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_N)$$

2. Definição Axiomática

- **Na definição axiomática o conceito de probabilidade não é inicialmente definido. São postulados três axiomas e nada mais:**
  - **A probabilidade é um número positivo: $P(A) \geq 0$,**
  - **A probabilidade do Evento certeza é 1: $P(S) = 1$ e $P(A) \leq 1$,**
  - **Para dois eventos mutuamente exclusivos: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.**
- **Todas as outras leis saem destes três axiomas.**

- **Propriedades:**
  - **$0 \leq P(A) \leq 1$,**
  - **Evento Impossível: $P(\phi) = 0$,**
  - **$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, em que $\bar{A}$ é o evento complementar de A,**
  - **$P(A) \leq P(B)$ se $A \subset B$,**

- Para A e B eventos quaisquer que não sejam mutuamente exclusivos:
  - **P(A U B) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB),**
- **Se A_1, ... A_n são n eventos não mutuamente exclusivos em S então:**

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i A_j A_k) - \cdots$$

  - **Para eventos mutuamente exclusivos:**

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- **A definição axiomática utiliza a definição de frequência relativa, mas evita a responsabilidade de uma definição imprecisa.**

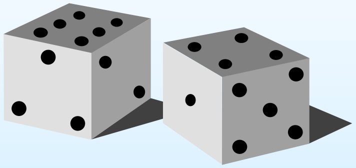
3. Definição Clássica de Probabilidade

- “A probabilidade de ocorrência de um evento **A** é igual à razão dos resultados favoráveis ao evento **A** dividido pelo número total dos resultados, dado que eles sejam igualmente prováveis.” Assim:

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

- **Exemplo:**
  - **No arremesso de um dado, determine a probabilidade de se obter um resultado impar:**
    - **são três resultados ímpares em um total de seis, assim:**

$$P(impar) = \frac{n_A}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

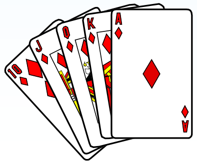


Probabilidade Conjunta

- **É a probabilidade de observação de um resultado particular A de um conjunto, e a probabilidade de se observar um resultado B do mesmo ou de um outro conjunto.**

- **Exemplo:**

  - **Retirar duas cartas em sucessão (com ou sem reposição em um baralho:**



    - **EVENTO A: retirar um ás na primeira tentativa.**
    - **EVENTO B: retirar um ás na segunda tentativa.**
    - **A $\cap$ B ou AB é o evento de se retirar dois ases.**

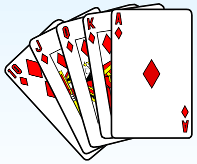
  - **A probabilidade de se obter o evento A e o B é chamada de Probabilidade Conjunta do evento AB (A$\cap$B) e é denotada por:**

$$P(A \cap B) = P(AB)$$

Probabilidade Condicional

⇨ **A probabilidade de um evento está condicionada à de um outro evento:**

⇨ **Exemplo: Considere o exemplo anterior da retirada de duas cartas em sucessão de um baralho:**



- ✓ **Caso a primeira carta não é recolocada no baralho:**
  - ➢ **Fica evidente então que a segunda tentativa está condicionada à primeira.**

⇨ **Define-se então a Probabilidade Condicional:**

- ✓ **"Probabilidade de ocorrência de um evento A dado que o evento B ocorreu." : P(A/B)**

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad ou \quad P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Regra de Bayes

⇨ **Combinando as duas equações anteriores chega-se à regra de Bayes:**

$$P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}$$

Eventos Independentes

⇨ **Um evento A é independente do evento B se:**

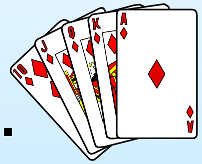
$$P(A/B) = P(A)$$

- ⇨ **Se dois eventos A e B são independentes então:**

$$P(A \cap B) = P(AB) = P(A)P(B)$$

⇨ **No exemplo anterior do baralho:**

- ⇨ **A primeira carta retirada é recolocada novamente no baralho.**



⇨ **Generalizando, se {A_1, ..., A_n} é uma sequência de n eventos independentes, então:**

$$P\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right) = P\left(A_1 . A_2 \cdots . A_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$$

- **Definições**
  - **Espaço amostral (S):**
    - **É o conjunto dos elementos distintos de todos os resultados de um experimento.**
  - **Ponto amostral (x_i):**
    - **É um resultado distinto de um experimento.**
- **Em geral associa-se um número real $x_1, \ldots, x_N$ a cada resultado:**
  - **Estes resultados formam uma variável aleatória "$x(\gamma)$ ou $x(x_i)$", que assume N resultados distintos.**
  - **No sentido convencional uma variável aleatória é uma função.**
- **Podemos definir de duas maneiras uma variável aleatória:**

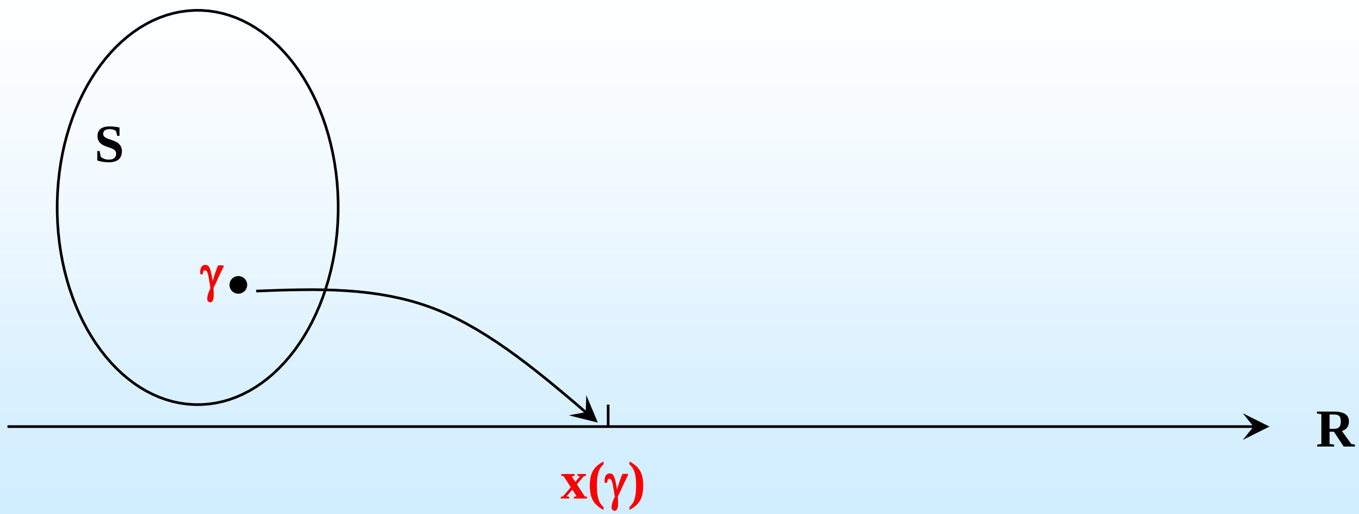
⇨ **DEF 1:**

Uma função cujo domínio é um espaço amostral, e cuja faixa de valores é um conjunto de números reais é chamada de variável aleatória do experimento.

⇨ **DEF 2:**

✓ **Uma variável aleatória "$x(\gamma)$ ou $x(x_i)$", é uma função real de um único valor que associa um número real chamado valor de $x(\gamma)$ a cada ponto amostral γ ou x_i do espaço amostral S.**

⇨ **Figura: Variável aleatória como uma função.**



- **Exemplo: arremesso de uma moeda: Cara = 1 e COROA = -1**
  - $x_i \in S = \{ 1, -1 \} \Rightarrow x_i$ **é um resultado particular,**
    - **$x(cara) = 1$ e $x(coroa) = -1$**
  - **neste caso investiga-se a probabilidade de se observar um resultado particular.**
- **Para cada ponto amostral γ de S tem-se:**
  - **O conjunto $\{ \gamma: x(\gamma) \leq x \}$ é um evento para todo real x.**
  - $P\{ \gamma: x(\gamma) \leq \infty \} = 1$
  - $P\{ \gamma: x(\gamma) = -\infty \} = 0$
- **A variável aleatória X conduz as seguintes medidas de probabilidade:**
  - $P(x = x_0) = P\{ \gamma: x(\gamma) = x_0 \}$
  - $P (x \leq x_0) = P\{ \gamma: x(\gamma) \leq x_0 \}$
  - $P (x_1 \leq x \leq x_2) = P\{ \gamma: x_1 \leq x(\gamma) \leq x_2 \}$

Tipos de Variáveis Aleatórias

- **Variável aleatória discreta**
  - **Faixa finita { 0, 1, 2, 3 } ou enumerável infinita { 0,1, 2, ... }**
  - **Investiga-se a probabilidade de se obter um resultado particular x_i.**
- **Variável aleatória contínua**
  - **Faixa é contínua: incontável infinita { $\in$ R }**
  - **Investiga-se a probabilidade de obter um resultado menor ou igual a x_0 .**
- **Descrição de uma variável aleatória**
  - **Nome: x (em geral, notação em negrito)**
  - **faixa de valores: { x $\in$ R }**
  - **Descrição: através de sua função densidade de probabilidade.**
- **Há sempre uma probabilidade associada a uma variável aleatória:**

Variável Aleatória Discreta

- Tem-se em geral um número finito de pontos amostrais

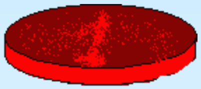
  - A cada valor da variável associa-se uma probabilidade:

    - $P_x(x_i) = \text{Prob}(x = x_i)$

- Para um total de N eventos mutuamente exclusivos:

$$\sum_{i=1}^{N} P_x\left(x = x_i\right) = 1$$

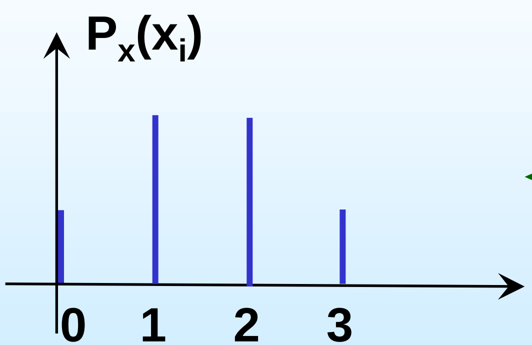
⇨ **Exemplo:** **considere o arremesso de três moedas ideais:**



- ✓ **Seja o evento: obtenção de k caras.**
  - ✓ **x_0 = 0 cara - x_1 = 1 cara - x_2 = 2 caras x_3 = 3 caras**

$$P_x(x_0) = \frac{1}{8} \quad P_x(x_1) = \frac{3}{8} \quad P_x(x_2) = \frac{3}{8} \quad P_x(x_3) = \frac{1}{8}$$

$$\sum_{i=0}^{3} P_x(x_i) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$



Função densidade de probabilidade.

⇨ **Tem-se um número infinito de pontos amostrais:**

- ✓ **A probabilidade de se observar um dado valor é zero.**
- ✓ **Neste caso investiga-se a probabilidade de se observar x abaixo de algum valor x_0.**

$$F_{\mathbf{x}}(x_0) = Prob(\mathbf{x} \leq x_0) = Prob(-\infty < \mathbf{x} \leq x_0)$$

- ✓ **Em que $F_x(x)$ é definida para todo x entre ± ∞.**
- ✓ **$F_x(x)$ é chamada de função distribuição de probabilidade ou distribuição cumulativa de x.**
  - ✓ **A maior parte das informações sobre um experimento aleatório é determinada pelo comportamento de $F_x(x)$.**

Função Distribuição de Probabilidade

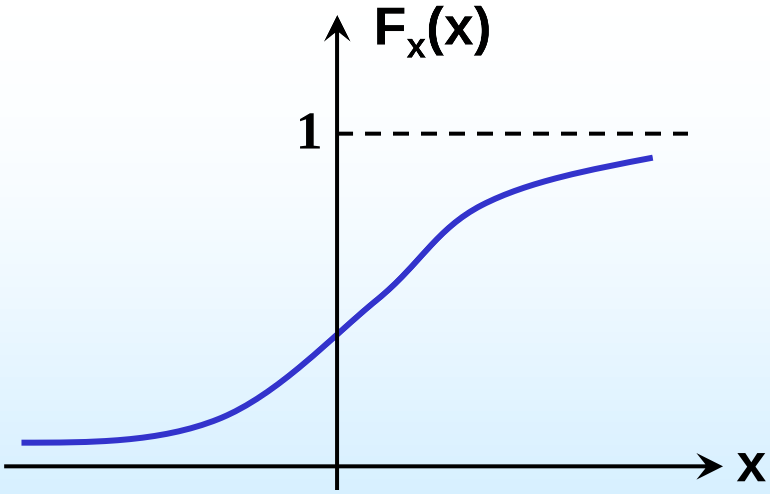
⇨ **A probabilidade de observação de um resultado particular é nula,**

⇨ **DEF: "É a probabilidade de se observar uma v. a. x na faixa ($-\infty$, x_0] ou $x \leq x_0$"**

$$F_{\mathbf{x}}(x_0) = \Pr ob(\mathbf{x} \leq x_0)$$

⇨ **Propriedades:**

- $F_x(-\infty) = 0$
- $F_x(\infty) = 1$
- $0 \leq F_x(x) \leq 1$
- $F_x(x)$ **é uma função crescente de x**
  - ✓ $F_x(x_1) < F_x(x_2)$ se $x_1 < x_2$
- $P(x > x_0) = 1 - F_x(x_0)$
- $P(a < x \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$



Função Densidade de Probabilidade - pdf

$$p_{\mathbf{x}}(x) = p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

⇨ **p(x) mede o quão rápido F(x) está aumentando ou o quanto é provável um resultado estar em torno de algum valor.**

➢ **Propriedades:**

➢ $p_{\mathbf{x}}(x) \geq 0$

➢ $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{x}}(x) dx = 1$

➢ $P(a < x \leq b) = \int_{a}^{b} p_{\mathbf{x}}(x) dx$

➢ $F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} p_{\mathbf{x}}(x) dx$

- **O fato de que a probabilidade de se observar algum valor particular ser zero não significa que a variável aleatória não assuma aquele valor.**

- **Alguns tipos de funções densidade de probabilidade**

  - **Bernoulli**
  - **Uniforme**
  - **Poisson**
  - **Gaussiana**
  - **Exponencial**
  - **Rayleigh**
  - **Chi-quadrado**

⇨ **Sejam x e y duas variáveis aleatórias. A Função distribuição de probabilidade conjunta de x e y é a seguinte função:**

$$F_{\mathbf{xy}}(x,y) = Pr\,ob(\mathbf{x} \leq x, \mathbf{y} \leq y)$$

⇨ **Função densidade de probabilidade conjunta**

$$p_{\mathbf{xy}}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\mathbf{xy}}(x,y)$$

$$Pr\,ob(x_1 < \mathbf{x} \leq x_2, y_1 < \mathbf{y} \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{x_2} p_{\mathbf{xy}}(x,y)dxdy$$

Propriedades:

$$Evento\ certeza = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{xy}}(x,y)dxdy = 1$$

$$p_{\mathbf{xy}}(x,y) \geq 0$$

Densidades Marginais

⇨ **São as densidades de probabilidades individuais:**

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{xy}}(x,y)dy$$

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{xy}}(x,y)dx$$

Densidades Condicionais

$$p(x/\mathbf{y}=y)=\frac{p_{\mathbf{xy}}(x,y)}{p_{\mathbf{y}}(y)} \qquad p(y/\mathbf{x}=x)=\frac{p_{\mathbf{xy}}(x,y)}{p_{\mathbf{x}}(x)}$$

- **O evento de se observar x no intervalo (-∞,∞) é uma certeza:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{x}}(x/\mathbf{y}=y)dx=1$$

⇨ **Independência:**

- **Duas variáveis aleatórias são independentes se:**

$$p_{\mathbf{x}}(x/\mathbf{y}=y)=p_{\mathbf{x}}(x) \qquad p_{\mathbf{y}}(y/\mathbf{x}=x)=p_{\mathbf{y}}(y)$$

- **Como consequência:** $p_{\mathbf{xy}}(x,y)=p_{\mathbf{x}}(x)p_{\mathbf{y}}(y)$

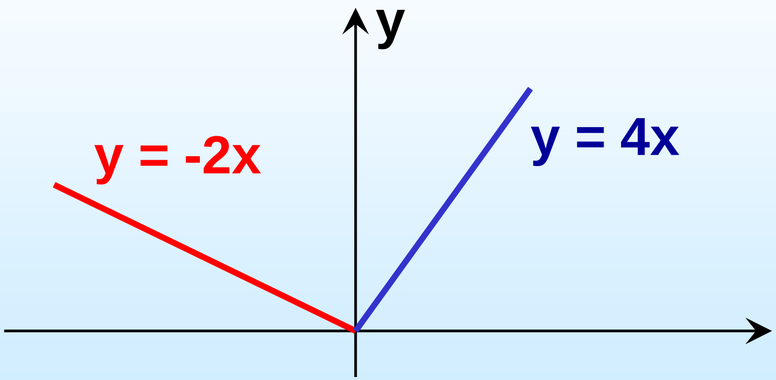
- **Seja X uma variável aleatória. Seja Y uma nova variável aleatória tal que:**

$$Y = g(X)$$

- **Função densidade de probabilidade**

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x_1)}{|dy/dx_1|} + \cdots + \frac{p_X(x_k)}{|dy/dx_k|}$$

- **Exemplo:**



$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$p_Y(y) = ?$

Valores Esperados (médias)

"é um modo de descrever uma v. a. de forma resumida."

- **Valor médio:** $m_x = E[\mathbf{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx$

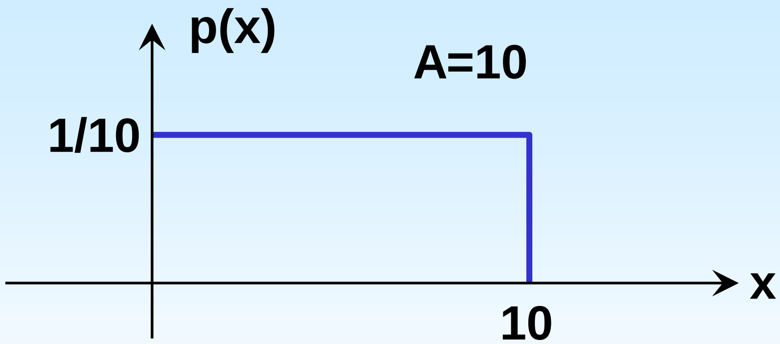
- **Valor quadrático médio:** $E[\mathbf{x^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_x(x) dx$

- **Variância:** $\sigma_x^2 = E\left[(\mathbf{x} - \mathbf{m_x})^{\mathbf{2}}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p_x(x) dx$

- **Com funções:** $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_x(x) dx$

exemplo: função densidade de probabilidade uniforme

$$p(x)=\begin{cases}1/A, & 0\le x\le A\\ 0, & c.c.\end{cases}$$



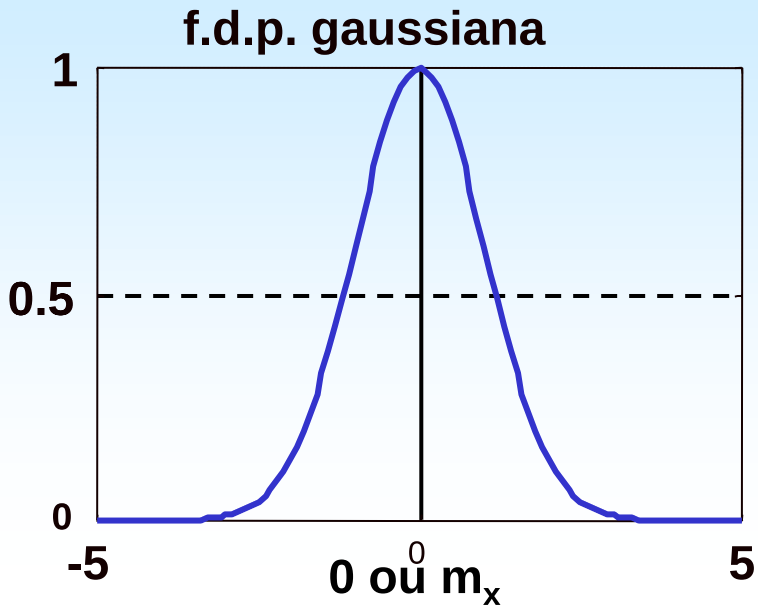
- **Valor médio:** $$m_x=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx=\int_0^{10}x\frac{1}{10}dx=5$$

- **Variância:** $$\sigma_x^2=\int_0^{10}(x-5)^2\frac{1}{10}dx=\frac{5}{6}$$

- **Probabilidade:** $$P(6<x\le 9)=\int_6^9\frac{1}{10}dx=0.3$$

exemplo: função densidade de probabilidade gaussiana

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}(e)^{\frac{-(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$



"Uma v. a. gaussiana é completamente determinada pela sua média e pela sua variância"

- **P(-σ < x< σ) ≈ 0.7**
- **P(x < 4) ≈ 1**

- **O ruído branco é modelado como uma pdf Gaussiana.**

Teorema do limite central

⇨ Sejam X_1 , X_2 , ... X_N um conjunto de v. a. independentes, todas com pdf iguais.

⇨ Seja Y uma v. a. que é a soma das v. a. acima:

⇨ $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$

⇨ Neste caso, a pdf de Y será dada por:

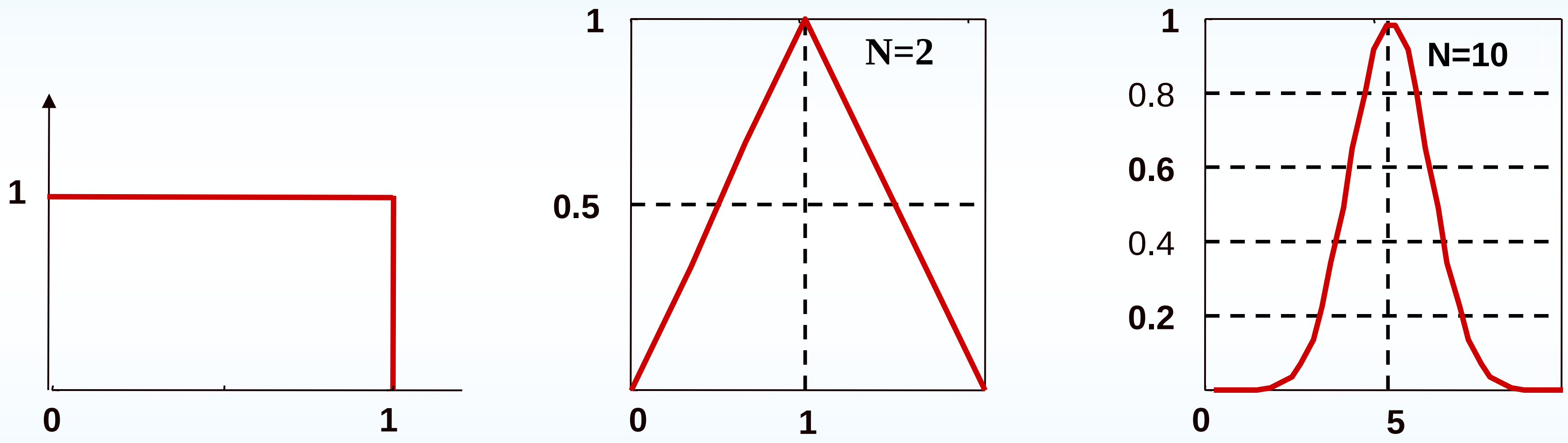
$$p_{\mathbf{y}}(y) = p_{\mathbf{x}_1}(x_1) * p_{\mathbf{x}_2}(x_2) * \cdots * p_{\mathbf{x}_N}(x_N)$$

- ✓ A operação de convolução tende a "alisar" as funções.
- ✓ Assim, conforme N tende ao infinito a v. a. Y tende a apresentar, no limite, uma pdf gaussiana.
- ✓ Este resultado é conhecido como o **"TEOREMA DO LIMITE CENTRAL".**

teorema do limite central

⇨ **Na prática N = 10 é suficiente para observar esta tendência.**

$$m_x = \sum m_{xi} \qquad || \qquad \sigma_x^2 = \sum \sigma_{xi}^2$$



⇨ **Exemplo:**

✓ **O ruído térmico resulta do movimento aleatório dos elétrons livres em um dispositivo elétrico. Como existem muitos elétrons, ele é bem modelado por uma distribuição gaussiana.**