COMPUTAÇÃO GRÁFICA

Unidade 5 – Transformações Geométricas (3D)

Ivan Nunes da Silva

1

Transformações em 3D

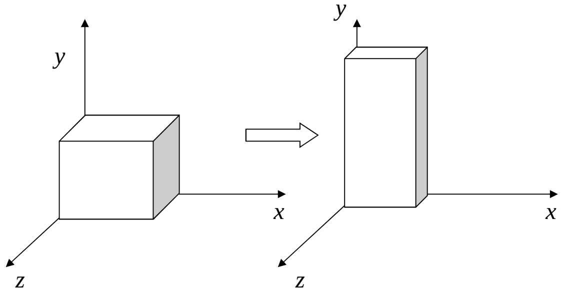
- Em coordenadas homogêneas, uma matriz de transformação para um problema em 3D possui dimensão 4x4.
- As coordenadas dos pontos são representadas em uma matriz coluna de 4 posições onde a quarta é colocada apenas para o efeito de consistência nos cálculos (seu valor não é considerado).
- Para o caso 3D, interessa-se apenas as posições referentes às coordenadas *x*, *y* e *z*. Normalmente, o quarto valor é feito igual a 1.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Matriz\ 3D\ de \\ Transformação \\ Homogênea \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

2

Transformação de Escala / Parte I

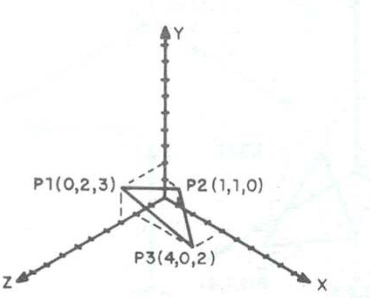
- Especificada por três fatores (S_x, S_y , S_z) que multiplicam os vetores unitários x, y, z .
- Transformação de escala não é uma transformação rígida.
- Escala uniforme ($S_x = S_y = S_z$) entretanto, é uma operação ortogonal ou homotética, isto é, preserva os ângulos.
- Para obter reflexão em torno do plano z=0, usar fatores de escala (1, 1, -1) .



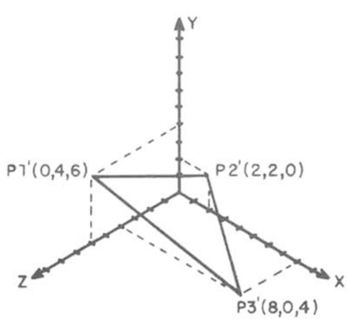
$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformação de Escala / Parte II

- Exemplo de Transformação de Escala:

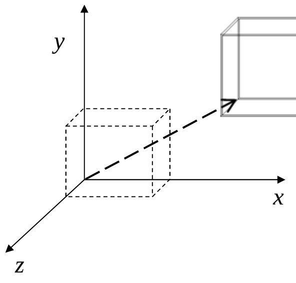


Desenho Original



Desenho Transformado
$S_x = S_y = S_z = 2$

Transformação de Translação



$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = T \times P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + t_x \\ P_y + t_y \\ P_z + t_z \\ 1 \end{bmatrix} = P + t$$

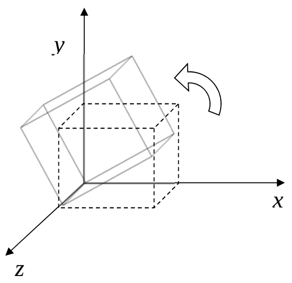
- Observe que translações são comutativas:

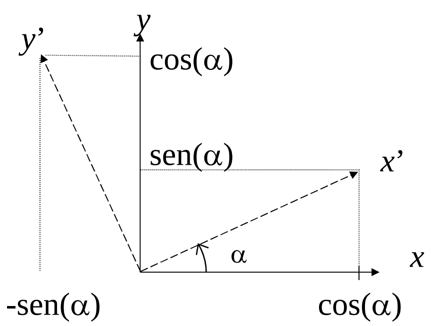
  $P + t + v = P + v + t$

5

Rotação em Torno do Eixo Z / Parte I

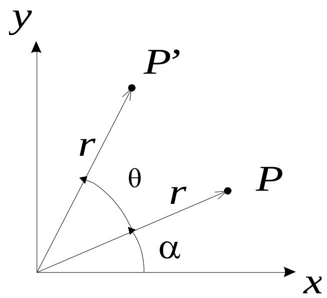
- Podemos visualizar que o vetor $(1,0,0)^T$ é mapeado em $(\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha), 0)^T$ e que o vetor $(0,1,0)^T$ é mapeado em $(-\text{sen}(\alpha), \cos(\alpha), 0)^T$.

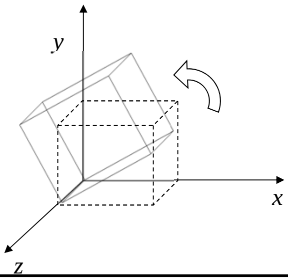




6

Rotação em Torno do Eixo *Z* / Parte II





Sabemos que:

$$P_x = r \cdot \cos(\alpha) \ ; \quad P'_x = r \cdot \cos(\alpha + \theta)$$

$$P_y = r \cdot \text{sen}(\alpha) \ ; \quad P'_y = r \cdot \text{sen}(\alpha + \theta)$$

Então:

$$P'_x = r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\theta) - r \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$P'_y = r \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\theta) + r \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\theta)$$

Finalmente:

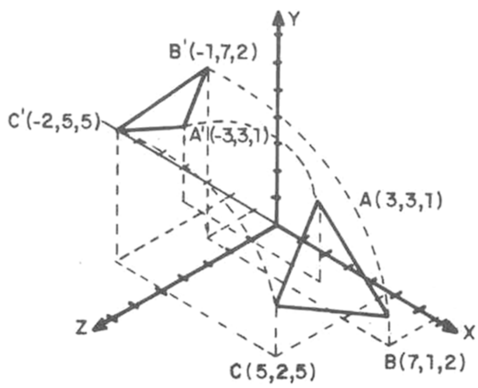
$$P'_x = P_x \cdot \cos(\theta) - P_y \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$P'_y = P_x \cdot \text{sen}(\theta) + P_y \cdot \cos(\theta)$$

7

Rotação em Torno do Eixo *Z* / Parte III

- Exemplo de Transformação de Rotação em Torno do Eixo Z:



Rotação de 90° em Torno do Eixo Z.

8

Rotação em Torno dos Eixos X e Y

- Rotação em torno de Z é dada pela matriz:

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

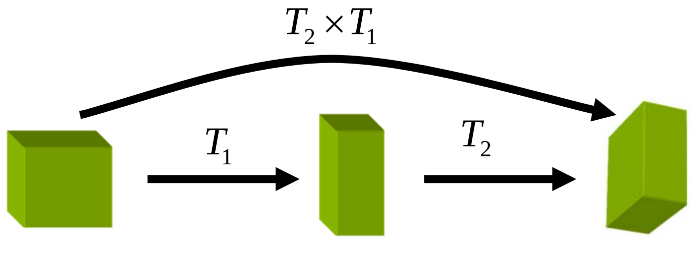
$$P'_x = P_x \cdot \cos(\theta) - P_y \cdot \mathrm{sen}(\theta)$$
$$P'_y = P_x \cdot \mathrm{sen}(\theta) + P_y \cdot \cos(\theta)$$

- Similarmente, em torno dos eixos X e Y:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_y = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de Transformações em 3D

- A Composição de transformações em 3D é semelhante à 2D.
- Em nossa notação, usamos pré-multiplicação:
  - $P' = T \times P$
- Para compor 2 transformações temos:
  - Se $P' = T_1 \times P$ e $P'' = T_2 \times P'$, então, $P'' = T_2 \times T_1 \times P$



Geometria Afim

- Composta dos elementos básicos:
  - escalares
  - pontos - denotam posição
  - vetores - denotam deslocamento (direção e magnitude)
- Operações:
  - escalar · vetor = vetor
  - vetor + vetor ou vetor – vetor = vetor

11

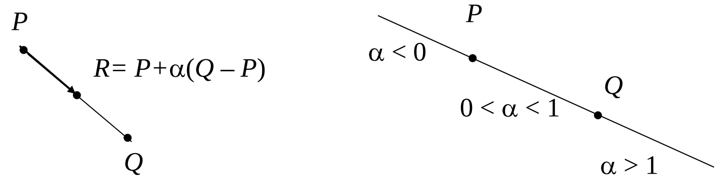
Combinações Afim

- Maneira especial de combinar pontos:

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n$$

$$\text{onde } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

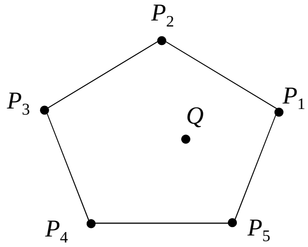
- Para 2 pontos P e Q poderíamos ter uma combinação afim $R = (1 - \alpha)P + \alpha Q = P + \alpha(Q - P)$:



12

Combinações Convexas

- Em Combinações afim se garante que todos os coeficientes α_i são positivos (ou zero).
- Usa-se esse nome porque qualquer ponto que é uma combinação convexa de *n* outros pontos pertence à <u>envoltória convexa</u> desses pontos.



13

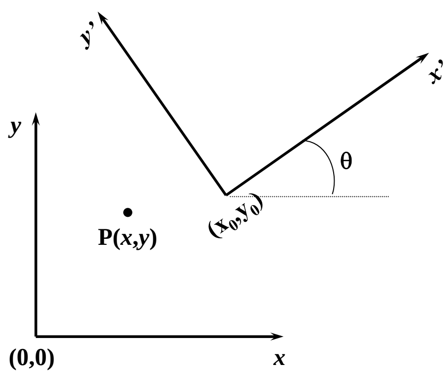
Transformação de Sistema de Coordenadas (I)

- Serão consideradas as transformações entre duas referências do sistema cartesiano.
  - O primeiro sistema cartesiano tem eixos **x** e **y** e origem em (0,0).
  - O segundo sistema cartesiano tem eixos **x′** e **y′**, com origem em (x_0, y_0), e ângulo θ entre os eixos **x** e **x′**.
- Para transformar as descrições de um objeto das coordenadas **(x,y)** para as coordenadas **(x′,y′)** é necessário determinar uma transformação que superponha os eixo **x′y′** sobre **xy.**
- Duas operações são necessárias:
  - Transladar a origem do sistema **x′y′** para o sistema **xy**.
  - Rotacionar o eixo **x′** sobre o eixo **x**.

14

Transformação de Sistema de Coordenadas (II)

- Ilustrando, tem-se:



1) Transladar a origem do sistema **x′y′** para o sistema **xy**.

$$T(-x_0,-y_0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -x_0\\ 0 & 1 & -y_0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2) Rotacionar o eixo **x′** sobre o eixo **x**.

$$R(-\theta)=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\mathrm{sen}(-\theta) & 0\\ \mathrm{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3) Matriz de Mudança:

$$M=R(-\theta)\cdot T(-x_0,-y_0)$$

4) Obtendo P(x,y) em x′y′:

$$P'=M\cdot P$$

15

Aplicações de Transformações 3D (I)

Ferramenta gráfica para auxílio do projeto urbano de cidades

José Carlos Miranda e A. Augusto de Sousa

9º Encontro Português de Computação Gráfica

- O objetivo é tornar o processo de transformação da cidade mais divulgado e participativo.
- Via internet, o cidadão tem acesso a um modelo 3D da cidade, que pode ser manipulado sob o ponto de vista urbanístico, mediante a alteração e remoção dos diferentes elementos que o compõem.
- Utiliza Java e VRML para controlar o comportamento dos objetos 3D complexos que compõem a cena.
- Permite aos administradores das cidades visualizarem on-line o impacto das mudanças simuladas pelo software.
- Do ponto de vista geométrico, permite-se a inserção e manipulação completa de novos objetos 3D, com base em primitivas gráficas, podendo-se aplicar cores e texturas. O software também permite transformações 3D de objetos da cena.

16

Aplicações de Transformações 3D (I)

Ferramenta gráfica para auxílio do projeto urbano de cidades

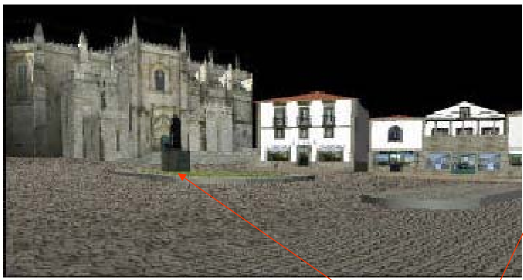


Figura 1

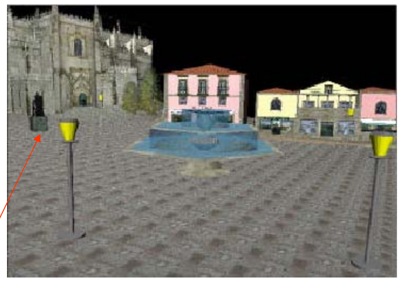


Figura 2

Alteração da posição da estátua.

Inserção de uma fonte, árvores e candeeiros.

Remoção do passeio e jardim central.

Alteração da cor das fachadas, tipos das janelas e pavimentação.

17

Aplicações de Transformações 3D (II)

Criação de modelos 3D a partir de fotos

Paul Beardsley

Mitsubishi Electric Research Laboratories

- Criar a partir de fotos convencionais um modelo 3D da face de pessoas e depois manipular os modelos com transformações.

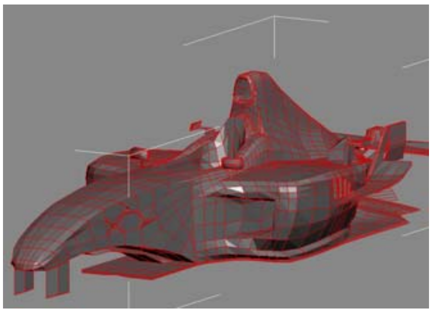
Fotos de Molde

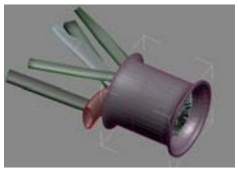
Fotos criadas a partir do modelo 3D

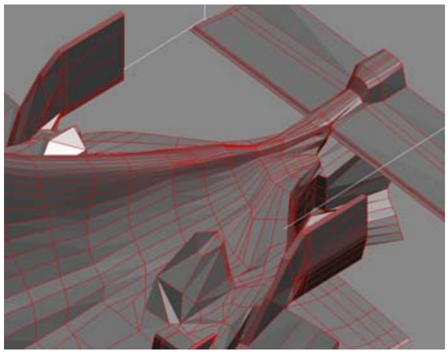
18

Aplicações de Transformações 3D (III)

Softwares para CAD: 3D Studio Max







19

Aplicações de Transformações 3D (IV)

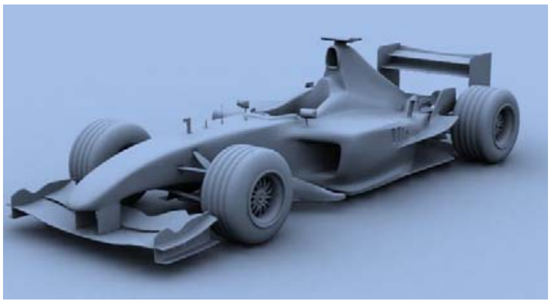
Softwares para CAD: 3D Studio Max

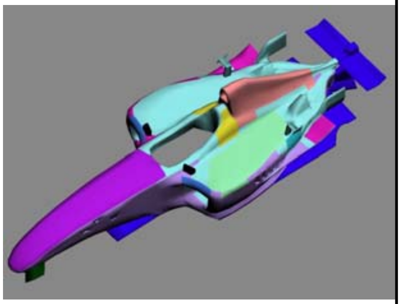
Utiliza-se apenas metade da foto para gerar o modelo 3D. O restante é refletido.

20

Aplicações de Transformações 3D (IV)

Softwares para CAD: 3D Studio Max





Uma vez pronto o modelo, pode-se realizar translações, rotações e escalamento em qualquer direção.

http://www.3dm3.com/tutorials

Aplicações de Transformações 3D (V)

Hardwares especializados em transformações 3D

DSP Texas Instruments TMS320C6X

- DSP com funcionalidades múltiplas: Manipulação de filtros digitais, transformadas de Fourier, operações com matrizes e vetores, sistema de busca por valores dentro de matrizes e vetores, operações matemáticas complexas envolvendo ponto flutuante e aplicações gráficas.

- Capacidade de realizar transformações geométricas 3D, projeção e perspectiva, pré-processamentos de imagens e mapeamento de Viewport.

- Consegue calcular 10,4 milhões de vértices por segundo.