Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação

⋆ 44a. Turma de Engenharia Elétrica ⋆

Prof. B. J. Mass – *bjmass@sc.usp.br* – tel. (16) 33 73 93 61 – sala 3005 – campus 1

Lista de Exercícios No. 1

Versão 2.0

Vers. 2.0 distr. em 01/ago/13 - Qui.
Sols. aceitas até 10:10h de 08/ago/13 - Qui.
(Um atraso de Δh horas implica um fator de correção $e^{-\Delta h/6{,}5}$)

Realimentação de Estado: O algoritmo LQR

Realimentação de estado
Significa impor

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - K\mathbf{x} \tag{1}$$

a um sistema da forma

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

obtendo o sistema de malha fechada

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (A - BK)\mathbf{x} + B\mathbf{r} \\ \mathbf{y} &= (C - DK)\mathbf{x} + D\mathbf{r} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Em geral a matriz $\hat{A} = A - BK$ do sistema realimentado, terá autovalores diferentes dos de A, i.e., diferentes dos polos originais de malha aberta.
Satisfeitas certas condições, o mecanismo implícito em (1) permite impor, ao sistema de malha fechada, valores arbitrários e de nossa conveniência. Começamos por introduzir um vetor p com esses valores desejados:

$$p = [p_1, \, p_2, \, \cdots, \, p_n]$$

Com esses polos obtemos de imediato

i - Os coeficientes do polinômio característico de malha fechada.

ii - A matriz $\hat{A}$ (na forma companheira), e em seguida

iii - Os elementos de K, se resolvermos a equação matricial $BK = A - \hat{A}$.

O Matlab permite uma excelente estimativa numérica de K, através do comando "`place`":

```
≫ k = place(a, b, p);
```

Precisamos dos polos de malha fechada, e a escolha dos mesmos exige que consideremos o desempenho desejado para malha fechada.

Uma alternativa indireta
Podemos ignorar os polos se optarmos por calcular uma matriz de realimentação K que minimiza (otimiza) a função objetivo

$$J = \int_{t=0}^{t=\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt \tag{4}$$

onde as **matrizes de ponderação** (**matrizes de pesos**) Q e R têm que ser simétricas, com dimensões compatíveis. Ao aplicar o algoritmo (4) aceitamos implicitamente os polos que resultarem, ou seja, os polos que o algoritmo impuser. Caso esse polos não sejam do nosso agrado, podemos mudar Q e R e recalcular.

Matrizes de ponderação especiais
O cálculo de J pode ser simplificado se escolhermos Q e R diagonais. Uma enorme simplificação adicional ocorre se aceitarmos uma estimativa numérica de J obtida pelo MATLAB através do comando "`lqr`", indiretamente:

```
≫ k = lqr(a, b, q, r);
```

Note que neste caso não mais precisamos declarar o vetor p dos polos desejados, tendo porém que declarar a matriz Q e a matriz R. Na falta de outro critério, podemos escolher Q e R iguais, respectivamente, às matrizes identidades com as dimensões apropriadas. Escolher matrizes identidades para Q e R implica escolher pesos iguais para cada uma das variáveis de estado $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e pesos iguais para cada uma das variáveis de entrada $u_1, u_2, \cdots, u_l$.

LQR
Quer dizer **regulador linear quadrático** ("linear quadratic regulator") e significa que a matriz K de realimentação calculada é ótima, no sentido de que a realimentação

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - K\mathbf{x}$$

minimiza a função de custo quadrática J especificada acima. Exatamente como o algoritmo é implementado no MATLAB não é assunto de nosso interesse imediato.

Exercícios

Os parâmetros relevantes de um motor *Maxon RE-40/148866*, podem ser obtidos de

$$\frac{\Omega_m(s)}{V(s)} = G(s) = \frac{60740740,7405}{s^2 + 5850,3134s + 997981,66815} \tag{5}$$

1. Obtenha um conjunto de matrizes A, B, C, D que represente o motor no espaço de estados, considerando $v(t)$ como entrada e $\theta_m(t)$ como saída.

2. Escolha as matrizes Q e R com estrutura diagonal, da seguinte maneira:

   a - O elemento q_{11} deve ser igual aos dois algarismos mais significativos do **seu No. USP**, divididos por 100.

   b - O elemento q_{22} deve ser igual aos dois algarismos mais significativos seguintes do **seu No. USP**, divididos por 100.

   c - O elemento q_{33} deve ser igual aos três últimos algarismos do **seu No. USP**, divididos por 1000.

   Cada aluno terá uma matriz Q distinta. O número USP 6757781 por exemplo, leva à

$$Q = \begin{bmatrix} 0,67 & 0 & 0 \\ 0 & 0,57 & 0 \\ 0 & 0 & 0,781 \end{bmatrix}$$

   Neste caso, como temos apenas uma entrada e uma saída, a matriz R é 1×1 e pode ser simplesmente unitária.

3. Obtenha a matriz K via "`lqr`".

4. Obtenha as matrizes do sistema de malha fechada.

5. Obtenha os polos (autovalores) de malha fechada.

6. Obtenha as respostas a um degrau unitário para $\theta_m(t)$ e $\omega_m(t)$.

Instruções para a Apresentação dos Resultados

a - Retorne ao professor todos os dados e possíveis diagramas impressos, até o seguinte limite:

08/08/2013, 10:20h

b - Um atraso na entrega dos resultados, de Δh horas a partir do limite acima, implica um fator de correção $\eta = e^{-\Delta h/6,5}$.

c - Todas respostas devem ser suscintas, claras, objetivas e apresentadas em papel (A4).

d - Os resultados individuais entregues para serem avaliados deverão conter a identificação do autor, assim como a data e a hora da entrega efetiva.

e - Os resultados individuais entregues para serem avaliados deverão conter a identificação da lista de exercícios à qual se referem. Eg., *"Soluções e Resultados Relativos à LE-01"*.

f - Somente resultados obtidos e apresentados individualmente serão considerados para avaliação. Em outras palavras, cada conjunto de resultados só será considerado se estiver inequivocamente associado a um único aluno ou aluna.

g - Listagens de computador não solicitadas **não** serão aceitas.

h - Resultados eletrônicos como arquivos, mensagens, etc., **não** serão aceitos.

Final da LE 01

Arquivo original: .... "tdm13le01.tex"
Arquivo p/ impressão: ... "tdm13le01.pdf"
Versão: 2.0
No. de páginas: 4
Concluído em: .... 01/08/2013 - 16:50h