SISTEMAS DISCRETOS NO TEMPO

- Introdução
- Sistemas Discretos no Tempo
- Sistemas Discretos e Invariantes no Tempo
- Equação de Diferenças

1. Introdução

- **Sistema discreto no tempo:**
  - É um operador matemático ou uma transformação T[.] que se opera em um sinal (entrada), transformando-o em outro sinal (saída).
  - Sinal de Entrada: Excitação → x(n).
  - Sinal de Resposta: Saída ou resposta do sistema → y(n).

- **Representação:**

$$y(n) = T[x(n)]$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T[x(n)]} \longrightarrow y(n)$$

Exemplos de sistemas

a) Sistema de atraso:

$$y(n) = x(n - n_d)$$

- Atrasa o sinal de entrada por n_d amostras ($n_d > 0$). Caso $n_d < 0$ tem-se um avanço no sinal.

b) Cálculo da média:

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n-k) \Longrightarrow \text{Filtro de média}$$

c) Sistema sem memória:

- **Definição:** A saída depende somente da entrada no instante atual.

$$y(n) = [x(n)]^2$$

d) Acumulador:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

- Desenvolvendo a equação acima:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k) + x(n) \quad \Rightarrow \quad y(n) = y(n-1) + x(n)$$

- A equação acima justifica o termo “acumulador”, pois a saída depende do valor presente da entrada [x(n)] e do valor anterior da saída [y(n-1)].
- Observe também que a resposta depende das condições iniciais do sistema.

Exemplo 1: Considere que a sequência abaixo é aplicada em um acumulador:

$$x(n) = nu(n)$$

- caso: y(-1) = 0

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} ku(k) = y(-1) + \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- caso: y(-1) = 1

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} ku(k) = y(-1) + \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)+2}{2}$$

- A saída depende de y(-1) [condições iniciais].
- Se as condições iniciais são nulas o sistema é dito estar em repouso.

2. Sistemas Lineares Discretos no Tempo

- Seja: $y_1(n)$, ..., $y_M(n)$ as saídas do sistema correspondentes às entradas $x_1(n)$, ..., $x_M(n)$. Então, para um sistema linear discreto no tempo tem-se que:

$$T[a_1 x_1(n) + \cdots + a_M x_M(n)] = a_1 T[x_1(n)] + \cdots + a_M T[x_M(n)]$$
$$= a_1 y_1(n) + \cdots + a_M y_M(n)$$

- Em que : M é um número inteiro e a_1, ..., a_M são constantes.

Exemplos

a) O sistema abaixo é linear :

$$y(n) = nx(n)$$

prova: $y(n) = T[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = n[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)]$

$$= na_1 x_1(n) + na_2 x_2(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$$

b) O acumulador é um sistema linear:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

prova: $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} [a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k)] = \sum_{k=-\infty}^{n} a_1 x_1(k) + \sum_{k=-\infty}^{n} a_2 x_2(k)$

$$= a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$$

c) O sistema abaixo é não-linear

$$y(n) = x^2(n)$$

prova: $y(n) = [a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)]^2 \neq a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$

2.1. Sistema linear Invariante ao deslocamento

- **" Um S.L. é invariante ao deslocamento se e somente se: "**

$$y(n) = T[x(n)] \quad \Rightarrow \quad T[x(n - n_d)] = y(n - n_d)$$

- **Em que o deslocamento n_d é um número inteiro.**

Exemplos

a) O Diferenciador é um sistema invariante ao deslocamento:

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

prova:

$$y(n, n_d) = T[x(n - n_d)] = x(n - n_d) - x(n - n_d - 1) = y(n - n_d)$$

b) O Sistema Compressor é variante ao deslocamento a não ser que M = 1:

$$y(n) = x(Mn)$$

prova: $\text{Seja} : x_1(n) = x(n - n_d) \quad \text{Assim} :$

$$y(n) = x_1(Mn) = x(Mn - n_d) \neq y(n - n_d)$$

c) Outros exemplos de sistemas variantes ao deslocamento:

$$y(n) = nx(n)$$

prova: $y(n, n_d) = nx(n - n_d) \neq y(n - n_d)$

$$y(n) = x(-n)$$

prova: $\text{Seja} : x_1(n) = x(n - n_d) \quad \text{Assim} :$

$$y(n) = x_1(-n) = x(-n - n_d) \neq y(n - n_d)$$

2.2. Sistemas Causais

Def. 1: **A saída em qualquer instante n depende somente dos valores presente e passados da entrada { x(n), x(n-1), ... x(n-M) }, mas não dos valores futuros { x(n+1), ... }.**

Def. 2: **A saída no instante n = n_0 depende somente dos valores da entrada para n ≤ n_0 .**

Exemplos

a) Sistemas causais

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

$$y(n) = ax(n)$$

b) Sistemas não causais

$$y(n) = x(n) + x(n+1)$$

$$y(n) = x(n^2)$$

$$y(n) = x(2n)$$

2.3. Sistemas Estáveis

Um sistema em repouso é chamado de estável se e somente se para uma sequência de entrada limitada tem-se uma saída limitada.

$$|x(n)| \leq B_x < \infty \quad \Rightarrow \quad |y(n)| \leq B_y < \infty$$

Exemplos de sistemas estáveis

$$\Rightarrow \quad y(n) = x(n - n_d)$$

$$\Rightarrow \quad y(n) = [x(n)]^2$$

$$\Rightarrow \quad y(n) = x(Mn)$$

Exemplo de sistema instável

- **O acumulador é um sistema instável**

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

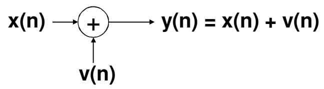
- **Seja x(n) = u(n) que é limitada pois |u(n)| = 1, ∀ n >= 0. Então:**

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} u(k) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n+1, & n \geq 0 \end{cases}$$

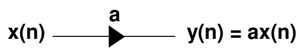
- **Embora n seja finito não existe um valor fixo para B_y tal que $(n+1) \leq B_y < \infty$**

2.4. Representação por diagrama de blocos

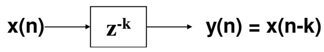
Bloco somador :



Bloco multiplicador :



Bloco de atraso:



O operador z^{-k} indica um atraso de k amostras no sinal e ficará esclarecido no estudo da transformada z.

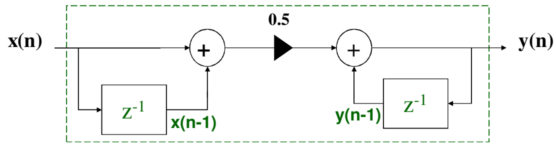
Exemplo 2: Represente em diagrama de blocos o seguinte sistema:

$$y(n) = y(n-1) + 0.5x(n) + 0.5x(n-1)$$

- **Rearranjando a equação tem-se:**

$$y(n) = y(n-1) + 0.5[x(n) + x(n-1)]$$

- **portanto tem-se o seguinte diagrama de blocos:**



Observe que foi economizado um bloco multiplicador.

3. Sistemas Lineares Discretos e Invariantes ao Deslocamento (tempo)

- **Os Sistemas são classificados por suas propriedades ou categorias:**
  - **Linearidade - Causalidade - Estabilidade - Invariância ao deslocamento.**
- **Os Sistemas lineares discretos e invariantes ao deslocamento (SLID)**
  - **São caracterizados pela resposta à amostra unitária.**
  - **A expressão que relaciona entrada e saída é dada pela soma de convolução.**

3.1. Determinação da Resposta do Sistema

- **Seja h(n) a resposta à excitação δ(n)**
  - **Foi visto anteriormente podemos escrever x(n) com auxílio da função impulso tal que:**

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

- **Pela definição tem-se que:**

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

- **Pelo princípio da superposição podemos trocar as ordens das operações de soma e transformação, assim:**

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

- **Como por hipótese o sistema é invariante ao deslocamento, então a resposta à excitação δ(n-k) será h(n-k). Assim:**

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

Portanto: y(n) está relacionado com a entrada através da soma de convolução entre x(n) e h(n).

3.2. A Soma de Convolução

Suponha que se quer calcular a saída do sistema para n = n_0

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0-k)$$

1. **Rebate-se h(k) em torno do índice zero ⇒ h(-k)**
2. **Desloca-se h(-k) por n_0 amostras (à direita ou à esquerda)**
3. **Multiplica-se cada elemento x(k) por h(n_0-k) para se obter a sequência produto x(k) h(n_0-k)**
4. **Soma-se todos os valores da sequência produto ⇒ y(n_0)**
5. **Repete-se os passos acima para todos os valores de n.**

Exemplo 3: Determine a convolução entre as seguintes sequências:

$$h(n) = \{1\ \underline{2}\ 1\ -1\} \qquad e \qquad x(n) = \{\underline{1}\ \ 2\ 3\ 1\}$$

1. Rebatimento de h(k): $h(-k) = \{-1\ 1\ \underline{2}\ 1\}$

2. Cálculo de y(0):

−1	1	2	1	0	0	**h(n-k): neste caso h(-k)**
0	0	1	2	3	1	**x(k)**
0	0	2	2	0	0	⇒ $y(0) = 4$

3. No final tem-se: $y(n) = x(n) * h(n) = \{1\ \underline{4}\ 8\ 8\ 3\ -2\ -1\}$

4. Tamanho da Sequência: L = 4 + 4 - 1 = 7

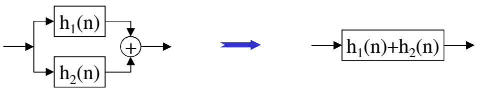
Em geral: L = M + N - 1

3.3. Propriedades da Convolução e Interconexão de Sistemas SLID

a) Comutativa: $x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$

b) Associativa: $[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$

c) Distributiva: $x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$



3.4. Causalidade e Estabilidade em sistemas SLID

Nos Sistemas lineares discretos e invariantes ao deslocamento a estabilidade e causalidade são verificadas através de h(n).

a) Causalidade

- **Considere um sistema SLID em um instante n_0 qualquer:**

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$$

- **Desdobrando a equação acima tem-se:**

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n_0 - k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$$
$$= [h(-1)x(n_0+1) + h(-2)x(n_0+2) + \cdots] + [h(0)x(n_0) + h(1)x(n_0-1) + \cdots]$$

$$y(n_0) = [h(-1)x(n_0+1) + h(-2)x(n_0+2) + \cdots] + [h(0)x(n_0) + h(1)x(n_0-1) + \cdots]$$

- **O 1o. termo envolve os valores futuros $x(n_0+1)$, $x(n_0+2)$ ...**
- **Para $y(n_0)$ não depender deles: h(-1) = h(-2) = ... = 0**

$$\textit{sistema causal} \Rightarrow h(n) = 0, \quad n < 0$$

- **Para um sistema causal é válida a expressão:**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$$

- **Se o sinal e o sistema forem causais, então:**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)$$

b) Estabilidade: **Entrada limitada $\Rightarrow$ Saída limitada**

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

Como por hipótese $|x(n)| \le B_x \Rightarrow$ $|y(n)| \le B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$

Como por hipótese $|y(n)| \le B_y \Rightarrow$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \le B_h < \infty$

Consequência: **h(n) deve ser amortecida, isto é, decair para zero conforme $n \to \infty$**

3.5. Observações

- **A resposta ao impulso <u>classifica</u> os sistemas SLID quanto à sua duração:**
- **FIR: Resposta ao Impulso Finita**

  h(n) = 0, N_1 < n < N_2

  São sempre estáveis
- **IIR: Resposta ao Impulso Infinita**

1. **Sistemas Contínuos: h(t) $\Rightarrow$ Papel teórico.**
2. **Sistemas Discretos: h(n) $\Rightarrow$ Papel teórico e prático (Implementação)**

4. Equação Linear de Diferenças

- **Formas de descrever um sistema SLID:**
  - **Resposta ao impulso h(n) e soma de convolução.**
  - **Resposta em frequência do sistema: H(f) ou H(z).**
  - **Equação linear de diferenças com coeficientes constantes.**
    - **O sistema é descrito em termos dos valores presente e passados do sinal de entrada, e também em termos dos valores passados da saída.**
    - **O sistema é prontamente implementado através de blocos de atraso.**
    - **Serve como base para a obtenção da resposta em frequência do sistema**

Equação Geral

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

em que: a_k e b_k são constantes e independentes de x(n) e y(n).

N é denominado de ordem do sistema.

Forma equivalente

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

em que, em geral, $a_0 = 1$

- **y(n) depende de y(-1), y(-2), ... (condições iniciais).**
- **Para condições iniciais nulas => o sistema está em repouso.**
- **O sistema é recursivo pois a saída depende de valores passados de y(n).**

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

- **A equação acima é a forma geral para um sistema IIR.**
- **Para um sistema FIR: $a_k = 0$, k = 1, 2, ..., N**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

- **Neste caso: h(n) = b_k**

$$h(n) = \begin{cases} b_n, & n = 0, 1, \cdots, M \\ 0, & cc \end{cases}$$

Exemplo 4: Determine a equação de diferenças do acumulador e o seu diagrama de blocos.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) \quad \Rightarrow \quad y(n) = y(n-1) + x(n)$$

- **Neste caso: N = 1 ; a_1 = 1 ; M = 0 e b_0 = 1**