PROF. B. J. MASS – *bjmass@sc.usp.br* – tel. (16) 33 73 93 61 – sala 3005 – campus 1

Soluções Solup01

Soluções da Prova P1 de SEL0326-2013

Aplicada em 19/09/2013

Soluções elaboradas e distribuidas em 03/10/2013

1. As equações dinâmicas de um sistema linearizado são $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$ e $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -0,1 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Queremos um sistema de malha fechada com desempenho ótimo pelo critério ITAE, incluindo erro estacionário nulo para um degrau na entrada.

$$\begin{gathered} s + \omega_n \\ s^2 + 1,4\omega_n s + \omega_n^2 \\ s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3 \\ s^4 + 2,1\omega_n s^3 + 3,4\omega_n^2 s^2 + 2,7\omega_n^3 s + \omega_n^4 \\ s^5 + 2,8\omega_n s^4 + 5,0\omega_n^2 s^3 + 5,5\omega_n^3 s^2 + 3,4\omega_n^4 s + \omega_n^5 \\ s^6 + 3,25\omega_n s^5 + 6,60\omega_n^2 s^4 + 8,60\omega_n^3 s^3 + 7,45\omega_n^4 s^2 + 3,95\omega_n^5 s + \omega_n^6 \end{gathered} \tag{1}$$

. . . .

Sabendo que o numerador da $G(s)$ de malha aberta é $N(s) = 5s + 5$, escreva um trecho de MATLAB que calcule a matriz $\hat{A}$ de malha fechada.

Exercício baseado no Probl. PM11.4, p.530 de R. C. Dorf & R. H. Bishop - *Sistemas de Controle Modernos, 8a. ed.*, LTC, Rio, 2001.

Solução 1:
Sabemos que a função de transferência de malha fechada tem a forma

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{5s + 5}{s^5 + b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \tag{2}$$

onde $b_0 \neq 0$. O erro $e(s)$, para um degrau arbitrário A/s, tem a forma

$$e_{ss} = s \lim_{s \to 0} \frac{A}{s} \left[1 - G(s) \right]$$

ou seja

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} A \left[\frac{s^5 + b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + (b_1 - 5)s + (b_0 - 5)}{s^5 + b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \right]$$

e

$$e_{ss} = \frac{b_0 - 5}{b_0} \tag{3}$$

Queremos $b_0 = 5$, o que naturalmente (do polinômio ITAE de grau 5) implica

$$\omega_n = 5^{1/5} \approx 1,37973 \tag{4}$$

A partir deste ponto claramente podemos escrever

```
≫ omegan = 5^(1/5);
≫ politae5 = [1   2.8*omegan   5*omegan^2 ...
≫ 5.5*omegan^3   3.4*omegan^4   omegan^5];
≫ polos = roots(politae5);
≫ k = place(a, b, polos);
≫ aa = a - b*k;
```

2. Para um sistema representado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{5}$$

Determine se é possível encontrar uma trajetória de estado de entrada nula que passe por um estado com as três coordenadas iguais, partindo de um estado inicial com as três coordenadas distintas.

Obs.: Sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}[1/(s+a)] = e^{-at}, \ a \neq 0$$

Questão baseada no Probl. P11.15, p.525 de R. C. Dorf & R. H. Bishop - *Sistemas de Controle Modernos, 8a. ed.*, LTC, Rio, 2001.

Solução 2:
Uma trajetória de estado neste caso é dada simplesmente

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(0) \tag{6}$$

Há varios caminhos para obter

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \tag{7}$$

uma vez que a matriz A é diagonal e os autovalores são reais. A substituição desta última em (6) permite escrever

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}x_1(0) \\ e^{-2t}x_2(0) \\ e^{-3t}x_3(0) \end{bmatrix}$$

Claramente queremos $t \neq 0$ tal que

$$e^{-t}x_1(0) = e^{-2t}x_2(0) = e^{-3t}x_3(0)$$

para coordenadas (ou estados) iniciais $x_1(0)$, $x_2(0)$, $x_3(0)$ distintos e não nulos. Escolhendo por exemplo $t = 10$, com condições iniciais

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{10} \\ 3e^{20} \\ 3e^{30} \end{bmatrix} \tag{8}$$

obtemos $\mathbf{x}(10) = [3\ 3\ 3]^T$, provando a possibilidade.

3. Ao sistema linear de malha aberta cujas matrizes A e B são, respectivamente

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

foi aplicada realimentação de estado com uma matriz K que minimiza o índice de desempenho quadrático com

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = 1$$

Determine

a - A matriz $\hat{B}$ do sistema de malha fechada.

b - O número l de entradas do sistema de malha fechada.

Exercício baseado no Probl. B.12.21, pp.779-780 de K. Ogata - *Engenharia de Controle Moderno, 4a. ed.*, Pearson, S. Paulo, 2003.

Solução 3:
a - Denotando as matrizes do sistema de malha fechada $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$, podemos escrever

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = A - BK \\ \hat{B} = B \\ \hat{C} = C \\ \hat{D} = D \end{array}\right\} \tag{9}$$

onde K denota a matriz da realimentação de estado. Em outras palavras, a matriz B não é alterada por realimentação de estado.

b - A dimensão l do vetor de entradas pode ser deduzida tanto a partir da matriz B como da matriz R, âmbas indicando $l = 1$.

Final do Solu-01

Arquivo original:	"tdm13solu01.tex"
Arquivo p/ impressão: ...	"tdm13solu01.pdf"
Versão:	1.0
No. de páginas:	4
Concluído em:	03/10/2013 - 9:22h