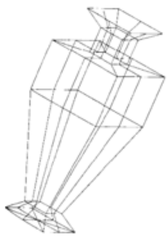
COMPUTAÇÃO GRÁFICA

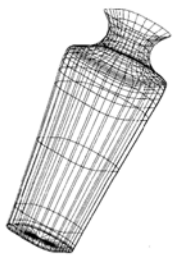
Unidade 9 – Modelagem Geométrica e
Curvas de Bézier

Ivan Nunes da Silva

Modelagem Geométrica

- Disciplina que visa obter representações algébricas para curvas e superfícies com determinado aspecto e/ou propriedades.
- Até agora temos considerado quase que exclusivamente objetos geométricos compostos de segmentos de reta ou polígonos (curvas/superfícies lineares por parte):
  - Na maioria dos casos, são aproximações de curvas e superfícies algébricas.
  - Mesmo quando só podemos desenhar segmentos de reta e polígonos, conhecer o objeto que estamos aproximando é fundamental.





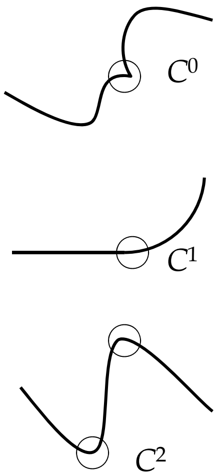
Curvas e Superfícies Paramétricas

- Normalmente, o resultado da modelagem é dado em forma paramétrica, pois:
  - Permite que a curva/superfície seja desenhada (de forma aproximada) facilmente.
  - Permite indicar que trechos da curva/superfície serão usados.
  - Manipulação algébrica mais simples.
- Curva em 3D é dada por
  - $C(t) = [C_x(t) \;\; C_y(t) \;\; C_z(t)]^T$
- Superfície em 3D é dada por
  - $S(u, v) = [S_x(u, v) \;\; S_y(u, v) \;\; S_z(u, v)]^T$

3

Continuidade

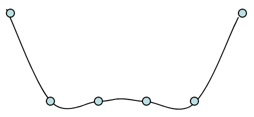
- Em geral, uma forma complexa não pode ser modelada por uma única curva, mas por várias curvas que são conectadas em seus pontos extremos.
- Ao criar as junções, o projetista, em geral, deseja controlar a continuidade nos pontos de junção.
- Normalmente, desejam-se curvas e superfícies "suaves".
- Critério de "suavidade" associado com critério de continuidade algébrica:
  - **Continuidade C^0** → funções paramétricas são contínuas, isto é, sem "pulos".
    - *As duas curvas sempre se encontram.*
  - **Continuidade C^1** → funções paramétricas têm primeiras derivadas contínuas, isto é, tangentes variam suavemente.
    - *Exige que as curvas sejam tangentes no ponto de junção.*
  - **Continuidade C^2** → funções paramétricas têm as duas primeiras derivadas contínuas, isto é, mesma curvatura.
    - *Exige que as curvaturas sejam as mesmas.*

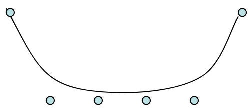


4

Interpolação x Aproximação

- É natural que se deseje modelar uma curva suave que passa por um conjunto de pontos dados.
- Se a curva desejada é polinomial, chama-se então tal curva de *interpolação polinomial lagrangeana.*
- Entretanto, o resultado nem sempre é aquele esperado (oscilações).
- Assim, é mais comum desejar que as curvas "passem perto" dos pontos dados, isto é, *aproximações*.



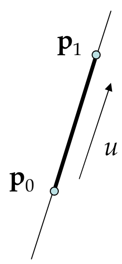


5

Algoritmo de De Casteljau

- Suponha que se deseje aproximar uma curva polinomial entre dois pontos $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ dados.
- A solução natural é um segmento de reta que passa por $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ cuja parametrização mais comum é

  $\mathbf{p}(u) = (1 - u).\mathbf{p}_0 + u.\mathbf{p}_1$
- Pode-se pensar em $\mathbf{p}(u)$ como sendo uma média ponderada entre $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$.
- Observa-se que os polinômios $(1 - u)$ e u somam 1 para qualquer valor de u .
  - As expressões advindas de $\mathbf{p}$(u) são chamadas de funções de mistura (*blending functions*).



6

Algoritmo de De Casteljau

- Para generalizar a idéia para três pontos $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, considera-se primeiramente os segmentos de reta $\mathbf{p}_0$-$\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_1$-$\mathbf{p}_2$:

  $\mathbf{p}_{01}(u) = (1 - u)\,\mathbf{p}_0 + u\,\mathbf{p}_1$

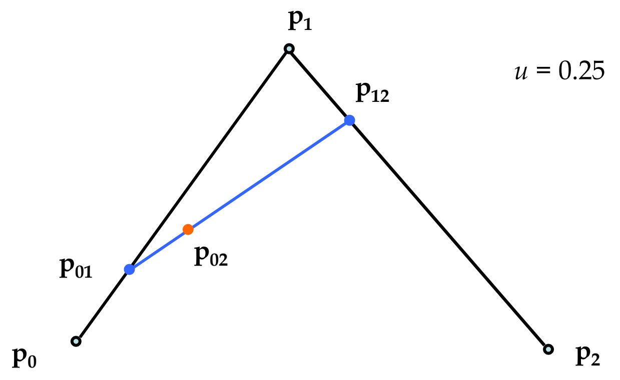
  $\mathbf{p}_{12}(u) = (1 - u)\,\mathbf{p}_1 + u\,\mathbf{p}_2$

- Pode-se agora realizar uma interpolação entre $\mathbf{p}_{01}(u)$ e $\mathbf{p}_{12}(u)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{02}(u) &= (1 - u)\,\mathbf{p}_{01}(u) + u\,\mathbf{p}_{12}(u) \\ &= (1 - u)^2\,\mathbf{p}_0 + 2\,u\,(1 - u)\,\mathbf{p}_1 + u^2\,\mathbf{p}_2\end{aligned}$$

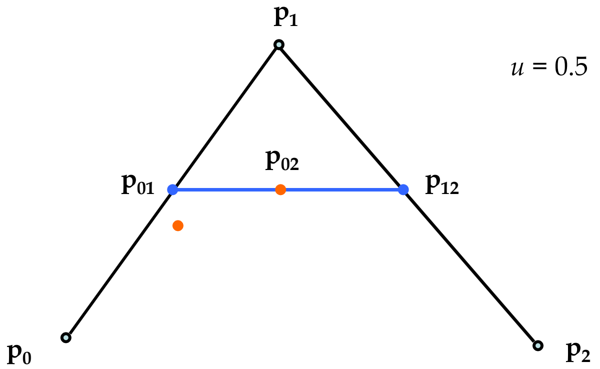
7

Algoritmo de De Casteljau



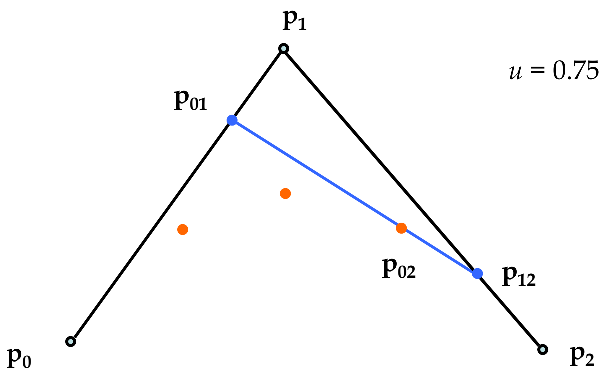
8

Algoritmo de De Casteljau



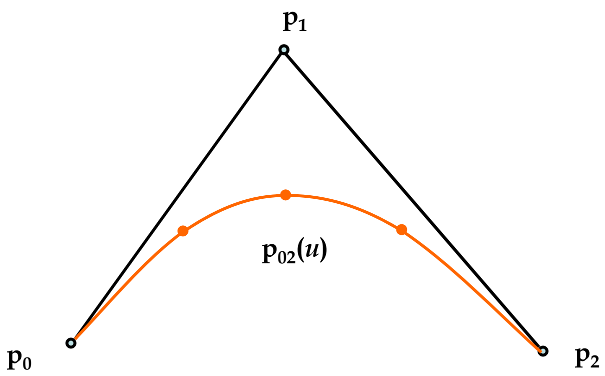
9

Algoritmo de De Casteljau



10

Algoritmo de De Casteljau



11

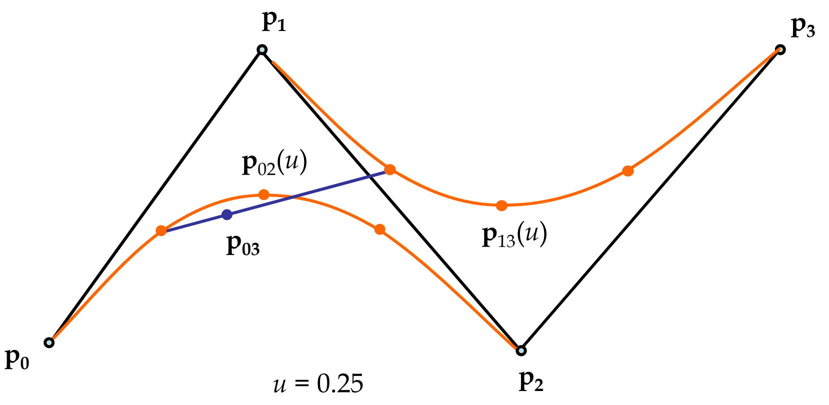
Algoritmo de De Casteljau

- A curva obtida pode ser entendida como a "mistura" dos pontos $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ por intermédio de três funções quadráticas:
  - $b_{02}(u) = (1 - u)^2$
  - $b_{12}(u) = 2\,u\,(1 - u)$
  - $b_{22}(u) = u^2$
- Aplicando mais uma vez a ideia, pode-se então definir uma cúbica por 4 pontos:

$$\mathbf{p}_{02}(u) = (1 - u)^2\,\mathbf{p}_0 + 2\,u\,(1 - u)\,\mathbf{p}_1 + u^2\,\mathbf{p}_2$$
$$\mathbf{p}_{13}(u) = (1 - u)^2\,\mathbf{p}_1 + 2\,u\,(1 - u)\,\mathbf{p}_2 + u^2\,\mathbf{p}_3$$
$$\mathbf{p}_{03}(u) = (1 - u)\,\mathbf{p}_{02}(u) + u\,\mathbf{p}_{13}(u)$$
$$= (1 - u)^3\,\mathbf{p}_0 + 3\,u\,(1 - u)^2\,\mathbf{p}_1 + 3\,u^2\,(1 - u)\,\mathbf{p}_2 + u^3\,\mathbf{p}_3$$

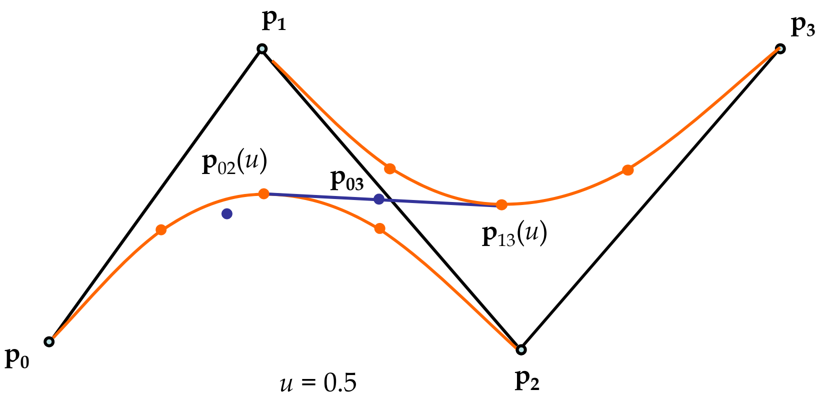
12

Algoritmo de De Casteljau



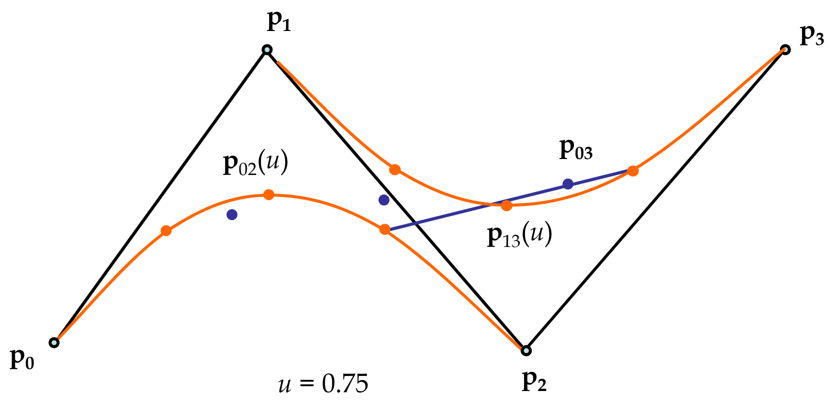
13

Algoritmo de De Casteljau



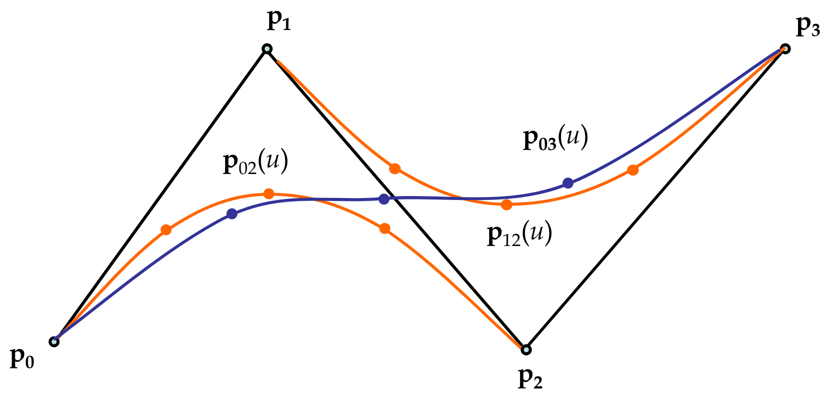
14

Algoritmo de De Casteljau



15

Algoritmo de De Casteljau



16

Algoritmo de De Casteljau

- Novamente, tem-se uma curva dada pela soma de 4 funções de mistura (agora cúbicas), cada uma multiplicada por um dos 4 pontos:
  - $b_{03}(u) = (1 - u)^3$
  - $b_{13}(u) = 3\,u\,(1 - u)^2$
  - $b_{23}(u) = 3\,u^2\,(1 - u)$
  - $b_{33}(u) = u^3$
- Em geral, uma curva de grau n pode ser construída desta forma e será expressa por:

$$\mathbf{p}_{0n}(u) = \sum_{j=0}^{n} b_{j\,n}(u)\,\mathbf{p}_j$$

17

Curvas de Bézier e Polinômios de Bernstein

- As curvas construídas pelo algoritmo de De Casteljau são conhecidas como *curvas de Bézier* e as funções de mistura são chamadas de *base Bézier* ou *polinômios de Bernstein*.
- Observa-se que os polinômios de Bernstein de grau n têm como forma geral $b_{i\,n}(u) = c_i\, u^i\, (1 - u)^{n-i}$.
  - Lei de Formação → *u^i é incrementado até n* ➔ *$(1- u)^{n-1}$ é decrementado até 0.*
- Se escrevermos as constantes c_i para os diversos polinômios, tem-se:
  - 1º grau: 1 1
  - 2º grau: 1 2 1
  - 3º grau: 1 3 3 1
  - 4º grau: 1 4 6 4 1

$b_{01}(u) = \mathbf{1}\,(1 - u)$
$b_{11}(u) = \mathbf{1}\,u$

$b_{02}(u) = \mathbf{1}\,(1 - u)^2$
$b_{12}(u) = \mathbf{2}\,u\,(1 - u)$
$b_{22}(u) = \mathbf{1}\,u^2$

$b_{03}(u) = \mathbf{1}\,(1 - u)^3$
$b_{13}(u) = \mathbf{3}\,u\,(1 - u)^2$
$b_{23}(u) = \mathbf{3}\,u^2\,(1 - u)$
$b_{33}(u) = \mathbf{1}\,u^3$

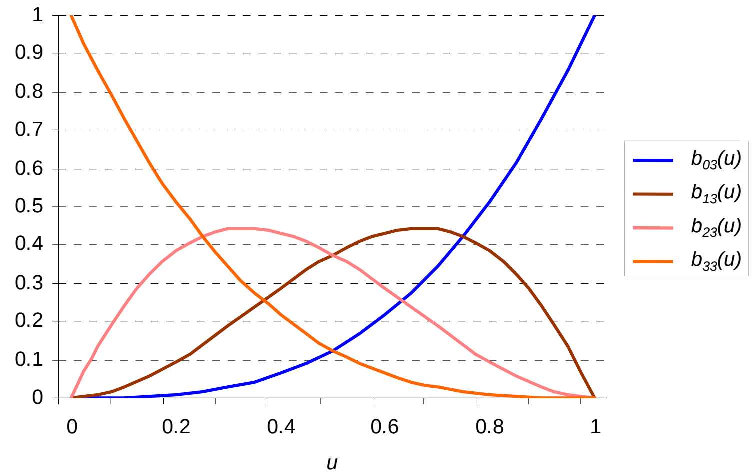
- Verifica-se que o padrão de formação corresponde ao *Triângulo de Pascal* e, portanto, pode-se escrever:

$$b_{i\,n}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}\,, \quad onde \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

18

Polinômios de Bernstein

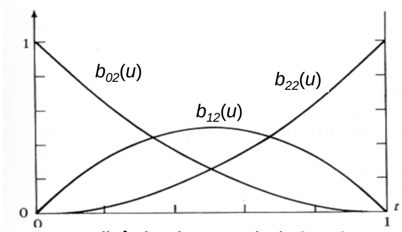
Polinômios de Bernstein de grau 3



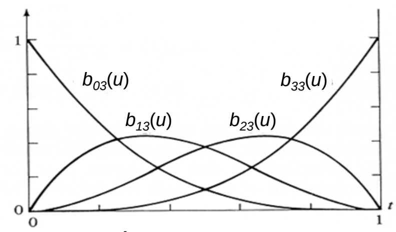
19

Polinômios de Bernstein

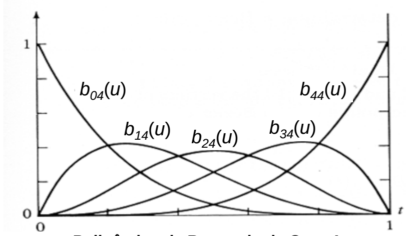
Outros Polinômios de Bernstein



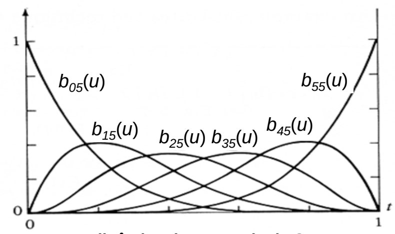
Polinômios de Bernstein de Grau 2



Polinômios de Bernstein de Grau 3



Polinômios de Bernstein de Grau 4



Polinômios de Bernstein de Grau 5

20

Forma Matricial da Base Bézier

- Como verificado, a curva de Bézier cúbica é dada por:

$$\mathbf{p}_{03}(u) = (1 - u)^3\,\mathbf{p}_0 + 3u(1 - u)^2\,\mathbf{p}_1 + 3\,u^2\,(1 - u)\,\mathbf{p}_2 + u^3\,\mathbf{p}_3$$

- A equação acima pode ser escrita como:

$$\mathbf{p}_{03}(u) = \begin{bmatrix}(1-u)^3 & 3u(1-u)^2 & 3u^2(1-u) & u^3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{03}(u) = \begin{bmatrix}1 & u & u^2 & u^3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3\end{bmatrix}$$

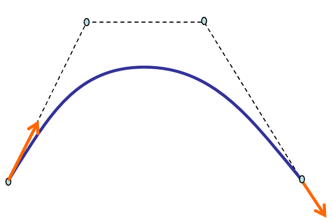
- Portanto, tem-se a seguinte representação matricial:

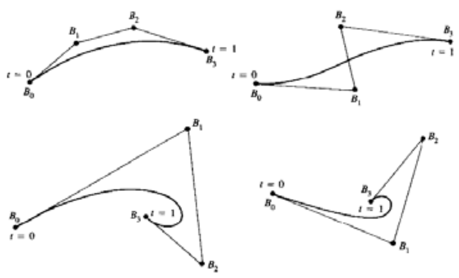
$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{p}_{03}(u) = [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3]\,\mathbf{M}_B \begin{bmatrix}\mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3\end{bmatrix} \quad ; \quad \text{onde } \mathbf{M}_B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{M}_B$ é a matriz de coeficientes da base Bézier.

Propriedades de Curva de Bézier

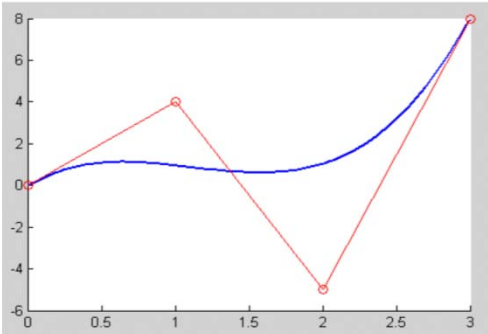
- Continuidade infinita (todas as derivadas são contínuas).
- O grau da curva (do polinômio) é dado pelo número de pontos do polígono de controle menos 1.
- A curva de Bézier está contida no fecho convexo do polígono de controle.
  - Os polinômios de Bernstein somam 1 para qualquer u.
- A curva interpola o primeiro e último ponto do polígono de controle.
- As tangentes à curva em $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_n$ têm a direção dos segmentos de reta $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{p}_n$, respectivamente.
  - Para cúbicas, as derivadas são $3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$ e $3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$





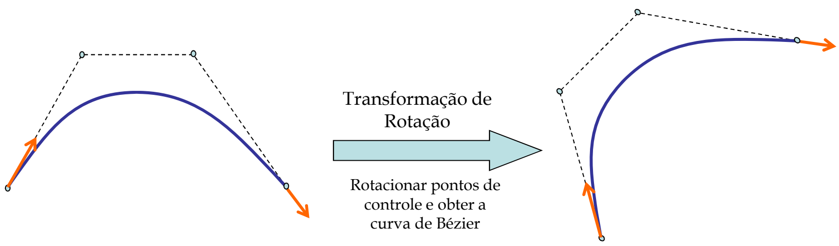
Propriedades de Curva de Bézier

- Qualquer linha reta intercepta a curva tantas ou menos vezes quanto intercepta o polígono de controle.
  - Não pode oscilar demasiadamente.



Propriedades de Curva de Bézier

- Transformar os pontos de controle (transf. afim) e desenhar a curva é equivalente a desenhar a curva transformada. Uma consequência prática:
  - Suponha que traçamos uma curva cúbica calculando 100 pontos sobre ela; e que agora queremos desenhar a mesma curva depois de uma rotação.
  - Podemos aplicar a rotação a cada um dos 100 pontos, e desenhar os pontos resultantes, ou aplicar a rotação a cada um dos 4 pontos do polígono de controle, calcular novamente os 100 pontos e traça-los.
    - A primeira estratégia requer que a rotação seja aplicada 100 vezes, e a segunda requer a sua aplicação apenas 4 vezes!



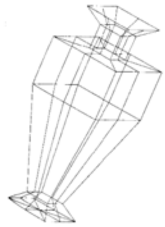
Desenhando Curvas Bézier

- Curva normalmente é aproximada por uma linha poligonal.
- Pontos podem ser obtidos avaliando a curva em $u = u_1, u_2 \dots u_k$
  - Avaliar os polinômios de Bernstein.
  - Usar o algoritmo recursivo de De Casteljau.
- Quantos pontos?
  - Mais pontos em regiões de alta curvatura.
- Ideia: subdividir recursivamente a curva em trechos até que cada trecho seja aproximadamente "reto".

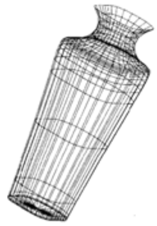
Aplicabilidade das Curvas de Bézier

- Curva de Bézier em *design* de formas é uma das técnicas que produz melhores resultados tanto estético quanto funcionais.
- A forma da curva geralmente acompanha a forma do polígono de definição (na verdade é uma versão "suavizada" da forma do polígono).
- Para desenhar uma curva, basta definir o polígono e depois ajustar os pontos que forem necessários para aproximar melhor a forma desejada.
- Isso torna a formulação adequada para o *design* interativo.
- Um projetista experiente consegue obter a forma desejada depois de 2 ou 3 interações com um sistema computacional.

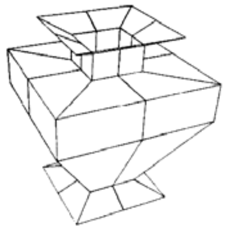
Exemplo de Figuras Complexas Obtidas por Curvas de Bézier



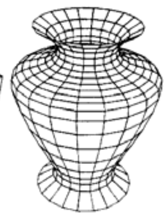
objeto original (em polígonos)



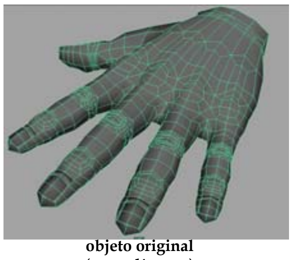
objeto transformado (por curvas bézier)



objeto original (em polígonos)



objeto transformado (por curvas bézier)

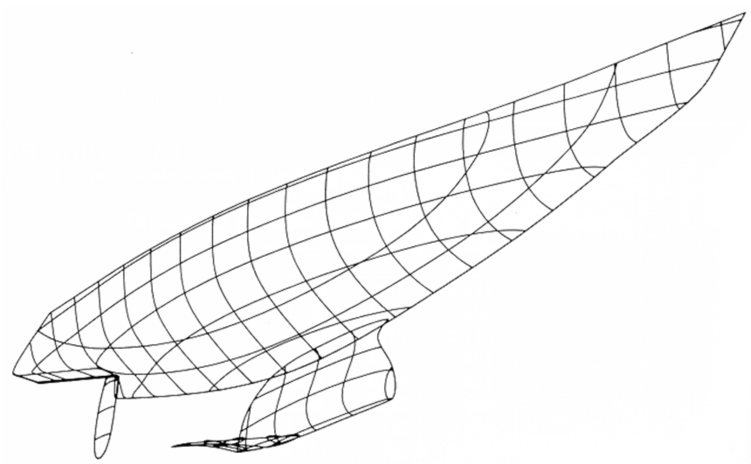


objeto original (em polígonos)

objeto transformado (por curvas bézier)

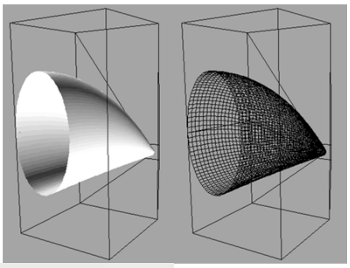
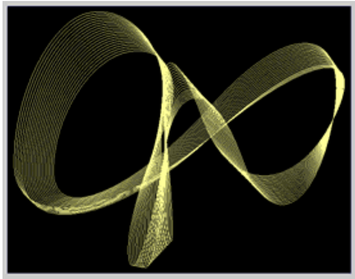
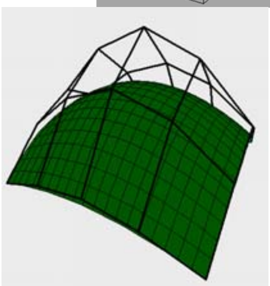
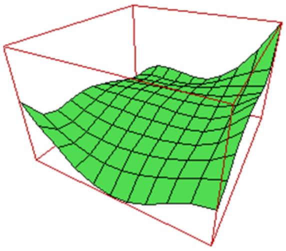
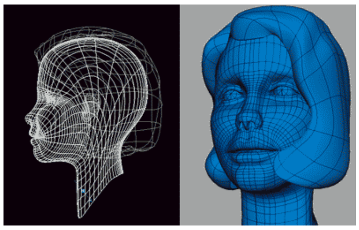
27

Exemplo de Figuras Complexas Obtidas por Curvas de Bézier



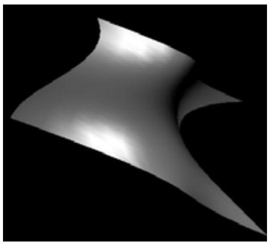
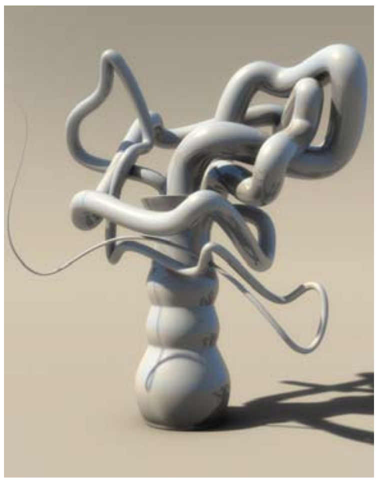
28

Exemplo de Figuras Complexas Obtidas por Curvas de Bézier

29

Exemplo de Figuras Complexas Obtidas por Curvas de Bézier

30