TRANSFORMADA - Z

Introdução

- **A transformada - z pode ser considerada como uma generalização da transformada de Fourier para sequências.**
- **Desempenha, para sistemas discretos, o mesmo papel que a transformada de Laplace tem para sistemas contínuos no tempo.**

Utilização:

- **Análise e projeto de sistemas lineares discretos e invariantes no tempo.**
- **Determinação da função do sistema H(z) ou da resposta em frequência $H(e^{jw})$.**
- **Verificação da Estabilidade e Causalidade de Sistemas pela análise dos polos e zeros da função.**

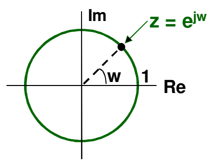
Definição da Transformada z

- **Considere a sequência x(n) : n = 0, ±1, ±2, ...**
  - **A transformada z de x(n) é definida como segue:**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

  - **z^{-n}: é um operador de atraso de nT_a segundos ou n amostras.**
  - **z é uma variável complexa do tipo: $z = re^{jw}$**
    - **r é o módulo da variável,**
    - **w é o ângulo.**
      - **lembre que: $0 \leq w < 2\pi$ ou $-\pi \leq w < \pi$.**

- **Interpretação no Plano z**



  - **Para r = |z| = 1 (o círculo de raio unitário)**
    - **$z = e^{jw}$ => A transformada z é a transformada de Fourier de sequências.**

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn}$$

Região de Convergência - RDC

- **X(z) é uma série de potências, portanto ela existe somente para os valores de z nos quais a série converge. Define-se então a Região de Convergência da transformada z tal que:**

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right| < \infty$$

- **Exemplos para sequências de duração finita:**

a) **x(n) = {1, 3, 5, 7, 0, 1}**

$X(z) = 1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$ RDC: plano z, exceto z = 0

b) **x(n) = {1, 2, 3, 4, 5}**

$X(z) = z^2 + 2z + 3 + 4z^{-1} + 5z^{-2}$ RDC: plano z exceto z = 0 e z = ∞

c) **$x(n) = \delta(n + n_0)$, $n_0 > 0$**

$X(z) = z^{no}$ RDC: plano z, exceto z = ∞

OBS: Para sequências finitas: A RDC engloba todo o plano z, exceto, possivelmente, z = 0 e/ou z = ∞. Portanto a transformada z sempre existe.

Convergência para séries infinitas

- **Sabe-se que: $z = re^{jw}$. Então pela definição de convergência:**

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-jwn} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) r^{-n} \right| < \infty$$

  - **Portanto: " X(z) é finita se $x(n)r^{-n}$ é absolutamente somável "**

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} \left| x(n) r^{-n} \right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| x(n) r^{-n} \right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| x(-n) r^{n} \right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| x(n) r^{-n} \right|$$

$$\left|X(z)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|x(-n)r^{n}\right| + \sum_{n=0}^{\infty}\left|x(n)r^{-n}\right|$$

O primeiro termo: Define uma Sequência Lateral Esquerda

RDC => Interior de um círculo $R_H < \infty$

O segundo termo: Define uma Sequência Lateral Direita

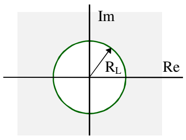
RDC => Exterior de um círculo $R_L > 0$

portanto:

" A RDC de uma sequência infinita será uma região anular (um anel) dada pela intersecção das RDC individuais das duas sequências ". Isto é:

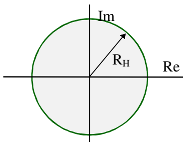
$R_L < |z| < R_H$

Região de Convergência



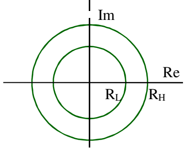
sequência lateral direita

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|x(n)r^{-n}\right|$$



sequência lateral esquerda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|x(-n)r^{n}\right|$$



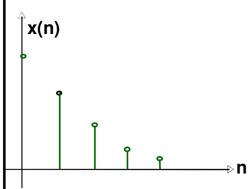
sequência infinita (bilateral)

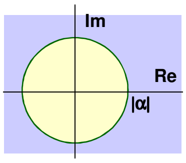
Exemplo 1: Determine a transformada z da sequência:

$$x(n) = \alpha^n u(n) = \begin{cases}\alpha^n, & n \geq 0 \\ 0, & c.\,c.\end{cases} \Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha z^{-1}\right)^n$$

$$admitindo: \left|\alpha z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow \begin{cases} X(z) = \dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}} \\ RDC: |z| > |\alpha| \end{cases}$$

- **polo em z = α**





OBS:
A RDC não inclui o polo em z = α

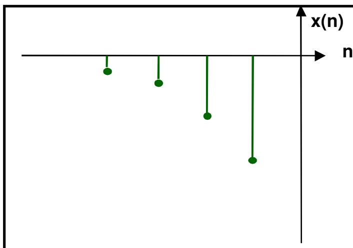
Exemplo 2: Determine a transformada z da sequência

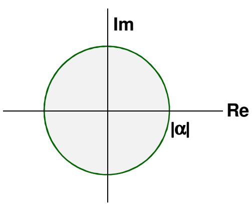
$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -\alpha^n, & n \leq -1 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha^{-1}z\right)^n \longrightarrow X(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha^{-1}z\right)^n$$

$$admitindo: \left|\alpha^{-1}z\right| < 1 \Rightarrow \begin{cases} X(z) = \dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}} \\ RDC: |z| < |\alpha| \end{cases}$$

- **polo em z = α**





OBS:

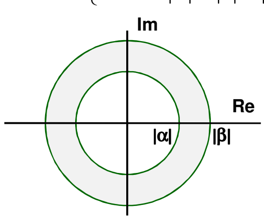
- **A RDC não inclui o polo em z = α**
- **A transformada é igual à do exemplo anterior**

Exemplo 3: Determine a transformada z da sequência

$$x(n) = \alpha^n u(n) + \beta^n u(-n-1)$$

- **Admitindo |α| < |β|. Então, utilizando os dois exemplos anteriores tem-se:**

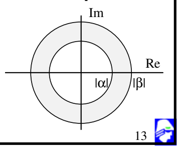
$$\begin{cases} X(z) = \dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \dfrac{-1}{1-\beta z^{-1}} = \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta - z - \alpha\beta z^{-1}} \\ RDC: |\alpha| < |z| < |\beta| \end{cases}$$



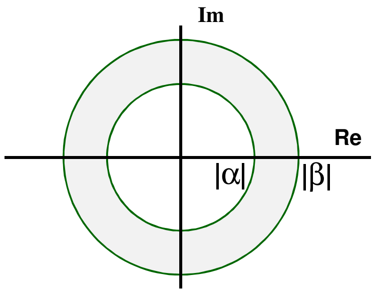
Observe que se |α| > |β| não existe uma região de convergência e portanto X(z) não existe.

Propriedades da região de convergência

- É um anel centrado na origem: $0 \le R_L < |z| < R_H < \infty$.
- A Transformada de Fourier existe se a RDC inclui o círculo unitário.
- A RDC não contém polos.
- Se x(n) tem duração finita => RDC é o plano z exceto, possivelmente os pontos z = 0 e/ou z = ∞.
- Sequência Lateral Direita: a RDC se estende desde o polo mais exterior até o infinito.
- Sequência Lateral Esquerda: a RDC se estende desde zero até o polo mais interior.
- Para sequências Bilaterais a RDC é um anel que não contém polos.
- A RDC é uma região conectada.



Propriedades da região de convergência



Transformada z Inversa

- **Métodos de Inversão da transformada:**
  - Método por inspeção,
  - Expansão em Frações Parciais,
  - Expansão em Séries de Potências,
  - Divisão Longa ou continuada,
  - Teorema da Integral de Cauchy.

Método por inspeção

- O método por inspeção consiste em encontrar um (ou mais) pares conhecidos de transformadas.
  - Estes pares são geralmente dados em tabelas, e consistem das funções padrões encontradas em engenharia (exponencial, degrau, cosseno, etc.).

Exemplo 4: exemplo de inversão da transformada utilizando o método por inspeção:

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$|z| > |a| \qquad\qquad |z| > 1/2$$

Método por Expansão em Frações Parciais

- Este método é utilizado quando X(z) é dada por um polinômio racional do tipo:

$$X(z) = \frac{N(z)}{Q(z)}$$

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{z^N}{z^M} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}$$

  - M > N => M - N polos em z = 0
  - M < N => N - M zeros em z = 0
  - N polos e M zeros não nulos

- Expressando a equação anterior em termos dos seus polos e zeros tem-se que:

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)}$$

=> M zeros c_k não nulos

=> N polos d_k não nulos

- Tem-se três situações diferentes que devemos analisar:

❖ **Primeiro caso: M < N e polos de primeira ordem.**

Expressa-se X(z) como: $$X(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$$

- **Os coeficientes A_k são calculados multiplicando ambos ao lados da equação acima por $(1 - d_k z^{-1})$. Assim, para $z = d_k$:**

$$A_k=\left(1-d_k z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=d_k}$$

❖ **Segundo caso: M ≥ N e polos de primeira ordem.**

Expressa-se X(z) como: $$X(z)=\sum_{k=0}^{M-N}B_k z^{-k}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$$

- **Os coeficientes B_k são calculados por divisão continuada.**
- **E os coeficientes A_k como anteriormente.**

❖ **Terceiro caso: M ≥ N e um polo de ordem L.**

$$X(z)=\sum_{k=0}^{M-N}B_k z^{-k}+\sum_{k=1,k\neq i}^{N}\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}+\sum_{l=1}^{L}\frac{C_l}{\left(1-d_i z^{-1}\right)^l}$$

- **Os coeficientes A_k e B_k são calculados como anteriormente e os C_l são obtidos por:**

$$C_l=\frac{1}{(L-l)!\left(-d_i\right)^{L-l}}\left[\frac{d^{L-l}}{dz^{L-l}}\left(1-d_i z\right)^L X\left(z^{-1}\right)\right]_{z=d_i^{-1}}$$

OBSERVAÇÕES:

$$B_k z^{-k}\rightarrow B_k\delta(n-k)$$

$$\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}\rightarrow A_k\left(d_k\right)^n u(n)\quad ou\quad -A_k\left(d_k\right)^n u(-n-1)$$

$$\frac{d_k z^{-1}}{\left(1-d_k z^{-1}\right)^2}\rightarrow n\left(d_k\right)^n u(n)\quad ou\quad -n\left(d_k\right)^n u(-n-1)$$

Exemplo 5: Cálculo da transformada z inversa de:

$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

- **Primeiramente calcula-se B_0: pois M = N = 2**

$$\begin{array}{r|l} & 2=B_0\\ \hline Q(z)=\frac{1}{2}z^{-2}-\frac{3}{2}z^{-1}+1 & 1+2z^{-1}+z^{-2}=N(z)\\ & 2-3z^{-1}+z^{-2}\\ \hline & -1+5z^{-1}=Resto\end{array}$$

$$X(z)=2+\frac{-1+5z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}=2+\frac{A_1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}+\frac{A_2}{\left(1-z^{-1}\right)}$$

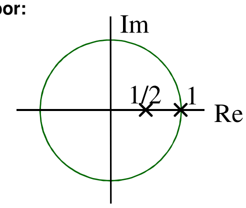
- **Em seguida calcula-se os coeficientes A_k (A_1 e A_2) pois N = 2**
  - **Cálculo dos A_K**

$$A_1=\left(1-\tfrac{1}{2}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=1/2}=\frac{1+4+2^2}{(1-2)}=-9$$

$$A_2=\left(1-z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=1}=\frac{1+2+1}{1/2}=8$$

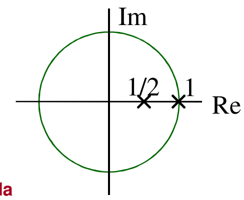
- **Portanto X(z) em frações parciais é dada por:**

$$X(z)=2-\frac{9}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}+\frac{8}{\left(1-z^{-1}\right)}$$



- **Utilizando o método de inversão por inspeção e analisando a região de convergência determina-se x(n).**

Exemplo 5:



- **RDC: |z| > 1 => sequência lateral direita**

$$x(n)=2\delta(n)-9\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+8u(n)$$

- **RDC: |z| < 1/2 => sequência lateral esquerda**

$$x(n)=2\delta(n)+9\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)-8u(-n-1)$$

- **RDC: 1/2 < |z| < 1**

$$x(n)=2\delta(n)-9\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-8u(-n-1)$$

Exemplo 6: Calcular x(n) dado que:

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

- **X(z) em função dos polos e zeros:**

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{\left(1-p_1z^{-1}\right)\left(1-p_2z^{-1}\right)}$$

$$em\ que:\ p_{1,2}=\frac{1}{2}\pm j\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pm j\pi/4}$$

- **Observe que M < N => somente os coeficientes A_k**
- **Cálculo de A_1 e A_2**

$$A_1=\left.\frac{1+z^{-1}}{1-p_2z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-j\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}e^{-j1.249}$$

$$A_2=\left.\frac{1+z^{-1}}{1-p_1z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+j\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}e^{j1.249}$$

- **Cálculo de x(n):**
  - **Vamos admitir x(n) causal, isto é, a RDC é o exterior do círculo de raio r = 0.707 que engloba os polos.**

$$x(n)=\frac{\sqrt{10}}{2}e^{-j1.249}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}\right)^n+\frac{\sqrt{10}}{2}e^{j1.249}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}\right)^n$$

$$\downarrow$$

$$x(n)=\frac{\sqrt{10}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left\{e^{j\left(\frac{\pi}{4}n-1.249\right)}+e^{-j\left(\frac{\pi}{4}n-1.249\right)}\right\}u(n)$$

$$\rightarrow\quad x(n)=\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n cos\left(\frac{\pi}{4}n-1.249\right)u(n)$$

Método por expansão em série de potências

- **Neste caso o cálculo da transformada z inversa se resume em encontrar uma série do tipo:**

$$X(z)=\cdots x(-2)z^2+x(-1)z+x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

Exemplo 7: Determine a transformada z inversa de

$$X(z)=ln\left(1+az^{-1}\right),\quad |z|>|a|$$

- **A série da função ln(1+x) é dada por:**

$$ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x)^n}{n}\quad :-1<x<1$$

- **Assim, admitindo |z| > |a| tem-se que:**

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(az^{-1}\right)^n}{n}$$

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(az^{-1}\right)^n}{n}\longrightarrow X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(a)^n}{n}z^{-n}$$

$$x(n)=(-1)^{n+1}\frac{(a)^n}{n}\quad : n=1,2,\cdots$$

Método por divisão continuada (divisão longa)

- **Faz-se a divisão dos polinômios em z^{-1} ou em z, dependendo da sequência ser lateral esquerda ou direita.**

Exemplo 8: determine a transformada z inversa de

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z|>|a|$$

- **Como |z|>|a| => Sequência lateral direita (divisão com os polinômios em z^{-1}):**

$$\begin{array}{l|l} & 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots \\ \hline Q(z)=1-az^{-1} & 1=N(z) \\ & \underline{1-az^{-1}} \\ & az^{-1} \\ & \underline{az^{-1}-a^2z^{-2}} \\ & a^2z^{-2} \end{array}$$

$\longleftarrow$ **solução**

$$x(n)=a^nu(n)$$

- **OBS:**
  - **Para sequências "lateral esquerda" faz-se a divisão com os polinômios em z.**
  - **No exemplo anterior, admitindo |z|<|a|, tem-se uma sequência lateral esquerda.**

$$Q(z) = z - a \left| \begin{array}{l} -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \cdots \\ z = N(z) \\ -a^{-1}z^2 + z \\ a^{-1}z^2 \\ a^{-1}z^2 - a^{-2}z^3 \\ a^{-2}z^3 \end{array} \right.$$

$$x(n) = -a^n u(-n-1)$$

Método da integral de contorno

- **O teorema da Integral de Cauchy estabelece que:**

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-k}\,dz = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}$$

  - **Em que: C é uma região de contorno que engloba a origem.**
- **A transformada z de uma sequência x(n) é dada por:**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

  - **Multiplicando a equação acima por:**

$$\frac{1}{2\pi j} z^{k-1}$$ **e integrando tem-se que:**

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z) z^{k-1}\,dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \sum_{n=\infty}^{-\infty} x(n) z^{-n+k-1}\,dz$$

- **desenvolvendo, chega-se que:**

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z) z^{n-1}\,dz$$

solução da integral

$$x(n) = \sum residuos\ de\ X(z)z^{n-1}\ nos\ polos\ em\ C$$

- **Se X(z) é uma função racional então:**

$$X(z) z^{n-1} = \frac{\Psi(z)}{(z - d_0)^s}$$

  - **Em que: d_0 é um polo de multiplicidade s. Neste caso:**

$$RES\left\{X(z) z^{n-1}\right\}_{z=d_0} = \frac{1}{(s-1)!}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\Psi(z)\Big|_{z=d_0}$$

  - **Se o polo tem multiplicidade s = 1, então:**

$$RES\left\{X(z) z^{n-1}\right\}_{z=d_0} = \Psi(d_0)$$

- **OBS: Se a RDC inclui o círculo unitário:**

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{jw}\right) e^{jwn}\,dw$$

Exemplo 9:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{z^{n-1}}{1 - az^{-1}}\,dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{z^n}{z - a}\,dz$$

$$Para\ z = a\ e\ n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi(z) = z^n\Big|_{z=a} = a^n$$

- **portanto:**

$$x(n) = a^n u(n)$$

Propriedades da Transformada z

1. **Linearidade:**

$$a x_1(n) + b x_2(n) \leftrightarrow a X_1(z) + b X_2(z) \qquad RDC = Rx_1 \cap Rx_2$$

2. **Deslocamento no Tempo**

$$x(n - n_0) \leftrightarrow z^{-n_0} X(z) \quad RDC = Rx \quad \pm z = 0/\infty$$

3. **Multiplicação por uma sequência exponencial**

$$a^n x(n) \leftrightarrow X(z/a) \qquad RDC = |a| Rx$$

4. **Diferenciação de X(z)**

$$n x(n) \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}X(z) \qquad RDC = Rx \quad \pm z = 0/\infty$$

5. **Complexo Conjugado de uma Sequência**

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*) \qquad RDC = Rx$$

6. **Reversão no Tempo**

$$x(-n) \leftrightarrow X(1/z) \quad RDC = 1/Rx \quad \begin{cases} R_1 < |z| < R_2 \\ \dfrac{1}{R_2} < |z| < \dfrac{1}{R_1} \end{cases}$$

7. **Convolução de Sequências**

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(n-m) x_2(m)$$

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z) X_2(z) \qquad RDC = Rx_1 \cap Rx_2$$

8. **Teorema do Valor Inicial: Se x(n) = 0, n<0, então:**

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

9. **Teorema da Convolução Complexa: Se $w(n) = x_1(n)x_2(n)$ então:**

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} X_1(v) X_2(z/v) v^{-1} dv = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} X_1(z/v) X_2(v) v^{-1} dv$$

$$RDC: \quad R_{x_1}^L R_{x_2}^L < |z| < R_{x_1}^H R_{x_2}^H$$

- **Se C_1 englobar o círculo unitário:**

$$W\left(e^{jw}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{j\theta}\right) X_2\left(e^{j(w-\theta)}\right) d\theta$$

10. **Relação de Parseval:**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v) X_2^*(1/v^*) v^{-1} dv$$

- **Se a RC englobar o círculo unitário:**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{jw}\right) X_2^*\left(e^{jw}\right) dw$$

- **Em particular: Quando $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$:**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(e^{jw}\right)\right|^2 dw \longleftarrow \text{" energia de x(n)"}$$

Análise de sistemas lineares

- **Um sistema linear discreto no tempo é completamente descrito pela transformada z da resposta à amostra unitária h(n).**

y(n) = h(n)*x(n) <=> Y(z) = H(z)X(z)

- **x(n): Entrada || y(n): Saída || h(n): Resposta ao Impulso**
- **H(z): Função do Sistema (ou função de transferência)**

Equação de Diferenças

- **A forma mais comum de se descrever um sistema linear é através da equação linear de diferenças tal que:**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

- **Em que: a_k e b_k são constantes e em geral $a_0 = 1$**

- **Transformada z: (equação de um sistema linear discreto)**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k} \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

- **Na forma fatorada (através dos polos e zeros)**

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} \left(1 - c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N} \left(1 - d_k z^{-1}\right)}$$

- **A estabilidade e a causalidade dependerão da escolha da região de convergência.**
- **Observe também que a informação completa a respeito do sistema está contida no conhecimento dos polos e zeros.**

Estabilidade e Causalidade

- **Estabilidade:**
  - **A condição necessária e suficiente para que um sistema seja estável é que h(n) seja absolutamente somável, isto é:**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

- **Logo: A RDC de H(z) deve incluir o círculo unitário. Pois:**

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n) z^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \left|z^{-n}\right|$$

- **No círculo unitário |z| = 1. Portanto:**

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$$

❖ **Causalidade:**

❖ **Um Sistema Linear Discreto e invariante no tempo é chamado causal se a sua Resposta à Amostra Unitária satisfaz a seguinte condição:**

h(n) = 0,   n < 0

- **h(n) é uma sequência lateral direita.**
- **Portanto a RDC é o exterior de um círculo de raio R.**
- **Se o sistema é *estável e causal*, então *R < 1*.**

em resumo

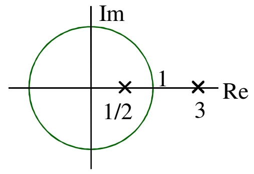
- **Sistema estável: A RDC é um anel que inclui o círculo unitário e não contém polos.**
- **Sistema causal: A RDC é o exterior de um círculo cujo raio contém o maior polo (sem incluí-lo).**
- **Sistema estável e causal: Todos os polos estão dentro do círculo unitário e a RDC inclui este círculo.**

Exemplo 10:

$$H(z)=\frac{3-4z^{-1}}{1-3.5z^{-1}+1.5z^{-2}}=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{2}{1-3z^{-1}}$$

Polos: z = ½

z = 3



- **Sist. estável => 0.5 < |z| < 3** ➡ $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-2(3)^n u(-n-1)$
- **Sist. causal => |z| > 3** ➡ $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+2.(3)^n u(n)$
- **Sist. anti-causal => |z| < 0.5** ➡ $h(n)=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)-2(3)^n u(-n-1)$

Exemplo 11:

y(n) = ay(n-1) + x(n)

- **Função do Sistema:** $H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$
- **Condição de Causalidade: |z| > |a|:** $h(n)=a^n u(n)$
- **Condição de Estabilidade: |a| < 1:**

Observações

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

❖ **Se N = 0: O sistema não tem polos a não ser em z = 0. Assim, h(n) tem duração finita, isto é, o sistema apresenta resposta ao impulso finita (sistema FIR).**

❖ **Se N > 0: O sistema tem polos e cada um deles contribui com uma sequência exponencial em h(n). Assim, h(n) tem duração infinita, isto é, a resposta ao impulso é infinita (sistema IIR).**

❖ **Uma vantagem da representação do sistema através dos polos e zeros é que ela conduz a uma usual representação geométrica para se obter um esboço do comportamento do sistema em termos de sua resposta de amplitude.**