SINAIS DISCRETOS NO TEMPO

- Introdução
- Exemplos de Sinais Discretos no Tempo
- Medidas em sinais discretos no tempo

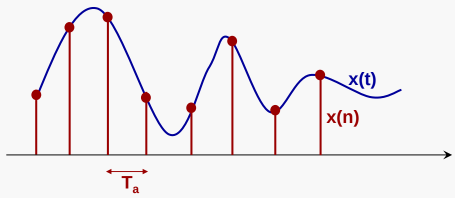
Introdução

- **Sinal**
  - É uma função que representa uma quantidade física que contém informação sobre a natureza de um fenômeno.
    - Em geral, ele é definido como uma função do tempo.
  - **Sinais contínuos no tempo**
    - A variável tempo toma valores dentro de uma faixa contínua.
      - $x(t), \; t \in R$
  - **Sinais discretos no tempo**
    - Os valores da variável tempo são tomados dentro de um conjunto discreto de valores no qual se faz correspondência com os números inteiros.
    - Podem ser admitidos como uma sequência de números.
      - $\{x(n)\}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \; n \in Z$

- Na prática um sinal discreto no tempo [x(n)] se origina a partir de um sinal contínuo no tempo tomando suas amostras em intervalos regularmente espaçados tais que:

$$x(n) = x(t)\big|_{t = nT_a} = x(nT_a) = x(n)$$

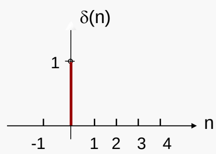
- Em que:
  - T_a é o período de amostragem.
  - O inverso, $1/T_a$, é a frequência de amostragem F_a.
  - e $F_a >= 2.F_{MAX}$ (frequência máxima do sinal).



Sinais discretos no tempo básicos

1. Sequência Amostra Unitária

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



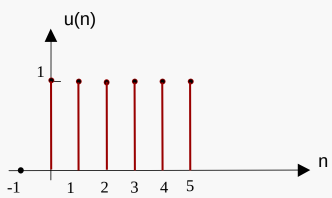
- Desempenha o mesmo papel da função impulso unitário nos sistemas contínuos.
- Qualquer sequência x(n) pode ser escrita como uma soma ponderada de funções amostras unitária:

$$x(n) = \cdots a_{-2}\delta(n+2) + a_{-1}\delta(n+1) + a_0\delta(n) + a_1\delta(n-1) + \cdots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \qquad em\ que: a_k = x(k)$$

2. Sequência Degrau Unitário

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



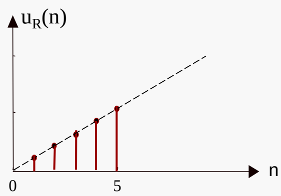
- Ela é muito útil para distinguir índices positivos (tempo positivo) dos índices negativos (tempo negativo).
- **Relações importantes:**

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

3. Sequência Rampa

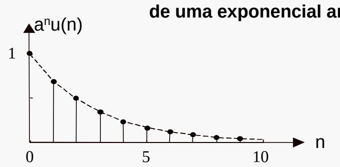
$$u_R(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



4. Sequência Exponencial

$$x(n) = a^n u(n)$$

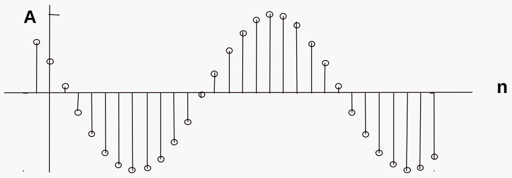
- É muito utilizada no estudo de sistemas discretos no tempo. Se a < 1 ela toma a forma de uma exponencial amortecida.



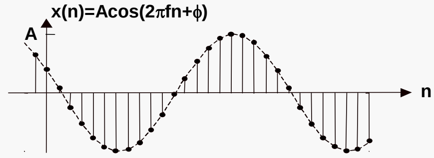
5. Sequência Senoidal

$$x(n) = A\cos(2\pi fn + \phi) = A\cos(wn + \phi)$$

x(n)=Acos(2πfn+ϕ)



$$x(n) = A\left(\frac{e^{j(2\pi fn+\phi)} + e^{-j(2\pi fn+\phi)}}{2}\right) = A\left(\frac{e^{j(wn+\phi)} + e^{-j(wn+\phi)}}{2}\right)$$



❖ **Notação e unidades**

- **Frequências Analógicas: Ω (rad/s) e F (Hertz)**
- **Frequências Digitais: w (rad/amostra) e f (ciclos/amostra)**

Relação entre Frequências Analógicas e Digitais

$$f = F.T_a \qquad w = \Omega.T_a \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= A\cos(2\pi Ft + \phi) \\ x(nT_a) &= A\cos(2\pi FnT_a + \phi) \\ x(n) &= A\cos(2\pi fn + \phi) \end{aligned}$$

Propriedades

A) Sinais senoidais cujas diferenças de frequências são múltiplas de 2π são iguais.

$$\cos[(w_0 + 2\pi)n] = \cos[w_0 n + 2\pi n] = \cos[w_0 n]$$

B) A taxa de oscilação mais alta é obtida para w = π ou f = 0.5

$$Seja \quad x(n) = \cos[w_0 n], \quad em\ que: 0 < w_0 < \pi$$

$$então:$$

$$x_1(n) = \cos[(w_0 + \pi)n] = \cos[(w_0 - \pi + 2\pi)n]$$

$$= \cos[(w_0 - \pi)n] = \cos[(\pi - w_0)n]$$

C) Um sinal senoidal é periódico se e somente se a sua frequência de oscilação for um número racional.

Prova:

- **Se x(n) tem período N então: x(n) = x(n + N)**
  - **Seja x(n) = cos[2πf$_0$n], então:**

$$\cos[2\pi f_0 n] = \cos[2\pi f_0 (n + N)]$$

$$= \cos[2\pi f_0 n + 2\pi f_0 N]$$

  - **A relação acima é verdadeira se: existir um número inteiro M tal que:**

$$2\pi f_0 N = 2\pi M \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{M}{N}$$

Definições para sinais discretos

1. Energia: $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n)$

2. Potência: $P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$

- **Sinais Periódicos:** $P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$

- **Sinais Aleatórios Ergódicos:** $P_x = E\left[|x(n)|^2\right] = \sigma_x^2 + m_x^2$

Exemplo 1: Determine a energia do seguinte sinal:

$$x(n) = Ae^{-\alpha n}u(n), \quad \alpha > 0$$

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(Ae^{-\alpha n}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A^2 e^{-2\alpha n} = A^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\alpha n}$$

$$como: \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad , para\ |a| < 1$$

$$assim: \quad E_x = A^2 \frac{1}{1-e^{-2\alpha}}$$