Representação de sinais e sistemas discretos no domínio da frequência

- Introdução
- Transformada de Fourier de sequências
- Propriedades

Introdução

- A representação de Sistemas Lineares através de senóides ou exponenciais complexas é muito usual devido ao fato de que para estes sinais o sinal de saída é o mesmo sinal (senoidal) da entrada.
  - A amplitude e fase são modificadas pela resposta em frequência [$H(e^{jw})$] do sistema.
- Considere um sistema SLID com resposta ao impulso h(n) em cuja entrada é aplicado o sinal x(n) = exp(jwn).
  - Como a saída é a convolução da entrada $x(n) = e^{jwn}$ com a resposta ao impulso h(n) tem-se que:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{jw(n-k)}$$

- Como o índice n não entra na somatória, então:

$$y(n) = e^{jwn} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-jwk}$$

- Definindo a função $H(e^{jw})$ tal que:

$$H\left(e^{jw}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-jwk}$$

- $H(e^{jw})$: é chamada de Resposta em Frequência do sistema.
  - Observe que $H(e^{jw})$ é a transformada de Fourier da sequência h(n).
- Para uma frequência particular w_0 tem-se:

$$y(n) = H\left(e^{jw_0}\right) e^{jw_0 n}$$

- $H(e^{jw})$ modifica a amplitude e fase de e^{jwn}

Representação de $H(e^{jw})$ pelo módulo e fase:

$$H\left(e^{jw}\right) = \left|H\left(e^{jw}\right)\right| e^{j\angle H\left(e^{jw}\right)}$$

Resposta de amplitude — Resposta de fase

Exemplo 1: Resposta em frequência do sistema $y(n) = x(n-n_d)$

- aplicando o sinal x(n) = exp(jwn) na entrada do sistema tem-se:

$$y(n) = e^{jw(n-n_d)} = e^{-jwn_d} e^{jwn}$$

$$\longrightarrow \quad H\left(e^{jw}\right) = e^{-jwn_d} \quad \Rightarrow \begin{cases} \left|H\left(e^{jw}\right)\right| = 1 \\ \angle H\left(e^{jw}\right) = -wn_d \end{cases}$$

- O conceito de resposta em frequência para sistemas contínuos e discretos no tempo é o mesmo.
  - Contudo, para os sistemas discretos a resposta em frequência é periódica com período 2π.
- Prova:

$$H\left(e^{j(w+2\pi)}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j(w+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-jwn} e^{-j2\pi n}$$

  - Como $e^{-j2\pi n} = \cos(2\pi n) - j\,\mathrm{sen}(2\pi n) = 1$, então:

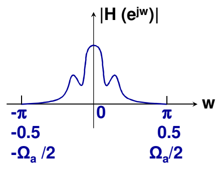
$$H\left(e^{j(w+2\pi)}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-jwn} = H\left(e^{jw}\right)$$

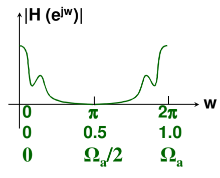
  - Portanto $H(e^{jw})$ é periódica com período 2π.

- Como $H(e^{jw})$ é periódica com período 2π, ela sempre será expressa em um dos seguintes intervalos:

$$\begin{cases} 0 \le w < 2\pi \\ -\pi < w \le \pi \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le f < 1 \\ -0.5 < f \le 0.5 \end{cases}$$

  - Frequências digitais entre $-\pi$ e π ou entre -0.5 e 0.5, significam que o sistema é representado pelas frequências no tempo contínuo em um dos intervalos entre $-\Omega_a/2$ e $\Omega_a/2$ ou $-F_a/2$ e $F_a/2$.





Transformada de Fourier de sequências

- **"O par de transformada de Fourier de uma sequência ou sinal discreto x(n) é definido por: "**

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{jw}\right)e^{jwn}dw$$ ⟵ **equação de síntese**

$$X\left(e^{jw}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jwn}$$ ⟵ **equação de análise**

$$X\left(e^{jw}\right)\Rightarrow\begin{cases}\left|X\left(e^{jw}\right)\right| \\ ARG\left[X\left(e^{jw}\right)\right]\end{cases}$$

⟵ **Espectro de Amplitude**

⟵ **Espectro de Fase (Valor Principal)**

Condições de validade

- **Para que a transformada de Fourier exista (convergência). A seguinte condição deve ser satisfeita:**

$$\left|X\left(e^{jw}\right)\right|<\infty,\quad para\ todo\ w$$

- **Observe que:**

$$\left|X\left(e^{jw}\right)\right|=\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jwn}\right|\leq\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|\left|e^{-jwn}\right|$$

$$\left|X\left(e^{jw}\right)\right|\leq\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|<\infty$$

- **A condição suficiente para que a transformada exista é que x(n) seja absolutamente somável, isto é:** ⟶ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|<\infty$

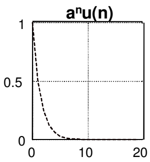
Exemplo 2: **Determine a transformada de Fourier de:**

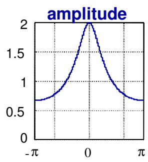
$$x(n)=a^{n}u(n)$$

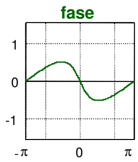
$$\longrightarrow X\left(e^{jw}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}e^{-jwn}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(ae^{-jw}\right)^{n}$$

Admitindo $|ae^{-jw}| < 1$ que é equivalente a admitir $|a| < 1$

$$X\left(e^{jw}\right)=\frac{1}{1-ae^{-jw}}$$



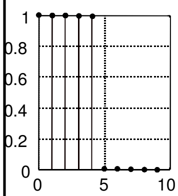


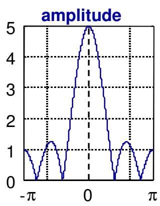


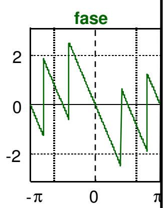
Exemplo 3: **Determine a transformada de Fourier de:**

$$x(n)=\begin{cases}A, & 0\leq n\leq M-1\\ 0, & c.\,c.\end{cases}$$

$$X\left(e^{jw}\right)=\sum_{n=0}^{M-1}Ae^{-jwn}=A\frac{1-e^{-jwM}}{1-e^{-jw}}=Ae^{-jw(M-1)/2}\frac{sen(wM/2)}{sen(w/2)}$$







Espectro densidade de energia

- **A energia de uma sequência é definida como:**

$$E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x^{*}(n)$$

$$E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X^{*}\left(e^{jw}\right)e^{-jwn}\right\}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X^{*}\left(e^{jw}\right)\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jwn}\right\}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X^{*}\left(e^{jw}\right)X\left(e^{jw}\right)dw \longrightarrow E_x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{jw}\right)\right|^2dw$$

- **A quantidade:**

$$S_x(f)=\left|X\left(e^{jw}\right)\right|^2$$

Representa a distribuição da Energia de x(n) em função da frequência e por isso ela é chamada de ***Espectro Densidade de Energia.***

- **Exemplo 4:** **Para o sinal do exemplo 3:**

$$\left|X\left(e^{jw}\right)\right|^2=\begin{cases}A^2\left|\frac{sen(wM/2)}{sen(w/2)}\right|^2\\ (AM)^2,\quad w=0\end{cases}$$

- **Esta definição é útil quando se trabalha com sinais aleatórios em que é definido o** ***Espectro Densidade de Potência.***

Propriedades da transformada de Fourier

- **Propriedades de simetria para sequências reais**

$$1.\quad X\left(e^{jw}\right)=X^{*}\left(e^{-jw}\right)$$
$$2.\quad X_R\left(e^{jw}\right)=X_R\left(e^{-jw}\right)$$
$$3.\quad X_I\left(e^{jw}\right)=-X_I\left(e^{-jw}\right)$$
$$4.\quad \left|X\left(e^{jw}\right)\right|=\left|X\left(e^{-jw}\right)\right|\quad \textit{módulo par}$$
$$5.\quad \angle X\left(e^{jw}\right)=-\angle X\left(e^{-jw}\right)\quad \textit{fase ímpar}$$

- **Propriedades gerais:**

$$1.\ Linearidad\ e:\quad ax(n)+by(n)\leftrightarrow aX\left(e^{jw}\right)+bY\left(e^{jw}\right)$$
$$2.\ Desl.\ no\ tempo:\quad x(n-n_d)\leftrightarrow e^{-jwn_d}X\left(e^{jw}\right)$$
$$3.\ Desl.\ na\ freq.:\quad e^{jw_0 n}x(n)\leftrightarrow X\left(e^{j(w-w_0)}\right)$$
$$4.\ Inv.\ do\ tempo:\quad x(-n)\leftrightarrow X\left(e^{-jw}\right)$$
$$5.\ Diferencia\ ção:\quad nx(n)\leftrightarrow j\frac{d}{dw}X\left(e^{jw}\right)$$
$$6.\ Parseval:\quad E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{jw}\right)\right|^2 dw$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^{*}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{jw}\right)Y^{*}\left(e^{jw}\right)dw$$

$$7.\ Convolução:\quad x(n)*y(n)\leftrightarrow X\left(e^{jw}\right)Y\left(e^{jw}\right)$$
$$8.\ Modulação:\quad w(n)x(n)\leftrightarrow W\left(e^{jw}\right)*X\left(e^{jw}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\theta}\right)*W\left(e^{j(w-\theta)}\right)d\theta$$
$$Caso:\ x(n)\cos(w_0 n)\leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left[X\left(e^{j(w+w_0)}\right)+X\left(e^{j(w-w_0)}\right)\right]$$

Exemplo 5: Determine a transformada de Fourier de:

$$x(n)=a^{|n|},\quad |a|<1$$

- **expressando x(n) como a soma de duas sequencias: $x_1(n)$ + $x_2(n)$:**

$$x_1(n)=a^n,\quad n\geq 0\quad\leftrightarrow\quad X_1\left(e^{jw}\right)=\frac{1}{1-ae^{-jw}}$$

$$x_2(n)=a^{-n},\quad n<0\quad\leftrightarrow\quad X_2\left(e^{jw}\right)=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}e^{-jwn}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(ae^{jw}\right)^n$$

$$\Rightarrow\quad X_2\left(e^{jw}\right)=\frac{ae^{jw}}{1-ae^{jw}}$$

- **Combinando as duas transformadas (propriedade da linearidade):**

$$X\left(e^{jw}\right)=X_1\left(e^{jw}\right)+X_2\left(e^{jw}\right)=\frac{1}{1-ae^{-jw}}+\frac{ae^{jw}}{1-ae^{jw}}$$

$$\Rightarrow\quad X\left(e^{jw}\right)=\frac{1-a^2}{1-2a\cos(w)+a^2}$$

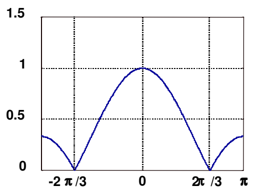
Exemplo 6: Função de transferência do Filtro de média móvel:

$$y(n)=\tfrac{1}{3}\left[x(n+1)+x(n)+x(n-1)\right]$$
$$Neste\ caso:\quad h(n)=\tfrac{1}{3}\delta(n+1)+\tfrac{1}{3}\delta(n)+\tfrac{1}{3}\delta(n-1)$$

- **Combinando as propriedades da linearidade e do deslocamento no tempo obtém-se a resposta em frequência do sistema:**

$$H\left(e^{jw}\right)=\tfrac{1}{3}\left[e^{jw}+1+e^{-jw}\right]=\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\cos(w)$$

$$\left|H\left(e^{jw}\right)\right|=\tfrac{1}{3}\left|1+2\cos(w)\right|\quad\Rightarrow$$



$$\Phi(w)=\begin{cases}0, & 0\leq w<2\pi/3\\ \pi, & 2\pi/3\leq w<\pi\end{cases}$$

apêndice

Propriedades de simetria

Sequência Conjugada Simétrica (Par)

$$x_e(n) = x_e^*(-n) = \tfrac{1}{2}\left[x(n) + x^*(-n)\right]$$

Sequência Conjugada Antissimétrica (Impar)

$$x_0(n) = -x_0^*(-n) = \tfrac{1}{2}\left[x(n) - x^*(-n)\right]$$

Sequências complexas

1. $x^*(n) \leftrightarrow X^*\left(e^{-jw}\right)$
2. $Re\{x(n)\} \leftrightarrow X_e\left(e^{jw}\right)$
3. $Im\{x(n)\} \leftrightarrow X_0\left(e^{jw}\right)$
4. $x_e(n) \leftrightarrow X_R\left(e^{jw}\right)$

5 $x_0(n) \leftrightarrow jX_I\left(e^{jw}\right)$

Sequências reais

6. $X\left(e^{jw}\right) = X^*\left(e^{-jw}\right)$
7. $X_R\left(e^{jw}\right) = X_R\left(e^{-jw}\right)$
8. $X_I\left(e^{jw}\right) = -X_I\left(e^{-jw}\right)$
9. $\left|X\left(e^{jw}\right)\right| = \left|X\left(e^{-jw}\right)\right|$
10. $\angle X\left(e^{jw}\right) = -\angle X\left(e^{-jw}\right)$