Universidade de São Paulo ⋆ Escola de Engenharia de São Carlos

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação

⋆ 44a. Turma de Engenharia Elétrica ⋆

Prof. B. J. Mass – *bjmass@sc.usp.br* – tel. (16) 33 73 93 61 – sala 3005 – campus 1

Soluções Solu-01

Soluções da Prova P1 de SEL0326-2012

Aplicada em 13/09/2012

Soluções elaboradas e distribuidas em 18/09/2013

1. A equação de estado de um sistema linearizado é $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1 u_1 + B_2 u_2$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -0,04 & 0,03 & 0,02 & -0,46 \\ 0,05 & -1 & 0,002 & -4 \\ 0,1 & 0,4 & -0,7 & 1,4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,44 \\ 3,5 \\ -5,5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0,18 \\ -7,6 \\ 4,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Queremos um sistema de malha fechada com polinômio característico

$$P(s) = s^4 + 15s^3 + 101s^2 + 431s + 812$$

Determine

a - Um trecho de MATLAB que calcule a matriz $\hat{A}$ de malha fechada.

b - Um trecho de MATLAB que calcule a matriz $\hat{B}$ de malha fechada.

Exercício baseado no Probl. PM11.5, p.530 de R. C. Dorf & R. H. Bishop - *Sistemas de Controle Modernos, 8a. ed.*, LTC, Rio, 2001.

Solução 1:

A equação de estado pode ser reescrita na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

e B é obtida pela concatenação de B_1 e B_2, i.e.,

$$B = [B_1 \ B_2] = \begin{bmatrix} 0,44 & 0,18 \\ 3,5 & -7,6 \\ -5,5 & 4,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Os polos desejados para malha fechada são as raízes de $P(s)$ e podem ser obtidos com "`roots`". Com A, B e os polos de malha fechada, podemos aplicar "`place`" para obter a matriz K de realimentação de estado:

a - Um trecho de MATLAB para obter $\hat{A}$, a matriz do sistema com malha fechada poderia ser

```
≫ a = [-0.04 0.03 0.02 -0.46; 0.05 -1 0.002 -4; ...
≫ 0.1 0.4 -0.7 1.4; 0 0 1 0];
≫ b = [0.44 0.18; 3.5 -7.6; -5.5 4.5; 0 0];
≫ polos = roots([1 15 101 431 812]);
≫ k = place(a, b, polos);
≫ aa = a - b*k;
```

b - A matriz $\hat{B}$ de malha fechada é idêntica à B de malha aberta, portanto

```
≫ bb = [0.44 0.18; 3.5 -7.6; -5.5 4.5; 0 0];
```

2. Um sistema é representado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{3}$$

Determine o tempo t que deve transcorrer para que uma trajetória de estado de entrada nula atinja um estado $\mathbf{x}(t)$ tal que

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \leq 1/2 \\ x_2(t) \leq 1/2 \\ x_3(t) \leq 1/2 \end{array} \right\} \tag{4}$$

partindo do estado inicial

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Obs.: Sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}[1/(s+a)] = e^{-at}, \; a \neq 0$$

Questão baseada no Probl. P11.15, p.525 de R. C. Dorf & R. H. Bishop - *Sistemas de Controle Modernos, 8a. ed.*, LTC, Rio, 2001.

Solução 2:

Queremos a *trajetória de entrada nula*, que é dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(0), \quad \text{onde} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Há diversos caminhos simples para chegar a

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \tag{7}$$

para a matriz A em questão. Com essa e^{tA} é fácil obter

$$e^{tA}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} \tag{8}$$

As restrições (4) do enunciado são de imediato convertidas para

$$\left.\begin{array}{l} t \geq ln(2) \\ t \geq ln(2)/2 \\ t \geq ln(2)/3 \end{array}\right\} \tag{9}$$

Conclusão: $t \geq ln(2) \approx 0,6931\,s$.

3. Dado um sistema linear com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

escreva um segmento de MATLAB para determinar a matriz K da realimentação de estado que minimiza o índice de desempenho quadrático com

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = 1$$

Exercício baseado no Probl. B.12.21, pp.779-780 de K. Ogata - *Engenharia de Controle Moderno, 4a. ed.*, Pearson, S. Paulo, 2003.

Solução 3:

Um possível trecho de MATLAB seria

```
≫  a = [0 1 0 0; 21 0 0 0; 0 0 0 1; -0.5 0 0 0];
≫  b = [0; -1; 0; -0.5];
≫  q = [100 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
≫  r = 1;
≫  k = lqr(a, b, q, r);
```

Final do Solu-01

Arquivo original: .... "tdm13solu01.tex"
Arquivo p/ impressão: ... "tdm13solu01.pdf"
Versão: 1.0
No. de páginas: 4
Concluído em: .... 18/09/2013 - 19:20h