PROF. B. J. MASS – *bjmass@sc.usp.br* – tel. (16) 33 73 93 61 – sala 3005 – campus 1

Lista de Exercícios No. 6

Versão 1.0

Vers. 1.0 distr. em 26/set/13 - Qui.
Sols. aceitas até 10:10h de 03/out/13 - Qui.
(Um atraso de Δh horas implica um fator de correção $e^{-\Delta h/6,5}$)

Estabilidade: *Pontos de equilíbrio, formas de Jordan, trajetórias de estados*

1. Introdução

Consideraremos aqui apenas sistemas lineares, contínuos no tempo, na forma

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

onde as matrizes e os vetores têm as dimensões

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}ccl} A & - & n \times n & \mathbf{u} & - & l \times 1 \\ B & - & n \times l & \mathbf{y} & - & m \times 1 \\ C & - & m \times n & \mathbf{x} & - & n \times 1 \\ D\,(nula) & - & m \times l & \dot{\mathbf{x}} & - & n \times 1 \end{array}$$

e as funções de transferência são estritamente próprias, sem pares canceláveis de polos e zeros. Para que um sistema da forma (3) não tenha polos e zeros canceláveis é necessário e suficiente que cada um dos autovalores de A esteja associado a um único bloco de Jordan. Sistemas dessa classe são os que apresentam maior interesse para engenharia de controle. Como as informações que determinam a estabilidade de um sistema assim se mostram explícitas na forma de Jordan (ou real de Jordan) de A, essa forma será empregada aqui sempre que justificável.

1.1 Definições e Conceitos

Ponto de Equilíbrio

Dado um sistema da forma (3), um ponto de equilíbrio deste é qualquer vetor de estado $\mathbf{x}_{eq} \in \mathbf{R}^n$ que satisfaça

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}_{eq} = \mathbf{0}$$

Um ponto de equilíbrio (p.e.) de (3) é um ponto do espaço de estados do sistema, no qual a velocidade $\dot{\mathbf{x}}$ é nula.

Exemplo 1: Considere dois sistemas distintos, definidos repectivamente por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os vetores $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ são ps.e. associados à A_1 mas nenhum é associado à A_2, i.e., nenhum é p.e. de A_2. O sistema definido por A_1 tem infinitos ps.e., todos situados sobre uma reta. O sistema definido por A_2 tem apenas a origem de $\mathbf{R}^3$ como p.e.

O Conjunto de Todos os Pontos de Equilíbrio
O conjunto $\mathbf{N}(A)$ de todos os pontos de equilíbrio de um sistema da forma (3) é chamado *espaço nulo* do sistema ou *espaço nulo* de A. Não um conjunto qualquer mas um conjunto bem caracterizado; um ponto isolado, uma reta, um plano ou uma generalização de um plano, sempre incluindo a origem. No caso geral $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ é um *subespaço* do espaço de estados, com dimensão bem determinada:

$\mathbf{N}(A)$	Dimensão
Um ponto	0
Uma reta	1
Um plano	2
Um 3-subespaço	3
$\vdots$	$\vdots$
Um n-subespaço	n

Exemplo 2: O espaço de estados de um sistema associado à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

coincide com $\mathbf{R}^5$. O espaço nulo correspondente tem dimensão 2, tratando-se naturalmente de um 2-subespaço dentro de $\mathbf{R}^5$.

A Dimensão de $\mathbf{N}(A)$
Dado um sistema da forma (3), a dimensão do espaço nulo $\mathbf{N}(A)$ deste sistema é o número inteiro não-negativo $dim\mathbf{N}(A)$ obtido através de

$$dim\mathbf{N}(A) = n - posto(A) \tag{2}$$

onde $posto(A)$ é o máximo número de colunas (ou linhas) linearmente independentes (LI) na matriz A.

Exemplo 3: No caso de um sistema representado por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

não é difícil descobrir que apenas duas das colunas de A são LI, portanto $posto(A) = 2$ e $dim\mathbf{N}(A) = 2$.

Exemplo 4: Quando A tiver posto máximo, i.e., $posto(A) = n$, teremos $dim\mathbf{N}(A) = 0$ e o espaço nulo correspondente é apenas a origem de $\mathbf{R}^n$. É o que acontece para um sistema com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -812 & -431 & -101 & -15 \end{bmatrix}$$

cujo posto é claramente 4, ou seja $\mathbf{N}(A) = \left\{ \mathbf{0} = [0\ 0\ 0\ 0]^T \right\}$.

Exemplo 5: O outro extremo ocorre quando $posto(A) = 0$ e $dim\mathbf{N}(A) = n$. O espaço nulo será o espaço de estados inteiro; o próprio $\mathbf{R}^n$. A única matriz $n \times n$ com posto nulo é a matriz O, cujos elementos são todos nulos. Observe que se $A = O$ então $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$; isto não mais se verifica caso A difira de O num elemento sequer.

Estabilidade de um Ponto de Equilíbrio

Para garantir uma só definição para sistemas lineares e não-lineares, o conceito de estabilidade introduzido a seguir é essencialmente o de Liapunov ("*começar perto implica permanecer perto*"), aplicável individualmente a cada ponto de equilíbrio.

Exposição preliminar

Para um sistema da forma (3), seja $\mathbf{x}_{eq}$ um ponto de equilíbrio.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

Consideramos um estado inicial $\mathbf{x}_0$, afastado de $\mathbf{x}_{eq}$ de uma distância $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{eq}\| = \epsilon$ arbitrariamente pequena. Em seguida examinamos como evolui — em relação a $\mathbf{x}_{eq}$ — a trajetória de estado de entrada nula iniciada em $\mathbf{x}_0$. Em outras palavras, examinamos a evolução de $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{eq}\|$ para $t \to \infty$. Só há três possibilidades: $\mathbf{x}_{eq}$ é Liapunov estável; $\mathbf{x}_{eq}$ é assintoticamente estável, ou $\mathbf{x}_{eq}$ é Liapunov instável

Definições

1 - Ponto de equilíbrio Liapunov estável
Se toda trajetória iniciada suficientemente próxima de $\mathbf{x}_{eq}$ convergir para $\mathbf{x}_{eq}$ ou ficar restrita a uma vizinhança de $\mathbf{x}_{eq}$. Equivalentemente, se nenhuma trajetória iniciada suficientemente próxima de $\mathbf{x}_{eq}$, afastar-se arbitrariamente de $\mathbf{x}_{eq}$.

2 - Ponto de equilíbrio assintoticamente estável
Se toda trajetória iniciada suficientemente próxima de $\mathbf{x}_{eq}$ convergir para $\mathbf{x}_{eq}$.

3 - Ponto de equilíbrio Liapunov instável
Se alguma trajetória iniciada nas imediações de $\mathbf{x}_{eq}$ se afastar arbitrariamente de $\mathbf{x}_{eq}$, independentemente de quão próximo de $\mathbf{x}_{eq}$ seja o estado inicial.

Uma forma concisa
Se $\mathbf{x}_{eq}$ é um ponto de equilíbrio de um sistema da forma (3), podemos dizer que "Em relação ao sistema considerado, $\mathbf{x}_{eq}$ é **l-estável**, **a-estável** ou **l-instável** (respectivamente Liapunov estável, assintoticamente estável, Liapunov instável)".

Múltiplos pontos de equilíbrio e estabilidade de um sistema
Um sistema linear da forma (3) ou apresenta exatamente um ponto de equilíbrio ou então uma infinidade deles; não é possível por exemplo, apresentar exatamente dois pontos de equilíbrio. No caso de infinidade, cada ponto de equilíbrio está arbitrariamente próximo de algum outro ponto de equilíbrio do mesmo sistema; dado um $\mathbf{x}_{eq}$, toda vizinhança de $\mathbf{x}_{eq}$ contém uma infinidade de outros ps.e. do mesmo sistema. Como consequência a estabilidade associada a cada um desses pontos é a mesma e pode ser atribuida ao sistema, sem risco de ambiguidade. Podemos estender nossa classificação e dizer que "um sistema da forma (3) é **l-estável**, **a-estável** ou **l-instável**", de acordo com a estabilidade associada a qualquer um de seus pontos de equilíbrio.

Exemplo 6: O espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

é

$$\mathbf{N}(A) = \left\{ \mathbf{x} = k \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, k \in \mathbf{R} \right\},$$

uma reta pela origem de $\mathbf{R}^3$. Se escolhermos um ponto qualquer $\mathbf{x}_{eq}$ nessa reta e um vetor não nulo

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

arbitrariamente pequeno, o estado inicial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{eq} + \mathbf{e}$ será um ponto arbitrariamente próximo de $\mathbf{x}_{eq}$ mas fora da reta, i.e., fora de $\mathbf{N}(A)$. Sabendo que

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & (2-2e^{-t}) \\ 0 & e^{-2t} & (2-2e^{-2t}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é fácil verificar que neste caso

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{eq} + \epsilon_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e a trajetória claramente não diverge de $\mathbf{x}_{eq}$. O mesmo resultado se verifica para todo $\mathbf{x}_{eq} \in \mathbf{N}(A)$ e consequentemente todo ponto de $\mathbf{N}(A)$ é l-estável. Dizemos simplesmente que qualquer sistema linear com A igual à (4) é um **sistema l-estável**.

Condições Algébricas para Estabilidade

A ligação fundamental existente entre a estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema linear da forma (3) e os autovalores de A, leva a um critério puramente algébrico que permite dispensar a análise de trajetórias de estado.

Condições Algébricas

4 - Sistema Liapunov estável

Um sistema linear da forma (3) é **l-estável** se e somente se cada um dos autovalores de A tiver parte real negativa ou nula e se além disso qualquer autovalor com parte real nula tiver multiplicidade algébrica um.

5 - Sistema assintoticamente estável

Um sistema linear da forma (3) é **a-estável** se e somente se cada um dos autovalores de A tiver parte real negativa.

Exemplo 7: Qualquer sistema da forma (3) com

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é l-estável mas não é a-estável. Note que o autovalor -2 está associado a um bloco de Jordan 3×3, enquanto o autovalor 0 está associado a um bloco de Jordan 1×1.

Exemplo 8: Um sistema da forma (3) com

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não é a-estável nem l-estável. Note que o autovalor -2 está associado a um bloco de Jordan 3×3 e o autovalor 0 a um bloco 1×1. O autovalor 0 porém tem multiplicidade algébrica 2 (aparece duas vezes) e está sobre o eixo imaginário (parte real nula).

Exemplo 9: Note que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

é da forma

$$A = \begin{bmatrix} R & I & O \\ O & R & I \\ O & O & R \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad R = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo portanto ela mesma um bloco de Jordan real correspondendo ao par de autovalores conjugados $0 \pm 3i$. Como os autovalores $+3i$ e $-3i$ ocorrem três vezes cada um (multiplicidade algébrica três), um sistema da forma (3) com A igual à (5) não pode ser nem l-estável, nem a-estável.

Exemplo 10: Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

que coincide com (5) exceto nos elementos unitários. Os autovalores são os mesmos porém neste caso há três blocos reais de Jordan associados ao par conjugado $0 \pm 3i$. Por causa disso qualquer sistema escrito na forma (3), com A igual a (6), apresenta pares canceláveis de polos e zeros. A análise da estabilidade de sistemas com pares canceláveis extrapola o escopo desta lista.

Um resultado adicional útil
Toda matriz A, $n \times n$, tal que $posto(A) \neq n$, é não-inversível e portanto tem pelo menos um autovalor nulo. Consequente um sistema da forma (3) cuja matriz A tenha posto distinto de n, **não pode ser a-estável**.

Exercícios

Nos exercícios abaixo interprete cada matriz quadrada como a matriz A de um sistema de controle dinâmico representado por variáveis de estado na forma (3).

1. Classifique em termos de estabilidade, um sistema cuja matriz A é a identidade de ordem n, i.e., $A = I_n$.
   Resposta: Há n blocos de Jordan 1×1 associados ao autovalor 1, portanto ...

2. Qual ou quais das seguintes matrizes podem ser associadas a sistemas com trajetórias de estado de entrada nula oscilatórias?

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 0 & 0 \\ -7 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

   Resposta: A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6.

3. As matrizes do Ex. (2) estão na forma de Jordan, real de Jordan ou numa forma equivalente. Determine a estrutura de Jordan de cada uma, i.e., os blocos de Jordan em cada caso.
   Resposta: A_1 - 3 blocos 1×1 distintos; A_2 - 2 blocos 2×2 distintos; A_3 - 1 bloco 1×1 e 1 bloco 2×2; A_4; A_5 - 2 blocos 1×1 distintos e 1 bloco 2×2; A_6 - 1 bloco real de Jordan associado ao mesmo par conjugado.

4. Caracterize quanto a estabilidade cada um dos sistemas implícitos do Exer. (3).
   Resposta: A_1; A_2 - a-estável (âmbos); A_3 - l-estável mas não a-estável; A_4; A_5; A_6 - l-instável.

5. Caracterize os pontos de equilíbrio de cada um dos sistemas implícitos do Exer. (3), i.e., determine o espaço nulo em cada caso.
   Resposta: Somente a origem em todos os casos.

6. Em relação aos sistemas do Exer. (3), determine em cada caso, que variáveis de estados se afastam arbitrariamente das proximidades de $\mathbf{N}(A)$, em trajetórias de estados de entrada nula.
   Resposta: x_2, x_3 e x_4 no caso de A_4; x_4 no caso de A_5; x_1 e x_2 no caso de A_6.

7. Em relação aos sistemas do Exer. (3), determine caso a caso, que variáveis de estados permanecem próximas dos pontos de partida ("orbitam"), em trajetórias de estados de entrada nula.

   Resposta: x_2 e x_3 nos casos A_3 e A_5; x_3 e x_4 no caso A_6.

8. Para um sistema correspondendo à A_3 do Exer. (3), uma trajetória de entrada nula pode ser visualizada através dos gráficos de cada uma das variáveis de estados $x_i(t)$. Para o intervalo de 0,0 s a 0,50 s, começando pelo estado inicial $x_0 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right]^T$, podemos empregar ($x_1(t)$ em preto; $x_2(t)$ em azul; $x_3(t)$ em vermelho).

```
≫ a = [-5 0 0; 0 0 -5; 0 5 0]; x0 = [1; 1; 1];
≫ x = [];
≫ for i = 1:50
≫     t(i) = (i - 1)*0.01; x = [x expm(t(i)*a)*x0];
≫ end
≫ plot(t, x(1,:), 'k'), grid, hold
≫ plot(t, x(2,:), 'b')
≫ plot(t, x(3,:), 'r')
```

   Escreva um trecho de MATLAB para obter o mesmo em relação a um sistema definido pela matriz A_4 do Exer. (3) mas para o intervalo de 0,0 s a 1,9 s, partindo de $x_0 = \left[\begin{array}{cccc} -0,1 & 0,03 & -0,2 & 0,1 \end{array}\right]^T$ e com uma resolução (passo) de 0,005 s.

   Resposta: Uma possibilidade seria

```
≫ a = [-5 0 0 0; 0 5 0 0; 0 0 5 -5; 0 0 5 5];
≫ x0 = [-0.1; 0.03; -0.2; 0.1];
≫ x = [];
≫ for i = 1:381
≫     t(i) = (i - 1)*0.005; x = [x expm(t(i)*a)*x0];
≫ end
≫ plot(t, x(1,:), 'r'), grid, hold
≫ plot(t, x(2,:), 'g')
≫ plot(t, x(3,:), 'b')
≫ plot(t, x(4,:), 'k')
```

9. Em relação ao Exer. (8), que comportamento podemos esperar do gráfico produzido por `plot(t, x(2,:), 'g')`?

   Resposta: Uma curva (em verde) crescendo assintoticamente desde 0,03.

10. Em relação ao Exer. (8), que comportamento podemos esperar do gráfico produzido por `plot(t, x(3,:), 'b')`?

    Resposta: Uma curva senoidal (em azul) com amplitude crescendo assintoticamente desde -0,2.

11. Para os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

o MATLAB fornece as segintes aproximações numéricas (quatro casas decimais): $\lambda_1 \approx 3,5616$; $\lambda_2 \approx -0,0000$; $\lambda_3 \approx -0,5616$. O sinal negativo sugere que λ_2 na verdade não seja exatamente zero; a esse respeito, que comentário esclarecedor pode ser feito?
Resposta: A primeira coluna de A é claramente a soma das duas últimas ...

12. O que se pode dizer sobre o conjunto de todos os pontos de equilíbrio de um sistema da forma (3) com a matriz A do Exer. (11) acima?
Resposta: É uma reta em $\mathbf{R}^3$, passando pela origem e por $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

13. Escreva a expressão para uma trajetória de estados de entrada nula, com estado inicial $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} \end{bmatrix}^T$, para um sistema cuja matriz A é da forma

$$R = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Resposta:

$$\mathbf{x}(t) = e^{at} \begin{bmatrix} cos(bt) & sin(bt) \\ -sin(bt) & cos(bt) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

14. Para estudar a estabilidade de um sistema cuja matriz A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & I \\ O & R \end{bmatrix}$$

precisamos de $exp(tA)$. Qual a expressão correspondente discutida em sala de aula?
Resposta:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes e^{tR} = \begin{bmatrix} 1 \cdot e^{tR} & t \cdot e^{tR} \\ 0 \cdot e^{tR} & 1 \cdot e^{tR} \end{bmatrix}$$

15. Verifique que no Exer. (14) o t multiplicando e^{tA} na expressão te^{tA} é o responsável pela l-instabilidade quando $a = 0$.

16. Para uma matriz A da forma

$$A = \begin{bmatrix} R & I & O \\ O & R & I \\ O & O & R \end{bmatrix}$$

O produto tensorial $\otimes$, definido via

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

permite escrever

$$
e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes e^{tR}
$$

Verifique que quando $a = 0$ em R, a presença de $t, t^2/2!, t^3/3!, \cdots$, é responsável pela l-instabilidade associada a qualquer sistema representado por A.

17. Generalize a matriz que pré multiplica tensorialmente e^{tR} no Exer. (16) acima; generalize também e^{tA} para a forma A do Exer. (16), generalizada.

Final da LE-06

Arquivo original:	"tdm13le06.tex"
Arquivo p/ impressão: ...	"tdm13le06.pdf"
Versão:	1.0
No. de páginas:	10
Concluído em:	26/09/2013 - 06:22h