3. Exemplo de Projeto de um filtro IIR.

Projeto de um filtro digital passa-baixas com característica de Butterworth que satisfaz as seguintes especificações:

(a) Banda de Passagem : 0 - 1KHz e atenuação máxima de 1 dB.

(b) Banda de atenuação : A partir de 3KHz, com atenuação mínima de 10 dB.

(c) Frequência de Amostragem: 10 KHz.

3.1. Por equações de Diferenças

Projeto do Filtro Analógico auxiliar

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \Rightarrow 10\log(\quad)$$

* banda de passagem: $\Omega_p = 2.\pi.10^3$ rad/s $R_p = 1$ dB

$$10\log\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{2.\pi.10^3}{\Omega c}\right)^{2N}}\right\} \geq -1$$

Ω_p

$$\Rightarrow \left(\frac{2.\pi.10^3}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1} - 1 = 0.2589 \qquad (I)$$

* banda de atenuação

$$10\log\left[\frac{1}{1+\left(\frac{6\pi\times10^3}{\Omega_c}\right)^{2N}}\right] \leq -10$$

Ω_s

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi\ 3\times10^{3}}{\Omega c}\right)^{2N} = 10-1=9 \qquad (\text{II})$$

Combinando as equações (I) e (II).

$$\frac{2N \log[2.10^{3}\pi/\Omega_c]}{2N \log[6.10^{3}\pi/\Omega_c]} = \frac{\log(0.2589)}{\log(9)}$$

portanto $\Omega_c = 9.5468\times10^{3}$ rad/s ou $f_c = 1.519$ KHz

Substituindo em I tem-se

$$2N \log\left[2\times10^{3}\pi/9.5468\times10^{3}\right] = \log 0.2589$$

portanto $N = 1,6149 \Rightarrow \boxed{N=2}$

* Adotando $N=2$ tem-se a nova freq. de corte pela equação 1,

$$\boxed{\Omega_c = 8.8080\times10^{3} \text{ rad/s} \quad \text{ou} \quad f_c = 1.4018 \text{ KHz}}$$

Função do sistema

* polos $p_k = \Omega_c\, e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{2N}\pi\right)}$

$\therefore$ $p_0 = 8,8080\, 10^{3}\, e^{j3\pi/4}$ p/a $k=0$

$p_1 = 8,8080\, 10^{3}\, e^{j5\pi/4}$

$\therefore$ $p_{0,1} = -6,2282.10^{3} \pm j\, 6.2282\times10^{3}$

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{p_0} - 1\right)\left(\frac{s}{p_*} - 1\right)} = \frac{p_0 p_*}{(s - p_0)(s - p_*)}$$

$$\therefore \boxed{H(s) = \frac{7.7581 \times 10^7}{s^2 + 1.24564 \times 10^4 s + 7.7581 \times 10^7}}$$

Filtro Digital: Método Equação de Diferenças

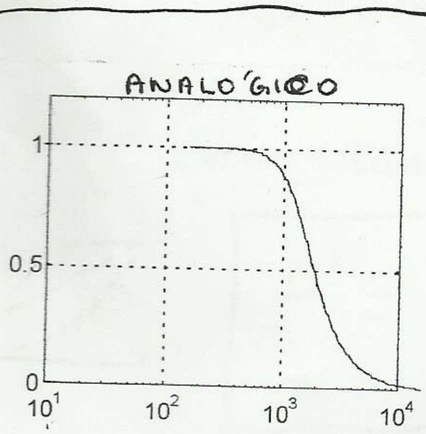
$$s = (1 - z^{-1})\,10^4$$

$$H(z) = \frac{7.7581 \times 10^7}{(1 - z^{-1})^2 \times 10^8 + 1.2456 \times 10^4 (1 - z^{-1}) . 10^4 + 7.7581 \times 10^7}$$

$$= \frac{0.77581}{3.02141 - 3.2456 z^{-1} + z^{-2}}$$

$$\therefore \boxed{H(z) = \frac{0.2568}{1 - 1.0742 z^{-1} + 0.3309 z^{-2}}}$$

ANALÓGICO



DIGITAL

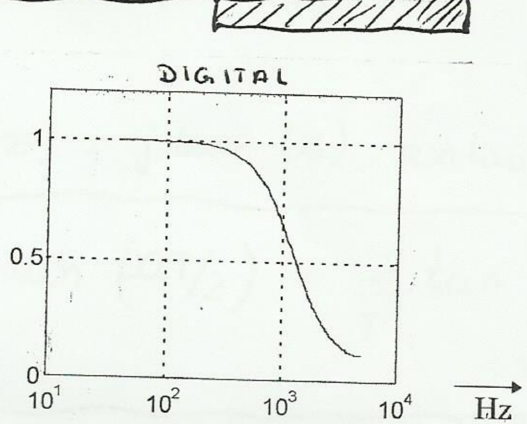


Figura 9. Espectro de Amplitudes dos filtros

3.2 Projeto por transformação bilinear

Neste projeto é recomendado se fazer um "pré warping" na frequência antes do projeto do filtro analógico para se compensar a distorção (warping) da transformação bilinear como segue abaixo:

$$\begin{cases} \Omega'_p = \frac{2}{T} \tan(\omega_p/2) \\ \Omega'_s = \frac{2}{T} \tan(\omega_s/2) \end{cases}$$

Onde: $\omega_p = \Omega_p \times T$ e $\omega_s = \Omega_s . T$

Esta transformação é a que segue:

faz-se $s' = \frac{2}{T} \tanh\left(\frac{sT}{2}\right)$

admitindo $s = j\Omega$

$$j\Omega' = \frac{2}{T} \tanh(j\Omega T/2)$$

como $\tanh(jx) = j \tan(x)$ então

$$\boxed{\Omega' = \frac{2}{T} \tan(\Omega T/2) = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}}$$

* Cálculo do filtro analógico auxiliar

$$\begin{cases} \Omega'_p = \dfrac{2}{T} \tan \dfrac{\Omega_p . T}{2} = 6.49839 \times 10^3 \text{ rad/s} \\ \\ \Omega'_s = \dfrac{2}{T} \tan \dfrac{\Omega_s T}{2} = 2.752764 \times 10^3 \text{ rad/s} \end{cases}$$

* banda de passagem

$$10 \log \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2N}} \right] = -1.0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2N} = 0.2589 \ (\mathrm{I})$$

* banda de atenuação

$$10 \log \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)^{2N}} \right] = -10 \Rightarrow \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)^{2N} = 9 \ (\mathrm{II})$$

ok

* Combinando I e II $\Rightarrow$ $N = 1.22902$

* Escolhendo N um valor inteiro tem-se que:

$$* \begin{cases} N = 2 \quad \text{e} \\ \\ \Omega_c = 15.89309 \times 10^3 \text{ rad/s ou } f_c = 2.52946 \text{ kHz} \end{cases}$$

* Função do sistema (outro modo)

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\Omega_c} \right)^2 + 1.4142 \, s/\Omega_c + 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{(15.893 \cdot 10^3)^2} + \frac{1.4142}{15.893 \cdot 10^3} s + 1}$$

$$H(s) = \frac{2.525874 \times 10^8}{s^2 + 2.24759 \times 10^4 s + 2.525874 \times 10^8}$$

* Cálculo de $H(z)$

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = 2 \times 10^4 \frac{z-1}{z+1}$$

$$H(z) = \frac{2.525874 \times 10^8}{4 \times 10^8 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 2 \times 10^4 \times 2.24759 \times 10^4 \frac{z-1}{z+1} + 2.525874 \times 10^8}$$

$$= \frac{2.525874 (z+1)^2}{4(z-1)^2 + 2 \times 2.24759 (z-1)(z+1) + 2.525874 (z+1)^2}$$

$$= \frac{2.525874 z^2 + 5.051748 z + 2.525874}{11.021054 z^2 - 2.948252 z + 2.030694}$$

$\therefore$

$$\boxed{H(z) = \frac{0.22918 + 0.45837 z^{-1} + 0.22918 z^{-2}}{1 - 0.26751 z^{-1} + 0.18426 z^{-2}}}$$

$\therefore$

b = [0.22918 0.45837 0.22918]

a = [1 -0.26751 0.18426]

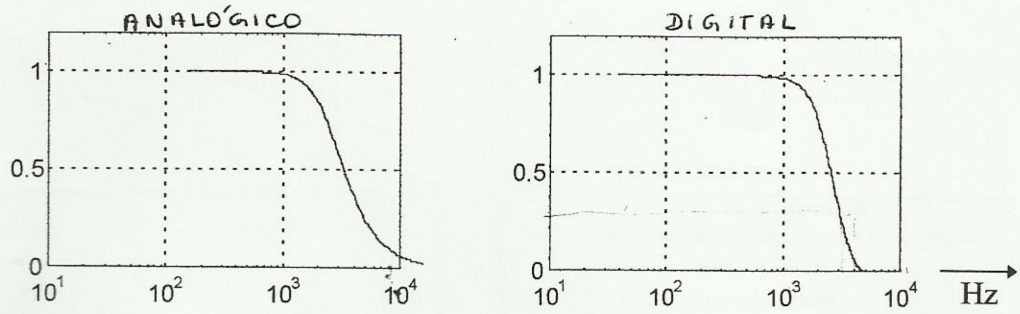


Figura 10. Espectro de Amplitudes dos filtros

4. Transformação em Frequência

- $H_c(s/\omega_c)$: filtro passa-baixas com corte em ω_c

  $H_c(\omega_c/s)$: filtro passa-altas com corte em ω_c

  $H_c\left(\dfrac{s^2+\omega_1\omega_2}{s(\omega_2-\omega_1)}\right)$: filtro passa-banda com cortes em ω_1 e ω_2

  $H_c\left(\dfrac{s(\omega_2-\omega_1)}{s^2+\omega_1\omega_2}\right)$: filtro rejeita-faixa entre ω_1 e ω_2