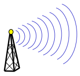
Modulação em Ângulo



Modulação em ângulo

- É um tipo de modulação na qual o ângulo de uma portadora senoidal é variado com o sinal modulante.
  - Neste caso a amplitude da portadora é mantida constante.
- Existem dois métodos de modulação angular:
  - Modulação em fase (PM)
  - Modulação em frequência (FM)
- Equação geral do sinal modulado:

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)]$$

  - em que: A_c é a amplitude da portadora (sempre constante) e $\theta_i(t)$ é o ângulo de fase instantâneo da portadora.
- Frequência instantânea: $f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\theta_i(t)$

Modulação em fase (PM)

- Na modulação em fase, o ângulo de fase instantâneo da portadora é variado linearmente com o sinal modulante, isto é,

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t)$$

  - em que:
    - $2\pi f_c t$ é a fase da portadora não modulada,
    - m(t) é o sinal modulante (informação),
    - k_p é a sensibilidade de fase do modulador (rad/volt).
  - A equação do sinal modulado em fase é dada por:

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + k_p m(t)\right]$$

- A frequência instantânea do sinal é dada pela derivada da fase, assim,

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi}\frac{d}{dt}m(t)$$

  - observe que a frequência instantânea varia diretamente com a derivada do sinal modulante.
- O índice de modulação da modulação em fase é definido como o máximo desvio de fase, ou seja:

$$\Phi_{PM} = \left|k_p m(t)\right|_{MAX}$$

Modulação em frequência (FM)

- Na modulação em frequência, a frequência instantânea da portadora varia diretamente pelo sinal modulante.

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

  - Em que:
    - f_c é a frequência da portadora não modulada,
    - k_f é a sensibilidade de frequência do modulador (Hz/volt).
  - A fase instantânea do sinal modulado em frequência é a integral da frequência instantânea, assim,

$$\theta_i(t) = \int_0^t 2\pi f_i(t)dt = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(t)dt$$

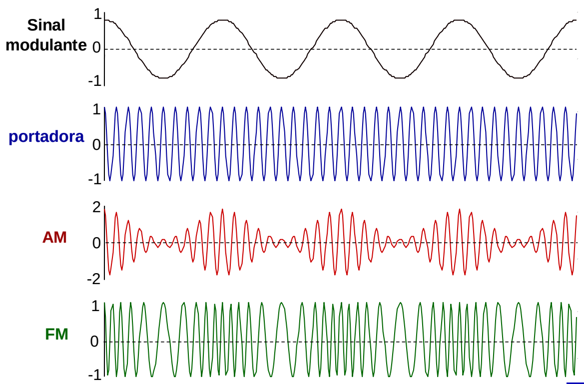
- Portanto, a equação do sinal modulado em frequência será:

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(t)dt\right]$$

  - Como o índice de modulação é o desvio máximo da fase, então,

$$\Phi_{FM} = \left|2\pi k_f \int_0^t m(t)dt\right|_{MAX}$$

Formas de onda na modulação em frequência



Modulação por um único tom

- **Sinal modulante:** $\longrightarrow$ $m(t) = A_m \cos(w_m t)$

Modulação em fase:

- **Fase instantânea:** $\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p A_m \cos(w_m t)$
- **Índice de modulação:** $\Phi_{PM} = \left| k_p m(t) \right|_{MAX} = k_p A_m$

Modulação em frequência:

- **Frequência instantânea:** $f_i(t) = f_c + k_f m(t) = f_c + k_f A_m \cos(w_m t)$
- **Desvio de frequência máximo:** $\Delta f = k_f A_m$
- **fase instantânea:** $\theta_i(t) = \int_0^t 2\pi f_i(t) dt = 2\pi f_c t + \dfrac{2\pi \Delta f}{2\pi f_m} sen(w_m t)$

- **Portanto a fase instantânea será:**

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} sen(w_m t)$$

- **índice de modulação:**

$$\Phi_{FM} = \left| \frac{\Delta f}{f_m} sen(w_m t) \right|_{MAX} = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k_f A_m}{f_m} \qquad m_f = \beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k_f A_m}{f_m}$$

- **Dependendo do valor do índice de modulação são identificados dois tipos de modulação em frequência:**
  - **Modulação em frequência de faixa estreita:**

    $\beta < 0.25$ radiano tal que Bw ~ $2f_{max}$ (como na modulação AM)
  - **Modulação em frequência de faixa larga:**

    β > 1 radiano e Bw >> $2f_{max}$

Espectro de um sinal FM

- **Vamos considerar a modulação por um único tom:**

$$m(t) = A_m \cos(w_m t) \longrightarrow s(t) = A_c \cos[w_c t + m_f\, sen w_m t]$$

- **s(t) pode ser escrito como:**

$$s(t) = A_c \operatorname{Re}\left[e^{j w_c t} e^{j m_f sen w_m t} \right]$$

  - **Observe que a função:**

    $e^{j m_f sen w_m t}$ **tem período $2\pi/w_m$**

- **Escrevendo a função acima em série de Fourier tem-se:**

$$e^{j m_f sen w_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j n w_m t}$$

- **Os coeficientes são dados por:**

$$A_n = \frac{w_m}{2\pi} \int_{-\pi/w_m}^{\pi/w_m} e^{j m_f sen w_m t} e^{-j n w_m t} dt$$

- **Admitindo: $\theta = w_m t$ tem-se que:**

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m_f sen\theta - n\theta)} d\theta = J_n(m_f)$$

- **A equação acima é conhecida como Função de Bessel de primeira espécie de ordem n e com argumento m_f.**
- **Para facilidade, estas funções são tabeladas.**

- **Desse modo a equação do sinal modulado será dada por:**

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f) \cos(w_c + n w_m) t$$

- **Espectro do sinal:**

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f) [\delta(f - (f_c + n f_m)) + \delta(f + (f_c + n f_m))]$$

  - **Observe que:**
    - **Para um único tom senoidal o espectro apresenta a frequência fundamental do sinal w_m e também os seus harmônicos,**
    - **Assim, este espectro é não linear e se estende ao infinito.**

Propriedades da função de Bessel

1. $J_n(m_f) = (-1)^n J_{-n}(m_f)$

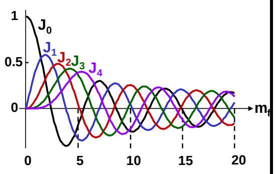
2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(m_f) = 1$

3. $J_0(m_f) = 1 \rightarrow \quad m_f = 0$

4. $J_n(m_f) \rightarrow 0, m_f = 0 \ e \ n \neq 0$
   $ou \ n \rightarrow \infty$

5. $\left.\begin{array}{l} J_0(m_f) \cong 1 \\ J_1(m_f) \cong m_f/2 \\ J_n(m_f) \cong 0 \quad n > 1 \end{array}\right\} \ m_f < 0.25$

Funções de Bessel



Funções de Bessel

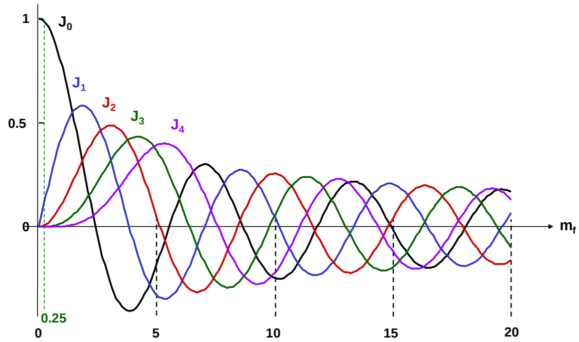


Tabela das funções de Bessel

$$A_n = J_n(m_f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m_f sen\theta - n\theta)} d\theta$$

m_f	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	J_{11}
0.0	1.00											
0.25	0.98	0.12										
0.3	0.94	0.24	0.03									
1.0	0.77	0.44	0.11	0.02								
2.0	0.22	0.58	0.35	0.13	0.03							
3.0	-0.26	0.34	0.49	0.31	0.12	0.04	0.01					
5.0	-0.18	-0.33	0.05	0.36	0.39	0.26	0.13	0.05	0.02			
8.0	0.17	0.23	-0.11	-0.29	-0.10	0.19	0.34	0.32	0.22	0.13	0.06	0.03

Propriedade do espectro do sinal FM

$$S(f) = \frac{A_c}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f)\left[\delta\left(f - (f_c + nf_m)\right) + \delta\left(f + (f_c + nf_m)\right)\right]$$

- **O espectro contém a portadora mais um conjunto infinito de bandas laterais.**
- **Se β = m_f << 1somente J_0 e J_1 apresentam valores significativos**
  ==> FM de faixa estreita (semelhante à AM).
- **Potência total do sinal FM:**

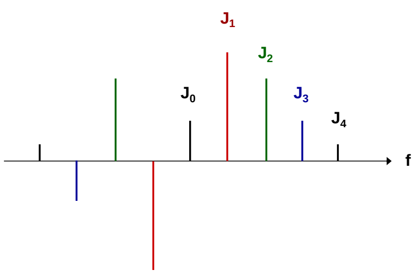
$$P_T = \frac{1}{2}A_c^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(m_f) = \frac{1}{2}A_c^2$$

Potência constante

$$\frac{1}{2}A_c^2 J_n^2(m_f)$$

É a potência de cada faixa lateral

Exemplo para m_f = 2



- **Tem-se 4 componentes de frequências significativos.**
- **Os outros componentes são praticamente nulos.**

Largura de faixa de um sinal FM

- **Resultados experimentais indicam que a distorção é desprezível se pelo menos 98% da potência do sinal está contida na banda de transmissão.**
  - **Seja S_N a potência média do sinal FM em função de N e normalizada em função da potência total.**

$$S_N = \frac{\frac{1}{2}A_c^2 \sum_{n=-N}^{N} J_n^2(m_f)}{P_T = \frac{1}{2}A_c^2} = \sum_{n=-N}^{N} J_n^2(m_f)$$

  - **recorrendo à tabela das funções de Bessel observa-se que:**

$$S_N \geq 0.98 \rightarrow N = m_f + 1$$

❖ Assim, a regra de Carlson é dada pela seguinte relação:

$$Bw = 2(m_f + 1) f_m = 2\Delta f (1 + 1/m_f)$$

- No cálculo da largura de faixa pode-se recorrer também à tabela das funções de Bessel:
- Ela fornece a largura de faixa considerando coeficientes até 1% do valor da amplitude da portadora não modulada:

$$Bw = 2 n_{MAX} f_m \qquad em\ que: n_{MAX} \Rightarrow \left| J_n(m_f) \right| \geq 0.01$$

m_f	=	0.2	1.0	2.0	5.0	8.0	10.0
n_{MAX}	=	1	3	4	8	11	14

❖ Exemplo: cálculo da largura de faixa com os seguinte dados:
m_f = 5 e Δf = 75 kHz: fm = 15 kHz e 2Δf = 150 kHz:

- Bw por Carlson:

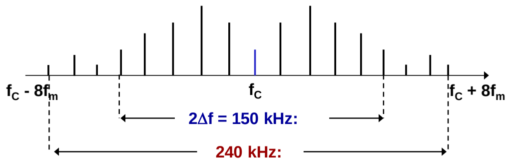
$$Bw = 2(m_f + 1) f_m = 2(5+1)15 = 180\ kHz$$

- Bw pela tabela:

$$Bw = 2 n_{MAX} f_m = 2 \times 8 \times 15 = 240\ kHz$$

- Bw comercial:

$$Bw = 200\ kHz = 150 + 2 \times 25\ kHz$$



FM de faixa estreita

❖ admitindo modulação por um único tom e β < 0.25:

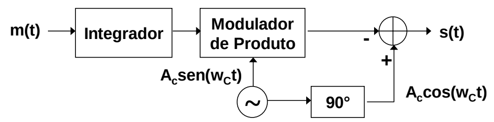
Sinal modulante ⟶ $m(t) = A_m \cos(w_m t)$

$$s(t) = A_c \cos[w_c t] + \frac{A_c m_f}{2} \cos[w_c + w_m]t - \frac{A_c m_f}{2} \cos[w_c - w_m]t$$

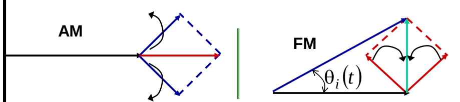
$$\longrightarrow s(t) = A_c \cos[w_c t] - m_f \underbrace{A_c sen[w_m t]}_{\text{Integral de m(t)}} sen[w_c t]$$

FM de faixa estreita

$$\longrightarrow s(t) = A_c \cos[w_c t] - m_f \underbrace{A_c sen[w_m t]}_{\text{Integral de m(t)}} sen[w_c t]$$

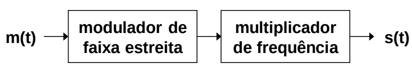


Representação fasorial:

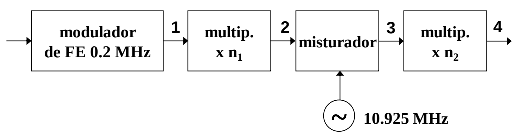


$$w_i = \frac{d}{dt} \theta_i(t)$$

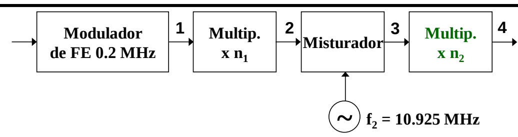
Geração do sinal FM: método indireto



Exemplo: Dispõe-se de um modulador de faixa estreita como abaixo, com f_{C1} = 0.2 MHz e índice de modulação 0.5.
Deseja-se f_C = 90 MHz com Δ f = 75 kHz (áudio; 50 a 15 kHz)



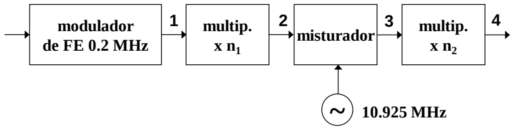
desvio na saída do modulador de faixa estreita ⟶ Δ f_1 = β_1 f_m = 0.5x50 = 25 Hz



- Para que o desvio na saída seja de 75 KHz:

$$n_1.n_2 = \frac{\Delta f}{\Delta f_1} = \frac{75000}{25} = 3000$$

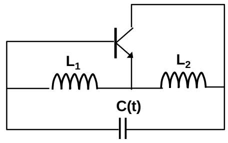
- Na saída do misturador: $f_3 = (n_1 f_1 - f_2)$
- Na saída do 2º multiplicador: $f_c = n_2 f_3 = n_2(n_1 f_1 - f_2) = 90\,MHz$
- Pelas equações: $\begin{cases} n_1.n_2 = 3000 \\ n_2(n_1 f_1 - f_2) = 90\,MHz \end{cases}$ ➡ $n_1 = 64{,}3 \cong 64$, $n_2 = 46{,}7 \cong 47 \rightarrow 48$



	1	2	3	4
f_C =	0.2 MHz	12.8 MHz	1.875 MHz	90 MHz
Δ f =	24.4 Hz	1.56 kHz	1.56 kHz	75 kHz

Moduladores: método direto

- A frequência instantânea da portadora é variada diretamente pelo sinal modulante pela utilização de um oscilador controlado por tensão.
- Uma maneira de implementar este dispositivo é utilizar um oscilador Hartley como abaixo:



$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1+L_2)C(t)}}$$

- C(t) é um capacitor variável com a tensão

$$em\ que: \quad C(t) = C_0 + \Delta C.m(t)$$

desenvolvimento

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1+L_2)(C_0+\Delta C m(t))}}$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1+L_2)C_0\left(1+\dfrac{\Delta C}{C_0}m(t)\right)}}$$

- Admitindo: $$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1+L_2)C_0}}$$

$$f_i(t) = f_0\frac{1}{\sqrt{\left(1+\dfrac{\Delta C}{C_0}m(t)\right)}}$$

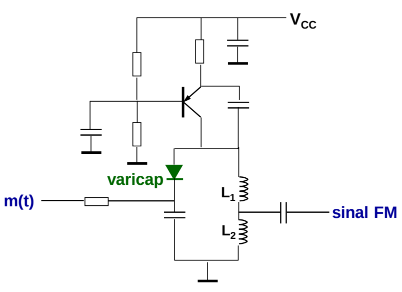
- admitindo também que ΔC << C_0 tem-se:

$$f_i(t) = f_0\left[1-\frac{\Delta C}{2C_0}m(t)\right] \quad em\ que:\ f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1+L_2)C_0}}$$

$$sendo: \frac{\Delta C}{2C_0} = -\frac{\Delta f}{f_0} \quad \Rightarrow \quad f_i(t) = f_0 + \Delta f m(t)$$

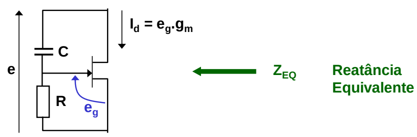
$$OBS: \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \cong 1 - \tfrac{1}{2}x, \quad |x| << 1$$

Exemplo de geração do sinal FM: método direto



Modulador de reatância

- O circuito abaixo se comporta como uma reatância equivalente.



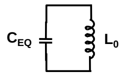
- Cálculo de e_g

$$e_g = \frac{R}{R-jX_C}e \quad \Rightarrow \quad e = \frac{R-jX_C}{R}e_g$$

$$\longrightarrow \quad Z_{EQ} = \frac{e}{i_d} = \frac{R-jX_C}{R}\frac{1}{g_m} = \frac{1}{g_m}\left\{1-\frac{jX_C}{R}\right\}$$

➢ **Admitindo X_C >> R então:**

$$Z_{EQ} \cong \frac{-jX_C}{Rg_m} = \frac{-j}{2\pi f R C g_m} \longrightarrow C_{EQ} = RCg_m$$



Circuito tanque do oscilador

Frequência de ressonância

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_{EQ}}}$$

exemplo

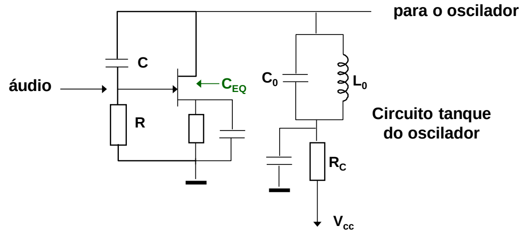
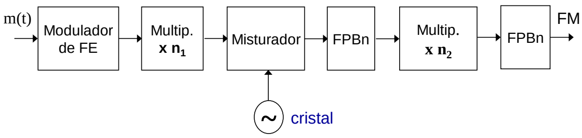
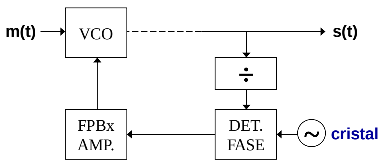


Diagrama em blocos do transmissor

❖ **Método indireto através de um modulador com faixa estreita**



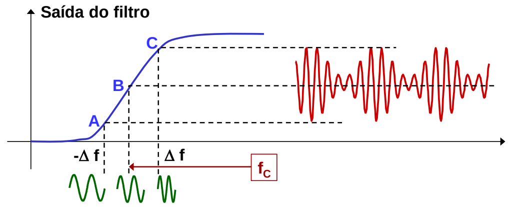
❖ **Método para travamento (estabilização) da frequência através de um PLL:**

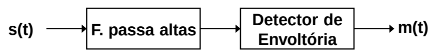


Detectores FM

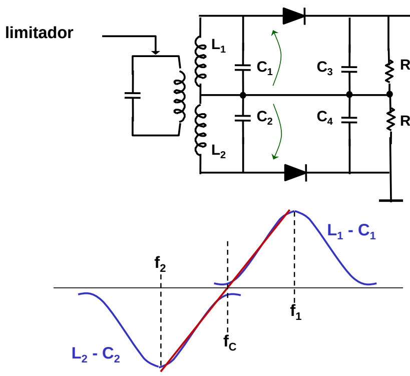
❖ **Sabe-se que em FM a informação está contida nas variações da frequência da portadora.**

❖ **Na recepção: As variações de frequência devem ser transformadas em variações de amplitude para a recuperação do sinal modulante.**

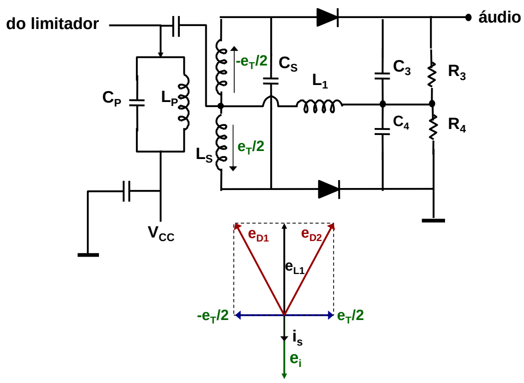




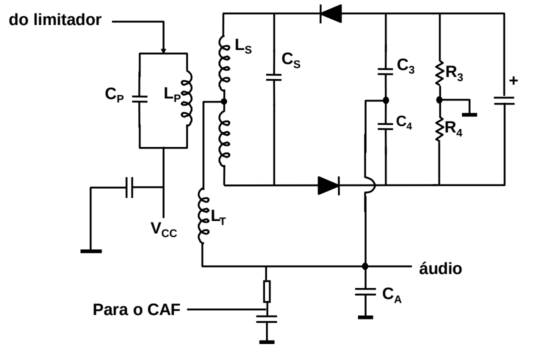
Detectores FM - Travis



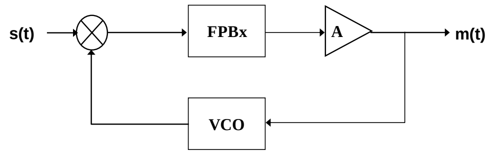
Detector Foster-Seeley



Detector de relação

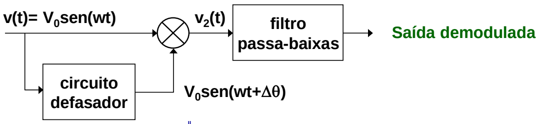


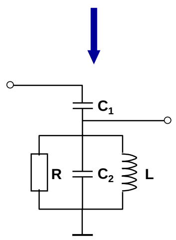
Detectores FM - *phase locked loop* - PLL



- s(t): sinal modulado em frequência.
- O filtro passa baixas seleciona o sinal de erro na saída do detector de fase.
- Se o PLL está travado, então a saída do VCO acompanha as variações de frequência do sinal de entrada s(t).
- Logo, o sinal aplicado na entrada do VCO corresponde ao o sinal de informação, m(t), que gerou o sinal modulado em frequência.
- Portanto tem-se a demodulação.

Detectores FM - detector em quadratura





- para o circuito defasador a defasagem Δθ é dada por:

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{2} - k\Delta w$$

- em que

$$k = \frac{1}{\pi B} = \frac{2Q}{\omega_0} \quad e \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0$$

Na saída do multiplicador:

$$v_2(t) = \frac{V_0^2}{2}\{sen(2wt - k\Delta w) - sen(k\Delta w)\}$$

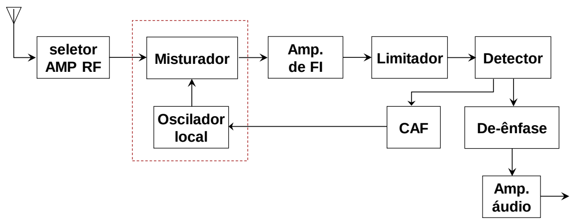
Na saída do filtro passa-baixas

$$admitindo : k\Delta w < 0.25 \ rad \Rightarrow sen(k\Delta w) \approx k\Delta w$$

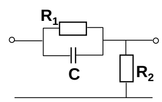
$$v_0(t) = -\frac{V_0^2}{2} k\Delta w$$

Receptor Super-heteródino - FM

- A amplificação de RF é realizada sempre em uma mesma frequência:
  - Canal FM: 87.9 a 108 MHz
  - A frequência intermediária (FI): 10.7 MHz
  - Largura de faixa dos amplificadores de FI: constante = 200 kHz
  - Oscilador local: opera com frequência acima da portadora: $f_0 = f_C + 10.7$ MHz
  - CAF: estabilidade de frequência do oscilador local.



Pré-ênfase

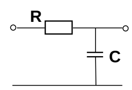


$R_1C = 75$ us

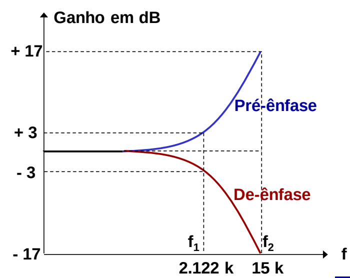
$$f_1 = \frac{1}{2\pi R_1 C}$$

$$f_2 = \frac{R_1 + R_2}{2\pi R_1 R_2 C}$$

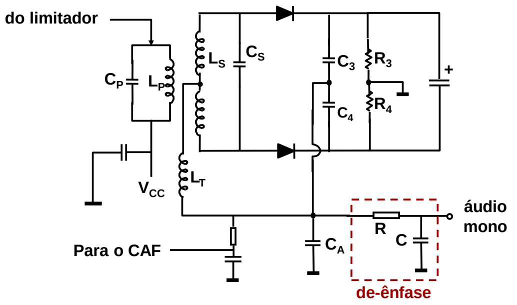
De-ênfase



RC = 75 us

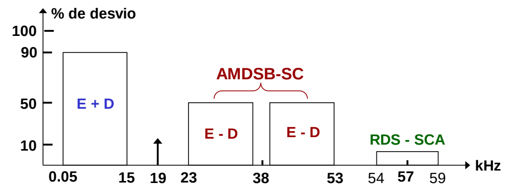


De-ênfase

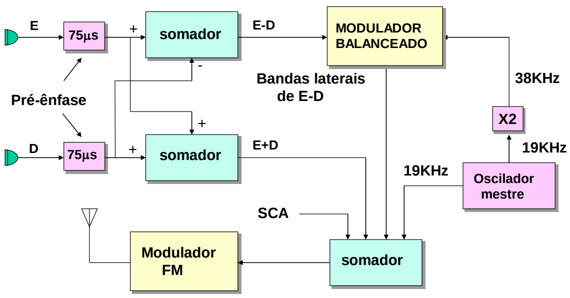


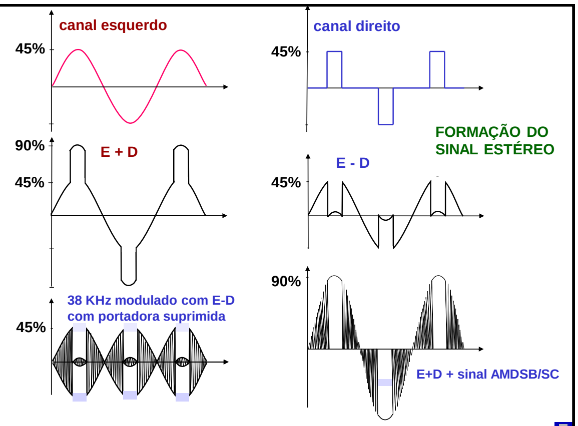
FM estéreo

- ❖ transmissão dos canais de áudio: esquerdo [E(t)] e direito [D(t)].
- ❖ MUX FM:
  - ➢ canal: E + D [monofônico],
  - ➢ canal E - D [AMDSB-SC em 38 kHz],
  - ➢ portadora piloto em 19 kHz,
  - ➢ RDS – radio data system → AMDSB-SC / PSK → 1187.5 bps,
    - • antigo SCA - *subsidiary communication authorization* → FM de faixa estreita.

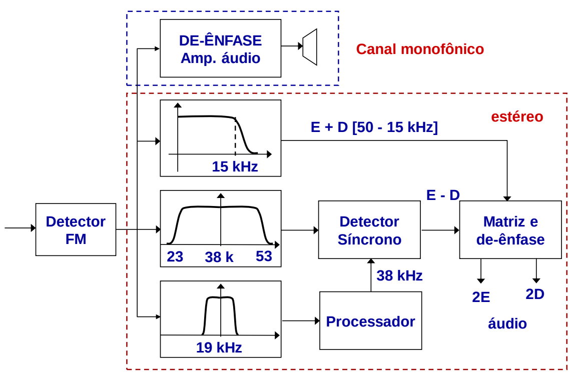


FM ESTEREOFÔNICO



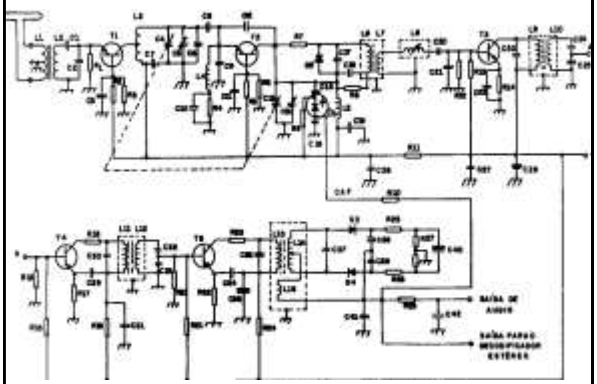


Recepção estereofônica



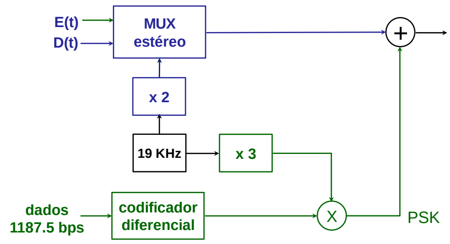
apêndices

receptor FM



radio data system

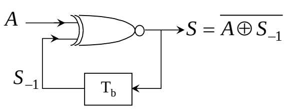
- RDS: envio de dados digitais em rádios FM convencionais.



- **observação:** $1187.50 = \frac{19000}{16}\, bps$

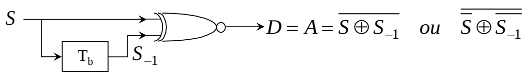
Codificador e decodificador diferencial

- **O sinal digital é insensível à ambiguidade de fase.**
- **A codificação é tal que a informação fique contida nas transições de estado e não nos níveis lógicos de tensão.**
  - **O bit "1" é transmitido na ausência de transição → estado anterior.**
  - **O bit "0" é transmitido quando ocorre uma transição de estado.**

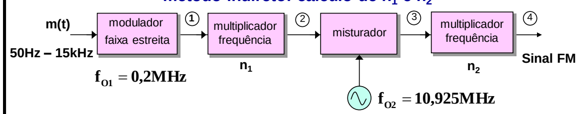


codificador

decodificador



método indireto: cálculo de n_1 e n_2



① $f_{C1} = 0{,}2MHz$ e para $m_{f_1} = 0{,}5$ ⇨ $\Delta f_1 = 0{,}5.f_m = 0{,}5.50 = 25Hz$

② $f_{C2} = n_1.f_{C1}$ e $\Delta f_2 = n_1 \Delta f_1$

③ $f_{C3} = (f_{C2} - f_{O2})$ e $\Delta f_3 = \Delta f_2$

④ $\begin{cases} f_C = n_2 f_{C3} = n_2(f_{C2} - f_{O2}) = n_1 n_2 f_{C1} - n_2 f_{O2} = 90MHz & \text{(II)} \\ \Delta f = n_2 \Delta f_3 = n_2 \Delta f_2 = n_1 n_2 \Delta f_1 = 75kHz & \text{(I)} \end{cases}$

(I) ⇨ $n_1 n_2 = \frac{75000}{25} = 3000$ (II) $n_1 n_2 0{,}2 - n_2 10{,}925 = 90$ ⇨ $n_1 \cong 64$, $n_2 = 48$