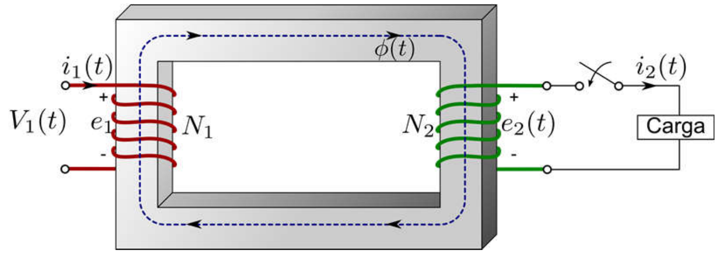
# SEL 329 – CONVERSÃO ELETROMECÂNICA DE ENERGIA

## Aula 04

## Tópicos desta Aula

- Excitação por corrente alternada
- Indutância
- Energia armazenada

## Campo magnético variável no tempo – tensão induzida



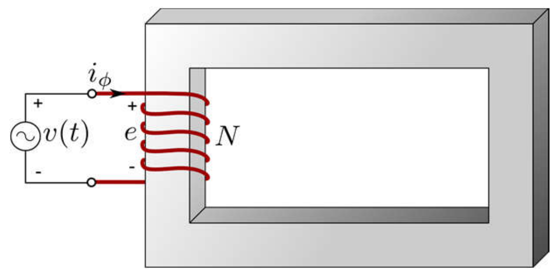

Para 1 espira, temos: $e_2(t) = \dfrac{d\phi(t)}{dt}$

Para $N$ espiras, temos: $e_2(t) = N_2 \dfrac{d\phi(t)}{dt} = \dfrac{dN_2\phi(t)}{dt} = \dfrac{d\lambda_2(t)}{dt}$

em que $\lambda_2(t)$ é o fluxo total enlaçado pela bobina 2, o qual é chamado de **fluxo concatenado** pela bobina 2 [Wb.esp].

• Se uma carga for conectada ao lado do secundário haverá uma corrente elétrica variável no tempo $i_2(t)$.

## Excitação em corrente alternada




Admitindo fluxo magnético senoidal $\rightarrow \phi = \phi_{max}\,\mathrm{sen}(\omega t)$

$i_\varphi$ é a corrente de excitação necessária para produzir o campo magnético no núcleo (esta corrente também é denominada **corrente de magnetização**). Temos:

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{dN\phi}{dt} = \frac{Nd\phi}{dt} = \frac{Nd\phi_{\max}\,\mathrm{sen}(\omega t)}{dt} = N\phi_{\max}\,\omega\cos(\omega t)$$

$\omega$ é a freqüência da fonte CA em rad/s ($\omega = 2\pi f$)

$$e = E_{\max}\cos(\omega t)$$

onde $E_{max} = \omega N\phi_{max} = 2\pi f N\phi_{max}$ é o valor de pico da tensão induzida nos terminais da bobina.

## Excitação em corrente alternada

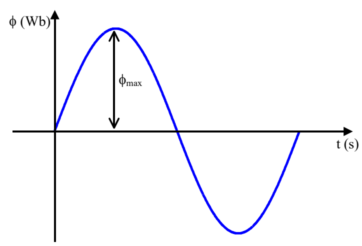
A operação em corrente alternada em regime permanente é usualmente descrita com valores eficazes de tensão e corrente. Assim:

$$E_{rms} = \frac{E_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f N}{\sqrt{2}}\phi_{max} = 4{,}44\, fN\phi_{max} = 4{,}44\, fNA_n B_{max}$$

se a resistência da bobina (fio) for desprezível ($R = 0$), temos:

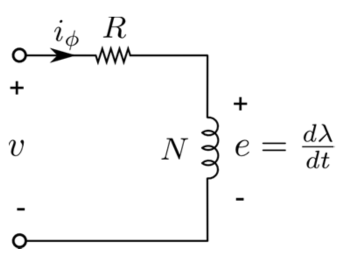
$v = e$ e $V = E$

Indica que quando uma diferença de potencial senoidal é aplicada a um bobina, um fluxo senoidal é estabelecido no núcleo, induzindo uma *fem* igual à tensão aplicada. ($R = 0$)




## Excitação em corrente alternada

$R$ diferente de 0:




Nesse caso a tensão aplicada e a tensão induzida nos terminais das bobinas são diferentes

## Indutância

Enrolamentos com núcleo ferromagnético são frequentemente utilizados em circuitos elétricos. Este dispositivo pode ser representado por um elemento **ideal** no circuito chamado **indutância**, a qual é definida pela razão entre o fluxo concatenado pelo enrolamento e a corrente que o percorre.

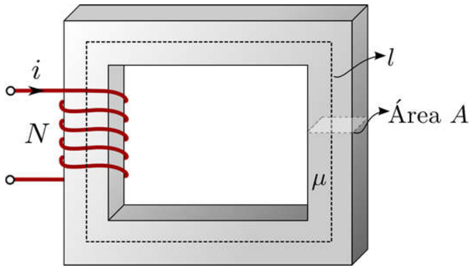
$$L = \lambda / i \quad = N\phi / i \quad \rightarrow \text{indutância} \quad [H]$$

sendo:

$\lambda = N\phi \quad \rightarrow$ fluxo concatenado pela bobina [Wb.esp]

## Indutância

Considerando o circuito abaixo, temos:




$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{N\phi}{i} = \frac{NBA}{i} = \frac{N\mu HA}{i} = \frac{N\mu NiA}{il}$$

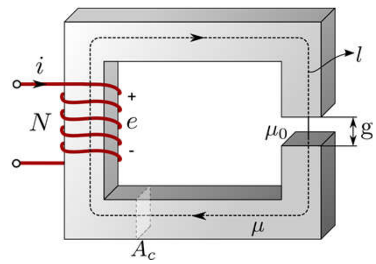
$$L = \frac{N^2}{\frac{l}{\mu A}} = \frac{N^2}{\Re}$$

Portanto, a indutância só depende da geometria do circuito e do material do núcleo, não dependendo do valor da corrente que a percorre.

$$\boxed{L = \frac{N^2}{\frac{l}{\mu A}} = \frac{N^2}{\Re}}$$

## Indutância na presença de entreferro

Considere o sistema:




O fluxo magnético é dado por:

$$\phi = \frac{Ni}{\Re_T} = \frac{Ni}{\Re_c + \Re_g} = \frac{Ni}{\dfrac{l_c}{\mu_c A_c} + \dfrac{g}{\mu_0 A_g}}$$

desprezando o espraiamento ($A_c = A_g = A$), temos:

$$\phi = \frac{NA}{\dfrac{l_c}{\mu_c} + \dfrac{g}{\mu_0}} i$$

## Indutância na presença de entreferro

e portanto:

$$\lambda = N\phi = \frac{N^2 A}{\dfrac{l_c}{\mu_c} + \dfrac{g}{\mu_0}} i$$

para um circuito magnético em que a relação *B-H* é linear, devido a uma permeabilidade constante do material, pode-se definir a indutância L, como sendo:

$$L = \frac{\lambda}{i}$$

(fluxo concatenado por unidade de corrente da bobina)

Assim:

$$L = \frac{N^2 A}{\dfrac{l_c}{\mu_c} + \dfrac{g}{\mu_0}}$$

## Indutância na presença de entreferro

ou:

$$L = \frac{N^2 A \mu_0}{\frac{\mu_0}{\mu_c} l_c + g}$$

Obs: para $\mu_c >> \mu_0$ → $g >> (\mu_0 / \mu_c) l_c$

Portanto:

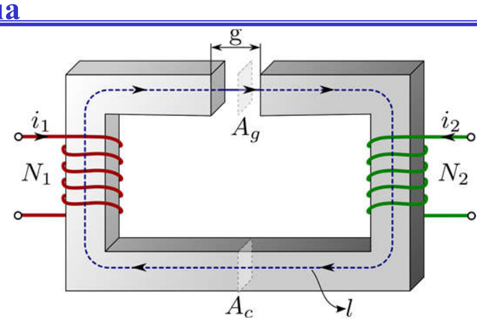
$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{g} = \frac{N^2}{\frac{g}{\mu_0 A}} = \frac{N^2}{\Re_g}$$

**(A indutância, neste caso, é determinada pelas dimensões do entreferro)**

A utilização da indutância como parâmetro (não como variável) depende da suposição de que a relação entre fluxo e fmm (B-H) seja linear. Neste caso, a *fem* pode ser escrita por:

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

## Indutância mútua




- $i_1$ e $i_2$ produzem fluxo na mesma direção
- a *fmm* total é:

$$F = N_1 i_1 + N_2 i_2 = \Re \phi = \left( \frac{l_c}{\mu_c A_c} + \frac{l_g}{\mu_0 A_g} \right) \phi \approx \Re_g \phi$$

Assim:

$\phi = (N_1 i_1 + N_2 i_2) \mu_0 A_g / l_g$

é o fluxo resultante no núcleo produzido pela ação simultânea das duas *fmms*.

## Indutância mútua

O fluxo concatenado pela bobina 1 ($\lambda_1$) é dado por:

$$\lambda_1 = N_1\phi = N_1^2 \frac{\mu_0 A_g}{g} i_1 + N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_g}{g} i_2$$

como: $\lambda = Li$, temos: $\lambda_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2$

onde: $L_{11} = N_1^2\mu_0 A_g/g$ $\rightarrow$ **indutância própria** da bobina 1

$L_{12} = N_1 N_2 \mu_0 A_g/g$ $\rightarrow$ **indutância mútua** entre as bobinas 1 e 2

$L_{11}i_1 \rightarrow$ fluxo concatenando a bobina 1 devido à corrente $i_1$ que circula na própria bobina.

$L_{12}i_2 \rightarrow$ fluxo concatenando a bobina 1 devido à corrente $i_2$ que circula na outra bobina.

De forma similar, para a bobina 2, temos:

$$\lambda_2 = N_2\phi = N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_g}{g} i_1 + N_2^2 \frac{\mu_0 A_g}{g} i_2$$

$$\lambda_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2$$

onde: $L_{22}$ $\rightarrow$ **indutância própria** da bobina 2

$L_{21} = L_{12}$ $\rightarrow$ **indutância mútuas** entre as bobinas 1 e 2

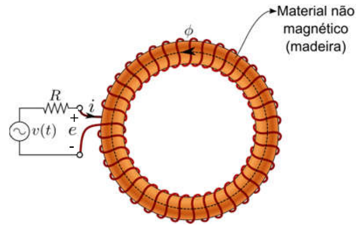
## Indutância mútua

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

**Obs**: é importante salientar que o desenvolvimento do fluxo concatenado resultante nas componentes produzidas por $i_1$ e $i_2$ é baseado na superposição de efeitos individuais e , desta forma, admite-se uma característica fluxo-fmm ($B$-$H$) linear (*i.e.*, permeabilidade constante).

## Energia armazenada




A potência nos terminais do enrolamento do circuito magnético é a medida da taxa do fluxo de energia que entra no circuito:

$$p = ei = i\, d\lambda/dt \quad [\mathrm{W}]$$

A variação da energia armazenada $\Delta W$ no circuito magnético em um intervalo de tempo $t_1$ a $t_2$ será:

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} i \frac{d\lambda}{dt} dt = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i d\lambda$$

para $L$ = cte (linearidade magnética) $\rightarrow L = \lambda / i$ $\rightarrow i = \lambda/L$

$$\Delta W = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda}{L} d\lambda = \frac{1}{2L}\lambda^2 \Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} = \frac{1}{2L}\left(\lambda_2^2 - \lambda_1^2\right)$$

## Energia armazenada

A energia total armazenada para um dado valor de $\lambda$ pode ser determinada fazendo-se $\lambda_1 = 0$.

$$\boxed{W = \frac{1}{2L}\lambda^2 = \frac{1}{2L}(Li)^2 = \frac{1}{2}Li^2}$$

Em termos de $B$ e $H$, temos:

$$\lambda = N\phi = NBA$$

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = NA\frac{dB}{dt}$$

$$v = Ri + e = Ri + \frac{d\lambda}{dt} = Ri + NA\frac{dB}{dt}$$

$$p(t) = vi = \underbrace{Ri^2}_{\substack{\text{energia dissipada} \\ \text{em calor}}} + \underbrace{NAi\frac{dB}{dt}}_{\text{energia armazenada}}$$

O fluxo de energia que se armazena no campo magnético da bobina é:

$$p_B = NAi\frac{dB}{dt}$$

## Energia armazenada

como $H = Ni/l$, temos

$$p_B = AlH\frac{dB}{dt}$$

$p_B > 0$ $\rightarrow$ o campo magnético está absorvendo energia da fonte.

$p_B < 0$ $\rightarrow$ a energia está sendo liberada pelo campo magnético.

- Seja $W_B$ a energia no campo magnético ($B = 0 \Rightarrow W_B = 0$)
- Conforme $B$ aumenta, $W_B$ pode ser expressa como:

$$W_B = \int p_B dt = \int_0^B AlH dB = \int_0^B \frac{Al}{\mu_0} B dB = \frac{Al}{2\mu_0} B^2$$

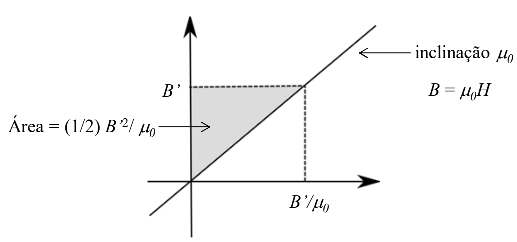
$Al$ é o volume do espaço englobado pela bobina. Então

$$\frac{W_B}{\text{volume}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \qquad [\text{J/m}^3]$$

## Energia armazenada

$$\frac{W_B}{\text{volume}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \qquad [\text{J/m}^3]$$

é a densidade de energia armazenada no campo magnético interno à bobina




incluindo um núcleo ferromagnético, a densidade de energia é dada por:

$$\frac{W_B}{\text{volume}} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\mu_r \mu_0 H^2 \qquad [\text{J/m}^3]$$

Ou seja, podemos armazenar a mesma energia em um volume muito menor do núcleo.

## Energia armazenada: campo elétrico x campo magnético

A densidade de energia armazenada no campo elétrico é dada por:

$$\frac{W_E}{\text{volume}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad [\text{J/m}^3]$$

onde $\varepsilon_0$ é a permissividade do ar = 8,85 × $10^{-12}$ [F/m].

Assim:

$$\frac{W_E}{\text{volume}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad [\text{J/m}^3]$$

$$\frac{W_B}{\text{volume}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \qquad [\text{J/m}^3]$$

Valores característicos:

**Campo elétrico:**

$\varepsilon_0$ = 8,85 × $10^{-12}$

$E_{max}$ = 3 × $10^6$ V/m (máximo campo elétrico que o ar pode suportar à pressão atmosférica sem ruptura elétrica)

## Energia armazenada: campo elétrico x campo magnético

Assim, a densidade de energia máxima que pode ser armazenada no campo elétrico é:

$$\frac{W_E}{\text{volume}} = 39{,}82 \qquad [\text{J/m}^3]$$

**Campo magnético:**

Com correntes elevadas consegue-se $B$ de até 0,2 Wb/m$^2$ para uma bobina com núcleo não magnético. Com núcleo de material magnético, pode-se chegar até a 2,0 Wb/m$^2$.

Considerando:

$B$ = 1,0 Wb/m$^2$ (valor usual no entreferro das máquinas elétricas)

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$

Temos:

$$\frac{W_B}{\text{volume}} = 397.890 \qquad [\text{J/m}^3]$$

Isto demonstra que os dispositivos magnéticos exigem um volume muito menor para armazenar a mesma quantidade de energia

## Exercício

No eletroímã da figura ao lado, tem-se:

N = 400 espiras

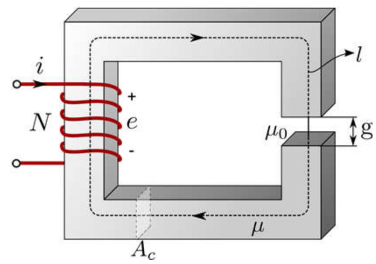
$l_c$ = 50 cm

$l_g$ = 1 mm

$A_c = A_g$ = 15 $cm^2$

$\mu_r$ = 3000

i = 1 A.




**Pede-se**:

(a) O fluxo e a densidade de fluxo magnético no entreferro **(0,6463×$10^{-3}$ Wb e 0,4309 T)**

(b) A indutância da bobina **(0,259 H)**

## Próxima Aula

- Perdas em circuitos magnéticos:
  - ✓ perdas por histerese
  - ✓ perdas por correntes parasitas (correntes de Foucault)