REPRESENTAÇÃO DE SINAIS

- **Sinais elétricos são em geral descritos no domínio do tempo.**
- **Em muitas situações a representação no domínio do tempo não é suficiente para descrevê-lo ou analisá-lo completamente.**
  - **Tempo: amplitude, valor máximo, período, ...**
  - **Frequência: espectro, frequência importantes, largura de banda, ...**
- **Representação no domínio da frequência:**
  - **Série de Fourier (para sinais periódicos).**
  - **Transformada de Fourier (para sinais não periódicos).**
  - **Espectro Densidade de Potência (para sinais de informação – sinais aleatórios).**
- **Transmissão de sinais através de sistemas lineares.**

A Série de Fourier

- **Seja um sinal periódico $x_p(t)$ que satisfaz as seguintes condições:**
  - **Número finito de descontinuidades,**
  - **Número finito de máximos e mínimos,**
  - **Absolutamente somável.**

Série de Fourier na forma trigonométrica

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n sen(2\pi n f_0 t)\}$$

- **Em que: $f_0 = 1/T$ frequência fundamental do sinal, e os coeficientes a_n e b_n, n = 0, 1, 2, ..., são dados por:**

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_p(t)\cos(2\pi n f_0 t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_p(t) sen(2\pi n f_0 t)dt$$

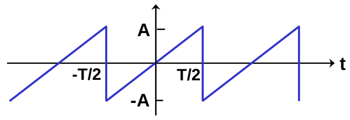
- **Série de Fourier na forma compacta:**

$$x_p(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{E_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)\}$$

em que: $E_0 = \frac{a_0}{2}; \quad E_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \theta_n = arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

- **Propriedades:**
  - **Função par:**
    - **apresenta somente os coeficientes a_n, os coeficientes b_n são nulos.**
  - **Função impar:**
    - **apresenta somente os coeficientes b_n, os coeficientes a_n são nulos.**

Exemplo 1: série de Fourier da onda dente de serra



- **X(t) é uma função ímpar e para um período tem-se:**

x(t) = [2A/T]t

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{2A}{T} t \cos(2\pi n f_0 t)dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{2A}{T} t\, sen(2\pi n f_0 t)dt = -\frac{2A}{n\pi}\cos(n\pi)$$

$$x(t) = \frac{2A}{\pi}\left\{sen 2\pi f_0 t - \frac{1}{2} sen 4\pi f_0 t + \frac{1}{3} sen 6\pi f_0 t \cdots\right\}$$

Série de Fourier na forma exponencial

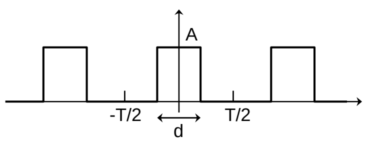
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

- **em que:**

$$A_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$|A_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}; \quad \theta_n = arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

- **Exemplo 2: Série exponencial de Fourier de um trem de pulsos retangulares**



$$A_n = \frac{1}{T}\int_{-d/2}^{d/2} A e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

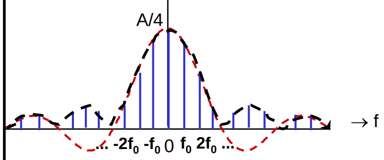
$$x(t) = \frac{Ad}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{sen(\pi n d f_0)}{\pi n d f_0} e^{j2\pi n f_0 t}$$

❖ Espectro de Amplitude e de Fase

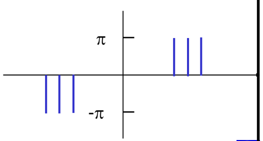
$$A_n = \frac{Ad}{T}\frac{sen(\pi n d f_0)}{\pi n d f_0}$$

$$\left.\begin{matrix} d = 1/20 \\ T = 1/5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_n = \frac{A}{4}\frac{sen(\pi n/4)}{\pi n/4} = \frac{A}{4} sin\,c(n/4)$$

Espectro de Amplitude



Espectro de Fase



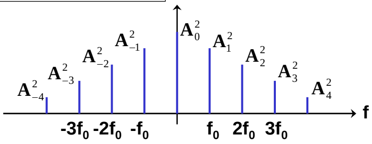
❖ Espectro de Potência

➢ potência média: $\boxed{P_M = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x_P(t)|^2\, dt}$

$$P_M = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_P(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^* e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^* \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_P(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$\boxed{P_M = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n A_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2}$$

Teorema de Parseval



A Transformada de Fourier

direta

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

equação de análise

inversa

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

equação de síntese

❖ Condições de existência (Dirichlet)

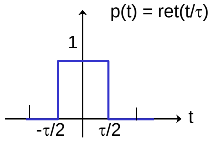
- ➢ Número finito de descontinuidades,
- ➢ Número finito de máximos e mínimos,
- ➢ Absolutamente somável.

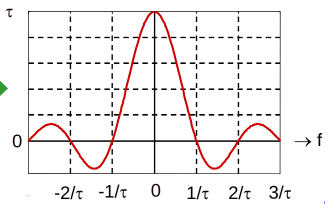
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

❖ Exemplo 3: transformada de Fourier de um pulso retangular com largura τ

$$p(t) = ret\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow P(f) = \tau\, sin\,c(f\tau)$$

$$P(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi f t} dt = \left.\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \tau\frac{sen \pi f \tau}{\pi f \tau} = \tau\, sin\,c(f\tau)$$





Propriedades

1. **Linearidade:** considere dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$

$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{TF} X_3(f) = a X_1(f) + b X_2(f)$$

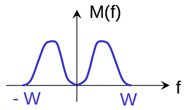
2. **Deslocamento no tempo**

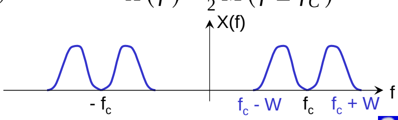
$$x(t-\tau) \xleftrightarrow{TF} e^{-j2\pi f \tau} X(f)$$

3. **Deslocamento na frequência (teorema da modulação)**

$$x(t) e^{-j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{TF} X(f + f_0)$$

$$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_C t) \Longleftrightarrow X(f) = \tfrac{1}{2} M(f \pm f_C)$$





4. **Escalonamento**

$$x(\alpha t) \xleftrightarrow{TF} X(f/\alpha)$$

Compressão no tempo ==> expansão na frequência e vice versa

5. **Simetria**

$$se\ x(t) \leftrightarrow X(f) \quad então \quad X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

6. **Integração e diferenciação**

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \xleftrightarrow{TF} (j2\pi f)^n X(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(t) dt \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$$

7. Área sob x(t)

$$X(0)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt$$

8. Área sob X(f)

$$x(0)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)df$$

9. Convolução

$$x(t)*w(t)\xleftrightarrow{TF}X(f)W(f)$$

10. Multiplicação

$$x(t).w(t)\xleftrightarrow{TF}X(f)*W(f)$$

11. Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2\,df$$

12. Se x(t) é real:

$$X(f)=X^*(-f)$$

➡ **Módulo é par e a fase é ímpar**

Transformada de Fourier de Funções Periódicas

- **Escrevendo a função em série de Fourier tem-se:**

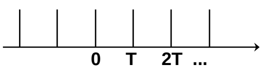
$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{j2\pi f_0 t} \quad \text{em que:} \quad A_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_p(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt$$

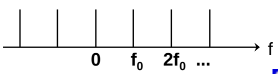
- **Cálculo da Transformada:**

$$X_p(f)=\Im\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{j2\pi n f_0 t}\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\Im\left\{e^{j2\pi n f_0 t}\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\delta(f-nf_0)$$

- **Exemplo 4:**

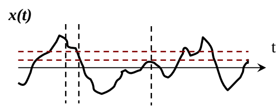
$$\delta_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \;\Rightarrow\; A_n=\frac{1}{T} \;\Rightarrow\; \Delta_p(f)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_0)$$





Espectro Densidade de Potência para sinais aleatórios

- **Processo Ergódico: Uma única função amostra é suficiente para caracterizar o processo.**
- **As médias temporais são iguais às médias estatísticas.**



função de autocorrelação:

$$r_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)x(t+\tau)dt$$

- **Um processo aleatório é um sinal de energia infinita. Portanto não apresenta Transformada de Fourier.**
- **A característica Espectral é obtida pelo teorema de Wiener-Kinchine.**
  - **Transformada de Fourier da função de autocorrelação.**

$$\boxed{P_x(f)=\int_{-\infty}^{\infty}r_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad e \quad r_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}P_x(f)e^{j2\pi f\tau}df}$$

  - **Observe que:**

$$r_x(0)=\int_{-\infty}^{\infty}P_x(f)df=E\left[X^2\right]\geq 0$$

  - **A potência média total é calculada pela área sob P_x(F).**
  - **P_x(f) representa a distribuição da potência em função de f.**
  - **P_x(f): Espectro Densidade de Potência.**

Transmissão de Sinais através de sistemas lineares

- **Sistema: É uma Transformação que se opera em um sinal.**
  - **Sinal de Entrada: Excitação x(t).**
  - **Sinal de Resposta: Saída ou resposta do sistema y(t).**

$$y(t)=T[x(t)] \quad \Rightarrow \quad x(t)\longrightarrow\boxed{T[x(t)]}\longrightarrow y(t)$$

- **Sistemas Lineares**
  - **Sendo: y_1(t), ..., y_M(t) as saídas do sistema correspondentes às entradas x_1(t), ..., x_M(t). Para um sistema linear tem-se:**

$$\begin{aligned}T[a_1x_1(t)+\cdots+a_Mx_M(t)]&=a_1T[x_1(t)]+\cdots+a_MT[x_M(t)]\\&=a_1y_1(t)+\cdots+a_My_M(t)\end{aligned}$$

  - **Em que: M é um número inteiro e a_1, ..., a_M são constantes.**

❖ Sistema Linear Invariante no Tempo

➢ **"Um Sistema Linear é invariante no tempo se e somente se:"**

$$y(t) = T[x(t)] \quad \Rightarrow \quad T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$$

Resposta ao Impulso:

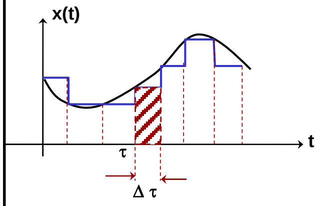
❖ **h(t): resposta do sistema à função impulso [δ(t)] com condições iniciais nulas.**

❖ **É uma das formas de descrever um sistema.**

❖ **H(f): É a transformada de Fourier da resposta ao impulso. É chamada de função do sistema ou função de transferência.**

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

❖ Integral de convolução:



➢ **No instante t = τ e Δ τ → 0, o pulso hachurado corresponde a um impulso com área:**

➢ **x(τ)Δ τ**

➢ **por definição tem-se que:**

➢ **δ(t) → h(t), então, para: x(τ)Δ τ δ(t- τ) → x(τ)Δ τh(t- τ)**

➢ **resposta total: utilizando o "princípio da superposição"**

$$y(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\Delta\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

Propriedades

1. **Sistema causal (fisicamente realizável):**

h(t) = 0, t < 0

2. **Estabilidade:**

entrada limitada ==> saída limitada

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, h(t) \,|\, dt < \infty$$

3. **Convolução**

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \xleftrightarrow{TF} \quad Y(f) = H(f)X(f)$$

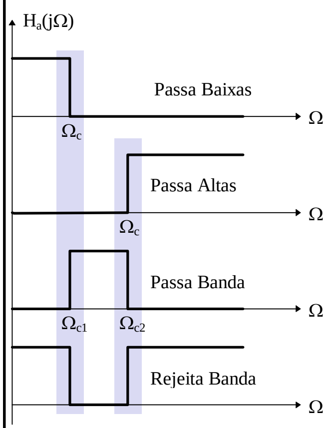
➢ **H(f) é chamada de resposta em frequência do sistema.**

➢ **O sistema apresenta características de um filtro.**

4. **Sistemas físicos reais:**

$$|\,H(f)\,| = |\,H(-f)\,| : \quad par \quad e \quad \phi(f) = -\phi(-f) : \quad impar$$

Característica em Frequência dos Filtros Seletivos Ideais



Parâmetros

❖ **Frequência de corte:**

❖ **Banda de Passagem:**

❖ **Banda de Transição:**

❖ **Banda de Atenuação:**

❖ **Atenuação máxima na banda de passagem:**

❖ **Atenuação mínima na banda de atenuação:**

❖ **Frequência de ressonância.**

➢ **Para um filtro LC:**

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$