

Capítulo 1

Análise de Fourier

1.1. Introdução à representação de sinais

Os sinais elétricos tais como tensão e corrente são quantidades descritas, na maioria das vezes, no domínio do tempo. Em telecomunicações e em outras áreas relacionadas com tratamento de sinais é mais conveniente verificar o comportamento destes sinais no domínio da frequência, onde o sinal é constituído por componentes senoidais de frequências diferentes. Neste caso se consegue extrair uma série de parâmetros e informações que facilitam a análise.

Um sinal senoidal é completamente descrito no domínio do tempo, mas pode ser representado também no domínio da frequência, como ilustra a figura 1.1, na qual uma senóide é representada em um espaço tridimensional com um eixo de amplitude e outros dois eixos de tempo e frequência. Os eixos de tempo e amplitude determinam um plano que é chamado de plano de tempo, da mesma forma, os eixos de frequência e amplitude determinam o plano de frequência que é normal ao plano de tempo.

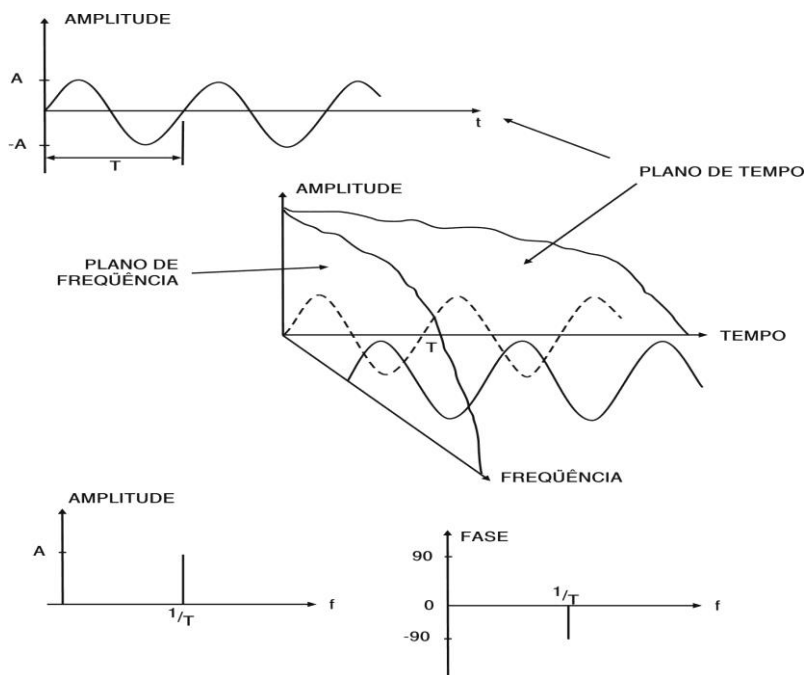


Figura 1.1: Representação de um sinal senoidal no domínio do tempo e da frequência.

A representação nos dois planos pode ser imaginada como a projeção da senóide em cada um deles. No plano de tempo a forma de onda assume o aspecto já conhecido sendo completamente determinada pela sua amplitude, período e fase. No plano de frequência a projeção da senóide assume a forma de uma raia com amplitude igual à da senóide. Devido à simetria do sinal não é necessário projetar a variação pico-a-pico da senóide, e sim apenas a amplitude positiva. Isso é mostrado no diagrama de amplitude por uma raia de amplitude positiva, sendo que a sua posição no eixo de frequência coincide com a frequência da senóide.

Uma informação adicional se faz necessária para determinar a posição da senóide em relação ao instante zero, tomado como referência. Esta informação é fornecida pelo diagrama de fase que consiste também de um impulso localizado no eixo de frequência e a sua amplitude indica a fase associada à senóide.

A função cosseno é tomada como referência. O diagrama de fase pode ser determinado por convenção, verificando o pico positivo mais próximo do instante zero. Para o caso da figura 1.1 o pico positivo mais próximo ocorre depois do instante inicial, distanciando de um quarto de período, ou seja, 90° . Como este pico ocorre depois do instante zero a senóide é dita atrasada. Por uma questão de convenção o atraso é representado por um sinal negativo na fase. Se o pico positivo mais próximo ocorresse antes do instante zero a senóide estaria avançada, e nesta situação, a fase seria representada com um sinal positivo. Esta convenção é mostrada na figura 1.2.

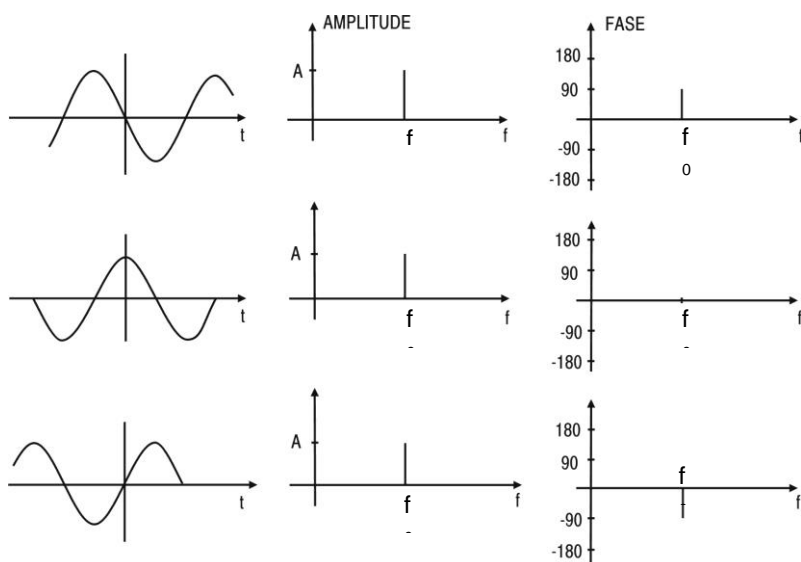
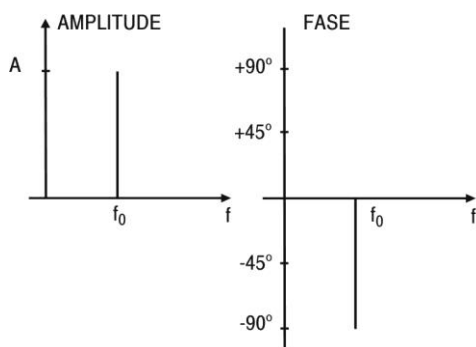


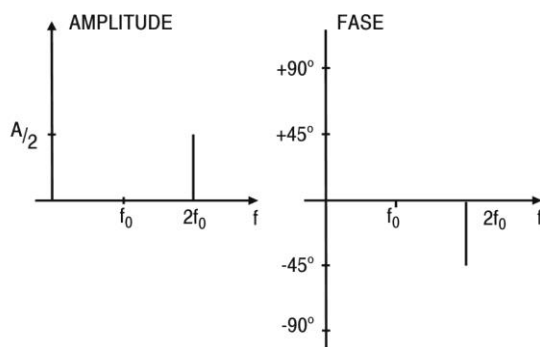
Figura 1.2: Representação de um sinal senoidal mostrando a convenção de fase.

1.2. Sinais não senoidais

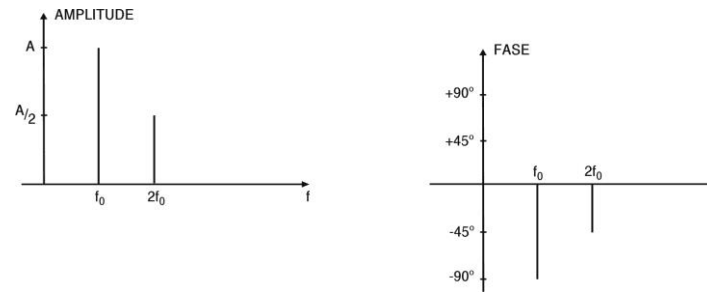
É possível representar qualquer tipo de sinal elétrico, desde que ele seja periódico, como uma soma de senóides. Por exemplo, na figura 1.3.a observa-se a representação uma senóide com frequência f_0 e atraso de fase de 90° , na parte b tem-se uma outra senóide com frequência $2f_0$ e atraso de fase de 45° , e na parte c está representada a composição (soma) destes dois sinais senoidais.



(a) Senóide com frequência f_0 , amplitude A e fase -90° .



(b) Senóide com frequência $2f_0$, amplitude $A/2$ e fase -45° .



(c) Sinal não senoidal composto pela soma dos dois sinais anteriores.

Figura 1.3: Composição de dois sinais senoidais.

Para completar este exemplo a figura 1.4 mostra uma representação tridimensional do sinal, as projeções dos sinais nos planos de tempo e frequência, bem como o resultado da soma das duas senóides. As projeções no plano de tempo estão representadas por linhas tracejadas e a soma por uma linha contínua.

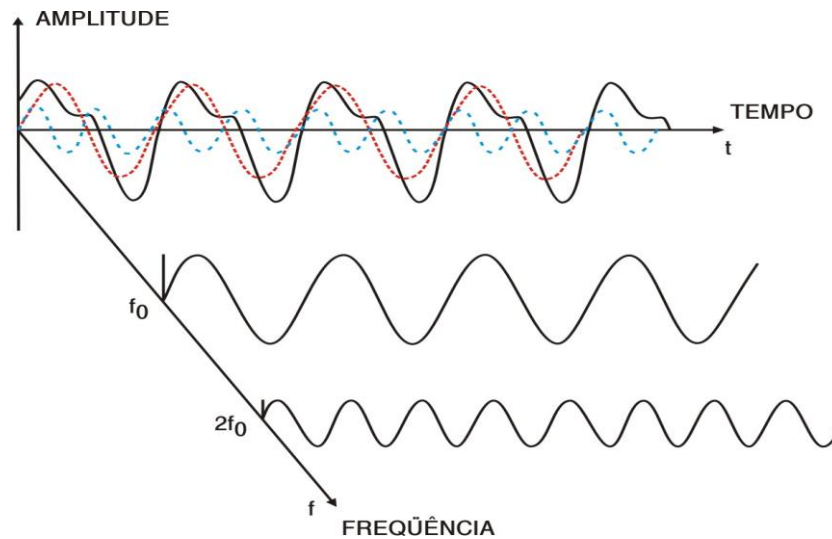


Figura 1.4: Sinal não senoidal resultante da composição de dois sinais senoidais.

O processo, ilustrado nas figuras 1.3 e 1.4, pode ser estendido com a adição de mais senóides, conduzindo a diferentes resultados. Cada forma de onda é caracterizada por uma única combinação de senóides, qualquer modificação na frequência, amplitude ou fase dos componentes senoidais muda a projeção no plano de tempo, e a forma de onda resultante se torna diferente. Esse fato pode ser ilustrado repetindo a soma feita na figura 1.4 com a fase da senóide de frequência $2f_0$ modificada de -45° para $+45^\circ$.

Como pode ser observado na figura 1.5, uma simples mudança na fase de um dos componentes, acarreta uma modificação significativa na forma de onda final (linha contínua) em relação àquela vista anteriormente.

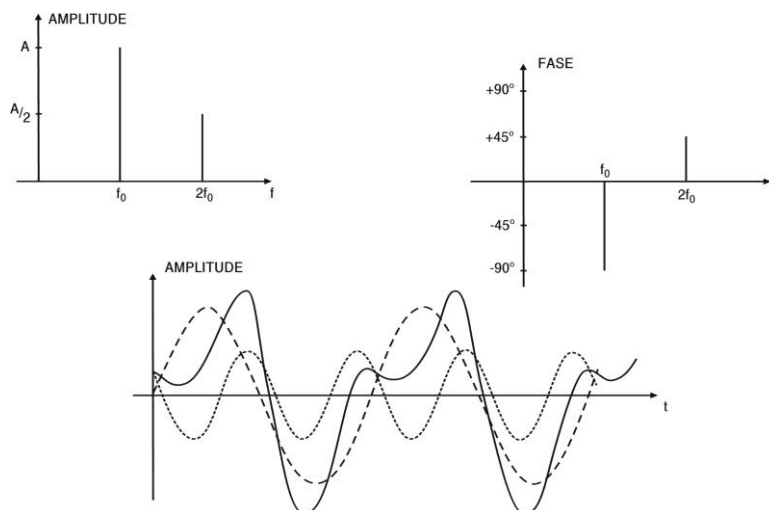


Figura 1.5: Soma de dois sinais senoidais com variação na fase de um dos componentes.

A partir dessas observações, pode-se imaginar que um sinal periódico qualquer, não senoidal, deve ser formado por um determinado número de componentes senoidais, cada um com frequência, amplitude e fase bem determinadas. O método matemático para se obter informação de um sinal no domínio da frequência é a técnica conhecida como Análise de Fourier. Esta técnica permite que um sinal no domínio do tempo seja descrito no domínio da frequência em termos de seus componentes senoidais, como será visto a seguir.

1.3. A Série de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu na França e se tornou um dos maiores administradores, historiadores e matemáticos do século XIX. Através de seu grande interesse em condução de calor iniciou em 1807 um trabalho sobre *Théorie Analytique de la Chaleur* que foi publicado em 1822. Este trabalho mostra como uma série matemática com termos em senos e cossenos pode ser usada para analisar a condução de calor nos corpos sólidos.

A análise de Fourier não se aplica apenas à condução de calor, mas se estende a outras áreas como por exemplo: controle, telecomunicações, antenas, processamento de

sinais, vibrações mecânicas, ótica, bioengenharia, etc.

1.3.1. Condições para existência

A primeira condição para se construir uma série de Fourier para um determinado sinal é que este seja periódico. Isto quer dizer que se uma forma de onda pode ser representada por $x(t)$ há uma constante de tempo T , tal que $x(t) = x(t + T)$, em que T é o período do referido sinal. O período T é o menor valor que satisfaz a condição $x(t) = x(t + T)$. A rigor a periodicidade deveria se verificar para todo o tempo, ou seja, de menos infinito a mais infinito, mas na prática a série de Fourier pode ser definida dentro de um intervalo observável. Em outras palavras, a saída de um gerador de onda quadrada pode ser considerada periódica a partir do instante em que o mesmo é ligado até o instante do seu desligamento. A série de Fourier, entretanto, é escrita para o sinal de saída do gerador como se o mesmo funcionasse de menos infinito a mais infinito. Além da periodicidade outras condições necessárias para a existência da série de Fourier são as condições de Dirichlet:

1. Se a função apresenta descontinuidade, o número delas deve ser finito em um período.
2. A função deve conter um número finito de máximos e mínimos durante um período.
3. A função deve ser absolutamente integrável em um período, isto é:

$$\int_t^{t+T} |x(t)| dt < \infty$$

em que $x(t)$ descreve a função.

Na figura 1.6 as condições de existência da série de Fourier para a onda quadrada podem ser observadas.

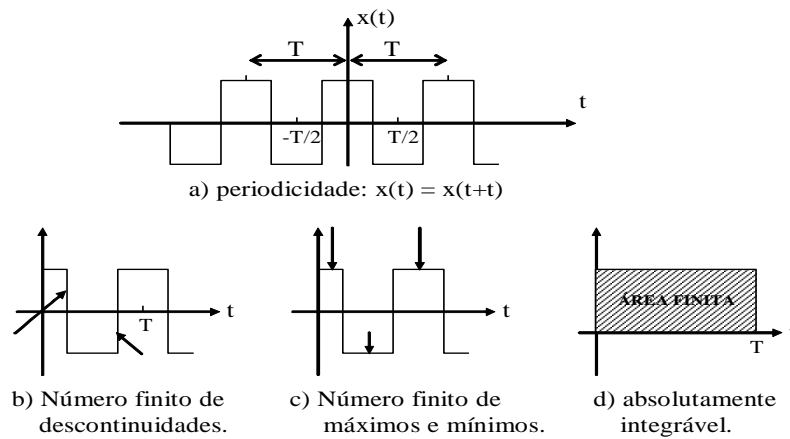


Figura 1.6: Verificação das condições de existência da série de Fourier para uma onda quadrada.

1.3.2. Série de Fourier na forma trigonométrica

Uma função $x(t)$ periódica com período T pode ser expressa pela série trigonométrica de Fourier abaixo:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(2\pi f_0 t) + a_2 \cos(2\pi 2 f_0 t) + a_3 \cos(2\pi 3 f_0 t) + \dots + b_1 \sin(2\pi f_0 t) + b_2 \sin(2\pi 2 f_0 t) + \dots \quad (1.1)$$

ou em termos de somatória,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)] \quad (1.2)$$

em que $f_0 = 1/T$ é chamada de frequência fundamental do sinal.

A série anterior pode também ser expressa na forma compacta por:

$$x(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n) \quad (1.3)$$

em que: $E_0 = \frac{a_0}{2}$ representa o valor médio da função ou valor dc.

$$E_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ e } \theta_n = \arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (1.4)$$

A componente senoidal de frequência $f_n = nf_0$ é chamada n -ésimo harmônico da função, e o primeiro harmônico (f_0) é chamado de componente fundamental, pois tem o mesmo período do sinal $x(t)$. Os coeficientes E_n e os ângulos θ_n são conhecidos como amplitude e ângulo de fase, respectivamente.

Para a determinação dos coeficientes da série definida pela equação (1.2) é conveniente ressaltar que os termos $\cos(2\pi n f_0 t)$ e $\sin(2\pi n f_0 t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, formam uma base ortogonal completa, com as seguintes propriedades:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi n f_0 t) \cos(2\pi m f_0 t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi n f_0 t) \sin(2\pi m f_0 t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi n f_0 t) \cos(2\pi m f_0 t) dt = 0 \quad \text{para todo } m \text{ e } n \quad (1.7)$$

Utilizando as equações acima pode-se mostrar que os coeficientes a_n são determinados pela seguinte equação:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

O coeficiente a_0 é determinado considerando $n = 0$ na equação anterior, isto é,

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (1.9)$$

portanto, $a_0/2$ é o valor médio do sinal periódico $x(t)$.

E os coeficientes b_n são dados por:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \operatorname{sen}(2\pi n f_0 t) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

Exemplo 1.1: Determine a série de Fourier da onda quadrada periódica, cujo primeiro período é definido como:

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -T/2 < t < 0 \\ 1, & 0 < t \leq T/2 \end{cases} \quad (1.11)$$

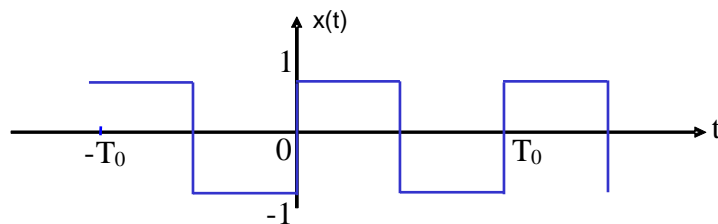


Figura 1.7: Onda quadrada.

Para o cálculo dos coeficientes a_n utiliza-se a equação (1.8), assim,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \left\{ \int_{-T/2}^0 -\cos(2\pi n f_0 t) dt + \int_0^{T/2} \cos(2\pi n f_0 t) dt \right\} \\ &= \frac{2}{T} \left\{ \left. \frac{-1}{2\pi n f_0} \operatorname{sen}(2\pi n f_0 t) \right|_{-T/2}^0 + \left. \frac{1}{2\pi n f_0} \operatorname{sen}(2\pi n f_0 t) \right|_0^{T/2} \right\} \end{aligned}$$

como $f_0 = 1/T$, então,

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \{ -[\operatorname{sen}(0) - \operatorname{sen}(-n\pi)] + [\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}(0)] \}$$

$$a_n = 0 \quad n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} dt = -1 + 1 = 0$$

Para o cálculo dos coeficientes b_n utiliza-se a equação (1.10),

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \left\{ \int_{-T/2}^0 -\sin(2\pi f_0 t) dt + \int_0^{T/2} \sin(2\pi f_0 t) dt \right\} \\
 &= \frac{2}{T} \left\{ \left. \frac{1}{2\pi f_0} \cos(2\pi f_0 t) \right|_{-T/2}^0 + \left. \frac{-1}{2\pi f_0} \cos(2\pi f_0 t) \right|_0^{T/2} \right\} \\
 &= \frac{1}{n\pi} \{ [1 - \cos(-n\pi)] - [\cos(n\pi) - 1] \} \\
 &= \frac{2}{n\pi} \{ 1 - \cos(n\pi) \}
 \end{aligned}$$

logo:

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Assim a série de Fourier da onda quadrada simétrica apresenta todos os coeficientes a_n nulos e coeficientes b_n são não nulos somente para os harmônicos ímpares, portanto:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \sin(2\pi n f_0 t) \quad (1.12)$$

ou,

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3} \sin(2\pi 3 f_0 t) + \frac{1}{5} \sin(2\pi 5 f_0 t) + \frac{1}{7} \sin(2\pi 7 f_0 t) + \dots \right]$$

Este resultado pode ser representado em uma figura mostrando as amplitudes dos componentes senoidais e uma outra para as fases. Estas figuras são chamadas de “espectro de amplitude” e “espectro de fase”, sendo que o espectro de amplitude

normalmente é representado pelo módulo dos componentes.

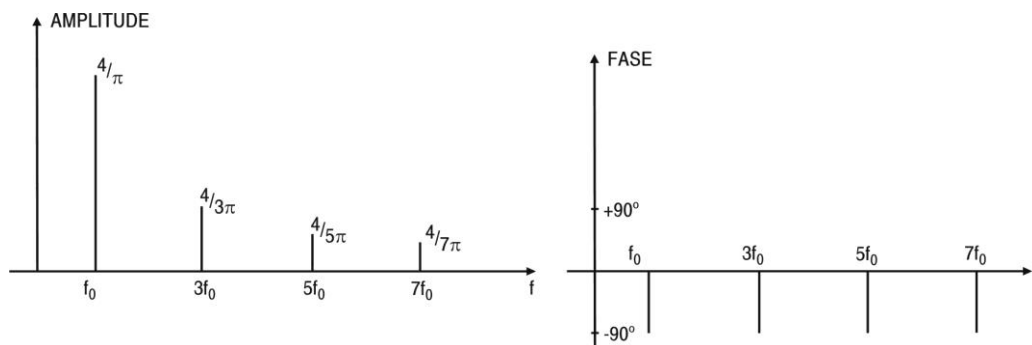


Figura 1.8: Representação espectral das amplitudes e fases da onda quadrada.

O componente fundamental apresenta amplitude $4/\pi$, o 3º harmônico tem amplitude igual a $1/3$ da fundamental, o 5º harmônico tem amplitude $1/5$, o 7º harmônico $1/7$, e assim por diante. A série aparece escrita em função de componentes senoidais por que cada harmônico apresenta componente de fase igual a -90° ou $-\pi/2$ radianos.

Se cada componente senoidal da figura 1.8 for representado no tempo conservando amplitudes e fases corretas, a forma de onda resultante da soma de tais componentes será uma aproximação do sinal original. Isto é mostrado na figura 1.9.

Na prática torna-se impossível a soma dos infinitos componentes, conforme requer a série de Fourier, por isso a resultante sempre será uma aproximação do sinal original.

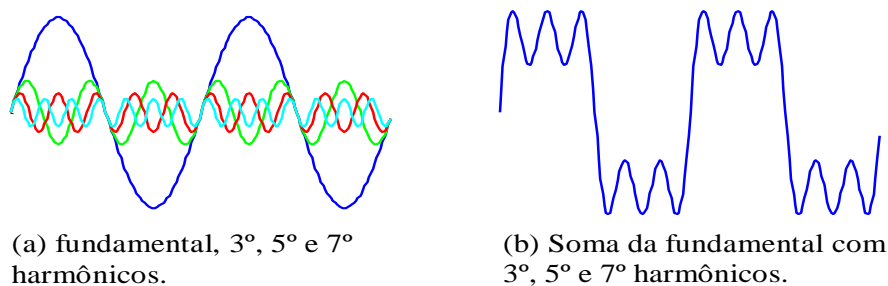


Figura 1.9: Composição de apenas quatro componentes da série de Fourier.

O sinal resultante é apenas uma aproximação.

Embora a série de Fourier seja composta de infinitos componentes, observa-se do espectro de amplitude que à medida que a ordem do harmônico aumenta a amplitude correspondente diminui. Isto significa que quanto maior o harmônico menor será sua contribuição na forma de onda original.

Se onda quadrada anterior é deslocada no tempo, como mostra a figura (1.10), a série de Fourier resultante para este caso será dada por:

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left[\cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3} \cos(2\pi 3 f_0 t) + \frac{1}{5} \cos(2\pi 5 f_0 t) + \frac{1}{7} \cos(2\pi 7 f_0 t) + \dots \right] \quad (1.13)$$

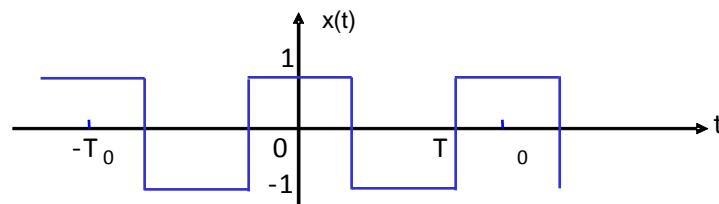


Figura 1.10: Onda quadrada simétrica no tempo.

Os espectros de amplitude e fase são mostrados na figura 1.11. Observa-se então que, quando um sinal é deslocado no tempo seu espectro de amplitude não se altera, alterando-se apenas o espectro de fase.

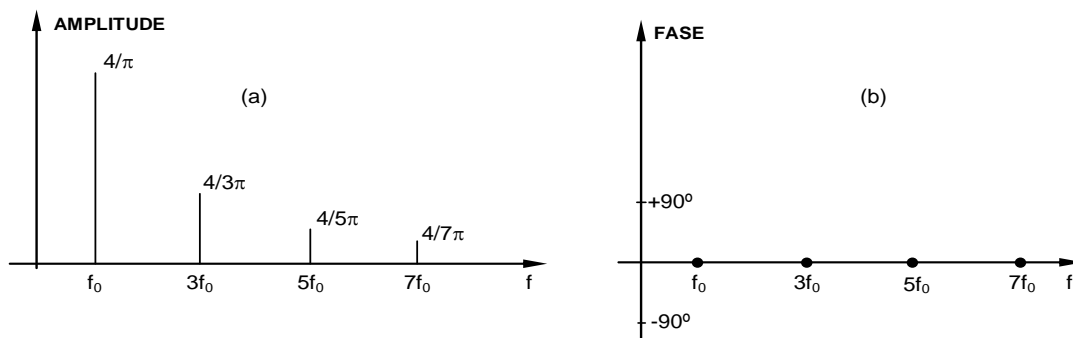


Figura 1.11: (a) Espectro de amplitude, (b) Espectro de fase.

Exemplo 1.2: Determine da série de Fourier da onda triangular periódica definida em um período por:

$$x(t) = \begin{cases} 1 + 4t/T, & -T/2 < t < 0 \\ 1 - 4t/T, & 0 < t \leq T/2 \end{cases} \quad (1.14)$$

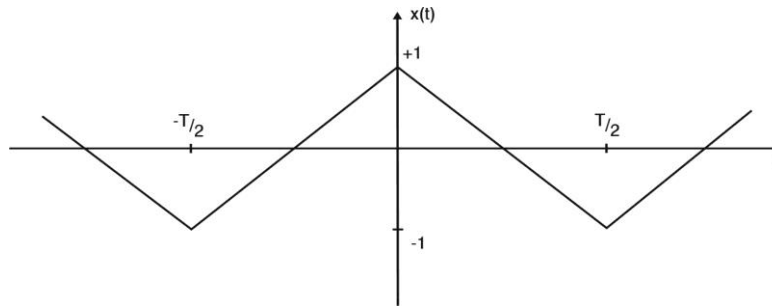


Figura 1.12: Onda triangular.

Observe que $a_0 = 0$ (valor médio de $x(t)$ em um período), pois $x(t)$ é simétrica em torno da origem.

Como no exemplo anterior, para o cálculo dos coeficientes a_n a integral da equação (1.8) é também feita por partes, isto é:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \left\{ \int_{-T/2}^0 \left(1 + \frac{4t}{T} \right) \cos(2\pi n f_0 t) dt + \int_0^{T/2} \left(1 - \frac{4t}{T} \right) \cos(2\pi n f_0 t) dt \right\} \\ &= \frac{2}{T} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi n f_0 t) dt + \int_{-T/2}^0 \left(\frac{4t}{T} \right) \cos(2\pi n f_0 t) dt - \int_0^{T/2} \left(\frac{4t}{T} \right) \cos(2\pi n f_0 t) dt \right\} \end{aligned}$$

como o primeiro termo da expressão acima é nulo, então:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{8}{T^2} \left\{ \int_{-T/2}^0 t \cos(2\pi n f_0 t) dt - \int_0^{T/2} t \cos(2\pi n f_0 t) dt \right\} \\ &= \frac{16}{T^2} \int_{-T/2}^0 t \cos(2\pi n f_0 t) dt \end{aligned}$$

A integral acima é feita utilizando a regra de integração por partes, isto é:

$$\int_a^b u dv = uv - \int_a^b v du \quad (1.15)$$

seja $u = t$ e $dv = \cos(2\pi f_0 t) dt$, então:

$$v = \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t) dt, \text{ assim}$$

$$a_n = \frac{16}{T^2} \left\{ \frac{t}{2\pi n f_0} \sin(2\pi n f_0 t) \right\}_{-T/2}^0 - \frac{1}{2\pi n f_0} \int_{-T/2}^0 \sin(2\pi n f_0 t) dt \Bigg\}$$

como o primeiro termo da expressão acima é nulo, então,

$$a_n = \frac{16}{T^2} \frac{1}{(2\pi n f_0)^2} \cos(2\pi n f_0 t) \Big|_{-T/2}^0$$

$$a_n = \frac{4}{(\pi n)^2} [1 - \cos(\pi n)] \quad n = 1, 2, \dots$$

ou de outro modo:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{8}{(\pi n)^2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

analogamente para os coeficientes b_n

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi n f_0 t) dt + \int_{-T/2}^0 \frac{4t}{T} \sin(2\pi n f_0 t) dt - \int_0^{T/2} \frac{4t}{T} \sin(2\pi n f_0 t) dt \right\} \\ &= \frac{8}{T^2} \left\{ \int_{-T/2}^0 t \sin(2\pi n f_0 t) dt - \int_0^{T/2} t \sin(2\pi n f_0 t) dt \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto os coeficientes b_n são nulos e os coeficientes a_n são diferentes de zero para n par, logo:

$$x(t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - \cos(n\pi)}{n^2} \right] \cos(2\pi n f_0 t) \quad (1.16)$$

ou

$$x(t) = \frac{8}{\pi^2} \left[\cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3^2} \cos(2\pi 3 f_0 t) + \frac{1}{5^2} \cos(2\pi 5 f_0 t) + \frac{1}{7^2} \cos(2\pi 7 f_0 t) + \dots \right]$$

Assim, a onda triangular, da mesma forma que a onda quadrada, apresenta somente harmônicos ímpares, entretanto as amplitudes e fases são diferentes para os dois sinais. Isto justifica o fato de que dois instrumentos, mesmo que diferentes, por exemplo, violão e piano, emitem a mesma nota, mas é possível fazer a distinção entre eles. Os dois instrumentos produzem um som com a mesma frequência fundamental, mas o número de harmônicos significativos e as amplitudes dos mesmos são diferentes, produzindo assim uma diferença de timbre.

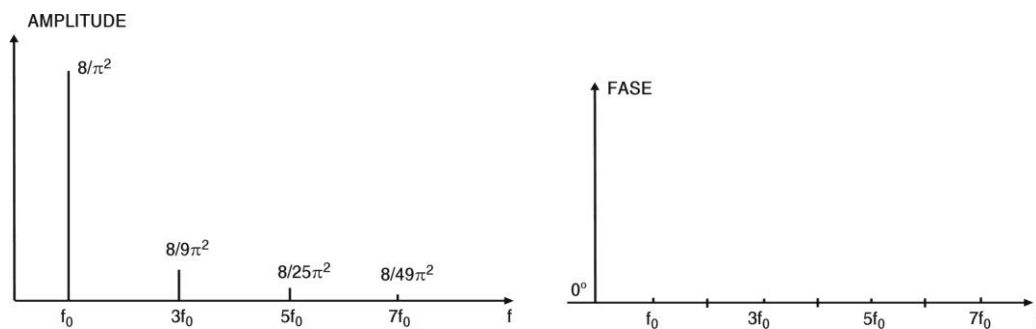


Figura 1.13: Representação espectral das amplitudes e fases da onda triangular.

Exemplo 1.3: Determine a série de Fourier da função $x(t)$ definida por:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & -T/2 < t < 0 \\ A \sin(2\pi f_0 t), & 0 < t < T/2 \end{cases} \quad (1.17)$$

Cálculo de a_0

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \sin(2\pi n f_0 t) dt = \frac{2A}{2\pi f_0 T} \cos(2\pi n f_0 t) \Big|_0^{T/2} = -\frac{A}{\pi} [\cos(\pi) - 1] = \frac{2A}{\pi}$$

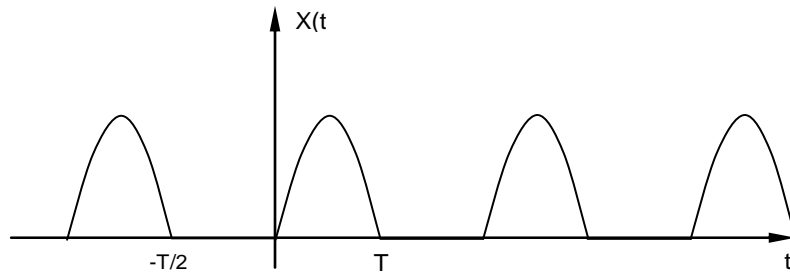


Figura 1.14: Sinal senoidal retificado.

Cálculo dos a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$

$$a_n = \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{T/2} A \sin(2\pi n f_0 t) \cos(2\pi f_0 t) dt \right\}$$

$$\text{como : } \sin(\phi) \cos(\theta) = \frac{1}{2} [\sin(\phi + \theta) + \sin(\phi - \theta)]$$

$$a_n = \frac{A}{T} \left\{ \int_0^{T/2} [\sin(2\pi(1+n)f_0 t) + \sin(2\pi(1-n)f_0 t)] dt \right\}$$

quando $n = 1 \Rightarrow a_1 = 0$;

para $n = 2, 3, \dots$

$$a_n = \frac{A}{T} \left\{ -\frac{\cos(2\pi(1+n)f_0 t)}{2\pi(1+n)f_0} - \frac{\cos(2\pi(1-n)f_0 t)}{2\pi(1-n)f_0} \right\}_0^{T/2}$$

$$a_n = \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{1 - \cos((1+n)\pi)}{1+n} + \frac{1 + \cos((1-n)\pi)}{1-n} \right\}$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ impar} \\ \frac{-2A}{(n-1)(n+1)\pi}, & n \text{ par} \end{cases} \quad (1.18)$$

Cálculo dos b_n

$$b_n = \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{T/2} A \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \right\}$$

$$\text{como : } \sin(\phi) \sin(\theta) = \frac{1}{2} [\cos(\phi - \theta) - \cos(\phi + \theta)]$$

$$b_n = \frac{A}{T} \left\{ \int_0^{T/2} [\cos(2\pi(1-n)f_0 t) - \cos(2\pi(1+n)f_0 t)] dt \right\}$$

para $n = 1$,

$$b_1 = -\frac{A}{T} \int_0^{T/2} \cos(4\pi f_0 t) dt = \frac{A}{2}$$

para $n = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{A}{T} \left\{ \frac{\sin(2\pi(1-n)f_0 t)}{2\pi(1-n)f_0} - \frac{\sin(2\pi(1+n)f_0 t)}{2\pi(1+n)f_0} \right\}^{T/2}_0 \\ &= \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{\sin((1-n)\pi)}{1-n} - \frac{\sin((1+n)\pi)}{1+n} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, a série trigonométrica de Fourier do sinal senoidal retificado será:

$$x(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \operatorname{sen}(2\pi f_0 t) - \frac{2A}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos(2\pi 2f_0 t) + \frac{1}{15} \cos(2\pi 4f_0 t) + \dots \right]$$

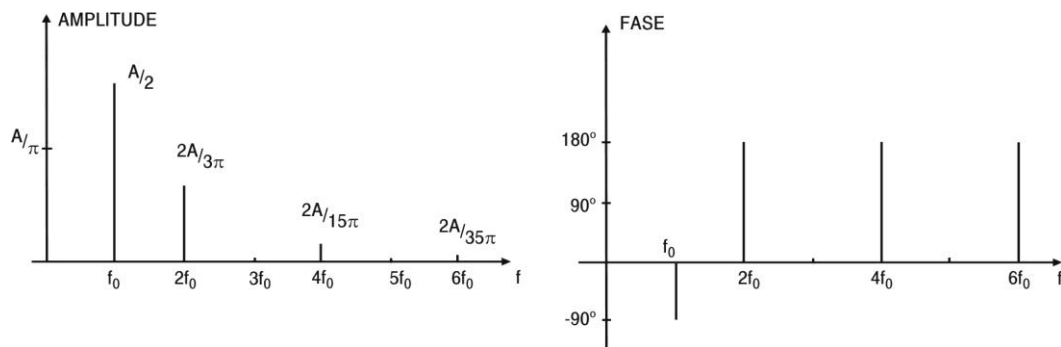


Figura 1.15: Representação espectral das amplitudes e fases do sinal senoidal com retificação de meia onda.

1.4. Propriedades da série de Fourier na forma trigonométrica

1.4.1. Intervalo de Integração

Para o cálculo dos coeficientes de Fourier de uma função periódica não é importante onde se inicia a integração, mas sim que ela seja efetuada dentro de um intervalo de tempo correspondente a um período do sinal. Isto decorre do fato de que para sinais periódicos,

$$\int_0^T x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt = \int_t^{t+T} x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad \text{ou} \quad \int_0^T x(t) \operatorname{sen}(2\pi n f_0 t) dt = \int_t^{t+T} x(t) \operatorname{sen}(2\pi n f_0 t) dt \quad (1.19)$$

1.4.2. Função Par

Uma função par, isto é:

$$x(t) = x(-t) \quad (1.20)$$

tem todos os coeficientes (b_n) dos termos em senos da série de Fourier nulos, apresentando somente os termos (a_n) dos cossenos.

1.4.3. Função Ímpar

Uma função ímpar, isto é:

$$x(t) = -x(-t) \quad (1.21)$$

tem todos os coeficientes (a_n) dos termos em cossenos da série de Fourier nulos, apresentando somente os termos (b_n) dos senos.

Exemplo 1.4: Determine a série de Fourier da onda dente de serra periódica, definida por:

$$x(t) = \frac{2A}{T}t \quad -T/2 < t < T/2 \quad (1.22)$$

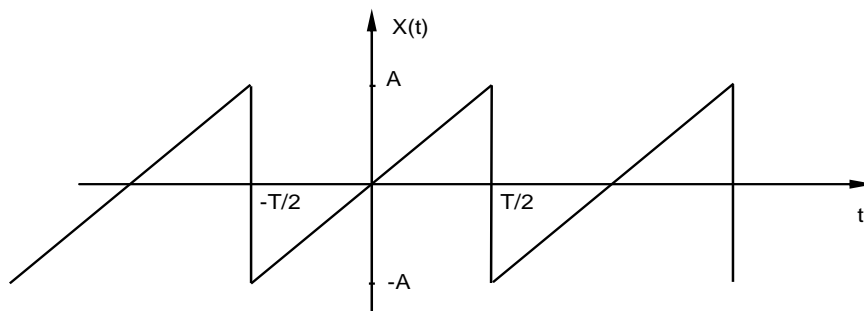


Figura 1.16: Onda dente de serra.

Como o sinal acima é uma função ímpar os termos em cossenos são nulos, assim,

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Cálculo dos b_n

$$b_n = \frac{4A}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} t \operatorname{sen}(2\pi n f_0 t) dt$$

Utilizando a regra de integração por partes, conforme a equação (1.15), pode-se escrever que:

$$u = t \text{ e } dv = \operatorname{sen}(2\pi n f_0 t) dt, \text{ então:}$$

$$v = \frac{1}{2\pi n f_0} \cos(2\pi n f_0 t) dt, \text{ assim}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2A}{2\pi n T} \left\{ -t \cos(2\pi n f_0 t) \Big|_{-T/2}^{T/2} + \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi n f_0 t) dt \right\} \\ &= -\frac{2A}{n\pi} \cos(n\pi) \end{aligned}$$

logo,

$$x(t) = -2A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} \operatorname{sen}(2\pi n f_0 t) \quad (1.23)$$

ou

$$x(t) = \frac{2A}{\pi} \left[\operatorname{sen}(2\pi f_0 t) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\pi 2 f_0 t) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(2\pi 3 f_0 t) - \dots \right]$$

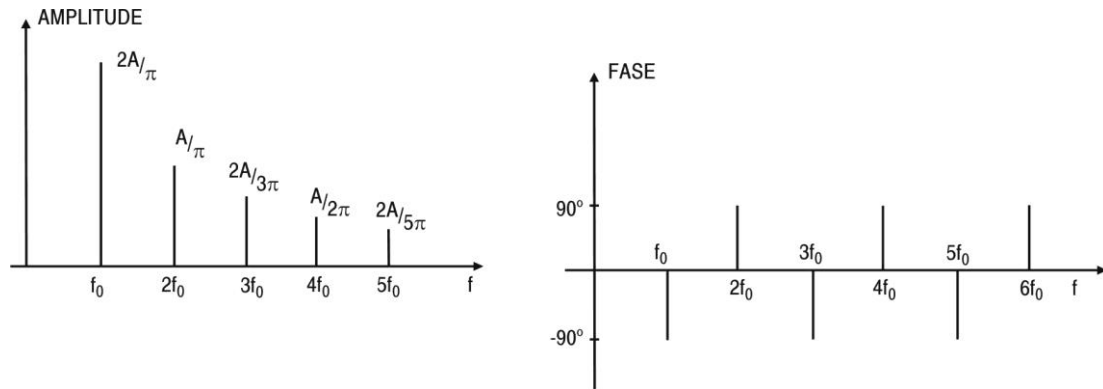


Figura 1.17: Representação espectral da onda dente de serra.

1.5. Série de Fourier na forma exponencial

A série de Fourier da equação (1.2) pode ser colocada em uma forma mais usual através do uso de exponenciais complexas. Para fazer isto, utilizam-se os termos em senos e cossenos na forma exponenciais complexas, isto é, as relações de Euler:

$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j} \left\{ e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t} \right\}$$

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} \left\{ e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \right\}$$

substituindo na equação (1.2) tem-se:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{2} \left[e^{j2\pi n f_0 t} + e^{-j2\pi n f_0 t} \right] + \frac{b_n}{2j} \left[e^{j2\pi n f_0 t} - e^{-j2\pi n f_0 t} \right] \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n - jb_n}{2} e^{j2\pi n f_0 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-j2\pi n f_0 t} \right\} \end{aligned}$$

sejam:

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \quad n = 0$$

$$A_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad n > 0$$

$$A_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad n < 0$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n e^{j2\pi f_0 t} + A_{-n} e^{-j2\pi f_0 t}\}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j2\pi f_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} A_n e^{j2\pi f_0 t}$$

portanto:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j2\pi f_0 t} \quad (1.24)$$

A equação acima é conhecida como **série exponencial de Fourier** e possibilita uma representação mais compacta do sinal. A presença de componentes de frequências negativas não tem um significado físico e é simplesmente um resultado do modelo matemático utilizado para descrever o sinal.

Para o cálculo dos coeficientes A_n substituem-se as equações (1.8), (1.9) e (1.10) em (1.24), assim:

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_0 t) dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_0 t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) [\cos(2\pi f_0 t) - j \sin(2\pi f_0 t)] dt$$

Portanto,

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.25)$$

Como os coeficientes A_n são números complexos, eles podem ser caracterizados por um módulo e uma fase.

$$A_n = |A_n| e^{j\theta_n} \quad (1.26)$$

em que:

$$|A_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \theta_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (1.27)$$

Para funções reais pode ser verificado através da equação (1.25) que A_n é o complexo conjugado de A_{-n} , ou seja,

$$A_{-n} = |A_n| e^{-j\theta_n} \quad (1.28)$$

Se a função $x(t)$ for par os coeficientes são reais ($A_n = A_{-n}$), e se $x(t)$ for ímpar os coeficientes são imaginários.

Exemplo 1.5: Determine a série de Fourier do pulso retangular periódico definido por:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & -T/2 < t < -d/2 \\ A, & -d/2 < t < d/2 \\ 0, & d/2 < t < T/2 \end{cases} \quad (1.29)$$

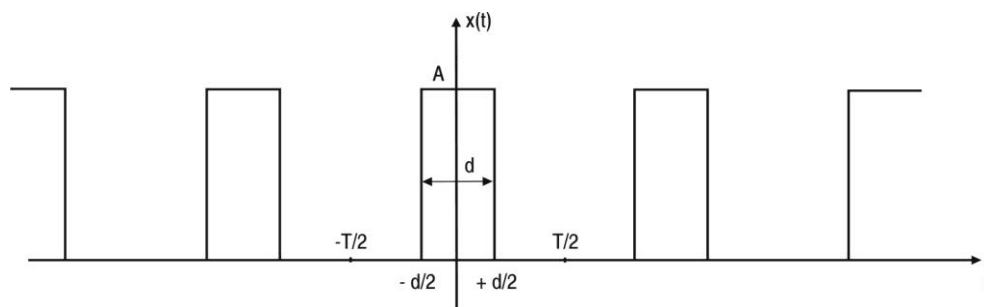


Figura 1.18: Pulso retangular periódico de largura d.

Os coeficientes A_n são determinados através da equação (1.25), assim:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{T} \int_{-d/2}^{d/2} A e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{-A}{T 2\pi n f_0} e^{-j2\pi n f_0 t} \Big|_{-d/2}^{d/2} \\ &= \frac{A}{\pi n f_0 T} \frac{1}{2j} \left[e^{j\pi n f_0 d} - e^{-j\pi n f_0 d} \right] \\ &= \frac{A}{T} \frac{\text{sen}(\pi n f_0 d)}{\pi n f_0} = \frac{Ad}{T} \frac{\text{sen}(\pi n f_0 d)}{\pi n f_0 d} \end{aligned}$$

Observa-se que os coeficientes A_n são números reais. Este resultado já era esperado, pois $x(t)$, definida pela equação (1.29), é uma função par, logo a sua série trigonométrica apresenta os coeficientes b_n nulos e, portanto os coeficientes θ_n na equação (1.27) também são nulos, logo:

$$x(t) = \frac{Ad}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(\pi n f_0 d)}{\pi n f_0 d} e^{-j2\pi n f_0 t} \quad (1.30)$$

1.6. Propriedades da série de Fourier na forma exponencial

A série de Fourier apresenta um conjunto de importantes propriedades que ajudam a compreender melhor os seus conceitos e a reduzir a complexidade do cálculo da série de muitos sinais. Nesta secção serão apresentadas as principais propriedades da série exponencial de Fourier.

Sejam $x(t)$ e $y(t)$ dois sinais com o mesmo período T_0 , com coeficientes a_k e b_k respectivamente.

1.6.1. Linearidade

A série de Fourier é linear, isto é, vale o princípio da superposição. Seja um sinal periódico $z(t) = Ax(t) + By(t)$, então os coeficientes c_k da série de Fourier serão dados por:

$$c_k = Aa_k + Bb_k \quad (1.31)$$

em que A e B são constantes

1.6.2. Deslocamento no tempo

Seja $y(t) = x(t - t_0)$, então:

$$b_k = e^{j\omega_0 t_0} a_k \quad (1.32)$$

Uma consequência importante desta propriedade é que o módulo permanece inalterado, isto é $|a_k| = |b_k|$ e somente o ângulo de fase é alterado por um componente linear $-\omega_0 t_0$.

1.6.3. Reversão do tempo

Seja $y(t) = x(-t)$, então,

$$b_k = a_{-k} \quad (1.33)$$

Como consequência tem-se que, se o sinal é par $b_k = b_{-k}$ e se o sinal é ímpar então $b_k = -b_{-k}$.

1.6.4. Compressão ou expansão no tempo

Seja $y(t) = x(\alpha t)$ em que $\alpha > 0$, então,

$$b_k = a_k \quad (1.34)$$

A compressão ou expansão não altera os coeficientes, somente a frequência fundamental é alterada para $\alpha\omega_0$ e o período para T_0/α .

1.6.5. Relação de Parseval

A relação de Parseval estabelece que a potência média de um sinal periódico pode ser determinada tanto no domínio do tempo como no da frequência, isto é,

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \quad (1.35)$$

1.6.6. Simetria no sinal

Admitindo um sinal real têm-se dois tipos de simetria. Se o sinal é uma função par então os coeficientes a_k são reais e se o sinal é uma função ímpar os coeficientes a_k são imaginários.

Admitindo um sinal real qualquer os coeficientes a_k se apresentam complexos conjugados, isto é, $|a_k|$ é uma função par e a fase de a_k é uma função ímpar.

1.7. Espectro discreto

Um gráfico onde se marcam no eixo horizontal as frequências harmônicas e no eixo vertical os coeficientes A_n é chamado “espectro de amplitude” da função $x(t)$, e um gráfico onde se marcam no eixo vertical os ângulos de fase θ_n e no horizontal as frequências, é chamado “espectro de fase” de $x(t)$. Como os índices n assumem valores inteiros esses dois espectros não são curvas contínuas, mas somente apresentam valores nas frequências nf_0 , harmônicas da fundamental, sendo então chamados de espectros discretos.

Considerando o exemplo 1.5, para efeito de representação do espectro, seja: $d = 1/20$ s e $T = 1/4$ s. assim:

$$A_n = \frac{A \sin(\pi n / 5)}{5 \pi n / 5} \quad (1.36)$$

Para simplificar a notação, utiliza-se a função *sinc* definida por:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (1.37)$$

Esta função, mostrada na figura 1.19, apresenta um valor máximo igual à unidade para $x = 0$ e tende a zero através de oscilações amortecidas conforme x tende ao infinito.

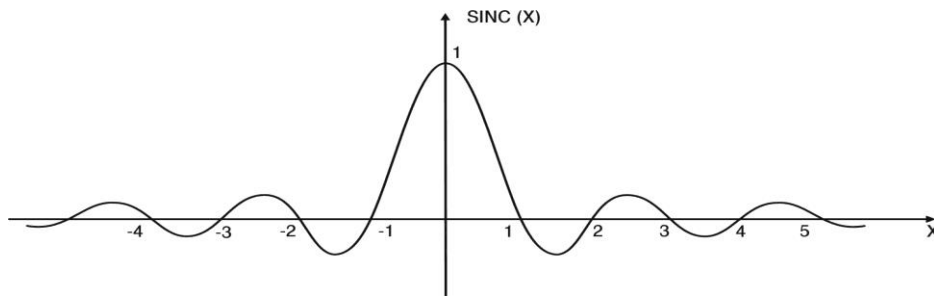
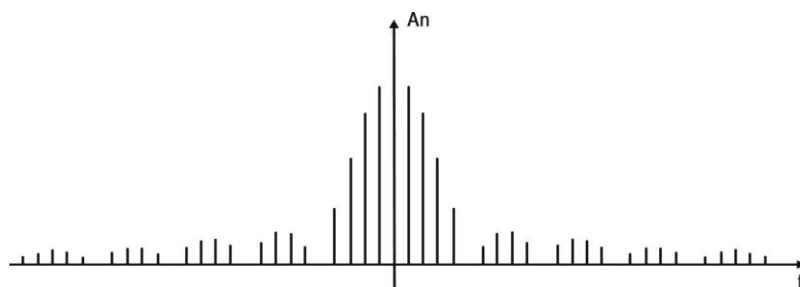


Figura 1.19: Função $\text{sinc}(x)$.

Deste modo os coeficientes A_n da equação (1.36) serão dados por:

$$A_n = \frac{A}{5} \text{sinc}(n/5) \quad (1.38)$$



(a) Amplitude

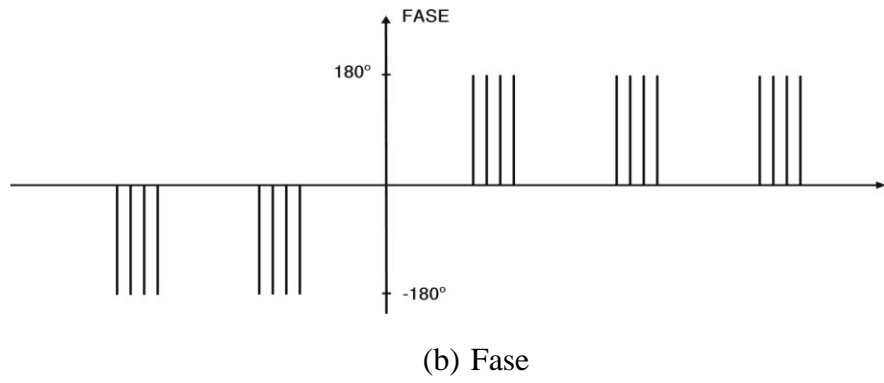


Figura 1.20: Representação espectral do pulso retangular periódico para $d = 1/20$ s
e $T = 1/4$ s.

Exemplo 1.6: Determine a série exponencial do pulso retangular periódico deslocado.

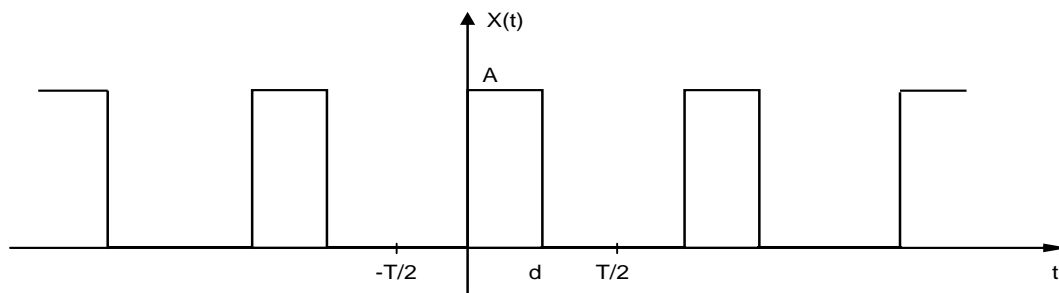


Figura 1.21: Pulso retangular periódico

Utilizando a equação (1.25) para determinar os coeficientes obtém-se:

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{A}{T} \int_0^d e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{-A}{T 2\pi n f_0} e^{-j2\pi n f_0 t} \Big|_0^d \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{j2\pi n f_0} \left[1 - e^{-j2\pi n f_0 d} \right] \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{j2\pi n f_0} \left[e^{j\pi n f_0 d} - e^{-j\pi n f_0 d} \right] e^{-j\pi n f_0 d} \\
 &= \frac{A d}{T} \frac{\sin(\pi n f_0 d)}{\pi n f_0 d} e^{-j\pi n f_0 d}
 \end{aligned}$$

$$A_n = \frac{Ad}{T} \sin c(nf_0 d) e^{-j\pi n f_0 d} \quad (1.39)$$

Separando estes coeficientes em seu módulo e fase, tem-se:

$$|A_n| = \frac{Ad}{T} |\sin c(nf_0 d)| \quad (1.40)$$

$$\theta_n = -\pi n f_0 d$$

Para os mesmos valores de d e T , do exemplo 1.5, o espectro de amplitude é igual ao anterior e, portanto não é afetado pelo deslocamento da origem, enquanto o espectro de fase sofre alteração, tal que, $\theta_n = -\pi n f_0 d$.

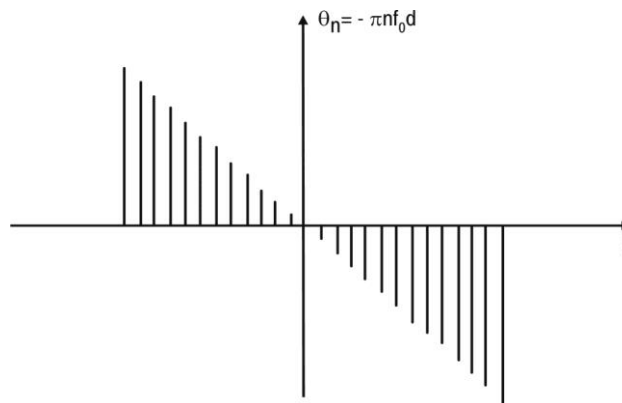


Figura 1.22: Espectro de fase.

O espectro de amplitude obtido através da série exponencial de Fourier apresenta valores para frequências positivas e negativas e por isso é chamado de espectro bilateral. Como a série trigonométrica apresenta valores somente para frequências positivas sua representação é chamada de espectro unilateral.

1.7.1. Espectro densidade de potência

A potência média de um sinal $x(t)$ periódico, desenvolvida através de um resistor de 1 ohm, é definida por:

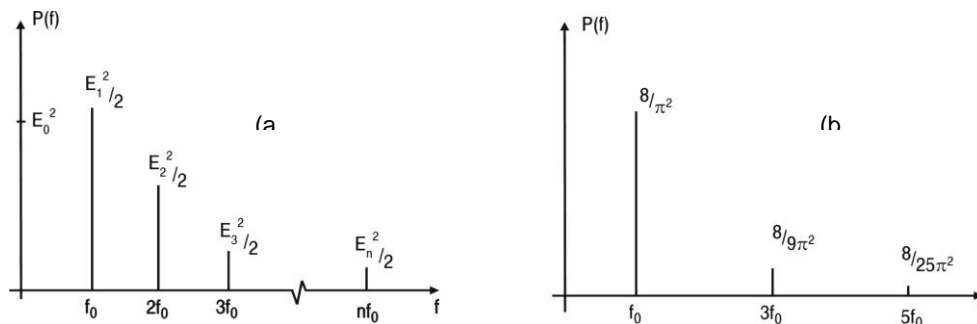
$$P_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.41)$$

Substituindo a equação (2.3) na equação acima, resulta:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n) \right|^2 dt$$

Desenvolvendo-se a equação acima, chega-se ao espectro unilateral de potências que é igual à soma das potências instantâneas de seus componentes harmônicos.

$$P_m = E_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2 \quad (1.42)$$



a) Sinal qualquer

b) Onda quadrada (exemplo 1.1).

Figura 1.23: Espectro unilateral de potência.

Uma forma mais elegante e usual é utilizar o espectro bilateral de potências, substituindo a série exponencial de Fourier na equação (1.41), assim:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j(2\pi n f_0 t)} dt \right]$$

Invertendo a ordem da integral com o somatório e rearranjando a equação acima resulta:

$$P_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j(2\pi n f_0 t)} dt$$

Através das equações (1.25) e (1.28), obtém-se:

$$P_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n A_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2 \quad (1.43)$$

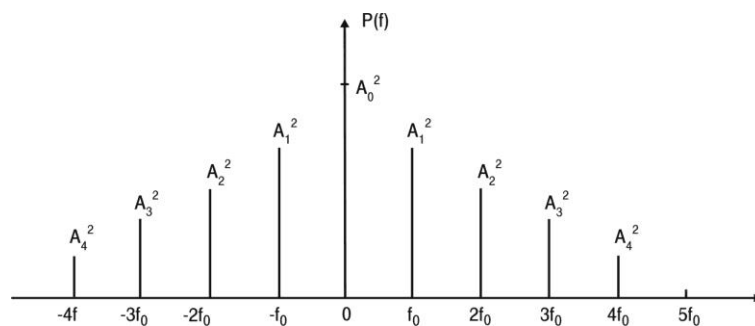


Figura 1.24: Espectro bilateral de potência.

A equação (1.43) é conhecida como teorema de Parseval para potência e mostra que a potência média de um sinal periódico, normalizada em relação a um resistor de 1 Ohm, é igual à soma dos quadrados das amplitudes de todos os seus harmônicos. Assim, os componentes $|A_n|^2$ definem o espectro de potência de um sinal periódico.

1.8. Transformada de Fourier

A série de Fourier é uma ferramenta matemática muito útil para analisar sinais periódicos. Mas o que fazer quando os sinais não são periódicos? Estes sinais também são variantes com o tempo e, portanto devem apresentar um espectro de frequências. Por exemplo, uma descarga atmosférica (raio) produz uma interferência, facilmente perceptível em determinadas faixas de um receptor de rádio. Portanto este sinal possui

componentes de frequências. Para analisar os sinais que não são periódicos a ferramenta utilizada é a transformada ou integral de Fourier.

A figura 3.1 ilustra como, a partir de um sinal periódico, se pode chegar ao espectro de um sinal não periódico. Observando as figuras 1.24.a, 1.24.b e 1.24.c, à medida que o período T aumenta, os pulsos no domínio do tempo se espaçam cada vez mais e as linhas espectrais mais se aproximam umas das outras. Quando o período vai para o infinito o sinal deixa de ser periódico, o espaçamento entre as linhas tende a zero e o espectro deixa de ser discreto para se tornar contínuo. Desse modo a série converge para a integral de Fourier.

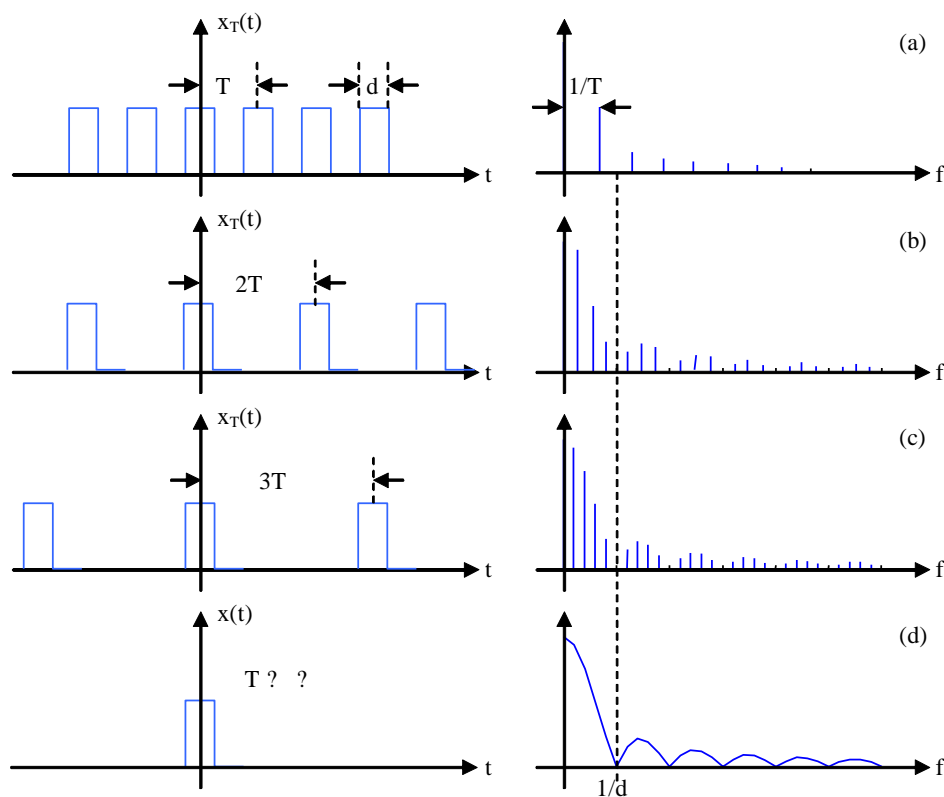


Figura 1.25: Representação espectral unilateral para o pulso retangular para diferentes períodos de uma onda quadrada.

Pode-se chegar matematicamente a esta conclusão considerando uma função periódica $x_T(t)$, com período T , e levá-lo para o infinito de modo que a função resultante

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) \quad (1.44)$$

não seja periódica.

A função $x_T(t)$ pode ser expressa em série de Fourier:

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(nf_0) e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad (1.45)$$

em que, $f_0 = \frac{1}{T}$ e $\frac{1}{T} X(nf_0)$ são os coeficientes da série exponencial.

Como a separação entre harmônicos corresponde ao inverso do período, isto é, $\Delta f = 1/T$, então substituindo $1/T$ por Δf tem-se que:

$$x(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0) e^{j2\pi f_0 t} \Delta f \right\} \quad (1.46)$$

À medida que o período se aproxima do infinito, Δf tende a zero e pode ser substituída pelo infinitesimal df , assim a equação (1.46) se transforma em uma somatória de infinitesimais tais que,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad (1.47)$$

Os coeficientes $X(nf_0) = TA_n$, da série de Fourier se transformam em uma função contínua, $X(f)$. Esta função é conhecida como função densidade espectral e representa o espectro de frequências de $x(t)$.

Para compreender melhor porque o espectro de um sinal não periódico é contínuo, considere novamente a figura 1.24, onde é representada uma sequência de pulsos retangulares juntamente com o módulo de seu espectro de amplitude. Note que a frequência de separação entre dois harmônicos adjacentes é a frequência fundamental $f_0 = 1/T$. Aumentando o período, a frequência fundamental diminui na proporção inversa, e as linhas verticais do espectro ficam mais próximas umas das outras. Consequentemente o número de linhas localizadas aumenta em uma determinada faixa de frequências. Esta conclusão pode ser verificada com o auxílio da figura 1.24.b. Ao se dobrar o período de repetição dos pulsos, número de harmônicos dobra na mesma faixa de frequências, tornando as raiais mais próximas umas das outras.

Note também que conforme o período aumenta, as amplitudes dos harmônicos decrescem, e quando ele tende ao infinito a distância entre os harmônicos é infinitamente pequena. A frequência discreta f_n transforma-se em uma variável contínua, f , e a série converge para a integral de Fourier. O espectro, antes discreto, torna-se contínuo, pois, o espaçamento entre harmônicos é nulo e fica definido para toda a faixa de frequência como mostrado na figura 1.24.d.

1.8.1. Definição da transformada de Fourier

Como visto anteriormente a transformada de Fourier é uma importante ferramenta matemática que permite representar um sinal não periódico no domínio da frequência. O par de transformada de Fourier é definido por:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.48)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1.49)$$

Estas equações permitem a transformação analítica de um sinal no domínio do tempo para o da frequência e vice-versa. A equação (1.48) é chamada de equação de análise e $X(f)$ é conhecida como transformada de Fourier de $x(t)$, e a equação (1.49) é chamada de equação de síntese ou transformada inversa de $X(f)$.

Frequentemente as transformações acima são representadas por uma das seguintes simbologias:

$$X(f) = \mathfrak{F}\{x(t)\} \quad e \quad x(t) \leftrightarrow X(f)$$

Para que uma função, $x(t)$, possa ter transformada de Fourier, ela deve satisfazer as condições abaixo, também chamadas de condições de Dirichlet:

- i. A função deve conter um número finito de máximos e mínimos no intervalo $-\infty < t < \infty$.
- ii. Se $x(t)$ apresenta descontinuidades, estas deverão ser em número finito no intervalo $-\infty < t < \infty$.

- iii. A função deve ser absolutamente integrável, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1.50)$$

Esta última condição é suficiente, mas não necessária, pois existem funções que não são absolutamente integráveis e mesmo assim apresentam, no caso limite, transformada de Fourier. Exemplos de tais funções são as senoidais, trem de pulsos, etc., que são calculadas utilizando a função impulso unitário.

Exemplo 1.7: Determine a transformada de Fourier do pulso retangular mostrado na figura 1.26.a.

$$p(t) = \text{ret}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases} \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} P(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{-1}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{-1}{j2\pi f} \{e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}\} = \frac{1}{j2\pi f} \{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}\} \\ &= \frac{1}{\pi f} \text{sen}(\pi f T) = T \frac{\text{sen}(\pi f T)}{\pi f T} \end{aligned}$$

logo:

$$P(f) = T \text{sinc}(fT) \quad (1.52)$$

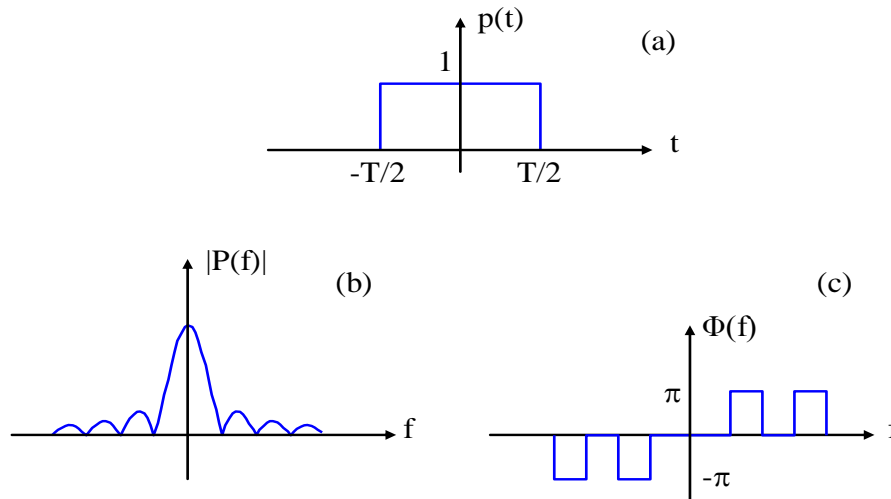


Figura 1.26: Transformada de Fourier do pulso retangular, (a) sinal no domínio do tempo, (b) Espectro de amplitude, (c) Espectro de fase.

O pulso retangular, o modulo e a fase da transformada são mostrados na figura 1.26. Observa-se que a transformada de Fourier é uma função complexa e contínua na frequência, assim, a sua representação gráfica é feita através de seu módulo e fase. O modulo é conhecido como Espectro de amplitude e a fase como Espectro de fase.

Exemplo 1.8: Determine a transformada de Fourier da função constante.

$$x(t) = A \quad (1.53)$$

Observa-se que $x(t)$ é um sinal de energia infinita, logo ele não satisfaz as condições de Dirichlet para a existência da transformada. Uma solução para o problema é estudar o caso limite, isto é, admite-se $x(t)$ um pulso de largura T , como na figura 1.27..a, no limite, quando T tende ao infinito, $x(t)$ torna-se uma função constante como na figura 1.27.b, assim,

$$\begin{aligned} X(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j2\pi f t} dt = A \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-1}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ &= A \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi f} \text{sen}(\pi f T) = A \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{sen} c(fT) \end{aligned}$$

mas, por definição,

$$\delta(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \sin c(fT)$$

que é a função Delta de Dirac ou função impulso unitário, assim

$$X(f) = A\delta(f) \quad (1.54)$$

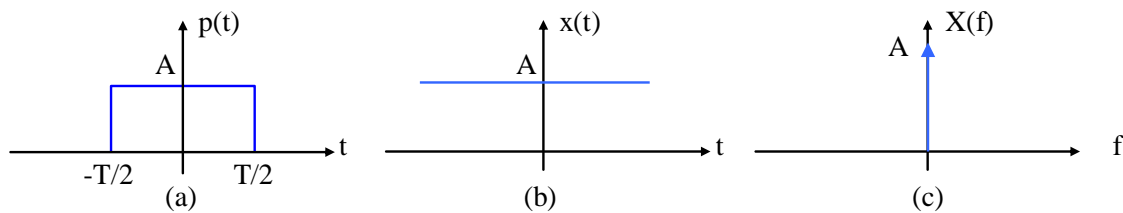


Figura 1.27: (a) Pulso p(t), (b) Função constante (c) Transformada de Fourier da função constante.

Como era de se esperar, o espectro da função constante é nulo para todas as frequências, exceto na origem (frequência nula), onde ele é dado pela função impulso unitário multiplicada pelo valor da função.

Exemplo 1.9: Determine a transformada de Fourier da seguinte função exponencial:

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \quad (1.55)$$

Note que $|x(t)| = 1$, portanto esta função não é absolutamente integrável. Assim, como no exemplo anterior, utiliza-se o caso limite.

$$\begin{aligned} X(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-1}{j2\pi(f-f_0)} \left\{ e^{-j\pi(f-f_0)T} - e^{j\pi(f-f_0)T} \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} T \sin c((f-f_0)T) \end{aligned}$$

$$X(f) = \delta(f - f_0) \quad (1.56)$$

1.8.2. Propriedades da transformada de Fourier

Nesta secção serão apresentadas diversas propriedades da transformada de Fourier. Para isso, consideram-se os pares de transformadas:

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \quad e \quad y(t) \leftrightarrow Y(f)$$

i. Linearidade

A transformada de Fourier é uma operação linear, isto é, a soma de duas ou mais funções no domínio do tempo produz, no domínio da frequência, a soma das transformadas de cada uma das funções.

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(f) + bY(f) \quad (1.57)$$

em que, a e b são duas constantes quaisquer.

ii. Simetria

Esta propriedade segue da relação dual que existe na definição da transformada de Fourier e sua inversa.

$$Se \ x(t) \leftrightarrow X(f) \ \text{então} \ X(t) \leftrightarrow x(-f) \quad (1.58)$$

Exemplo 1.10: Determine a transformada de Fourier da seguinte função:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \text{sen}(\pi f_0 t) \quad (1.59)$$

$$X(f) = \mathfrak{F}\left\{\frac{\text{sen}(\pi f_0 t)}{\pi}\right\} = \mathfrak{F}\left\{f_0 \frac{\text{sen}(\pi f_0 t)}{\pi f_0 t}\right\} = \mathfrak{F}\{f_0 \text{ sinc}(f_0 t)\}$$

Como pelo exemplo 1.7, $\mathfrak{F}\left\{\text{ret}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = T \text{ sinc}(fT)$, então, utilizando a propriedade da simetria tem-se que:

$$X(f) = \text{ret}\left(\frac{-f}{f_0}\right) = \text{ret}\left(\frac{f}{f_0}\right) \quad (1.60)$$

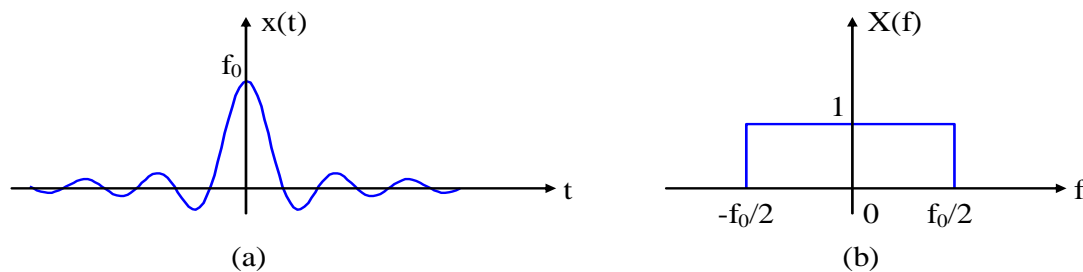


Figura 1.28: (a) Função $x(t) = f_0 \text{ sinc}(f_0 t)$, (b) Transformada de Fourier.

iii. Compressão e expansão

Uma compressão ($a > 1$) (ou expansão, $a < 1$) do sinal no domínio do tempo corresponde a uma expansão (ou compressão) no domínio da frequência, isto é,

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X(f/a) \quad (1.61)$$

em que a é uma constante real não nula.

Exemplo 1.11: Transformada de Fourier do pulso retangular

$$x(t) = \text{ret}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow X(f) = T \sin c(fT)$$

$$y(t) = x(t/2) = \text{ret}\left(\frac{t}{2T}\right) \leftrightarrow Y(f) = 2T \sin c(2fT)$$

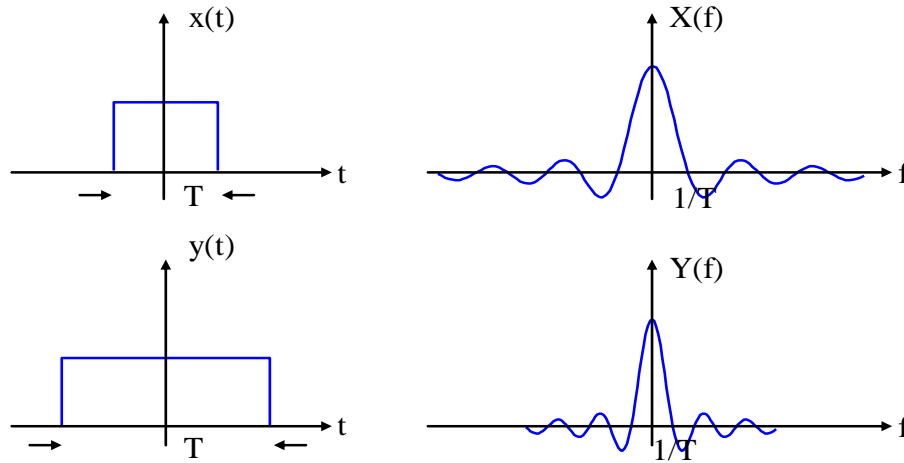


Figura 1.29: Ilustração da propriedade da compressão e expansão.

iv. Deslocamento no domínio do tempo

O deslocamento de uma função por t_0 segundos não altera o espectro de amplitude, mas somente o de fase é alterado pelo valor $2\pi f t_0$ radianos, assim:

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad (1.62)$$

Exemplo 1.12: Pulso retangular deslocado de $t_0 = \pm T/2$ segundos.

Sabe-se que: $p(t) = \text{ret}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow P(f) = T \sin c(fT)$, portanto:

$$x(t) = p(t - T/2) = \text{ret}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \leftrightarrow X(f) = T \sin c(fT) e^{-j\pi f T}$$

$$y(t) = p(t + T/2) = \text{ret}\left(\frac{t + T/2}{T}\right) \leftrightarrow Y(f) = T \sin c(fT) e^{j\pi f T}$$

Observa-se que o módulo de espectro permanece o mesmo, mas a fase é diferente para cada um dos sinais, como é mostrado na figura 1.30.

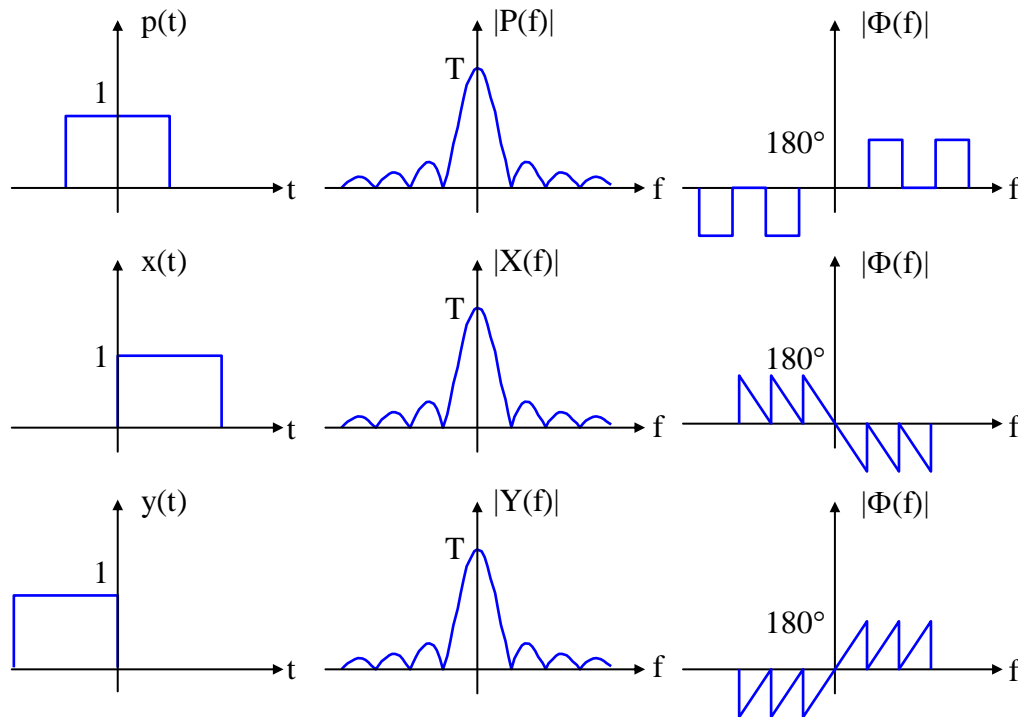


Figura 1.30: Ilustração da propriedade do deslocamento no domínio do tempo.

v. Deslocamento no domínio da frequência

O deslocamento no domínio da frequência causa uma multiplicação (modulação) no domínio do tempo, isto é,

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0) \quad (1.63)$$

Exemplo 1.13: Determine a transformada de Fourier do pulso de RF (rádio-frequência) dado por:

$$x(t) = A \operatorname{rect}(t/T) \cos(2\pi f_c t) \quad (1.64)$$

Pelas relações de Euler sabe-se que:

$$\cos(2\pi f_c t) = \frac{1}{2} \left[e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t} \right]$$

Então:

$$x(t) = \frac{A}{2} \left[\text{ret}(t/T) e^{j2\pi f_c t} + \text{ret}(t/T) e^{-j2\pi f_c t} \right]$$

Aplicando as propriedades da linearidade e do deslocamento no domínio da frequência tem-se que:

$$X(f) = \frac{AT}{2} \{ \sin c((f - f_c)T) + \sin c((f + f_c)T) \}$$

Considerando a situação em que $f_c \gg 1/T$ pode-se aproximar o resultado acima por:

$$X(f) = \begin{cases} \frac{AT}{2} \sin c((f - f_c)T), & f \geq 0 \\ \frac{AT}{2} \sin c((f + f_c)T), & f < 0 \end{cases}$$

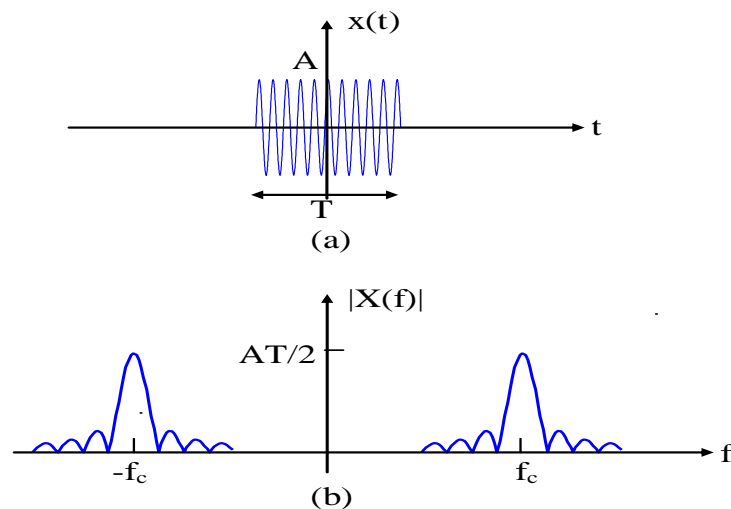


Figura 1.31: (a) Pulso de RF, (b) Transformada de Fourier do pulso de RF.

Esta propriedade é também conhecida como teorema da modulação, muito utilizado na teoria de telecomunicações. Observe que o espectro de $x(t)$ é deslocado para as frequências $\pm f_c$. Em telecomunicações esta operação é chamada de modulação em amplitude, isto é, a amplitude de um sinal senoidal varia de acordo com um outro sinal qualquer $x(t)$, e no domínio da frequência ela consiste de um deslocamento espectral.

Exemplo 1.14: Determinação da transformada de Fourier de um sinal modulado em amplitude tal que:

$$s(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (1.65)$$

Utilizando as relações de Euler tem-se que:

$$s(t) = \frac{1}{2} [x(t)e^{j2\pi f_c t} + x(t)e^{-j2\pi f_c t}]$$

Novamente, aplicando as propriedades da linearidade e do deslocamento na frequência tem-se que:

$$S(f) = \frac{1}{2} X(f - f_c) + \frac{1}{2} X(f + f_c)$$

Observa-se novamente que a modulação consiste de um deslocamento espectral. O espectro de $x(t)$ é deslocado para as frequências $\pm f_c$. Admitindo que $x(t)$ seja um sinal de banda limitada como ilustra a figura 1.32.a, então o espectro de $s(t)$ é o espectro de $x(t)$ deslocado para $\pm f_c$. Se f_c for suficientemente alta então $s(t)$ pode ser transmitido através de ondas eletromagnéticas a longas distâncias. O sinal $x(t)$ é chamado de sinal modulante e $\cos(2\pi f_c t)$ é chamado de portadora.

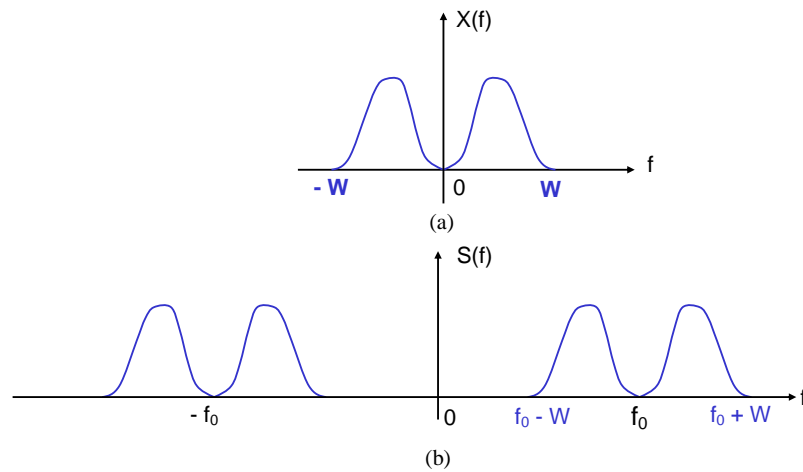


Figura 1.32: (a) Espectro do sinal modulante, (b) Espectro do sinal modulado em amplitude.

vi. Integração e diferenciação no domínio do tempo

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f) \quad (1.66)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f) \quad (1.67)$$

vii. Área sob $x(t)$

Este resultado é obtido fazendo $f = 0$ na equação (1.48), isto é,

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \quad (1.68)$$

viii. Área sob $X(f)$

Analogamente, este resultado é obtido fazendo $t = 0$ na equação (1.49), isto é,

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df \quad (1.69)$$

ix. Relação de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (1.70)$$

Esta propriedade mostra que a energia total de um sinal pode ser determinada tanto no domínio da frequência quanto no tempo. O termo $|X(f)|^2$ é chamado de espectro densidade de energia, quando o sinal é aleatório ele é chamado de espectro densidade de potência.

x. Convolução no domínio do tempo

A convolução entre dois sinais é definida pela seguinte equação:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (1.71)$$

É possível mostrar que a transformada de Fourier desta operação é dada por:

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f) Y(f) \quad (1.72)$$

Esta propriedade é muito utilizada quando se trabalha com sistemas lineares invariantes no tempo, pois a convolução se transforma em produto no domínio da frequência, facilitando a caracterização de sistemas.

xi. Multiplicação no domínio do tempo

$$Se h(t) = x(t)y(t) \text{ então } H(f) = X(f) * Y(f) \quad (1.73)$$

Assim, a multiplicação de dois sinais no domínio do tempo apresenta uma transformada que é a convolução de suas transformadas individuais.

As propriedades foram apresentadas sem as devidas demonstrações, uma vez que isto estenderia por demais o assunto, fugindo do intuito deste trabalho. No entanto, o leitor mais interessado poderá fazer tais demonstrações aplicando a definição da transformada de Fourier das equações (1.48) e (1.49).

1.9. Transformada de Fourier de funções periódicas

A princípio um sinal periódico não possui transformada de Fourier, pois ele não é absolutamente integrável, contudo a série e a transformada de Fourier estão relacionadas uma com a outra. Assim, é possível obter a transformada de Fourier de uma função periódica diretamente de sua série exponencial como segue:

Uma função periódica, que satisfaz as condições de Dirichlet, pode ser representada pela série exponencial de Fourier:

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{j2\pi f_0 t} \quad (1.74)$$

em que, $f_0 = 1/T$ e os coeficientes a_n são calculados pela equação abaixo:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt \quad (1.75)$$

Assim, a transformada de Fourier de $x_T(t)$ pode ser calculada como segue,

$$X_T(f) = \mathfrak{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

Aplicando a propriedade da linearidade, a transformada da soma é igual à soma das transformadas, assim:

$$X_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathfrak{F} \{ e^{j2\pi f_0 t} \}$$

No exemplo (1.9) foi calculada a transformada de Fourier da função exponencial complexa, assim pela equação (1.56),

$$X_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(f - nf_0) \quad (1.76)$$

Isto significa que a transformada de Fourier de um sinal periódico consiste de impulsos localizados nas frequências harmônicas do sinal, sendo que a amplitude de cada impulso corresponde aos coeficientes na da série exponencial. Nota-se que este resultado deveria ser esperado, pois uma função periódica contém componentes de frequências somente nas frequências harmônicas do sinal.

Exemplo 1.15: Determinação da transformada de Fourier da função trem de impulsos, com período T , definida como:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.77)$$

Os coeficientes da série exponencial de Fourier são dados por:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt$$

em que, $f_0 = 1/T$.

Como a função $\delta(t)$ é nula para todo $t \neq 0$, então,

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T}$$

Portanto, pela equação (3.32),

$$\mathfrak{T}\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_0) \quad (1.78)$$

Esta equação mostra que a transformada de Fourier da função trem de impulsos, consiste de uma outra função trem de impulsos multiplicado pelo fator $1/T$.

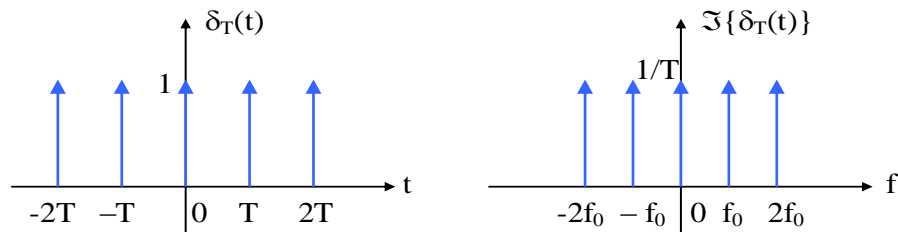


Figura 1.33: Função trem de impulsos e sua transformada de Fourier.

Capítulo 2

Modulação em Amplitude

2.1 Introdução

O processo de conversão de um sinal de informação em sua banda base em um sinal de frequência alta é chamado de modulação. Por sinal na banda base entende-se um sinal cujo espectro de amplitude se estende desde a frequência zero até uma frequência máxima que chamamos de banda do sinal. No contexto deste curso podemos inicialmente definir modulação como um processo utilizado para transladar o espectro de um sinal de frequência baixa para um sinal frequência alta. Este procedimento permite a transmissão do sinal de informação de forma eficiente através de algum meio/canal de transmissão. Por exemplo, para transmitir um sinal de voz através de ondas de radio a grandes distancias deve-se convertê-lo em um sinal de frequência alta utilizando algum tipo de modulação. A modulação também possibilita a transmissão de mais de um sinal de informação ao mesmo tempo, desde que eles sejam transladados para diferentes frequências.

Como a modulação desloca o conteúdo espectral de um sinal para uma banda de frequência muito mais alta, aparecem algumas vantagens práticas em se utilizar esta técnica para transmitir sinais de informação:

- Quando se desloca um sinal de voz ou áudio para uma banda de frequência muito maior, as antenas operam com mais eficiência, pois elas irradiam com facilidade sinais cujo comprimento de onda está próximo ao da antena.
- A modulação permite o uso de multiplexagem que possibilita a transmissão simultânea de vários canais.

- Em alguns casos ela permite algum controle de ruído, principalmente na modulação com faixa lateral única e na modulação em ângulo.

A modulação é definida como um processo no qual um dos parâmetros, amplitude, frequência ou fase, de um sinal senoidal de alta frequência é variado linearmente pelo sinal mensagem (ou sinal de informação, ou sinal modulante).

$$s(t) = A \cos[\theta_i(t)] \quad (2.1)$$

Na equação (2.1) A é a amplitude do sinal senoidal, $\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \phi$ é o ângulo de fase instantâneo, ϕ é referência de fase, em geral $\phi = 0$. O sinal propriamente dito é chamado de portadora (*carrier*).

Quando a amplitude da portadora varia diretamente pelo sinal mensagem obtém-se a modulação em amplitude (AM – *Amplitude Modulation*), quando o ângulo de fase é variado obtém-se a modulação em ângulo que será estudada no próximo capítulo. Além disso, a modulação em ângulo é subdividida em modulação em frequência (FM – *Frequency Modulation*) ou em fase (PM – *Phase Modulation*), dependendo, respectivamente, se a frequência ou fase da portadora é variada pelo sinal modulante.

Existem diversos tipos de modulação em amplitude: Modulação em Amplitude com banda lateral dupla e portadora presente (AMDSB – *Amplitude Modulation – Double Side Band*) ou com portadora suprimida (AMDSB-SC – *Double Side Band and Supressed Carrier*), modulação em amplitude com banda lateral única (AMSSB – *Single Side Band*) e modulação em amplitude com banda lateral vestigial (AMVSB – *Vestigial Side Band*).

Neste capítulo serão apresentados os principais conceitos da modulação em amplitude, como também serão estudados os diversos métodos de modulação e suas aplicações em radiodifusão comercial.

2.2 Modulação em amplitude com banda lateral dupla e portadora presente (AMDSB)

A modulação em amplitude desloca linearmente o espectro de um sinal de informação para uma frequência muito alta de modo que ele possa ser transmitido via sinais de RF. Este resultado é conseguido, basicamente, multiplicando o sinal de

informação por uma onda senoidal com frequência muito maior do que a frequência máxima do espectro do sinal de informação.

Um típico sinal modulado em amplitude com banda lateral dupla e portadora presente pode ser descrito pela seguinte equação:

$$s(t) = A_c [1 + \beta m(t)] \cos(2\pi f_c t) \quad (2.2)$$

em que: A_c é a amplitude da portadora, e $m(t)$ é o sinal de informação ou mensagem tal que $|m(t)| \leq 1$. β é chamado de índice de modulação, ele é um número positivo tal que $\beta \leq 1$ e f_c é a frequência da portadora. A parcela $[1 + \beta m(t)]$ é conhecida como envoltória (ou envelope) do sinal modulado em amplitude.

A condição $\beta \leq 1$ assegura que a envoltória seja sempre um valor positivo para não haver distorção no sinal modulado. Admitindo $m(t)$ um sinal limitado em banda, por exemplo, em W Hz, para facilidade de extração do sinal mensagem e facilidade de transmissão estabelece-se, em geral, a seguinte condição:

$$f_c \gg W$$

A figura 2.1 mostra o sinal modulado em amplitude com banda lateral dupla em função do tempo. Observe na figura 2.1.c que as partes com amplitudes positivas (ou negativas) da portadora, (também chamadas de envoltória do sinal modulado) variam linearmente com o sinal modulante, desse modo a informação está contida nas variações de amplitude da portadora.

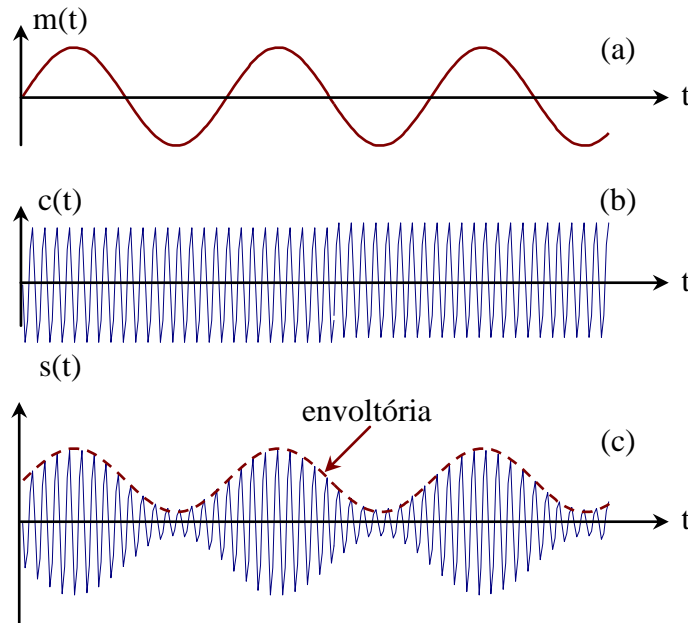


Figura 2.1: Modulação em amplitude; (a) sinal modulante;
(b) portadora; (c) sinal modulado.

A transformada de Fourier da equação (2.2) fornece o espectro do sinal modulado em amplitude. Com o auxílio das relações de Euler e do teorema da modulação, $m(t)e^{j2\pi f_c t} \xrightarrow{TF} M(f - f_c)$ - ver propriedades da transformada de Fourier, é fácil mostrar que,

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \delta(f \pm f_c) + \frac{\beta A_c}{2} M(f \pm f_c) \quad (2.3)$$

Observe que o espectro do sinal de informação é deslocado linearmente em torno de $\pm f_c$ juntamente com as raízes correspondentes à frequência portadora, como mostra a figura 2.2, abaixo. Supondo que a largura de banda do sinal de informação é W Hz, no espectro do sinal modulado em amplitude a parte espectral negativa da transformada de Fourier também é deslocada, assim a largura de faixa do sinal AM é igual a $2W$ Hz (duas vezes a largura de faixa do sinal modulante). Daí o nome modulação em amplitude com banda lateral dupla e portadora presente. Em geral utilizamos a sigla em inglês AMDSB para representar este tipo de modulação.

Na radiodifusão comercial as informações de áudio transmitidas são limitadas entre as frequências de 50 Hz a 5 KHz, neste caso $W = 5$ KHz. Como a modulação é feita com banda lateral dupla então a largura de banda de um sinal AM deverá ser igual a 10 KHz.

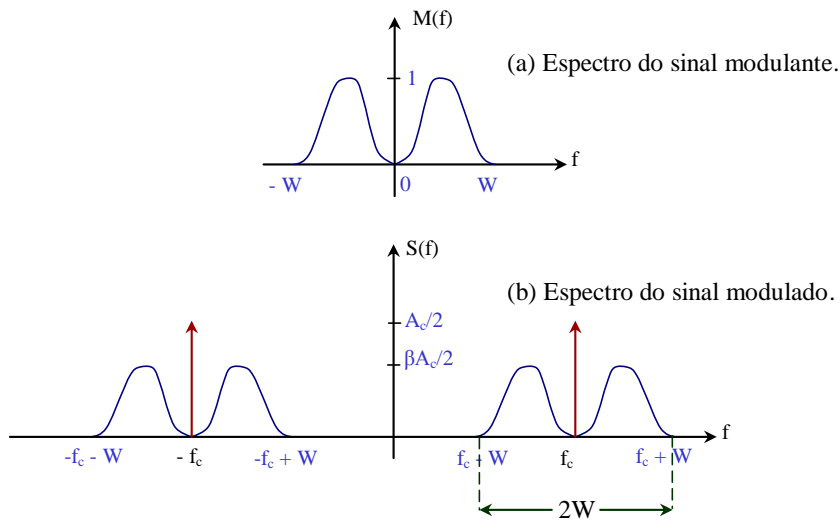


Figura 2.2: Espectro do sinal modulado em amplitude.

2.2.1 Modulação por um único tom

Vamos admitir que o sinal mensagem consista de um único tom cossenoidal com frequência f_m , isto é,

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t) = A_m \cos(w_m t) \quad (2.4)$$

Então, podemos escrever a equação do sinal modulado em amplitude tal que,

$$s(t) = A_c [1 + k_m A_m \cos(w_m t)] \cos(w_c t) \quad (2.5)$$

em que k_m é conhecido como sensibilidade de amplitude do modulador, com unidade [1/volt].

Admitindo $\beta = k_m A_m$, como o índice de modulação, então:

$$s(t) = A_c [1 + \beta \cos(w_m t)] \cos(w_c t) \quad (2.6)$$

Lembrando que a relação trigonométrica do produto de dois cossenos está relacionada com o cosseno da soma e da diferença dos ângulos, isto é, $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$. Aplicando esta relação na equação (2.6) obtém-se que:

$$s(t) = A_c \cos(w_c t) + \frac{\beta A_c}{2} \cos((w_c + w_m)t) + \frac{\beta A_c}{2} \cos((w_c - w_m)t) \quad (2.7)$$

A equação (2.7) nos mostra que utilizando um tom cossenoidal como sinal modulante, o sinal AM pode ser representado por uma soma de três fasores, como mostra a figura (2.3). Os fasores das bandas laterais, $\frac{\beta A_c}{2} \cos((w_c \pm w_m)t)$, giram por $\pm w_m$ rad/s em relação à frequência da portadora. Note que o vetor resultante pertence à mesma reta (direção) do fasor da portadora e que o módulo da amplitude representa a envoltória do sinal modulado.

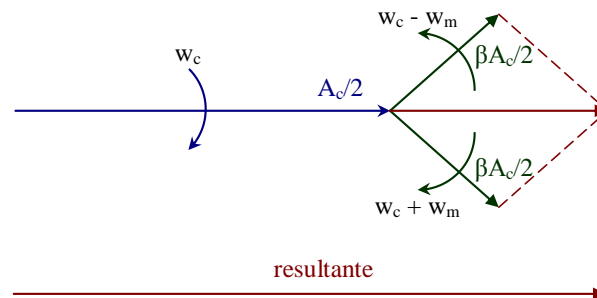


Figura 2.3: Representação fasorial da modulação AMDSB.

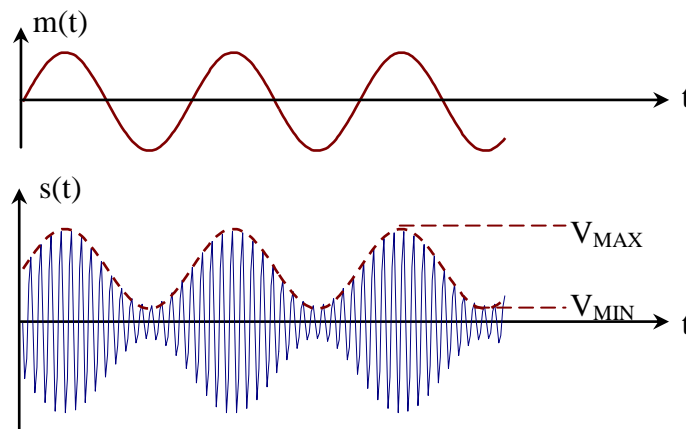


Figura 2.4: Modulação por um único tom.

Podemos compreender melhor o índice de modulação observando a figura 2.4 e admitindo que V_{MAX} e V_{MIN} sejam, respectivamente, as tensões máxima e mínima da envoltória (linha tracejada) do sinal modulado, então utilizando a envoltória da equação (2.6),

$$V_{MAX} = A_c(1 + \beta) \quad \text{para } \cos(w_m t) = 1$$

$$V_{MIN} = A_c(1 - \beta) \quad \text{para } \cos(w_m t) = -1$$

Combinando as duas expressões acima não é difícil mostrar que:

$$\beta = \frac{V_{MAX} - V_{MIN}}{V_{MAX} + V_{MIN}} \quad (2.8)$$

E a tensão da portadora é dada pelo valor médio da envoltória, isto é,

$$A_c = \frac{V_{MAX} + V_{MIN}}{2} \quad (2.9)$$

Apesar de ter sido admitido que o sinal modulante é cossenoidal, as equações (2.8) e (2.9) podem ser usadas para qualquer tipo de sinal de informação com valor médio nulo. Para um sinal qualquer, pode se definir o índice de modulação como a razão entre o valor rms do sinal mensagem pelo valor rms da portadora não modulada.

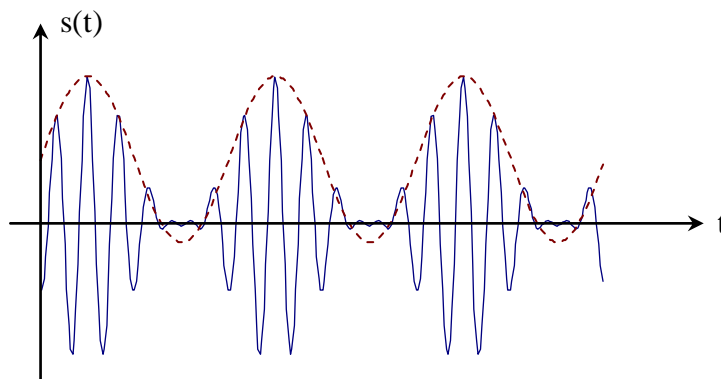


Figura 2.5: Sinal modulado com índice de modulação maior do que 1.

Observe que se $V_{\text{MIN}} < 0$ então o índice de modulação será maior do que 1 (100%), neste caso, pelas características dos moduladores, a tendência da envoltória do sinal é ficar limitada em zero e, portanto distorcida, como mostra a figura 2.5. Neste caso dizemos que o sinal AM está sobremodulado, a envoltória não será a mesma do sinal modulante. Assim, para não haver distorção na envoltória, o índice de modulação deverá sempre ser menor ou igual a 100%.

Utilizando a função delta de Dirac, pode-se calcular a transformada de Fourier da equação (2.7), tal que:

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \delta(f \pm f_c) + \frac{\beta A_c}{4} \delta(f + f_c \pm f_m) + \frac{\beta A_c}{4} \delta(f - f_c \pm f_m) \quad (2.10)$$

Portanto o espectro de amplitude de um sinal AM, modulado por um tom senoidal, consiste de funções delta deslocadas para as frequências $\pm f_c$ (para a portadora) e para as frequências $f_c \pm f_m$ e $-f_c \pm f_m$ (para as bandas laterais), como mostra a figura 2.6.

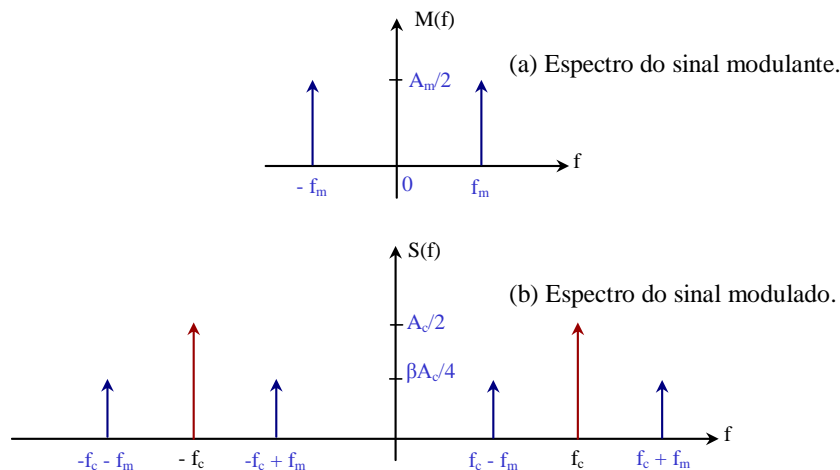


Figura 2.6: Espectro do sinal modulado em amplitude por um único tom.

A figura 2.7 mostra o espectro unilateral de potência da modulação por um único tom. Utilizando a equação (2.7) podemos observar que a potência média entregue a um resistor de 1Ω é dada por três componentes:

- Potência da portadora: $P_c = \frac{A_c^2}{2}$
- Potência de uma das bandas laterais (superior ou inferior): $\frac{1}{8} \beta^2 A_c^2 = \frac{1}{4} \beta^2 P_c$

Combinando as duas equações acima podemos mostrar que a potência total de um sinal AMDSB modulado por um tom cossenoidal é dada por:

$$P_T = \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) \frac{A_c^2}{2} = \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) P_c \quad (2.11)$$

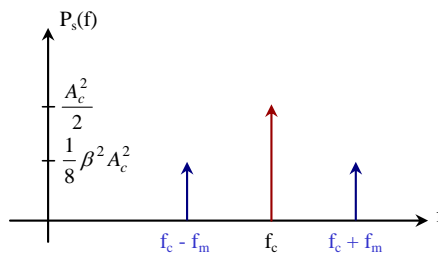


Figura 2.7: Espectro unilateral de potência.

Exemplo 1: Um transmissor AM opera com potência total de 100 W e índice de modulação igual a 100% para um sinal modulante cossenoidal. Determine a potência contida nas bandas laterais e na portadora.

Pela equação (2.11) tem-se que:

$$P_c = \frac{2}{2 + \beta^2} P_T = \frac{2}{3} 100 = 66.6 \text{ W}$$

A potência contida nas duas bandas laterais será:

$$P_{BL} = \frac{\beta^2}{2} P_c = 33.3 \text{ W}$$

Definindo a eficiência de potência como a razão entre a potência das bandas laterais sobre a potência total, então:

$$E = \frac{P_{BL}}{P_T} 100 \% \quad (2.12)$$

em que P_{BL} é a potência das duas bandas laterais.

Podemos observar que para um índice de modulação igual a 100%, 2/3 da potência total é gasta para a transmissão da portadora e somente 1/3 da potência está contida nas faixas laterais. A eficiência de potência é apenas 33%, como a portadora não transporta informação, há um desperdício de potência muito grande. Admitindo um sinal de informação qualquer a eficiência pode chegar a 50% [Carlson], mesmo assim, podemos concluir que a modulação AMDSB com portadora presente não é uma técnica eficiente para se transmitir sinais de informação.

2.3 Moduladores AMDSB

Para se gerar sinais modulados em amplitude é necessário construir circuitos que fazem a operação de multiplicação, como mostra a equação (2.2). Nesta secção vamos estudar os princípios de geração de sinais AM que utilizam dispositivos cuja relação entrada e saída é quadrática e também os dispositivos de chaveamento.

2.3.1 Modulador quadrático

O modulador quadrático utiliza um dispositivo não linear com relação entre entrada e saída quadrática, do tipo $y = Ax + Bx^2$ em que x é o sinal de entrada, y o sinal de saída e A e B constantes. Por exemplo, um diodo trabalhando com baixas tensões, ou um transistor polarizado na região não linear pode ser aproximado por uma lei entre entrada e saída quadrática.

Admitindo como sinal de entrada a soma da portadora com o sinal modulante, isto é,

$$x(t) = E_c \cos(2\pi f_c t) + m(t) \quad (2.13)$$

Então,

$$y(t) = A[E_c \cos(2\pi f_c t) + m(t)] + B[E_c \cos(2\pi f_c t) + m(t)]^2$$

Desenvolvendo a expressão acima tem-se:

$$y(t) = AE_c \cos(w_c t) + Am(t) + BE_c^2 \cos^2(w_c t) + 2BE_c m(t) \cos(w_c t) + Bm^2(t)$$

$$y(t) = Am(t) + Bm^2(t) + \underbrace{AE_c \left[1 + \frac{2B}{A} m(t) \right] \cos(2\pi f_c t) + BE_c^2 \cos^2(2\pi f_c t)}_{\text{Modulação em Amplitude}} \quad (2.14)$$

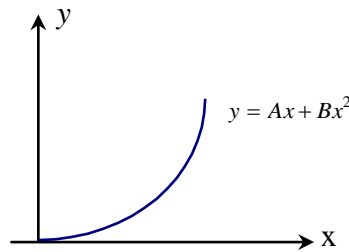


Figura 2.8: Dispositivo com lei quadrática.

Observe que a equação (2.14) é constituída de três partes distintas o sinal na banda base e o seu valor ao quadrado, o sinal modulado em amplitude (parte central da equação) e a portadora ao quadrado. Estes sinais são ilustrados no domínio da frequência na figura 2.9. Observe também que estes espectros não se sobrepõem se $f_c > 3W$ (Hz).

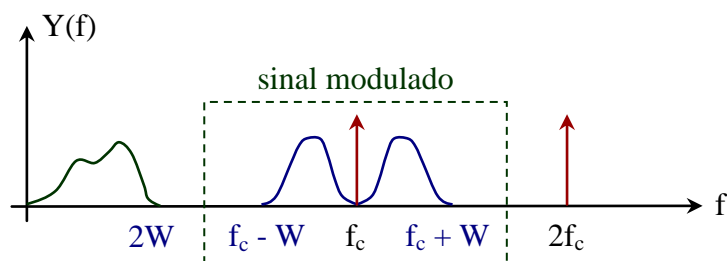


Figura 2.9: Espectro de amplitude na saída do dispositivo de lei quadrática.

Um filtro passa-banda com frequência de ressonância f_c e largura de banda $2W$, colocado na saída do dispositivo de lei quadrática, seleciona a parte do espectro correspondente ao sinal AM, como mostra o diagrama de blocos da figura 2.10. As componentes de frequência indesejáveis são eliminadas pelo filtro. Portanto em sua saída tem-se somente o sinal modulado em amplitude.

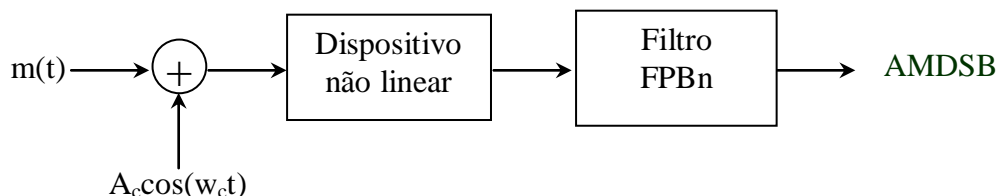


Figura 2.10: Diagrama de blocos do modulador quadrático.

Diodos e transistores são os elementos não lineares mais comuns utilizados na implementação deste tipo de modulador, porém, como eles trabalham com pequenos sinais eles têm a desvantagem de apresentarem relação sinal-ruído baixa e altas distorções.

2.3.2 Moduladores por chaveamento

A figura 2.11 ilustra o princípio de funcionamento de um modulador AM por chaveamento. Na sua entrada é aplicado o sinal correspondente à envoltória do sinal AMDSB, ou seja, $E + m(t)$ tal que, $E + m(t) \geq 0$. O modulador opera como se fosse uma chave que abre e fecha na mesma taxa (w_c) da portadora. Quando a chave está fechada a tensão no ponto A é zero e quando ela está aberta esta tensão acompanha o sinal de entrada $E + m(t)$. O resistor R impede que a fonte de sinal fique em curto. Portanto podemos escrever que:

$$e_A(t) = \begin{cases} 0, & \rightarrow \text{chave fechada} \\ k[E + m(t)] & \rightarrow \text{chave aberta} \end{cases} \quad (2.15)$$

Observe que podemos reescrever a tensão $e_A(t)$ como a multiplicação da envoltória $E + m(t)$ por uma onda quadrada, $q(t)$, com pulsos de largura τ , amplitude chaveando entre 0 e 1, e frequência angular igual à w_c , assim,

$$e_A(t) = [E + m(t)]q(t) \quad (2.16)$$

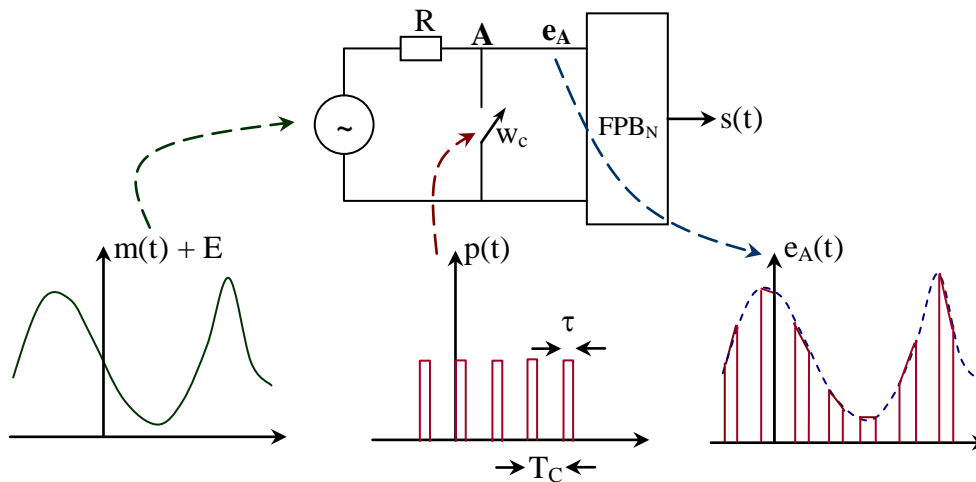


Figura 2.11: Modulador por chaveamento.

Escrevendo $e_A(t)$ em série trigonométrica de Fourier na forma compacta tem-se que:

$$e_A(t) = [E + m(t)][a_0 + a_1 \cos w_c t + a_2 \cos 2w_c t + \dots] \quad (2.17)$$

Portanto,

$$e_A(t) = a_0[E + m(t)] + \underbrace{a_1[E + m(t)] \cos w_c t}_{\text{Modulação em Amplitude}} + a_2[E + m(t)] \cos 2w_c t + \dots \quad (2.18)$$

Novamente, do mesmo modo que o modulador quadrático, aplicando um filtro passa-banda com frequência de ressonância f_c e largura de banda $2W$, no sinal chaveado $e_A(t)$, seleciona-se a parte do espectro correspondente ao sinal AM, como mostra o diagrama de blocos da figura 2.11. Portanto em sua saída tem-se somente o sinal modulado em amplitude.

A figura 2.12 mostra um modulador por chaveamento utilizando um diodo. Na entrada do diodo é aplicado o sinal $A_c \cos(w_c t) + m(t)$. Admitindo sinais com amplitudes suficientemente altas, o diodo opera como uma chave ou como um circuito retificador e coloca na sua saída a parte positiva do sinal de entrada. Observe que a tensão no ponto A, $e_A(t)$, apresenta as mesmas propriedades do sinal na figura 2.11. O circuito LC

trabalha como um filtro passa-banda com frequência de ressonância ω_c e coloca em sua saída somente o sinal modulado em amplitude.

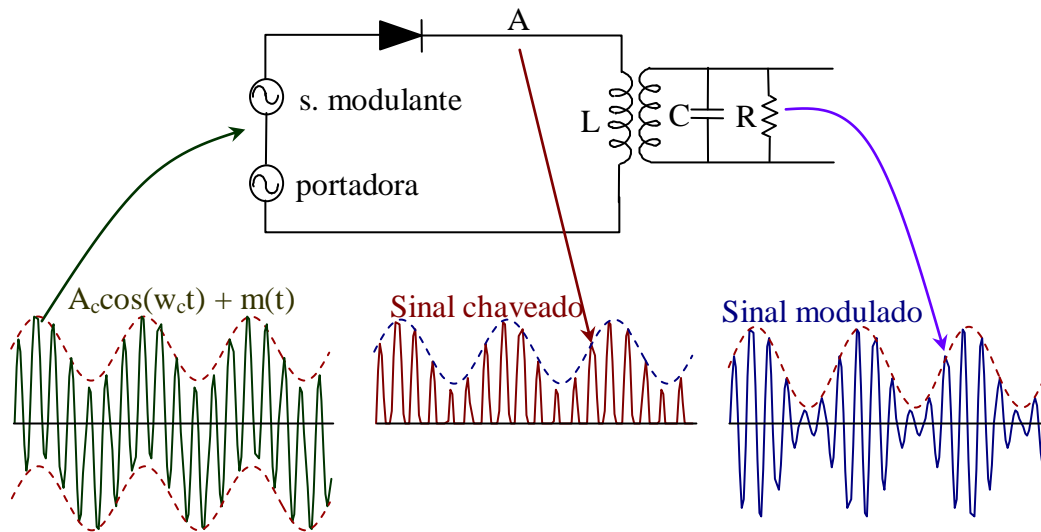


Figura 2.12: Modulador com diodo.

O modulador utilizando um amplificador classe C, mostrado na figura 2.13, também utiliza um dispositivo de chaveamento para gerar um sinal modulado em amplitude. Neste caso é utilizado um transistor para gerar um sinal AM. O transistor operando como um amplificador classe C é polarizado abaixo da tensão corte de tal modo que a corrente de saída (i_C) seja nula para o ciclo negativo do sinal. Esta é também uma operação de chaveamento necessária para produzir o sinal modulado em amplitude como mostra a figura 2.13.

Neste circuito é aplicado junto com a tensão de alimentação do amplificador o sinal mensagem $m(t)$. Aplicando um sinal de RF na base do transistor, fica evidente que a corrente de coletor (i_C) do amplificador terá a forma de pulsos cuja amplitude dependerá da tensão do sinal mensagem $m(t)$. O circuito tanque do primário do transformador de RF é sintonizado na frequência da portadora, assim, no secundário do transformador tem-se o sinal modulado em amplitude.

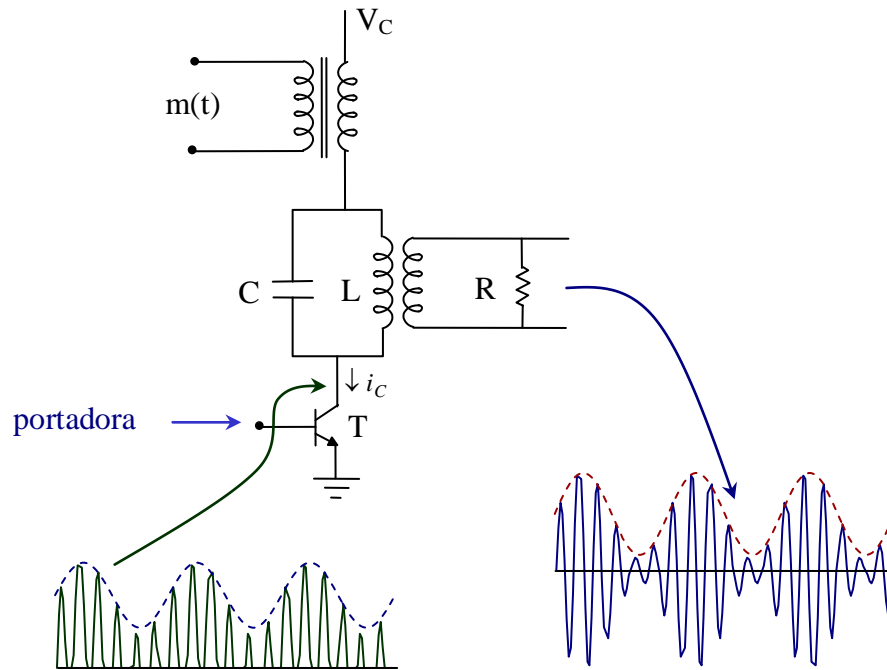


Figura 2.13: Modulador Classe C.

Utilizando este tipo de modulador a modulação é feita no estágio final do transmissor e em seguida o sinal é aplicado à antena. Este tipo de modulador é muito empregado na prática, pois ele evita a dificuldade de construção de amplificadores de alta potência lineares nos sistemas de radiodifusão.

Hoje em dia existem dispositivos integrados que fazem a operação de multiplicação com alta confiabilidade, chamados de moduladores balanceados. O método mais popular empregado para se obter um produto de dois sinais utiliza a propriedade de transcondutância variável (ou seja, g_m varia com a corrente de coletor) dos transistores bipolares. Os circuitos utilizando esta propriedade consistem de um amplificador diferencial em quadratura chaveado por um amplificador diferencial, para mais detalhes veja o apêndice II.

Para facilidade, como qualquer tipo de modulador, faz a operação de multiplicação entre dois sinais, os moduladores serão representados por um produto, como mostra o diagrama de blocos da figura 2.14.

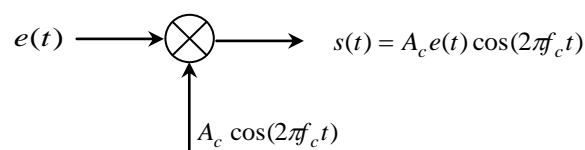


Figura 2.14: Modulador de produto.

A figura 2.15 mostra o diagrama de blocos de um transmissor para a radiodifusão AM. O circuito oscilador, em geral controlado a cristal, gera a portadora cossenoidal ou senoidal que em seguida é amplificada para excitar o modulador. O sinal de informação, na faixa de áudio (0 - 5 kHz), é pré-amplificado e em seguida amplificado em potência para também excitar o modulador classe C. O sinal modulado é aplicado em uma antena para ser irradiado.

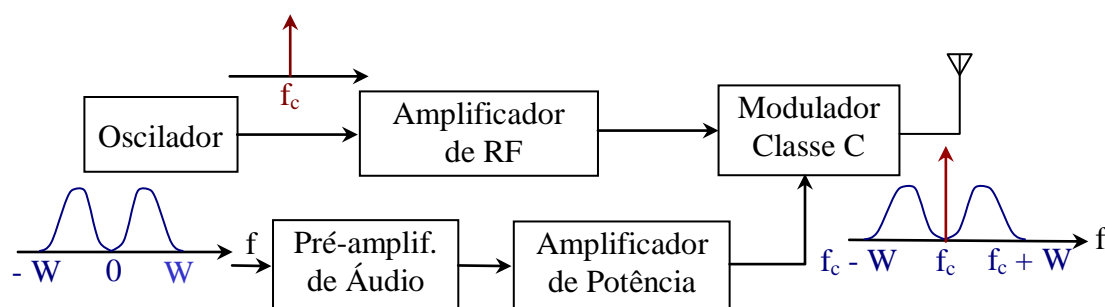


Figura 2.15: Transmissor AM.

2.4 Conversão de frequências

Nos sistemas de comunicações frequentemente se tem a necessidade de transladar o espectro de um sinal modulado para uma outra frequência da portadora, sem que as características espectrais do sinal permaneçam inalteradas. Este procedimento é conhecido conversão de frequências e é muito utilizado nos receptores de sinais de áudio e TV, onde é feita uma conversão do sinal recebido para uma frequência mais baixa chamada de frequência intermediária fixa (FI). Neste caso a amplificação de RF é sempre realizada na mesma frequência, independentemente da emissora.

O processo de conversão de frequência é feito por dispositivos com características não lineares tais como um transistor ou um diodo operando com pequenos sinais. Neste caso um dos termos na saída do circuito é o produto dos sinais de entrada.

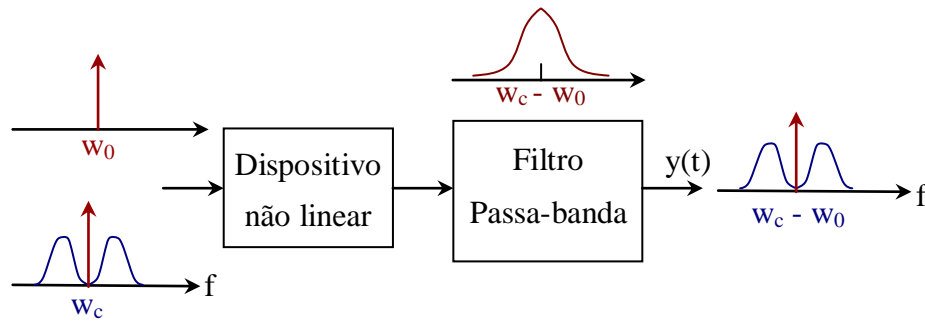


Figura 2.16: Conversor de frequências.

Admitindo que o dispositivo não linear apresente uma lei quadrática a entre entrada e a saída, então,

$$e_s = Ae_i + Be_i^2 \quad (2.19)$$

Admitindo como tensão de entrada a soma de dois sinais tais que um seja o sinal modulado e outro um sinal cossenoidal, então,:

$$e_i = e(t)\cos w_c t + E_0 \cos w_0 t \quad (2.20)$$

em que $e(t)$ é a envoltória do sinal modulado.

Então:

$$\begin{aligned} e_s &= A[e(t)\cos(w_c t) + E_0 \cos(w_0 t)] + B[e(t)\cos(w_c t) + E_0 \cos(w_0 t)]^2 \\ e_s &= Ae(t)\cos(w_c t) + AE_0 \cos(w_0 t) + Be^2(t)\cos^2(w_c t) + BE_0^2 \cos^2(w_0 t) \\ &\quad + \underline{\underline{BE_0 e(t)\cos(w_c + w_0)t}} + \underline{\underline{BE_0 e(t)\cos(w_c - w_0)t}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Observe que os últimos dois termos da equação (2.21) representam o sinal modulado nas frequências iguais a $w_c + w_0$ e $w_c - w_0$. Um filtro passa-banda com frequência de ressonância $w_c - w_0$ recupera o sinal modulado nesta mesma frequência, isto é,

$$y(t) = BE_0 e(t) \cos(w_c - w_0)t \quad (2.22)$$

Em geral o processo de conversão é representado por um bloco de produto como na figura 2.17.

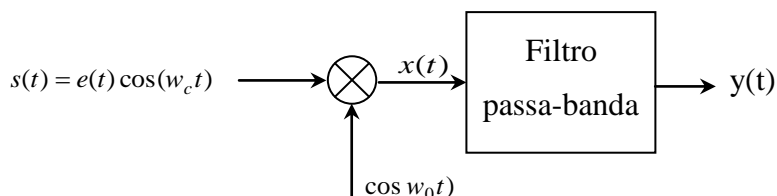


Figura 2.17: Conversor de frequências.

Neste caso, utilizando propriedades trigonométricas é fácil mostrar que,

$$x(t) = \frac{1}{2} e(t) \cos(w_c + w_0)t + \frac{1}{2} e(t) \cos(w_c - w_0)t \quad (2.23)$$

O filtro passa-banda coloca em sua saída um dos dois sinais, $y(t) = \frac{1}{2} e(t) \cos(w_c + w_0)t$ ou então $y(t) = \frac{1}{2} e(t) \cos(w_c - w_0)t$, dependendo de sua frequência de ressonância.

2.5 Demodulação AMDSB

A demodulação é o processo inverso da modulação, ela consiste em extrair o sinal modulante a partir da portadora de RF modulada. O dispositivo que realiza a demodulação é geralmente chamado de detector. Existem vários tipos de detectores usados para demodular um sinal AM, como por exemplo, o detector quadrático que usa um dispositivo com lei quadrática, o detector de produto que será estudado na demodulação AMDSB-SC. Nesta secção será estudado o detector de envoltória, que por sua praticidade e simplicidade é utilizado nos receptores comerciais AM e também em receptores de TV analógica.

A figura 2.18 mostra o circuito básico de um detector de envoltória. Ele consiste de um diodo retificador e um resistor em paralelo com um capacitor que atuam como um filtro para o sinal de RF. Admitindo um diodo ideal pode-se dizer que ele trabalha do mesmo modo que um retificador de meia onda. O diodo retifica o sinal de RF aplicado na sua entrada (note na figura 2.18 que o sinal retificado no diodo não existe, ele é apenas ilustrativo). No semiciclo positivo do sinal o capacitor se carrega com o valor de pico do sinal de entrada. Quando o sinal cai abaixo do valor de pico o diodo fica bloqueado e o capacitor se descarrega lentamente através do resistor R_L . No próximo semiciclo positivo, o diodo novamente conduz e o capacitor se carrega com o pico do sinal, repetindo o processo, desse modo a tensão no capacitor ou no resistor acompanha a envoltória do sinal.

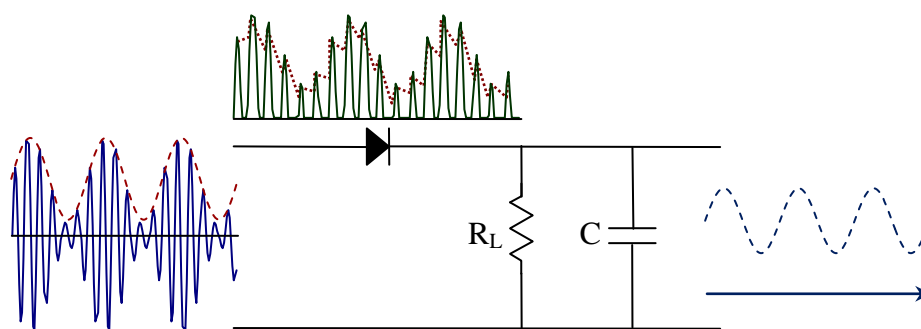


Figura 2.18: Detector de envoltória.

Três tipos de distorção devem ser considerados na análise de um detector de envoltória: não linearidades na curva característica do diodo, distorção por corte diagonal e distorção por efeito de carregamento do diodo.

A distorção por não linearidade na curva característica do diodo pode ser minimizada utilizando diodos de germânio, cuja tensão de condução é menor que 200 mV, a amplitude da portadora na entrada do detector deve ser relativamente grande, da ordem de $3 V_{pp}$ ou maior, e índice de modulação inferior a 80%.

A distorção por corte diagonal ocorre quando a constante de descarga RC é muito grande. Nesse caso, o capacitor não se descarrega suficientemente rápido para acompanhar as variações da envoltória. A figura 2.19 ilustra o efeito da distorção por corte diagonal nos detectores de envoltória.

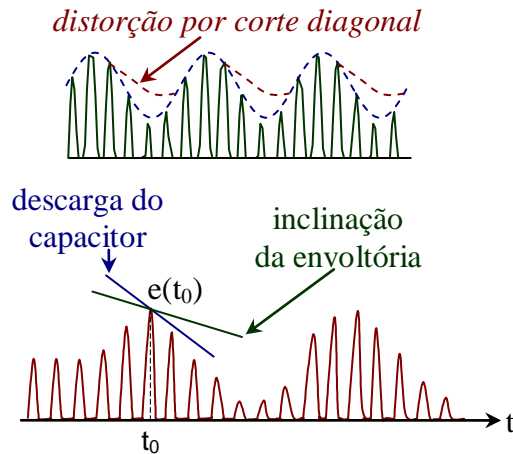


Figura 2.19: Distorção por corte diagonal.

Admitindo uma modulação por um único tom a equação da envoltória do sinal AM pode ser escrita como:

$$e(t) = A_c [1 + \beta \cos(w_m t)] \quad (2.24)$$

em que w_m é a máxima frequência do sinal de informação.

Admitindo t_0 um instante de tempo em que a envoltória do sinal passa por um máximo, então a tensão de descarga do capacitor no resistor R_L será:

$$e(t_0)e^{-(t-t_0)/R_L C} \quad (2.25)$$

Observe com o auxílio da figura 2.19 que para não haver distorção por corte diagonal a inclinação (derivada) da envoltória do sinal no instante t_0 deve ser menor que a inclinação da curva descarga do capacitor, assim,

$$\left. \frac{d}{dt} e(t) \right|_{t=t_0} \leq \left. \frac{d}{dt} [e(t_0)e^{-(t-t_0)/R_L C}] \right|_{t=t_0} \quad (2.26)$$

Desenvolvendo a equação acima,

$$\beta A_c w_m \sin(w_m t_0) \leq \frac{A_c}{R_L C} [1 + \beta \cos(w_m t_0)]$$

$$\beta [w_m R_L C \sin(w_m t_0) - \cos(w_m t_0)] \leq 1$$

Utilizando propriedades de trigonometria na expressão acima, pode-se mostrar que para não ocorrer distorção por corte diagonal a seguinte relação deve ser satisfeita,

$$\beta \sqrt{w_m^2 R_L^2 C^2 + 1} \leq 1 \quad (2.27)$$

A distorção por efeito de carregamento no diodo pode ocorrer quando conectamos uma carga ao detector, como por exemplo, um amplificador de áudio. A figura 2.20 ilustra este efeito. Na figura R_2 é o resistor de carga e C_b é um capacitor de bloqueio DC que apresenta reatância baixa para o sinal de informação, dessa forma a carga oferecida não é a mesma para sinais AC e DC. Considerando a figura 2.20 na qual o diodo é excitado somente pela envoltória podemos observar que a corrente AC é distribuída entre R_1 e R_2 enquanto que a corrente DC passa somente por R_1 , assim,

$$I_{DC} = \frac{A_c}{R_1} \quad e \quad i_{AC \max} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} A_m \quad (2.28)$$

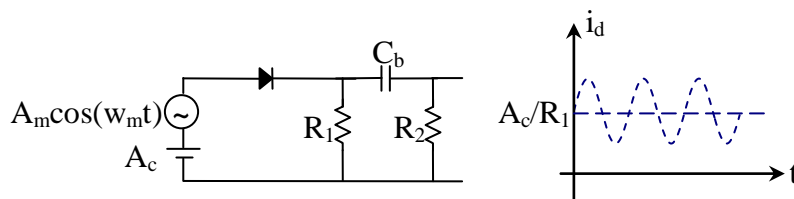


Figura 2.20: Efeito de carregamento do detector.

Observe também que a envoltória é sempre positiva, assim a corrente total no diodo deve ser sempre positiva para não haver distorção, ou seja,

$$I_{DC} \geq i_{AC \max} \Rightarrow \frac{A_c}{R_1} \geq \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} A_m$$

Como o índice de modulação $\beta = A_m/A_c$, então, para não haver distorção por sobrecarga do detector tem-se que:

$$\beta \leq \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.29)$$

2.6 Recepção AMDSB

Os primeiros receptores utilizados para recuperar o sinal modulante eram conhecidos como receptores de radiofrequência sintonizada. Ele consistia de um filtro passa-banda sintonizado na frequência da emissora, um amplificador de RF, um detector de envoltória e um amplificador de áudio, como mostra o diagrama de blocos da figura 2.21. A grande desvantagem deste tipo de receptor é que a largura de faixa do filtro aumenta conforme a frequência de sintonia (portadora) aumenta, fazendo com que o receptor perca a seletividade. Desse modo, frequências adjacentes à emissora não são rejeitadas.

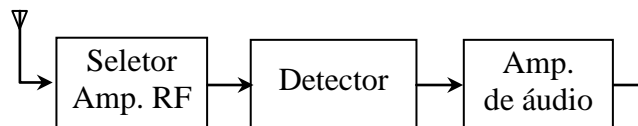


Figura 2.21: Sintonizador.

Em circuitos tanque RLC, de frequência alta o fator de qualidade $Q = X_L/R$ permanece praticamente constante independentemente da frequência de sintonia. Conforme a frequência de ressonância aumenta, a reatância indutiva aumenta na mesma proporção e, devido ao efeito *skin*, a resistência da bobina também aumenta, mantendo o fator de qualidade praticamente inalterado.

Como a largura de banda de um filtro passa-banda é $B_w = F_o/Q$, se o valor do fator de qualidade permanece inalterado, então a banda do circuito aumenta com o aumento da frequência.

Exemplo 2: Nas transmissões de radio AM a largura de banda padronizada é igual a 10 kHz. Se um receptor estiver sintonizando em uma emissora com frequência da portadora igual a 530 kHz, então o fator de qualidade do circuito de sintonia (seletor) do radio deveria ser:

$$Q = \frac{F_0}{B_w} = \frac{530 \text{ K}}{10 \text{ K}} = 53$$

Se este mesmo receptor for utilizado para captar outra emissora AM transmitindo com frequência da portadora em 1600 kHz, então a largura de banda do circuito sintonizado deverá ser:

$$B_w = \frac{1600}{53} \approx 30 \text{ kHz}$$

Observe que a largura de banda do circuito seletor do receptor triplicou. Assim, outras emissoras adjacentes ou próximas à emissora desejada poderão interferir no sinal captado. Para se evitar este tipo de problema um receptor super-heteródino é utilizado nos comerciais de radio e TV. Este receptor será estudado a seguir.

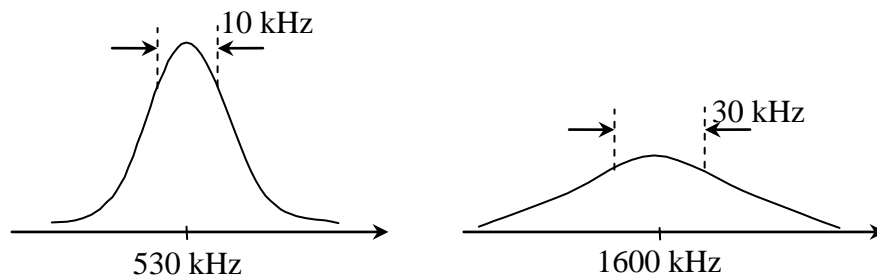


Figura 2.22: Receptor.

2.6.1 Receptor Super-heteródino

O receptor super-heteródino amplifica o sinal de rádio frequência (RF) de qualquer emissora recebida sempre em uma mesma frequência chamada de frequência intermediária (f_{int}). As principais vantagens deste tipo de receptor são que a largura de faixa permanece constante e a sua seletividade aumentada. Resumindo sua operação, a

o sinal da emissora sintonizada é convertido para a frequência intermediária e amplificado, a amplificação do sinal de qualquer emissora é feita nesta frequência, como mostra o diagrama de blocos da figura 2.23.

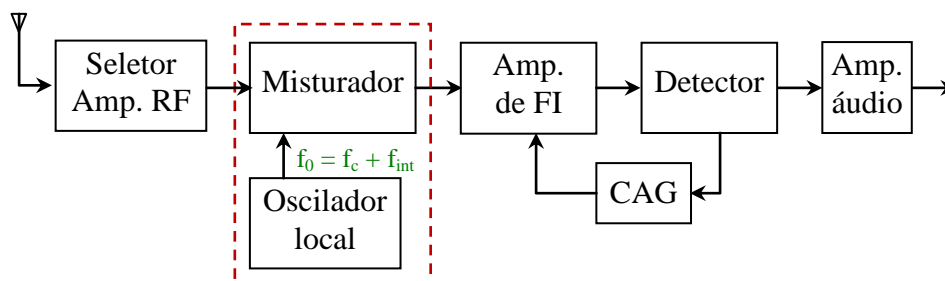


Figura 2.23: Receptor super-heteródino.

O sinal da emissora é captado pela antena, filtrado por um filtro passa-banda e amplificado pelo amplificador de RF. A maioria dos receptores AM comerciais não possui essa etapa de amplificação, mas somente o estágio seletor de frequência.

Os dois blocos no interior do retângulo pontilhado, misturador e oscilador local, representam o estágio de conversão de frequência, onde o batimento de frequências é executado. Na saída deste estágio têm-se dois sinais modulados em amplitude com portadores correspondentes à soma ($f_c + f_0$) e a diferença ($f_c - f_0$) entre as frequências do oscilador local e da emissora. O oscilador local oscila com uma frequência de 455 KHz acima da portadora de modo que a diferença de frequências seja igual à frequência intermediária ($f_c - f_0 = f_{int} = 455 \text{ KHz}$). Esse processo é conhecido como batimento de frequências; ele é obtido utilizando um transistor polarizado na região não linear ($V_{BE} \approx 0.3 \text{ V}$).

A saída do misturador é aplicada no amplificador de FI (frequência intermediária). Ele é constituído normalmente por dois estágios de amplificação e responsável pela seletividade e sensibilidade do receptor. A sua saída deve ter nível de sinal suficiente o detector de envoltória não distorça significativamente o sinal demodulado (veja secção 2.6).

Apesar de cada emissora operar com uma frequência própria, por causa dos capacitores de sintonia, do seletor de entrada e do oscilador local, serem acoplados ao mesmo eixo consegue-se sempre a mesma frequência de amplificação. Quando se sintoniza uma emissora, varia-se ao mesmo tempo a frequência de ressonância do estágio de entrada e a frequência do oscilador local, de modo que a diferença de frequências seja sempre a intermediária.

Neste tipo de receptor é sempre necessário utilizar um circuito para o controle automático de ganho (CAG), pois os sinais que chegam à entrada do amplificador de FI não têm um nível constante. Devido a distancia, fading, potência de transmissão diferentes das emissoras, os sinais na antena têm um nível entre 10 uV e 100 mV. Para compensar esses efeitos o sinal DC do detector de envoltória, que é proporcional à tensão da portadora, é utilizado para controlar o ganho do primeiro estágio do amplificador.

2.7 Modulação em amplitude com banda lateral dupla e portadora suprimida

A modulação em amplitude é um método simples para transmitir sinais de radio frequência. Como visto anteriormente, veja exemplo 1, o problema é que a maior parte da potência transmitida está contida na portadora, mais de 50% da potência é desperdiçada com a transmissão da portadora. Este desperdício pode ser evitado pela supressão desta componente do espectro de amplitude do sinal modulado (veja o teorema da modulação). Este processo é conhecido como modulação em amplitude com banda lateral dupla e portadora suprimida (AMDSB-SC) ou, de modo mais simples, modulação em amplitude com portadora suprimida.

A supressão da portadora é obtida multiplicando diretamente o sinal mensagem, $m(t)$, na banda básica pela portadora cossenoidal, ou seja,

$$s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.30)$$

A figura 2.24 ilustra um sinal modulado com portadora suprimida do domínio do tempo. Observe que a envoltória não acompanha as variações do sinal mensagem, o sinal modulado é nulo quando o sinal mensagem é nulo. Além disso, há uma inversão de fase no sinal nos instantes de tempo em que a mensagem muda de sinal, consequentemente a envoltória do sinal modulado AMDSB-SC não acompanha o sinal de informação.

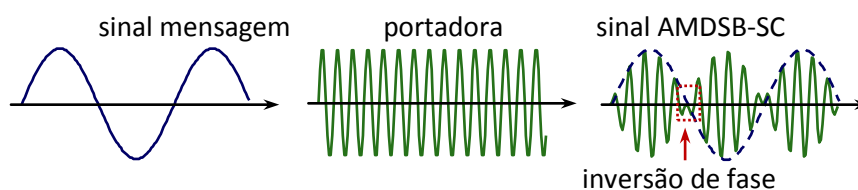


Figura 2.24: Modulação AMDSB-SC.

Calculando a transformada de Fourier da equação 2.30, veja teorema da modulação obtém-se,

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \{M(f - f_c) + M(f + f_c)\} \quad (2.31)$$

Compare a figura 2.25 com a figura 2.2. O espectro do sinal modulado é semelhante ao espectro do sinal AMDSB, porém somente o espectro do sinal mensagem é deslocado para as frequências $\pm f_c$, as raíes correspondentes à portadora não mais estão presentes, daí o nome modulação em amplitude com portadora suprimida. Observe também que a largura de banda é $2W$, a mesma da modulação AM.

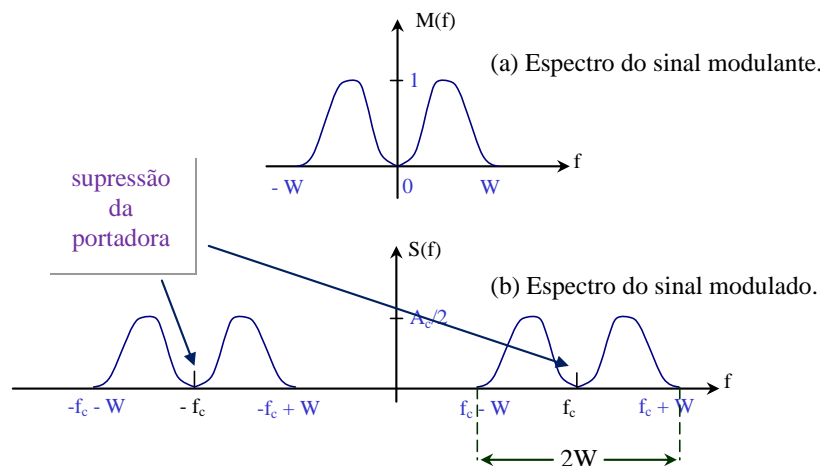


Figura 2.25: Espectro do sinal modulado em amplitude com portadora suprimida.

2.7.1 Modulação com um único tom

Admitindo que o sinal mensagem consista de um único tom cossenoidal com frequência f_m , isto é, $m(t) = A_m \cos(w_m t)$, então, a equação do sinal AMDSB-SC é dada por:

$$s(t) = A_m A_c \cos(w_m t) \cos(w_c t) \quad (2.33)$$

Como $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$, então,

$$s(t) = \frac{A_m A_c}{2} \cos((w_c + w_m)t) + \frac{A_m A_c}{2} \cos((w_c - w_m)t) \quad (2.34)$$

A transformada de Fourier da equação acima é,

$$S(f) = \frac{A_m A_c}{4} \delta(f + f_c \pm f_m) + \frac{A_m A_c}{4} \delta(f - f_c \pm f_m) \quad (2.35)$$

Como anteriormente, espectro de amplitude de um sinal AMDSB-SC, modulado por um tom senoidal, consiste de raiais, funções delta, deslocadas para as frequências $f_c \pm f_m$ e $-f_c \pm f_m$ (bandas laterais), como mostra a figura 2.26. Observe que as raiais correspondentes à portadora não estão presentes no espectro.

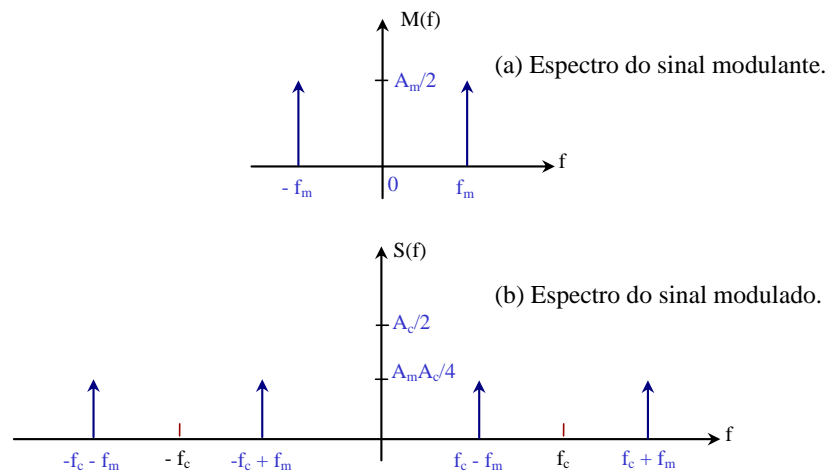


Figura 2.26: Espectro de amplitude do sinal modulado por um único tom.

Pela equação (2.34) a portadora é nula portanto a potência média entregue a um resistor de 1Ω depende somente das duas bandas laterais superior e inferior. Neste caso a potência de cada uma das bandas laterais vale:

$$\frac{1}{8}A_m^2A_c^2$$

Então, potencia total do sinal AMDSB-SC modulado por um tom cossenoidal será dada por:

$$P_T = \frac{1}{4}A_m^2A_c^2 \quad (2.36)$$

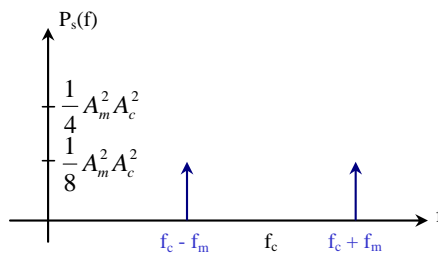


Figura 2.27: Espectro unilateral de potência.

2.8 Moduladores AMDSB-SC

Vamos estudar nesta secção formas de geração se sinais AMDSB-SC. Pela equação (2.30) este tipo de modulação consiste diretamente do produto do sinal de informação pela portadora. Assim, um dispositivo para geração deste tipo de modulação é chamado de modulador de produto e geralmente eles são representados pelo diagrama de blocos abaixo. As concepções mais comuns de se gerar os sinais AMDSB-SC são o modulador balanceado e o modulador em anel.

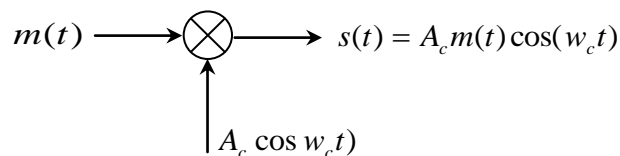


Figura 2.28: Modulador de produto.

2.8.1 Modulador balanceado

O modulador balanceado consiste de dois moduladores AM de um somador interligados de modo a suprimir a portadora, figura (2.29). Admite-se que os moduladores são idênticos e que eles são alimentados pela mesma portadora.

$$\begin{aligned} e_1(t) &= A_c [1 + km(t)] \cos(2\pi f_c t) \\ e_2(t) &= A_c [1 - km(t)] \cos(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Subtraindo $e_2(t)$ de $e_1(t)$ tem-se,

$$s(t) = 2kA_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.38)$$

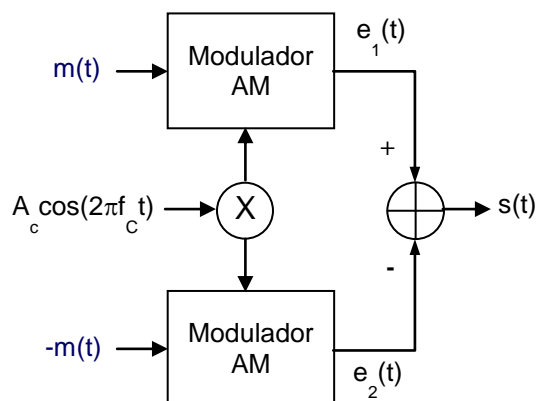


Figura 2.29: Modulador de balanceado.

O modulador balanceado pode ser implementado utilizando elementos não lineares que podem ser aproximados por características de transferência quadráticas ou que apresentem comportamento de chave, tais como diodos (para mais detalhes consulte referência 7). Um exemplo clássico deste tipo de modulador é o modulador em anel apresentado a seguir.

2.8.2 Modulador em anel

O modulador em anel consiste de quatro diodos cujo arranjo esta mostrado na figura (2.30). Os diodos são admitidos idênticos e a tensão da portadora suficientemente alta para chavear os diodos. Estes funcionam como pares de chaves (D_1 e D_2 ou D_3 e D_4) controladas pelo sinal $c(t)$. Os dois transformadores de RF apresentam relação de tensão 1:1.

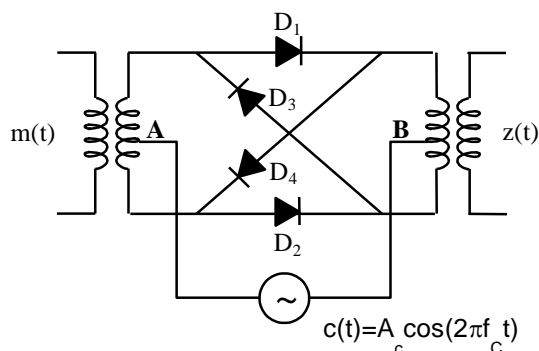


Figura 2.30: Modulador em anel.

Quando $V_A > V_B$ os diodos D_1 e D_2 conduzem enquanto D_3 e D_4 ficam bloqueados, conduzindo ao circuito equivalente da figura 2.31.a e, portanto o sinal de saída é igual à entrada, $z(t) = m(t)$. Se $V_A < V_B$ os diodos D_1 e D_2 ficam bloqueados enquanto D_3 e D_4 conduzem, conduzindo ao circuito equivalente da figura 2.31.b, neste caso o sinal de saída é o inverso da entrada, isto é, $z(t) = -m(t)$. Assim, na saída do modulador obtém-se um sinal chaveado como mostra a figura 2.31.c.

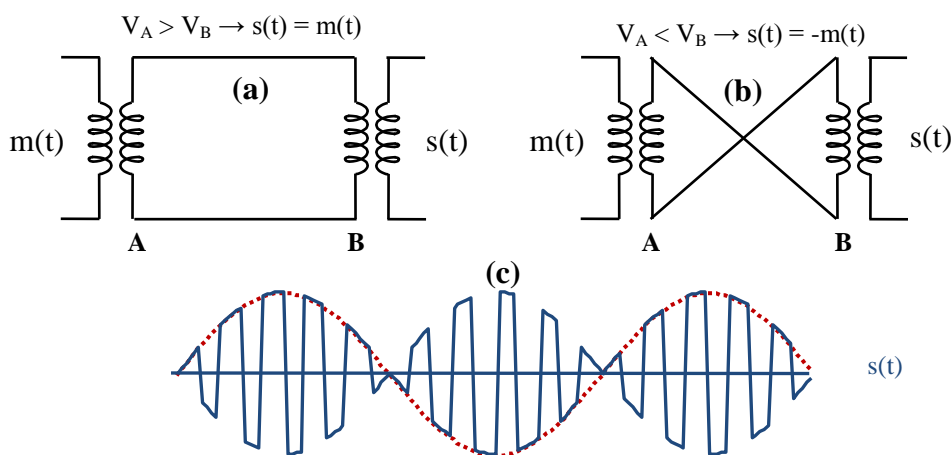


Figura 2.31: Funcionamento do modulador em anel.

De modo análogo à secção 2.3.2, podemos concluir que a tensão $z(t)$ é o produto do sinal mensagem $m(t)$ por uma onda quadrada simétrica, $q(t)$, com amplitude chaveando entre +1 e -1, e frequência angular igual a $\omega_c = 2\pi f_c$, assim,

$$z(t) = m(t)q(t) \quad (2.39)$$

Escrevendo $q(t)$ em série trigonométrica de Fourier na forma compacta tem-se que:

$$z(t) = m(t)[a_1 \cos \omega_c t + a_2 \cos 2\omega_c t + \dots] \quad (2.40)$$

Filtrando $z(t)$ com um filtro passa-banda com frequência de ressonância ω_c e largura de banda duas vezes a do sinal modulante obtém-se o sinal AMDSB-SC,

$$s(t) = a_1 m(t) \cos \omega_c t \quad (2.41)$$

Assim, um modulador em anel seguido de um filtro passa-banda gera o sinal AMDSB-SC. Para entender uma concepção mais moderna deste tipo de modulador estude o apêndice II, o modulador de transcondutância.

2.9 Detectores coerentes

Na recepção, o sinal mensagem $m(t)$ é recuperado multiplicando o sinal AMDSB-SC por um sinal de um oscilador local sincronizado em frequência e fase com a portadora do transmissor. Este demodulador é muitas vezes referido como detector de produto.

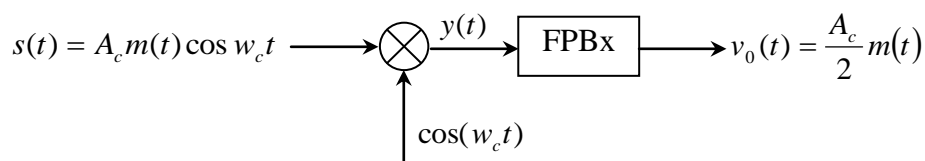


Figura 2.32: Detector de produto.

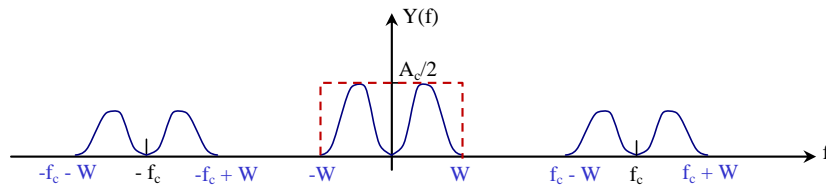


Figura 2.33: Espectro $y(t)$.

Na saída do multiplicador,

$$y(t) = A_c m(t) \cos^2 w_c t = \frac{A_c}{2} m(t) (1 + \cos 2w_c t) \quad (2.42)$$

No domínio da frequência,

$$Y(f) = \frac{A_c}{2} M(f) + \frac{A_c}{4} M(f - 2f_c) + \frac{A_c}{4} M(f + 2f_c) \quad (2.43)$$

Aplicando $y(t)$ em um filtro passa-baixas com largura de banda igual à máxima frequência do sinal da banda base os espectros em torno de $\pm f_c$ são eliminados, assim na saída do filtro obtém o sinal de informação.

$$v_0(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \quad (2.44)$$

2.9.1 Sincronismo de frequência e fase

Com relação à figura 2.32, considere que o oscilador local do detector de produto apresenta um desvio de frequência Δw em relação à portadora. Neste caso a saída do detector é dada por:

$$y(t) = A_c m(t) \cos w_c t \cos(w_c + \Delta w)t \quad (2.45)$$

Como, $\cos w_c t \cos(w_c + \Delta w)t = \frac{1}{2} \{ \cos \Delta w t + \cos(2w_c + \Delta w)t \}$, então,

$$y(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \cos \Delta w t + \frac{A_c}{2} m(t) \cos(2w_c + \Delta w)t$$

Na saída do filtro obtém-se:

$$v_0(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \cos \Delta w t \quad (2.46)$$

Assim, um erro de frequência irá causar uma distorção no espectro do sinal demodulado.

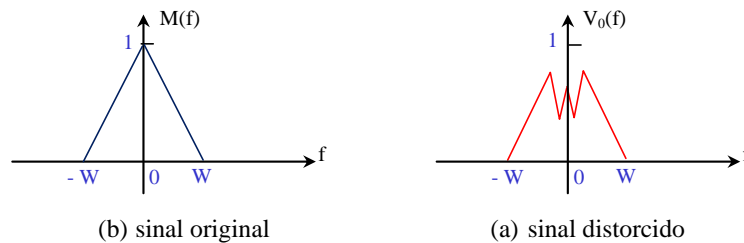


Figura 2.34: Espectros dos sinais original e distorcido para perda do sincronismo de frequência.

Considere agora que o oscilador local apresenta um desvio de fase θ em relação à portadora. Neste caso a saída do detector é dada por:

$$y(t) = A_c m(t) \cos w_c t \cos(w_c t + \theta) \quad (2.47)$$

Assim, pela propriedade da soma de ângulos,

$$y(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \cos \theta + \frac{A_c}{2} m(t) \cos(2\omega_c t + \theta)$$

e a saída do filtro será,

$$v_0(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \cos \theta \quad (2.48)$$

A tensão na saída do demodulador é atenuada por $\cos \theta$, porém não há distorção no sinal se o atraso for constante. Note que se $\theta = \pm\pi/2$ a saída será nula. Contudo, se θ for um sinal aleatório variante no tempo então a saída será uma versão distorcida da entrada.

Portanto, para que o processo de detecção seja eficiente, o oscilador local deve estar sincronizado em frequência e fase com a portadora do transmissor. Uma técnica para se obter o sincronismo é da transmissão de uma pequena parcela da portadora que será usada como referencia pelo receptor. Esse sincronismo é essencial nos sistemas de modulação digital (PSK), onde PLL (*phase locked loop*) são utilizados no processo de sincronismo.

2.9.2 Receptor Costas (*Costas loop*)

O receptor Costas é um método muito utilizado para aquisição da portadora e subsequente demodulação em sistemas de comunicação analógico e digital. Em sua forma básica este receptor consiste de uma malha realimentada (*phase locked loop - PLL*) que é capaz de recuperar a portadora mesmo que a componente de frequência não esteja presente no sinal, como é o caso da modulação AMDB-SC.

O diagrama de blocos do receptor costas é mostrado na figura 2.35. Ele utiliza dois detectores de produto e dois circuitos PLL nos quais os osciladores controlados por tensão (VCO) operam com sinais em quadratura.

O sinal AMDSB-SC na entrada do receptor é multiplicado pelos sinais $\cos(\omega_0 t + \theta_0)$ e $\sin(\omega_0 t + \theta_0)$. Desse modo, os sinais em fase e em quadratura na saída dos detectores serão:

$$x_I(t) = m(t)\cos(w_0t + \theta_i)\cos(w_0t + \theta_0) = \frac{m(t)}{2} \{ \cos(2w_0t + \theta_i + \theta_0) + \cos(\theta_i - \theta_0) \} \quad (2.49)$$

$$x_Q(t) = m(t)\cos(w_0t + \theta_i)\sin(w_0t + \theta_0) = \frac{m(t)}{2} \{ \sin(2w_0t + \theta_i + \theta_0) + \sin(\theta_i - \theta_0) \} \quad (2.50)$$

Os filtros passa-baixas eliminam as componentes de frequências altas de ambos os sinais, assim,

$$y_I(t) = \frac{m(t)}{2} \cos(\theta_i - \theta_0) \quad (2.51)$$

$$y_Q(t) = \frac{m(t)}{2} \sin(\theta_i - \theta_0) \quad (2.52)$$

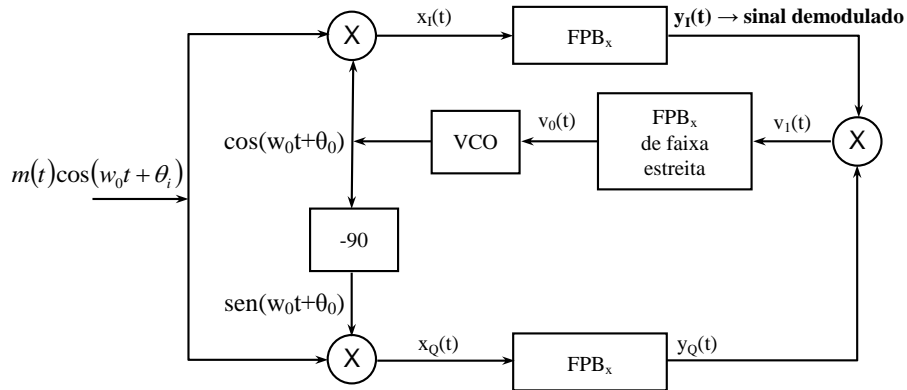


Figura 2.35: Receptor Costas.

Estes dois sinais são multiplicados e o sinal resultante $v_i(t)$ é aplicado em um filtro de faixa estreita, fornecendo o sinal $v_o(t)$ de controle de frequência do VCO tal que:

$$v_0(t) = \frac{m^2(t)}{8} \sin 2(\theta_i - \theta_0) \quad (2.53)$$

Observe que $v_0(t)$ é um sinal de frequência muito baixa, ele é nulo se o erro de fase, $\theta_i - \theta_0 = 0$. Se este erro é pequeno então $v_0(t)$ é o sinal do erro de fase entre as portadoras do transmissor e receptor. Este sinal força o VCO a manter o sincronismo com a portadora do transmissor. Sendo $\theta_i - \theta_0$ próximo de zero, então,

$$v_0(t) \approx k(\theta_i - \theta_0) \quad (2.54)$$

Se $v_0(t) = 0$ então $\theta_i = \theta_0$ e as portadoras do receptor e do transmissor estão sincronizadas em frequência e fase, além disso, $y_i(t) = \frac{m(t)}{2} \cos(0) = \frac{m(t)}{2}$ é o sinal demodulado.

Para que haja recuperação da portadora o circuito “*Costas loop*” básico necessita que o espectro de amplitude do sinal seja simétrico, portanto ele não pode ser utilizado em modulação SSB que será apresentada na seção 2.11. . (veja capítulo 3 – modulação em ângulo).

2.10 Modulação em quadratura

A integral em um período do produto dos sinais $\cos w_c t$ e $\sin w_c t$ é nula. Assim eles estão em quadratura e são separáveis. A modulação em quadratura utiliza este conceito para transmitir dois sinais em um mesmo canal, utilizando portadoras de mesma frequência, mas com diferença de fase de 90 graus entre ambas.

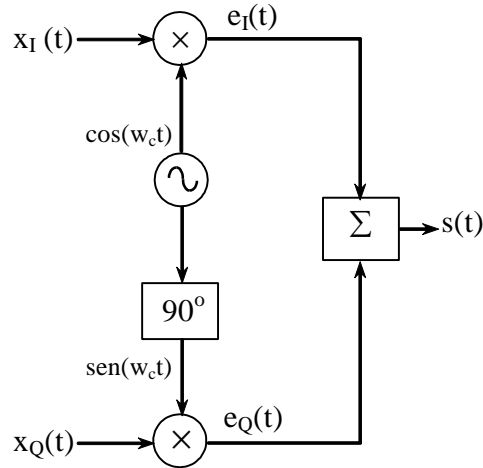


Figura 2.34: Modulador em quadratura.

O diagrama de blocos do modulador em quadratura é mostrado na figura 2.34. Ele consiste basicamente de dois moduladores balanceados e um somador. Os sinais modulados correspondentes às portadoras cossenoidal e senoidal são chamados de sinal em fase (*in-phase*) e sinal em quadratura (*quadrature*), respectivamente. Depois de modulados estes dois sinais são somados e transmitidos.

$$s(t) = e_I(t) + e_Q(t) = x_I(t) \cos w_c t + x_Q(t) \sin w_c t \quad (2.55)$$

O receptor, figura 2.35, é composto de dois detectores coerentes seguidos de filtros passa-baixas para recuperar os sinais. Na saída de detector em fase tem-se:

$$\begin{aligned}
 v_I(t) &= \{x_I(t) \cos w_c t + x_Q(t) \sin w_c t\} \cos w_c t \\
 &= x_I(t) \cos^2 w_c t + x_Q(t) \sin w_c t \cos w_c t \\
 &= \frac{1}{2} x_I(t) + \frac{1}{2} x_I(t) \cos 2w_c t + x_Q(t) \sin 2w_c t
 \end{aligned}$$

O segundo termo e o terceiro da equação acima são sinais de alta frequência e, portanto são eliminados pelo filtro passa-baixas. Assim,

$$v_{01}(t) = \frac{1}{2} x_I(t) \quad (2.56)$$

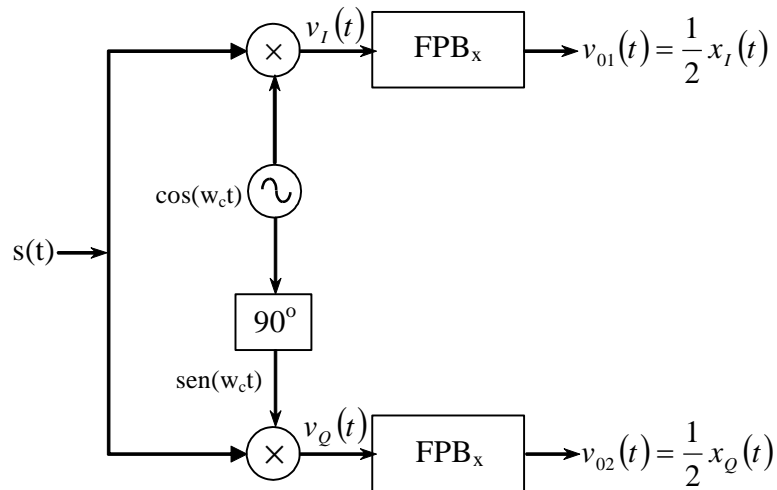


Figura 2.35: Receptor em quadratura.

Para o sinal em quadratura, $v_Q(t)$, o procedimento é análogo e, portanto,

$$v_{02}(t) = \frac{1}{2} x_Q(t) \quad (2.57)$$

Este esquema de modulação é adotado em sistemas de televisão analógicos para transmitir as informações de cores do sinal de vídeo (sinais de crominância), ele é também utilizado em transmissão de sinais digitais na modulação por chaveamento de fase (QPSK).

2.11 Modulação por banda lateral única - SSB

Podemos observar que o espectro de frequência de um sinal modulado em amplitude com banda lateral dupla (DSB e DSB-SC) é simétrico em torno da frequência da portadora. Este espectro apresenta duas bandas laterais, a superior e a inferior em

relação à frequência da portadora, a mesma informação é transmitida em duplicata. Examinando a figura 2.36 observa-se que a banda lateral inferior é uma réplica invertida da superior, assim, somente uma das bandas é transmitida nos sistemas SSB.

Na modulação por com banda lateral única (ou suprimida), somente uma das bandas laterais (superior: U ou inferior: L) é utilizada para transmissão. Ela pode ser obtida através da modulação AMDSB-SC através da eliminação de uma das bandas laterais por meio de filtros com fator de seletividade alto para seleccionar somente uma das bandas. Observe também que a largura de banda do sinal SSB é igual a W Hz, isto é, a metade da modulação DSB ($2W$ Hz).

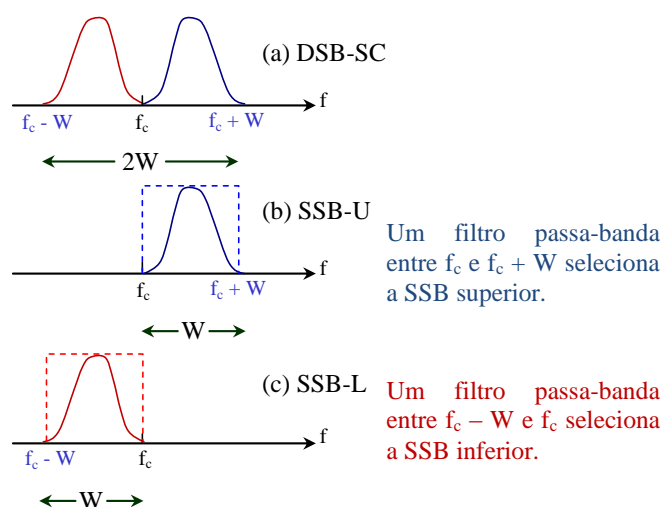


Figura 2.36: Espectro do sinal SSB.

Os termos “inferior- L” e “superior - U” são acrescentados para identificar qual banda lateral, abaixo ou acima da frequência da portadora é seleccionada. Para descrever a modulação SSB utiliza-se o domínio da frequência, a representação espectral facilita a compreensão da modulação SSB. A descrição rigorosa no domínio do tempo é muito difícil a partir de um sinal arbitrário por isso recorreremos à modulação por um único tom.

2.11.1 Modulação por um único tom

Admitindo novamente que o sinal mensagem consista de um único tom cossenoidal, então, a partir da equação do sinal AMDSB-SC, equação (2,33), podemos escrever que:

$$s(t) = \underbrace{\frac{A_m A_c}{2} \cos((w_c + w_m)t)}_{SSB \text{ superior}} + \underbrace{\frac{A_m A_c}{2} \cos((w_c - w_m)t)}_{SSB \text{ inferior}} \quad (2.58)$$

O primeiro termo da equação acima representa a modulação SSB superior e o segundo termo representa a SSB inferior. Selecionando, por filtragem, a banda lateral acima da frequência da portadora obtém-se o sinal SSB superior, isto é,

$$s(t) = \frac{A_m A_c}{2} \cos((w_c + w_m)t) \quad (2.59)$$

e a transformada de Fourier da equação acima será,

$$S(f) = \frac{A_m A_c}{4} \delta(f + f_c + f_m) + \frac{A_m A_c}{4} \delta(f - f_c - f_m) \quad (2.60)$$

O espectro do sinal SSB-U, modulado por um tom senoidal, consiste de raiais deslocadas para as frequências $f_c + f_m$ e $-(f_c + f_m)$, como mostra a figura 2.37.

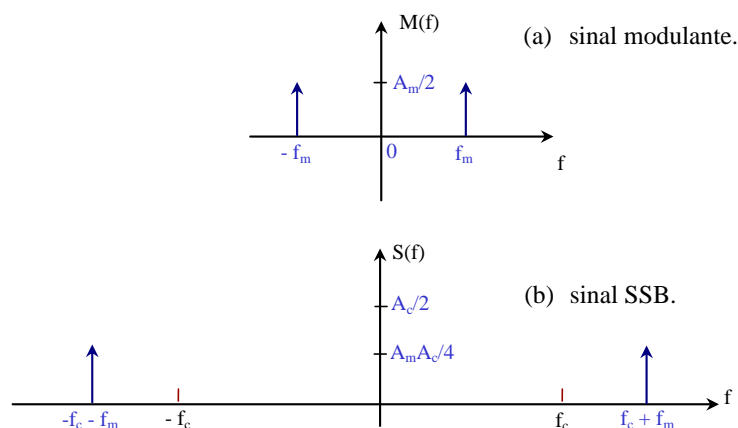


Figura 2.37: Espectro de amplitude do sinal SSB modulado por um único tom.

A potência média entregue a um resistor de 1Ω é devida somente à banda lateral superior, assim,

$$P_T = \frac{1}{8} A_m^2 A_c^2 \quad (2.61)$$

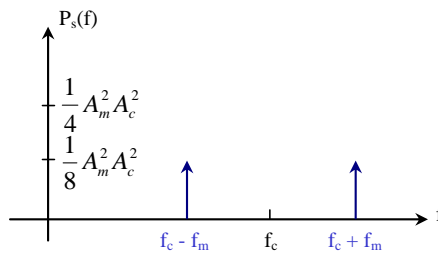


Figura 2.38: Espectro unilateral de potência do sinal SSB.

2.11.2 Moduladores SSB

Os dois termos do lado direito da equação (2.55) consistem do cosseno da soma ou da diferença de dois ângulos, isto é, $\cos((w_c \pm w_m)t)$. Utilizando a propriedade da soma dos ângulos chega-se facilmente às seguintes expressões para os sinais SSB inferior e superior:

$$s_{SSB-L}(t) = \frac{A_m A_c}{2} \cos w_m t \cos w_c t + \frac{A_m A_c}{2} \text{sen} w_m t \text{sen} w_c t \quad (2.62)$$

$$s_{SSB-U}(t) = \frac{A_m A_c}{2} \cos w_m t \cos w_c t - \frac{A_m A_c}{2} \text{sen} w_m t \text{sen} w_c t \quad (2.63)$$

As equações (2.62) e (2.63) mostram dois resultados muito importantes que podem ser estendidos para sinais mais gerais. Primeiro observamos uma modulação em quadratura com as portadoras $A_c \cos w_c t$ e $A_c \text{sen} w_c t$, segundo o sinal modulante $A_m \cos w_m t$ aparece deslocado de 90 graus, $A_m \text{sen} w_m t$.

Um atraso constante de 90 graus em todas as componentes de frequência de um sinal corresponde à transformada de Hilbert. Para um sinal qualquer $m(t)$ a

transformada de Hilbert é representada por $\hat{m}(t)$. Assim podemos generalizar as equações (2.62) e (2.63) por:

$$s(t) = m(t)\cos w_c t \pm \hat{m}(t)\text{sen}w_c t \quad (2.64)$$

em que o sinal negativo fornece a SSB-U e o positivo a SSB-L. Podemos então gerar a modulação SSB utilizando um modulador por deslocamento de fase como ilustra a figura abaixo.

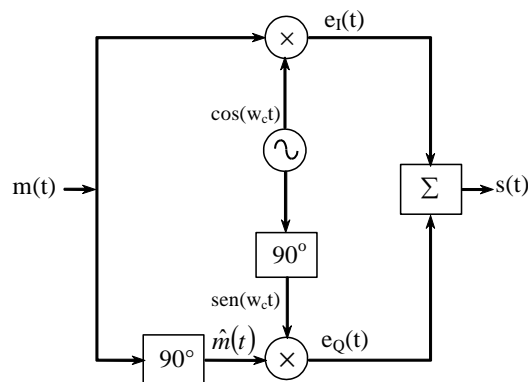


Figura 2.39: Modulador SSB por deslocamento ou discriminação de fase.

Um modo direto de se obter a modulação SSB é utilizando um filtro discriminador de frequência como ilustra a figura 2.40. O esquema consiste de um modulador balanceado seguido por um filtro passa-banda que seleciona a parte superior ou inferior do espectro de frequências do sinal DSB-SC. O filtro deve apresentar seletividade bem alta para colocar em sua saída somente uma das bandas laterais. Observe na figura 2.40 que para um sinal de voz, cuja maior parte da energia do espectro está concentrada entre as frequências de 300 a 3000 Hz, a separação entre as bandas superior e inferior é de apenas 600 Hz, ou menos, daí a necessidade de se utilizar um filtro de alta seletividade. Em geral utilizam-se filtros mecânicos ou a cristal nos transmissores e receptores SSB, por exemplo, filtros mecânicos apresentam uma banda de transição de 60 dB/oitava [Collins Radio Co.].

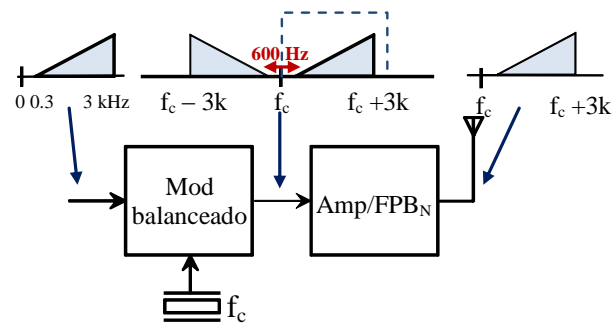


Figura 2.40: Modulador SSB pelo método de discriminação de frequência.

2.11.3 Detectores coerentes para SSB

De forma idêntica à modulação DSB-SC para a recuperação do sinal mensagem $m(t)$ é necessário o uso de detectores coerentes para o sinal SSB, ou seja, a princípio há necessidade de sincronismo de frequência e fase do sinal do oscilador local com a portadora do transmissor. Este demodulador está mostrado na figura 2.32 da secção 2.9.

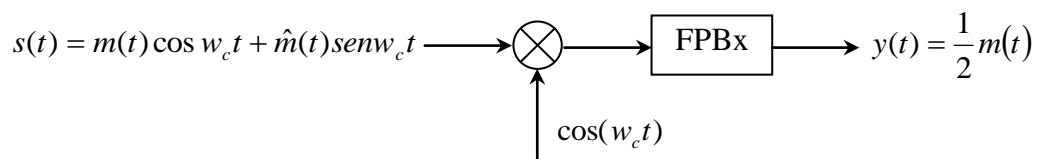


Figura 2.41: Detector de produto para o sinal SSB.

Na saída do detector de produto tem-se que:

$$\begin{aligned} v(t) &= m(t) \cos^2 w_c t \pm \hat{m}(t) \sin w_c t \cos w_c t \\ &= \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} m(t) \cos 2w_c t \pm \frac{1}{2} \hat{m}(t) \sin 2w_c t \end{aligned}$$

Aplicando $v(t)$ em um filtro passa-baixas com largura de banda igual à máxima frequência do sinal da banda base as componentes espectrais de alta frequência são eliminadas e na saída obtém o sinal de informação.

$$y(t) = \frac{1}{2} m(t) \quad (2.64)$$

Observe-que o esquema do detector é o mesmo tanto para SSB-U quanto para SSB-L.

Uma grande vantagem deste sistema de modulação é que além da portadora ser suprimida a largura de banda utilizada é a metade dos sistemas DSB. Assim, consegue-se uma menor transmissão de potência pela eliminação da portadora e de uma das bandas laterais. Menor potência de transmissão é muito importante em comunicações móveis devido à exigência de um menor consumo de energia. Uma largura de faixa menor, $B_{W_{SSB}} = \frac{1}{2} B_{W_{DSB}}$, fornece a possibilidade de se dobrar o número de canais e uma melhor relação sinal ruído pois quanto menor a largura de faixa, menor a potência de ruído introduzida. A modulação SSB é utilizada em telefonia analógica, sistemas de multiplexação de frequências e nas transmissões radiofônicas na faixa do cidadão. As desvantagens da SSB são as mesmas da modulação DSB-SC, ela necessita de circuitos mais complexos para filtragens, sincronização de frequências e/ou fase, portanto, ela apresenta custo maior.

2.12 Multiplexação por divisão de frequência – FDM

A principal aplicação da modulação SSB é em multiplexação por divisão de frequência (FDM - *frequency division multiplexing*) que por sua vez é utilizada nos sistemas de transmissão da telefonia analógica. A SSB é utilizada devido à sua largura de banda reduzida pela metade em relação aos outros tipos de modulação que apresentam banda de transmissão dupla. A largura de banda nominal de um canal telefônico é de 4 KHz (0 – 4 KHz), suficiente para acomodar e deixar uma banda de guarda para filtragem pois o sinal de voz para telefonia é admitido ocupar uma faixa entre 300 e 3400 Hz.

A multiplexação por divisão de frequência consiste em combinar um determinado número de sinais independentes em um único sinal de modo que eles possam ser transmitidos simultaneamente em um único canal de transmissão. O FDM é muito utilizado nos sistemas telefônicos onde um número muito grande de canais (milhares de usuários) deve ser agrupado. Neste caso a banda reservada para a transmissão simultânea é dividida em canais adjacentes, cada um com banda de 4 KHz, não superpostas de modo a poderem ser separadas na recepção

O diagrama de blocos na figura 2.42 ilustra um sistema FDM com 6 canais. Os sinais são modulados em SSB superior nas frequências de 12, 16, 20, 24, 28 e 32 KHz e em seguida somados. Na recepção, um banco de filtros passa-banda nas faixas de frequências 12-16, 16-20, 20-24, 24-28, 28-32 e 32-36 KHz, seguidos de detectores coerentes recuperam os seis canais independentes. Observe que a largura de banda ocupada pelos 6 canais de voz é de 24 KHz, caso fosse utilizado algum esquema de modulação DSB a largura de banda seria igual a 48 KHz. Assim a modulação SSB é mais eficiente pois permite dobrar o número de canais em relação à DSB, essa é a principal razão do uso da modulação SSB nos sistemas de telefonia analógicos.

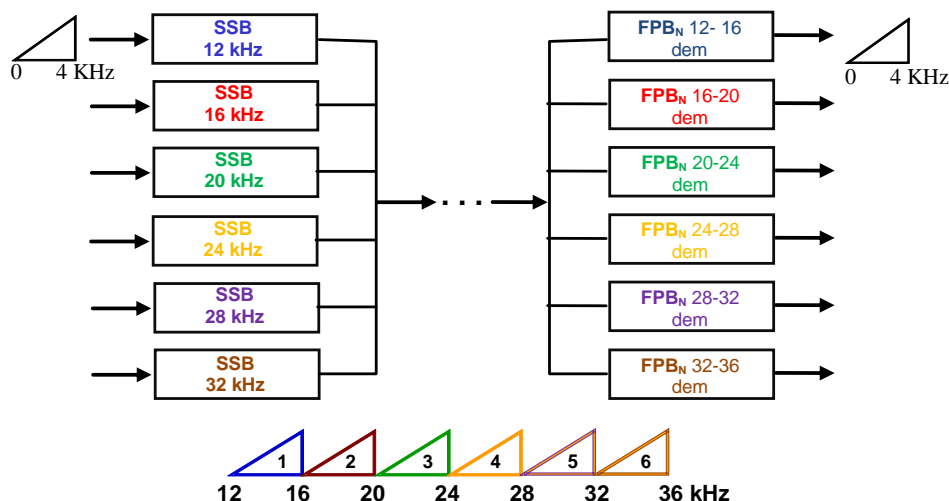


Figura 2.42: Pre-grupo básico – 6 canais de voz.

Combinando dois pre-grupos básicos como acima, forma-se um grupo básico de 12 canais. Este grupo é formado modulando em SSB duas portadoras de 96 e 120 KHz e selecionando neste caso a parte inferior do espectro, como mostra a figura 2.43. Como cada pre-grupo básico ocupa uma faixa de 12-36 KHz, então a frequência mínima do espectro será $96-36 = 60$ KHz, a frequência no centro do espectro será $96-12 = 120-36 = 84$ KHz e a frequência máxima $120-12 = 108$ KHz. Observe que esse grupo básico apresenta banda de 48 KHz.

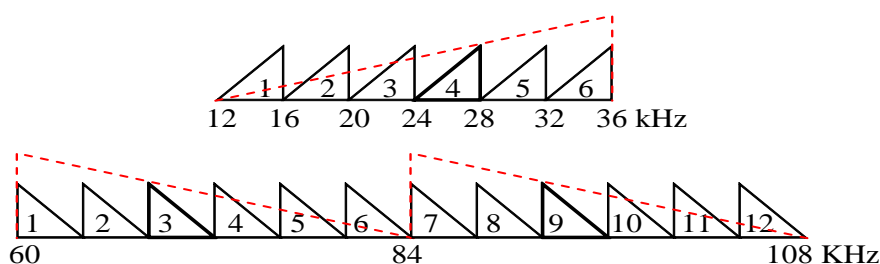


Figura 2.43: Grupo básico - 12 canais.

Novamente, combinando cinco grupos básicos como o da figura 2.43, forma-se um supergrupo com 60 canais. Este supergrupo é formado modulando em SSB cinco grupos básicos distintos com portadoras de 420, 468, 516, 564 e 612 KHz. Ao contrário do grupo básico anterior, seleciona-se a parte superior do espectro de cada sinal SSB, como mostra a figura 2.44. A banda ocupada por um supergrupo aumenta para 240 KHz.

Podemos aumentar ainda mais o número de canais de voz multiplexados repetindo o procedimento acima, podendo chegar a 10800 canais. Assim, supergrupos são multiplexados formando *master groups* (600 canais), *very large groups* (3600 canais), etc.

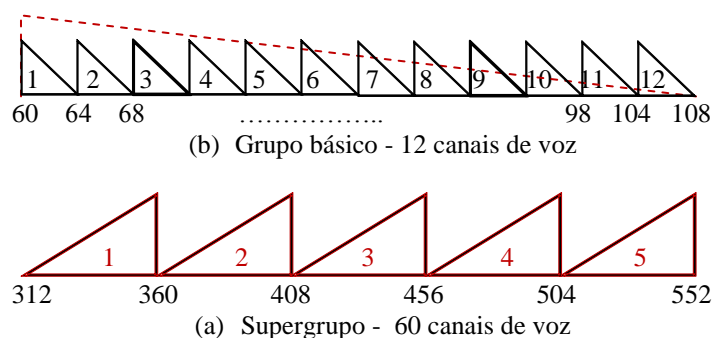


Figura 2.44: Supergrupo FDM – 60 canais.

Outra técnica de agrupamento de sinais é a multiplexação por divisão do tempo (TDM – *time division multiplexing*), na qual durante um intervalo de tempo chamado quadro, coloca-se N amostras em sequência (ou palavra digital) de N sinais de voz diferentes. No Brasil, o sistema básico agrupa 32 canais, sendo 30 de voz e dois de serviço.

2.13 Modulação com banda lateral vestigial - VSB

A modulação SSB não apresenta uma boa eficiência quando o sinal de informação apresenta conteúdos de frequências muito baixas, como por exemplo, os sinais de vídeo, dados de alta velocidade, etc. Os sinais de vídeo, além de possuírem um conteúdo significativo de frequências baixas no seu espectro, apresentam banda larga acima de 4 MHz. Nestes casos a modulação SSB é impraticável, pois é muito não se

tem disponíveis filtros com banda de transição pequena e ao mesmo tempo largura de banda grande. A modulação DSB não apresenta problemas na transmissão de frequências baixas, mas a largura de faixa é o dobro da SSB o que torna o sistema ineficiente quando a informação é de faixa larga. A técnica de modulação com um vestígio da banda lateral (VSB – *vestigial side band*) supera estas dificuldades e por isso ela foi a técnica escolhida para a transmissão dos sinais de TV analógicos.

Na modulação VSB uma das bandas laterais do sinal AMDSB, neste caso, a banda superior, é transmitida enquanto que a outra banda somente uma parcela (vestígio) de largura de banda f_v é transmitida. Assim, admitindo que f_M seja a largura de banda do sinal modulante, a largura de banda do sinal VSB será $f_v + f_M$ que é menor do que $2f_M$. Tipicamente, f_v é estabelecida em 25% de f_M [Haykin, 2008] e a portadora é mantida no sinal modulado. Nos sistemas de TV essas frequências são padronizadas $f_v = 0.75$ MHz e $f_M = 4$ MHz.

A figura 2.45 mostra a resposta de amplitude de um filtro para a geração do sinal VSB. No intervalo $f_c - f_v$ a $f_c + f_v$ o sinal é transmitido com banda lateral dupla, assim, é necessário um controle de amplitude dessa banda a fim de que o sinal não apresente um reforço nas frequências baixas e possa ser demodulado por um detector coerente. Para que isso não aconteça, o filtro deve apresentar uma condição de simetria em torno da frequência da portadora, tal que,

$$H(f_c - f) + H(f_c + f) = 1 \quad (2.65)$$

em que $f \leq f_v$ e para facilidade, o filtro é considerado ter fase nula.

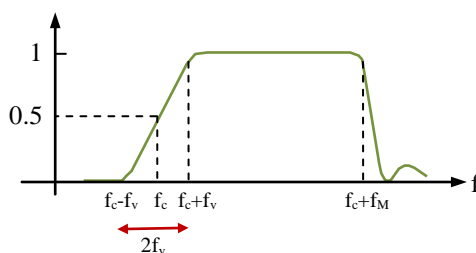


Figura 2.45: Filtro para geração de sinais VSB.

Neste texto a banda superior foi utilizada para exemplificar a modulação VSB, para a banda inferior a diferença seria que a resposta do filtro da figura 2.45 estaria invertida em relação a f_c .

O filtro para a geração do sinal VSB pode estar localizado tanto no transmissor como no receptor. Caso o filtro estiver localizado no receptor, no transmissor o sinal VSB é transmitido sem atenuação no intervalo de frequências entre $f_c - f_v$ e $f_c + f_v$ e atenuado completamente para frequências abaixo de $f_c - f_v$. Este procedimento é mais recomendado por apresentar uma relação sinal/ruído melhor. Ele é utilizado nas transmissões de TV.

2.14 Tipos de modulação em amplitude

Foram apresentados neste capítulo vários métodos ou tipos de modulação em amplitude na qual o sinal mensagem é contínuo no tempo. A análise no domínio da frequência é essencial para a compreensão dos métodos, figura 2.46. O sinal que transporta a informação é uma onda senoidal cuja amplitude varia diretamente com o sinal modulante. Estes tipos são relacionados entre si, cada um apresenta vantagens e desvantagens e são utilizados dependendo do tipo de aplicação.

A modulação em amplitude com banda lateral dupla e portadora presente (DSB) é o método simples mais simples de ser obtido, ele é utilizado nos sistemas de radiodifusão comerciais analógicos. A modulação DSB-SC economiza potência em relação ao sistema com portadora presente, mas necessita de detecção coerente. Ela é utilizada nos sistemas de modulação em frequência para a transmissão dos canais estereofônicos, em sistemas de televisão para a transmissão das informações de cores. Uma outra vantagem da modulação DSB-SC é a possibilidade da transmissão de duas portadoras em quadratura. A modulação em quadratura, é usada nos sistemas de comunicação digital para economia de faixa.

A modulação SSB economiza largura de banda, a banda de transmissão é a metade da DSB, desse modo ela é mais eficiente ao ruído, porém também necessita detecção coerente. Ele em telefonia, nos sistemas de multiplexação por divisão de frequência.

A modulação VSB é um método intermediário entre as modulações DSB e SSB ela é recomendada para a transmissão de mensagens conteúdo de frequência baixa importante. Ela é utilizada na transmissão de sinais de televisão analógicos. Se a portadora for inserida na modulação VSB, pode-se então utilizar um detector de envoltória na recuperação do sinal e vídeo.

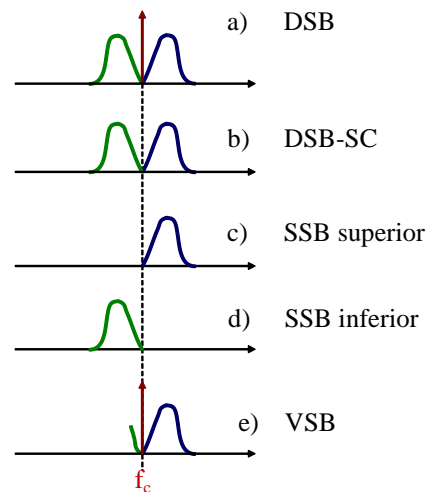


Figura 2.46: Tipos de modulação em amplitude.

A modulação AM é um método simples, mas muito sensível ao ruído, pois o ruído se soma ao sinal e altera principalmente a amplitude da portadora e conseqüentemente o sinal modulante, por isso a qualidade de áudio dos sistemas de rádio difusão AM não é boa. A modulação em frequência apresenta um desempenho muito melhor, como será estudado no próximo capítulo.

Capítulo 3

Modulação em Ângulo

3.1. Introdução

Na modulação em amplitude o sinal mensagem ou modulante, de baixa frequência, é utilizado para variar linearmente a amplitude de um sinal senoidal chamado de portadora, enquanto que a sua frequência é mantida constante. A modulação em ângulo é um tipo de modulação na qual o ângulo de fase de uma portadora senoidal varia de acordo com o sinal modulante, enquanto que a amplitude da portadora é mantida constante. Uma característica importante deste tipo de modulação é que ela é menos sensível a ruídos e interferências do que a modulação em amplitude. O ruído interfere com mais facilidade na amplitude do que na frequência do sinal. Contudo, a largura de faixa necessária para a transmissão é muito maior, pois, como será visto adiante, na modulação em ângulo o espectro de amplitude do sinal modulante é deslocado de forma não linear em torno da frequência da portadora.

3.2. Modulação em ângulo

Existem dois métodos distintos de modulação em ângulo, e eles são muito relacionados entre si: a **modulação em frequência** (FM - *frequency modulation*) e a **modulação em fase** (PM - *phase modulation*). Neste texto será dada uma ênfase maior à modulação em frequência, pois, enquanto a modulação em frequência é mais utilizada para sinais de tempo contínuo, isto é, em transmissões de rádio-difusão analógica, a modulação em fase é mais utilizada na transmissão de sinais digitais devido a sua melhor eficiência.

Um sinal cossenoidal modulado em ângulo pode ser expresso pela seguinte equação:

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)] \quad (3.1)$$

em que A_c é a amplitude constante da portadora e $\theta_i(t)$ é o ângulo de fase instantâneo e que depende das variações do sinal modulante.

A frequência instantânea da portadora é determinada pela derivada do ângulo de fase, assim,

$$f_i(t) = \frac{w_i(t)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta_i(t) \quad (3.2)$$

Nas duas próximas seções as modulações em fase e em frequência serão descritas no domínio do tempo, juntamente com as principais definições que caracterizam um sistema de modulação em ângulo.

3.1.1. Modulação em fase

Na modulação em fase o ângulo de fase de uma portadora senoidal é igual à fase instantânea da portadora não modulada mais uma componente que varia linearmente com o sinal modulante, isto é,

$$\theta_i(t) = w_c t + k_p m(t) \quad (3.3)$$

em que $w_c t$ é a fase da portadora não modulada, $m(t)$ é o sinal de informação ou sinal modulante e k_p é a sensibilidade de fase do modulador dada em rad/volt.

Portanto a equação de um sinal modulado em fase é dada por:

$$e_{PM}(t) = A_c \cos[w_c t + k_p m(t)] \quad (3.4)$$

Derivando a equação (3) em relação ao tempo obtemos a frequência instantânea do sinal modulado em fase, assim:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [2\pi f_c t + k_p m(t)] = f_c + \frac{1}{2\pi} k_p \frac{d}{dt} m(t) \quad (3.5)$$

Logo a fase do sinal modulado varia linearmente com a derivada do sinal modulante, $m(t)$.

O segundo termo da equação (3.5) é chamado de desvio de frequência instantâneo $f_d(t) = \frac{1}{2\pi} k_p \frac{d}{dt} m(t)$, ele fornece o quanto a frequência do sinal modulado se desloca em relação à portadora.

O índice de modulação, β , para um sinal modulado em ângulo é definido como o maior desvio de fase produzido pelo sinal modulante, assim, para a modulação PM tem-se que:

$$\beta_{PM} = |k_p m(t)|_{MAX} \quad (3.6)$$

3.1.2. Modulação em frequência

Na modulação em frequência da portadora não modulada varia diretamente com o sinal modulante, ou seja, a frequência instantânea é igual à frequência da portadora não modulada (f_c), mais uma componente que varia proporcionalmente ao sinal modulante $m(t)$, ou seja,

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t) \quad \text{ou} \quad \omega_i(t) = \omega_c + 2\pi k_f m(t) \quad (3.7)$$

em que k_f é definido como a sensibilidade de frequência do circuito modulador, com unidade igual a Hz/volt, e f_c é um valor constante.

Observe que neste caso o desvio de frequência instantâneo é dado por: $f_d(t) = k_f m(t)$, isto é, ele é proporcional ao sinal modulante.

Integrando a equação (3.7) obtemos o ângulo de fase instantâneo do sinal FM,

$$\theta_i(t) = \int_0^t w_i(\tau) d\tau = \int_0^t [w_c + 2\pi k_f m(\tau)] d\tau = w_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

Portanto a equação de um sinal modulado em frequência é dada por:

$$e_{FM}(t) = A_c \cos \left[w_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \quad (3.9)$$

Como definido pela equação (3.6), o índice de modulação é o desvio máximo da fase, então:

$$\beta_{FM} = 2\pi k_f \left| \int_0^t m(\tau) d\tau \right|_{MAX} \quad (3.10)$$

Observando as equações (3.5) e (3.7) podemos notar que na modulação PM a frequência instantânea varia linearmente com a derivada do sinal modulante, e na modulação FM a frequência instantânea varia linearmente com o sinal modulante. Os dois tipos de modulação são muito parecidos, mas para sinais de tempo contínuo a modulação em frequência é preferida pela maior facilidade na construção dos circuitos moduladores e demoduladores.

A figura 3.1 nos ajuda a comparar as formas de onda de um sinal modulado em amplitude, fase e frequência utilizando um tom senoidal como sinal modulante. Observe que tanto na modulação em fase quanto na modulação em frequência, as amplitudes das portadoras permanecem constantes enquanto que a frequência varia com o tempo. Observe também que a distinção entre a modulação em fase e em frequência só pode ser feita graficamente quando se compara as variações de frequência com o sinal modulante.

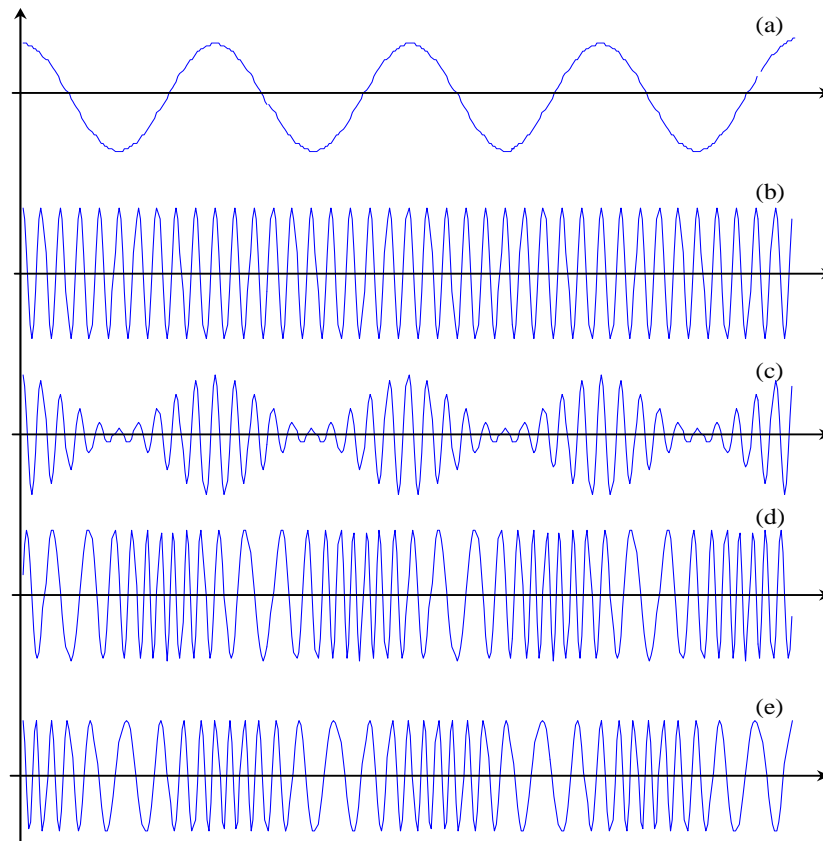


Figura 3.1: (a) Sinal modulante, (b) Portadora, (c) Sinal modulado em amplitude, (d) Sinal modulado em fase, (e) Sinal modulado em frequência.

3.2. Modulação por um único tom

A modulação por um único tom nos ajuda a determinar alguns parâmetros importantes do sinal modulado, neste caso, o sinal modulante é admitido ser um sinal cossenoidal do tipo:

$$m(t) = A_m \cos(w_m t) \quad (3.11)$$

em que $w_m \ll w_c$ é a frequência do sinal modulante.

3.2.1. Modulação em fase

Substituindo a equação (3.11) na equação (3.3) a fase instantânea do sinal PM é dada por:

$$\theta_i(t) = \omega_c t + k_p A_m \cos(\omega_m t) \quad (3.12)$$

consequentemente,

$$e_{PM}(t) = A_c \cos(\omega_c t + k_p A_m \cos(\omega_m t)) \quad (3.13)$$

e o índice de modulação é dado por:

$$\beta_{PM} = |k_p m(t)|_{MAX} = k_p A_m \quad (3.14)$$

3.2.2. Modulação em frequência

Substituindo a equação (3.11) na equação (3.7) a frequência instantânea do sinal FM é dada por:

$$\omega_i(t) = \omega_c + 2\pi k_f A_m \cos(\omega_m t) \quad (3.15)$$

O desvio de frequência é definido como:

$$\Delta f = k_f A_m \quad (3.16)$$

Observe que Δf representa o desvio ou deslocamento de frequência máximo provocado na portadora pelo sinal modulante. Note que o desvio é proporcional à amplitude do sinal modulante, mas independe da frequência deste sinal.

Utilizando as equações (3.8) e (3.16), podemos determinar o ângulo de fase instantâneo do sinal FM, isto é,

$$\theta_i(t) = w_c t + 2\pi k_f \int_0^t A_m \cos(w_m \tau) d\tau = w_c t + \frac{2\pi k_f A_m}{2\pi f_m} \text{sen}(w_m t)$$

$$\theta_i(t) = w_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \text{sen}(w_m t) \quad (3.17)$$

Neste caso, o índice de modulação do sinal FM será:

$$\beta_{FM} = \frac{k_f A_m}{f_m} = \frac{\Delta f}{f_m} \quad (3.18)$$

A equação do sinal FM será, portanto:

$$e_{FM}(t) = A_c \cos(w_c t + \beta_{FM} \text{sen}(w_m t)) \quad (3.19)$$

Dependendo do valor do índice de modulação são identificados dois tipos de modulação em frequência,

- Modulação FM com faixa estreita tal que o índice de modulação é pequeno comparado com 1 radiano, $\beta_{FM} \leq 0.25 \text{ rad}$.
- Modulação FM com faixa larga tal que o índice de modulação é maior que 1 radiano, $\beta_{FM} > 1 \text{ rad}$.

Para a modulação com faixa estreita a largura de banda do sinal modulado é aproximadamente duas vezes a largura de banda do sinal modulante, como na modulação em amplitude com banda lateral dupla. Já para a modulação com faixa larga a largura de banda será muito maior do que a do sinal modulante, como veremos a seguir. O aumento na largura de banda é devido ao transladamento em frequência não linear do sinal modulante.

A partir da próxima seção concentraremos nossa atenção na modulação em frequência, devido a sua maior utilização quando o sinal modulante é de tempo contínuo. Para facilidade de notação o índice de modulação do sinal FM será indicado pela letra grega beta, isto é, $\beta = \beta_{FM}$.

3.3. Espectro de um sinal FM

Como a modulação em ângulo é um processo não linear a sua análise espectral é muito difícil, por esta razão vamos usar um tom cossenoidal como sinal mensagem para a análise do espectro de um sinal FM. Na modulação em amplitude por um tom cossenoidal o seu espectro de frequência consiste de um par de impulsos deslocados acima e abaixo da frequência da portadora. Mas na modulação em frequência por um tom cossenoidal, teoricamente um número infinito de bandas laterais são gerados em torno da frequência da portadora, isto é, a modulação em frequência é um processo espectralmente não linear.

Considere um tom de áudio cossenoidal $m(t) = A_m \cos(w_m t)$, logo, o sinal modulado em frequência é descrito pela equação (3.19). Esta equação pode ser reescrita como:

$$e_{FM}(t) = \text{Re} \left[A_c e^{jw_c t} e^{j\beta \sin(w_m t)} \right] \quad (3.20)$$

em que Re é a parte real do número complexo entre colchetes.

A função $e^{j\beta \sin(w_m t)}$ é uma função periódica e, portanto pode ser escrita pela série exponencial de Fourier tal que:

$$e^{j\beta \sin(w_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn w_m t} \quad (3.21)$$

Os coeficientes A_n da série de Fourier da equação acima são calculados tais que:

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j\beta \sin(n w_m t)} e^{-jn w_m t} dt$$

em que $w_m = \frac{2\pi}{T}$.

Admitindo $w_m t = x$, após alguma manipulação algébrica tem-se que:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\beta \sin(x) - jnx} dx = J_n(\beta) \quad (3.22)$$

A equação acima é conhecida como **função de Bessel** de primeira classe de ordem n e argumento β . A figura 3.2 mostra as curvas da função de Bessel em função do índice de modulação β e da ordem n .

A série de potências para a equação (3.22) é dada por:

$$A_n = J_n(\beta) = \left(\frac{\beta}{2}\right)^n \left\{ \frac{1}{n!} - \frac{(\beta/2)^2}{1!(n+1)!} + \frac{(\beta/2)^4}{2!(n+2)!} - \frac{(\beta/2)^6}{3!(n+3)!} + \dots \right\} \quad (3.23)$$

Propriedades da função de Bessel

i. Simetria

$$\left. \begin{array}{l} J_{2n}(\beta) = J_{-2n}(\beta) \\ J_{2n+1}(\beta) = -J_{-2n-1}(\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow J_n(\beta) = (-1)^n J_{-n}(\beta) \quad (3.24)$$

ii. Limite para $n \rightarrow \infty$.

$$J_n(\beta) = 0 \text{ para } \beta = 0 \text{ e } n \neq 0 \text{ ou } n \rightarrow \infty \quad (3.25)$$

iii. Limite para $\beta \rightarrow \infty$.

$$J_n(\beta) = 0 \text{ para } \beta \rightarrow \infty \quad (3.26)$$

iv. Potência

(3.27)

v. Índice de modulação baixo

(3.28)

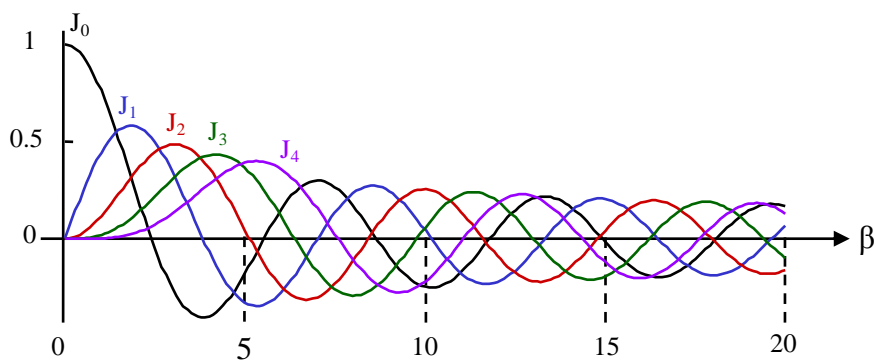


Figura 3.2: Funções de Bessel.

A tabela a seguir mostra os valores dos coeficientes $J_n(\beta)$ em função de β , com amplitudes maiores ou iguais a 0.01.

Tabela 3.1: Funções de Bessel.

[illegible]

2.5	-0.05	0.50	0.45	0.22	0.07	0.02								
3.0	-0.26	0.34	0.49	0.31	0.12	0.04	0.0							
							1							
4.0	-0.40	-0.07	0.36	0.43	0.28	0.13	0.0	0.0						
							3	2						
5.0	-0.18	-0.33	0.05	0.36	0.39	0.26	0.1	0.0	0.0					
							3	5	2					
6.0	0.15	-0.28	-0.24	0.11	0.36	0.36	0.2	0.1	0.0	0.0				
							5	3	6	2				
7.0	0.30	0.00	-0.30	-0.17	0.16	0.35	0.3	0.2	0.1	0.0	0.0			
							4	3	3	6	2			
8.0	0.17	0.23	-0.11	-0.29	-0.10	0.19	0.3	0.3	0.2	0.1	0.0	0.0		
							4	2	2	3	6	3		
9.0	-0.09	0.24	0.14	-0.18	-0.27	-0.06	0.2	0.3	0.3	0.2	0.1	0.0	0.0	0.0
							0	3	0	1	2	6	3	1

Retornando ao sinal FM, observando a equação (3.22) sabemos que $A_n = J_n(\beta)$, então a equação (3.20) pode ser reescrita como:

$$e_{FM}(t) = \text{Re} \left[A_c e^{jw_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn w_m t} \right] = A_c \text{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j(w_c + n w_m) t} \right]$$

$$e_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(w_c + n w_m) t \quad (3.29)$$

A equação (3.29) é a representação em série de Fourier na forma compacta de um sinal FM modulado por um único tom. Calculando a transformada de Fourier desta equação tem-se que:

$$E_{FM}(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m)] \quad (3.30)$$

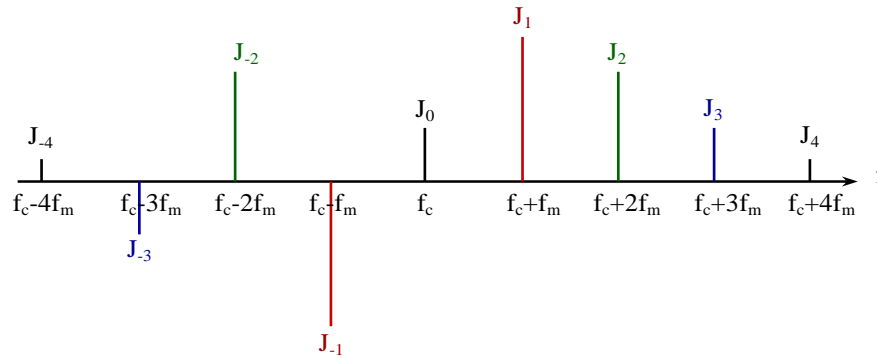


Figura 3.3: Espectro unilateral de um sinal FM modulado

por um tom cossenoidal e $\beta = 2$.

O espectro do sinal FM contém a componente da portadora e um conjunto infinito de componentes laterais, simetricamente espaçadas por f_m , acima e abaixo da componente da portadora, ou seja, o deslocamento espectral é não linear e se estende até o infinito. Este resultado é muito diferente da modulação em amplitude por um único tom na qual somente um par de bandas laterais é gerado. Um outro resultado importante, que pode ser observado pela propriedade (v), é o caso em que $\beta \ll 1$, somente J_0 e J_1 apresentam valores significativos, neste caso a modulação é conhecida como FM de faixa estreita (semelhante à modulação AM). Este resultado também pode ser verificado na tabela 1 para $\beta = 0.25$.

3.4. Potência de um sinal FM

A amplitude do sinal FM dado pela equação (3.9) permanece constante, assim, pode-se concluir que a potência média do sinal FM em relação a um resistor de 1 ohm vale:

$$P = \frac{A_c^2}{2} \quad (3.31)$$

Esta propriedade também é válida para os sinais modulados em fase. Como a Como a potência do sinal FM permanece constante, a potência da portadora sem modulação se distribui pelas bandas laterais. Esta propriedade pode ser verificada pela tabela das funções de Bessel, observe que para os diferentes índices de modulação as amplitudes de J_0 e demais coeficientes se alteram para valores diferentes de β .

Admitindo o sinal FM modulado por um único tom, pode-se notar que a potência de cada componente lateral da equação (3.29) é proporcional ao quadrado do coeficiente de Bessel, assim, utilizando o teorema de Parseval, a potência média do sinal FM é dada por:

$$P = \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) \quad (3.32)$$

em que, $P = \frac{A_c^2}{2} J_n^2(\beta)$ representa a potência média da n-ésima componente lateral.

Como pela propriedade (iv) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$, então, $P = \frac{A_c^2}{2}$.

3.5. Largura de faixa de um sinal FM

O espectro de frequências dado pela equação (3.30) mostra que o sinal FM apresenta componentes espectrais que se estendem até o infinito, contudo ele pode ser limitado se considerarmos somente as amplitudes mais significativas dos coeficientes $J_n(\beta)$ ou então se considerarmos uma distorção mínima previamente especificada. O número componentes significativas do espectro de um sinal FM está relacionado com o índice de modulação, quanto maior o índice de modulação maior é este número, como mostra a figura 3.4. Mantendo a amplitude do sinal mensagem constante, este número decresce pois $\beta = \frac{k_f A_m}{f_m} = \frac{\Delta f}{f_m}$.

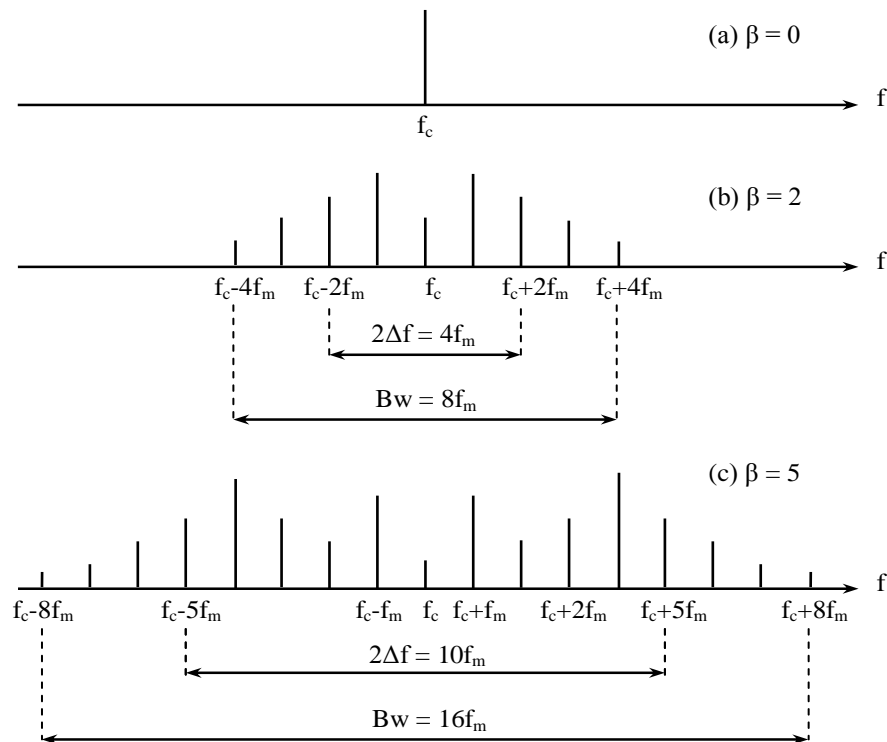


Figura 3.4: Espectro de um sinal FM.

A princípio poder-se-ia pensar que a largura de faixa necessária para a transmissão de um sinal FM seria duas vezes o desvio máximo de frequência, ou seja, $B_w = 2\Delta f$, porém, examinando a figura 3.4 pode-se notar que o espectro de amplitude do sinal FM se estende além de $\pm 2\Delta f$ em torno da frequência da portadora.

O modo mais direto de definir a largura de faixa de um sinal FM é estabelecer que todas as componentes de frequência com amplitudes maiores que 1% da portadora não modulada sejam preservadas, assim,

$$B_w = 2Nf_m \quad (3.33)$$

em que N é tal que $J_N(\beta) \leq 0.01$, veja tabela 3.2.

Tabela 3.2: Número de componentes significativas de $J_N(\beta)$.

β	0.1	0.3	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0	30.0
N	1	2	2	3	4	8	14	25	35

Uma outra maneira de definir a largura de faixa é utilizando a **Regra de Carlson**. Resultados experimentais indicam que a distorção no sinal mensagem é desprezível se pelo menos 98% da potência do sinal está contida na banda de transmissão. Seja S_N a potência média normalizada do sinal FM em função de N , isto é,

$$S_N = \frac{\frac{1}{2} A_c^2 \sum_{n=-N}^N J_n^2(m_f)}{P_T = \frac{1}{2} A_c^2} = \sum_{n=-N}^N J_n^2(m_f) \quad (3.34)$$

Recorrendo à tabela das funções de Bessel observa-se que a potência normalizada é maior que 98% se,

$$N = \beta + 1 \quad (3.35)$$

Desse modo define-se a largura de faixa pela regra de Carlson como:

$$Bw = 2(\beta + 1)f_m = 2\Delta f(1 + 1/\beta) = 2(\Delta f + f_m) \quad (3.36)$$

Analisando a equação (3.18) observa-se que, para um mesmo desvio de frequência, à medida que a frequência do sinal modulante aumenta o índice de modulação diminui, assim, a largura de faixa tende a permanecer constante para diferentes frequências do sinal modulante e mesmo desvio. No caso de um sinal mensagem qualquer com espectro de amplitude limitado em f_m Hertz, pode-se fazer uma estimativa da largura de faixa considerando o desvio máximo permitido e a maior frequência do sinal modulante (f_m).

Em transmissões FM comerciais o desvio máximo permitido é 75 kHz e a frequência máxima do sinal de áudio é estabelecida em 15 kHz. Neste caso o índice de modulação será:

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{75 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^3} = 5$$

Neste caso a largura de faixa utilizando a regra de Carlson será:

$$B_w = 2(75 + 15) = 180 \text{ kHz}$$

Por outro lado, utilizando a equação (3.33) obtém-se:

$$B_w = 2 \times 8 \times 15 = 240 \text{ kHz}$$

Na prática a largura de faixa de um sinal FM é estabelecida em 200 kHz, correspondendo a um desvio de ± 75 kHz em torno da frequência da portadora mais uma banda de guarda de 25 kHz acima e abaixo da portadora para diminuir a distorção e evitar interferências entre estações adjacentes.

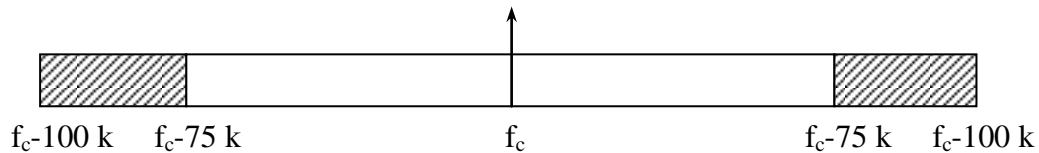


Figura 3.5: Largura de faixa de uma emissora de FM.

3.6. Modulação FM de faixa estreita

Considere o caso da modulação por um único tom em que $m(t) = A_m \cos(w_m t)$ e índice de modulação $\beta \leq 0.25$. Neste caso, pela equação 3.28, os coeficientes de Bessel são dados por:

$$\begin{aligned} J_0(\beta) &\cong 1 \\ J_1(\beta) &\cong \beta/2 \quad \leftrightarrow \quad J_{-1}(\beta) \cong -\beta/2 \\ J_n(\beta) &\cong 0 \quad |n| > 1 \end{aligned} \tag{3.37}$$

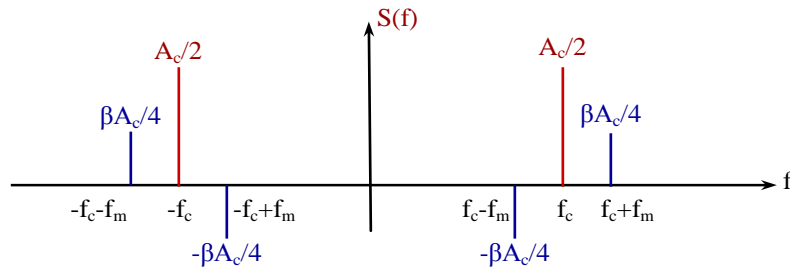


Figura 3.6: Espectro do sinal FM de faixa estreita.

Consequentemente, pela equação (3.29), o sinal no domínio do tempo é dado por:

$$s(t) = A_c \cos(w_c t) + \frac{A_c \beta}{2} \cos((w_c + w_m)t) - \frac{A_c \beta}{2} \cos((w_c - w_m)t) \quad (3.38)$$

ou seja,

$$s(t) = A_c \cos(w_c t) - A_c \beta \text{sen}(w_m t) \cdot \text{sen}(w_c t) \quad (3.39)$$

em que A_c é a amplitude da portadora, w_c é a frequência da portadora e w_m é a frequência do sinal modulante.

Observe a expressão (3.38) é semelhante à equação de um sinal modulado em amplitude com portadora presente, diferindo somente pelo sinal negativo no último termo da equação. Assim, para o sinal FM a largura de faixa de transmissão é a mesma do sinal AM, ou seja, $2f_m$ ou $2w_m$, daí o nome FM de faixa estreita para diferenciar da modulação de faixa larga.

Observe também que na equação (3.39), $\text{sen}(w_m t)$ é a integral do sinal mensagem $m(t)$, $\cos(w_m t)$, assim, um sinal FM de faixa estreita pode ser gerado a partir de um integrador seguido de um modulador de produto como mostra o diagrama de blocos da figura 3.7, ou seja, a modulação FM de faixa estreita é semelhante à modulação AM.

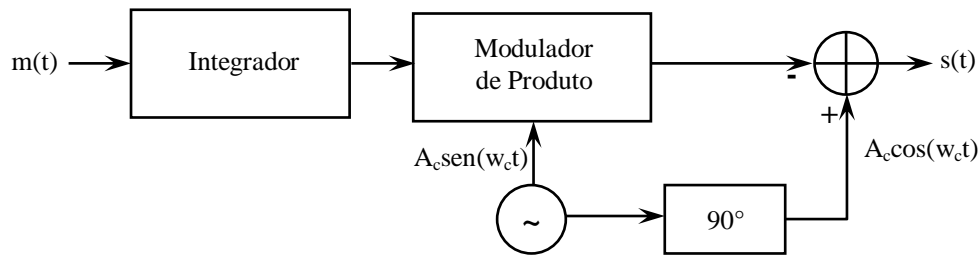


Figura 3.7: Diagrama de blocos de um modulador FM de faixa estreita.

O sinal FM de faixa estreita modulado por um único tom poder ser representado pelo diagrama fasorial da figura 3.8.b em que a portadora com amplitude A_c é tomada como referência. Admitindo $|\theta_i(t)| < 0.25 \text{ rad}$, a resultante fasorial apresenta amplitude aproximadamente constante e igual à da portadora, enquanto que seu ângulo de fase varia com o tempo dependendo das componentes laterais. Na modulação AM, figura 3.8.a, o ângulo de fase permanece inalterado, igual ao da portadora, enquanto que a amplitude da componente resultante varia dependendo das bandas laterais.

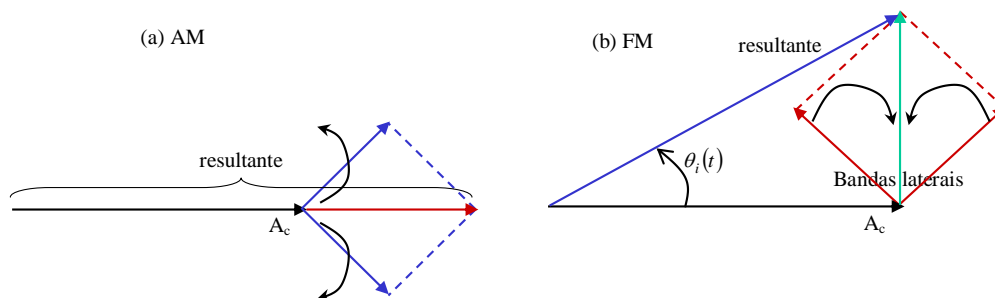


Figura 3.8: Diagrama fasorial da modulação (a) AM e (b) FM de faixa estreita.

3.7. Geração de sinais FM

Um modulador de frequência é um dispositivo cuja frequência instantânea varia linearmente com a amplitude do sinal mensagem. Existem dois métodos básicos para a geração de sinais modulados em frequência: o método indireto e o direto. O método indireto utiliza um modulador FM de faixa estreita e circuitos multiplicadores de frequência e o método direto utiliza osciladores controlados por tensão (VCO – *voltage controlled oscillator*).

3.7.1. Método indireto

Neste método o sinal modulante é integrado e em seguida aplicado em um modulador de faixa estreita. A modulação é realizada em frequências mais baixas, em seguida o sinal é aplicado a um dispositivo multiplicador de frequência para aumentar a frequência e o desvio para níveis desejados, como mostra o diagrama de blocos da figura 3.9. A estabilidade de frequência é obtida utilizando osciladores a cristais. Este tipo de modulador é chamado oscilador Armstrong em homenagem ao inventor da modulação FM, Edwin Howard Armstrong em 1933.

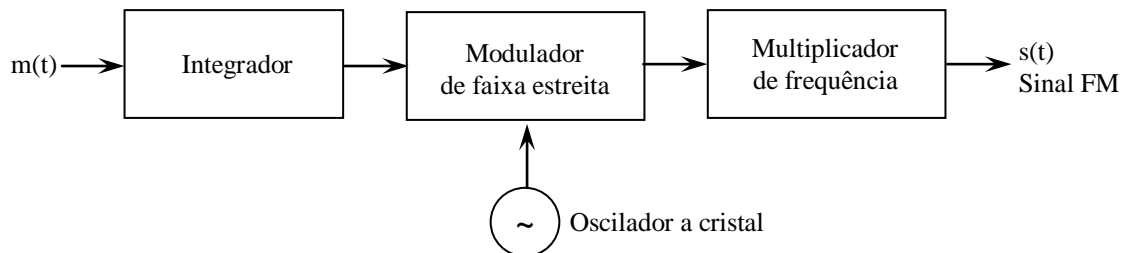


Figura 3.9: Diagrama de blocos de um modulador FM pelo método indireto.

Na realidade o processo de obtenção do sinal FM de faixa larga é feito em varias etapas. No diagrama de blocos mostrada na figura 10 são utilizados dois multiplicadores de frequência e um misturador. Os dois osciladores são controlados a cristal para se obter uma boa estabilidade de frequência. Suponha que se deseja transmitir sinais de áudio na faixa de 50 Hz a 15 kHz e que o modulador de faixa estreita opera na frequência $f_1 = 0.2$ MHz. Suponha também que na saída do transmissor deseja-se um sinal FM com frequência da portadora igual a 90 MHz e desvio de 75 kHz.

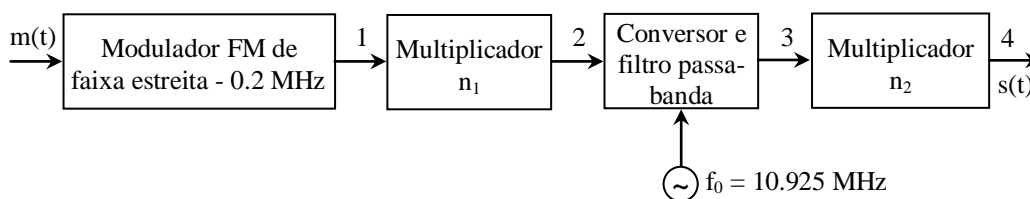


Figura 3.10: Modulador FM de faixa larga a partir de um modulador de faixa estreita.

Para o modulador de faixa estreita operar satisfatoriamente o índice de modulação β_1 é mantido em um valor menor do que 0.5 radianos para a menor frequência do sinal modulante que é 50 Hz, assim,

$$\beta_1 = 0.5 = \frac{\Delta f_1}{50} \rightarrow \Delta f_1 = 25 \text{ Hz}$$

Foi usada a menor frequência do sinal modulante porque, em geral, as componentes de frequências mais baixas apresentam maiores amplitudes. Observe que para se obter um desvio de frequência de 75 kHz na saída do transmissor o desvio β_1 deve passar por uma multiplicação total de 3000. Contudo, se esta multiplicação for feita diretamente a frequência da portadora será $3000 \times 0.2 = 600$ MHz, que é muito maior que o valor desejado de 90 MHz. Por esta razão são utilizados dois estágios de multiplicação e um intermediário de conversão de frequências, como mostra o diagrama de blocos da figura 3.10.

Para que o desvio final seja de 75 kHz os dois estágios de multiplicação devem multiplicar o desvio de frequência na saída do modulador de faixa estreita por 3000, assim,

$$n_1 n_2 = \frac{\Delta f}{\Delta f_1} = 3000 \quad (3.40)$$

Na saída (2) do primeiro multiplicador a frequência da portadora é $f_2 = n_1 f_1$, e na saída (3) do estágio conversor (ou misturador) o filtro passa-banda seleciona a diferença de frequências, isto é, $f_3 = f_2 - f_0 = n_1 f_1 - f_0$. No estágio final (4) o desvio de frequência é dado por $\Delta f = n_1 n_2 \Delta f_1$, pois o misturador não altera o desvio de frequência e a frequência da portadora será $f_c = n_2 f_3 = n_2 (n_1 f_1 - f_0) = 90$ MHz. Como $f_1 = 0.2$ MHz e $f_2 = 10.925$ MHz, então:

$$n_2 (n_1 f_1 0.210^6 - 10.92510^6) = 9010^6 \quad (3.41)$$

Combinando as equações (3.40) e (3.41) obtém-se:

$$\begin{aligned} n_1 &= 64.3 \cong 64 \\ n_2 &= 46.7 \cong 47 \rightarrow 48 \end{aligned} \quad (3.42)$$

A tabela 3.3 mostra a frequência da portadora e o desvio de frequência para cada estágio do diagrama de blocos da figura 3.10. O desvio do modulador de faixa estreita foi estabelecido em 24.4 Hz por causa das aproximações feitas em n_1 e n_2 .

Tabela 3.3: Exemplo do modulador FM da figura 3.10.

	(1)	(2)	(3)	(4)
f_c	0.2 MHz	12.8 MHz	1.875 MHz	90 MHz
Δf	24.4 Hz	1.56 kHz	1.56 kHz	75 kHz

3.7.2. Método direto

Neste método a frequência instantânea do sinal varia diretamente com a amplitude do sinal modulante. O modulador consiste de um oscilador senoidal sendo que um dos elementos reativos do circuito tanque, o capacitor, é um dispositivo cuja capacitância varia com a tensão aplicada em seus terminais. Este tipo de modulador é conhecido também como oscilador controlado por tensão.

Um modo de implementar este tipo de modulador é utilizando um oscilador Hartley, cujo esquema é mostrado na figura 3.11. O componente capacitivo do circuito tanque, $C(t)$, consiste de um capacitor fixo em paralelo com um capacitor variável com a tensão (varactor ou varicap).

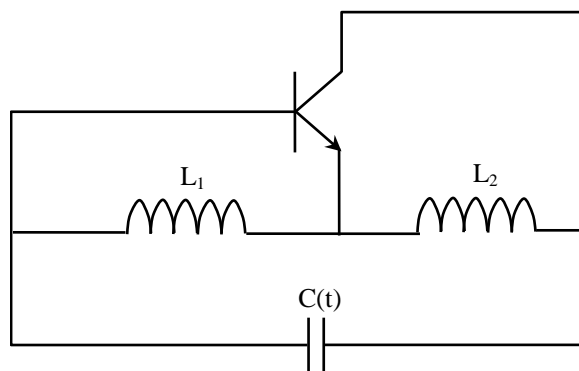


Figura 3.11: Modulador FM usando um oscilador Hartley.

A frequência instantânea deste oscilador é dada por:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C(t)}} \quad (3.43)$$

em que $C(t)$ é um capacitor variável com a tensão em paralelo com um capacitor fixo com capacitância C_0 .

Admitindo um sinal modulante cossenoidal com frequência f_m , a capacitância $C(t)$ pode ser expressa como:

$$C(t) = C_0 + \Delta C \cos(2\pi f_m t) \quad (3.44)$$

em que ΔC é a máxima variação da capacitância.

Substituindo a equação (3.44) na (3.43) tem-se que:

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \frac{1}{2\pi \sqrt{(L_1 + L_2)(C_0 + \Delta C \cos(2\pi f_m t))}} \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{(L_1 + L_2)C_0 \left(1 + \frac{\Delta C}{C_0} \cos(2\pi f_m t)\right)}} \end{aligned}$$

Admitindo, na ausência de sinal modulante, $f_c = \frac{1}{2\pi \sqrt{(L_1 + L_2)C_0}}$ então,

$$f_i(t) = f_c \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta C}{C_0} \cos(2\pi f_m t)\right)}} \quad (3.45)$$

Admitindo $\frac{\Delta C}{C_0} \ll 1$ é utilizando a seguinte aproximação,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3 + \dots \approx 1 - \frac{1}{2}x \quad \text{para } |x| \ll 1 \quad (3.46)$$

Então, a equação (3.45) pode ser aproximada por:

$$f_i(t) = f_c + \Delta f \cos(2\pi f_m t) \quad (47)$$

em que, $\Delta f = -\frac{\Delta C}{2C_0} f_c$.

Um outro modo de gerar um sinal FM é utilizando um modulador de reatância. Neste modulador, é utilizado um transistor de efeito de campo para simular uma reatância variável com a tensão, como mostra a figura 3.12. Os terminais entre dreno e fonte do transistor é equivalente a um capacitor com capacitância aproximadamente igual a $g_m RC$, em que g_m é a transcondutância do JFET.

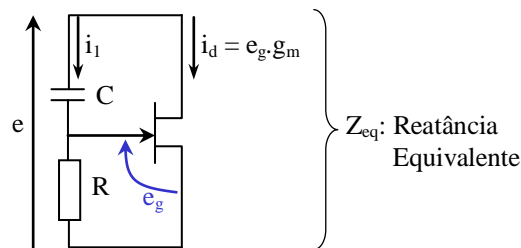


Figura 3.12: Reatância variável com a tensão.

Admitindo que a corrente na porta (*gate*) do transistor é nula, tem-se que:

$$i_1 = \frac{e}{R - jX_C} \text{ e } e_g = Ri_1$$

Combinando as duas equações obtém-se:

$$e_g = \frac{Re}{R - jX_C} \quad (3.48)$$

A impedância equivalente vista entre os terminais dreno e fonte é dada por:

$$Z_{eq} = \frac{e}{i_d} = \frac{e}{g_m e_g} = \frac{R - jX_C}{Rg_m} = \frac{1}{g_m} \left(1 - j \frac{X_C}{R} \right)$$

Escolhendo os valores de R e C tais que $X_C \gg R$, por exemplo, $X_C \geq 10R$, então a equação acima pode ser expressa como:

$$Z_{eq} \approx -j \frac{1}{2\pi f C_{eq}} \quad (3.49)$$

em que $C_{eq} = g_m RC$.

Portanto os terminais do transistor podem ser vistos como uma impedância capacitiva de valor $\frac{1}{2\pi f g_m RC}$. Como a transcondutância varia com a tensão aplicada na porta do transistor, então a capacitância equivalente varia com a tensão e_g . Esse circuito é acoplado aos terminais do circuito tanque de um oscilador para se obter um gerador FM.

3.8. Transmissor FM

Para a geração de um sinal FM de faixa larga pode-se utilizar o esquema mostrado na figura 3.13. O diagrama consiste de um VCO, como mostrado anteriormente, seguido de multiplicadores e conversores de frequência. Pode-se utilizar um modulador de faixa estreita como mostra o diagrama de blocos da figura 3.10 para gerar um sinal FM de faixa larga, neste diagrama todos os osciladores devem ser controlados a cristal para se obter uma boa estabilidade de frequência.

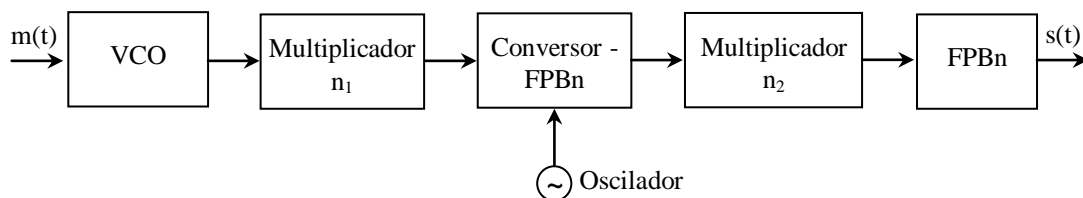


Figura 3.13: Transmissor FM.

Quando o VCO é projetado pelo método direto, os circuitos mostrados anteriormente, figuras 3.11 e 3.12, têm a desvantagem de não apresentar uma boa estabilidade de frequência, pois a portadora não é obtida a partir de um oscilador com

alta estabilidade. Neste caso a existe a necessidade de se utilizar uma configuração como ilustra a figura 3.14 para estabilização de frequência do modulador.

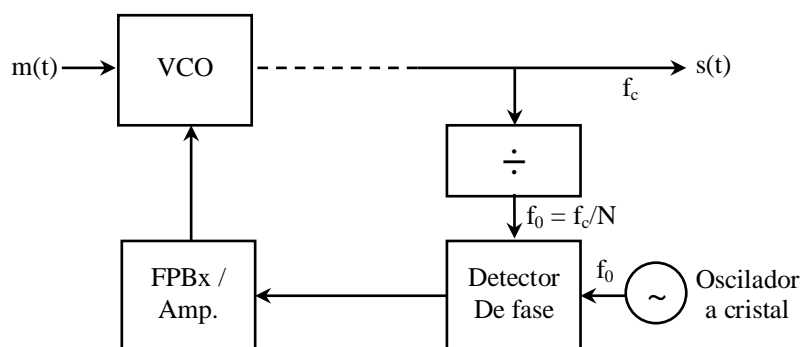


Figura 3.14: Diagrama de blocos para estabilização da frequência do modulador.

O oscilador a cristal fornece a desejada estabilidade de frequência da portadora do sinal FM. A saída do circuito divisor de frequência deve apresentar a mesma frequência do oscilador a cristal. Na saída do detector de fase é extraído o termo da diferença de frequências entre a saída do divisor e o oscilador; o sinal resultante é então aplicado no circuito amplificador/filtro passa-baixas.

Quando o sinal na saída do divisor de frequências é diferente de zero, então a frequência da portadora é diferente de seu valor nominal. Um sinal de tensão é aplicado ao VCO para corrigir a sua frequência para o valor exato. Quando o sinal na saída do detector de fase é nulo, a tensão na saída do filtro passa-baixas também é nula, pois o VCO está oscilando na sua frequência correta de operação. Desse modo a frequência do VCO irá apresentar a mesma estabilidade do oscilador a cristal.

3.9. Demodulação de sinais FM

Como estudado anteriormente, na modulação em frequência a portadora apresenta deslocamentos acima e abaixo de sua frequência de repouso de acordo com as variações da amplitude do sinal modulante. Na recepção, para extrair a informação contida na portadora, as variações de frequência devem ser transformadas em variações de amplitude. Desse modo a função básica de um demodulador FM é fornecer em sua saída um sinal proporcional aos desvios de frequência instantâneos da portadora.

Uma forma simples de demodular um sinal FM é mostrada no diagrama de blocos da figura 3.15. Este demodulador consiste de um filtro passa-altas seguido de um

detector de envoltória. O filtro converte as variações de frequência em variações de amplitude, formando um sinal AM como mostra a figura 3.16. Em seguida, o detector de envoltória converte as variações de amplitude no sinal modulante. Para o circuito operar como um demodulador, o sinal FM com seus desvios, devem estar operando na banda de transição do filtro, isto é, entre os pontos A e C na figura 3.16. A portadora do sinal FM deve estar localizada no ponto B da resposta em frequência. Nestas condições o filtro está operando como um derivador pois a sua resposta em frequência pode ser aproximada por:

$$H(w) \approx jw \tau \quad (3.50)$$

em que τ é a constante de tempo do filtro.

Assim,

$$x(t) \approx \tau \frac{d}{dt} s(t) \quad (3.51)$$

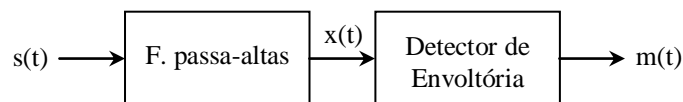


Figura 3.15: Exemplo de um detector FM

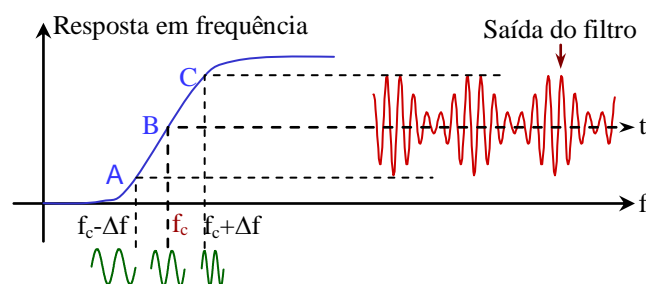


Figura 3.16: Espectro de frequência e sinal na saída do filtro passa-altas.

Admitindo uma modulação por um único tom: $s(t) = A_c \cos[w_c t + \beta \sin(w_m t)]$, então:

$$x(t) = -A_c \tau \left[1 + \frac{\beta w_m}{w_c} \cos(w_m t) \right] \sin(w_c t + \beta \sin(w_m t)) \quad (3.52)$$

A equação acima representa um sinal modulado em amplitude com índice de modulação $\frac{\beta w_m}{w_c}$, portanto um detector de envoltória recupera o sinal de informação, neste caso representado por $\frac{\beta w_m}{w_c} \cos(w_m t)$.

Este tipo de detector não é utilizado na prática pelo fato da atenuação na banda de transição ser grande o que causa uma baixa relação sinal-ruído na saída e a região de transição não ser exatamente linear, causando distorção harmônica.

3.9.1. Detector Travis ou Discriminador diferencial

O detector Travis utiliza dois circuitos LC conectados em *push-pull* como mostra a figura 3.17. Da teoria de amplificadores de potência sabemos que circuitos trabalhando em *push-pull* eliminam distorções harmônicas, portanto este detector apresenta baixa distorção, além disso, ele possui uma região de trabalho muito maior do que o circuito anterior, como ilustra a figura 3.18.

Os circuitos formados por D_1 , R_1 , C_3 e D_2 , R_2 , C_4 formam dois detectores de envoltória alimentados, respectivamente, pelas saídas dos circuitos sintonizados L_1 , C_1 e L_2 , C_2 . O circuito sintonizado no primário do transformador deve ser amplamente sintonizado para aceitar todas as variações da portadora, ou seja, deve ter largura de faixa de 200 kHz. Os dois circuitos tanque do secundário são sintonizados nas frequências f_1 e f_2 de modo a acomodar os desvios de ± 75 kHz em torno da frequência da portadora. Nos rádios receptores de FM a frequência da portadora corresponde à frequência intermediária que é de 10.7 MHz. Observe na figura 3.17 que o sinal modulado, antes de ser aplicado ao circuito primário do transformador, é processado por um circuito **limitador** a fim de manter a sua amplitude constante, pois o detector também é sensível às variações de amplitude do sinal.

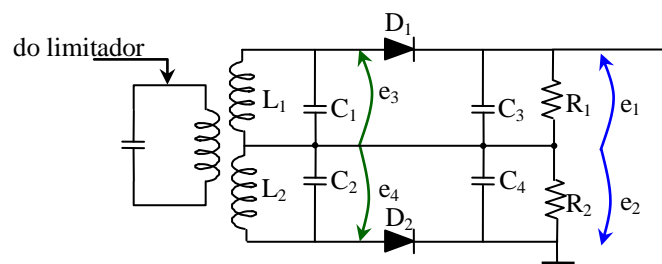


Figura 3.17: Detector Travis.

A figura 3.18 mostra a resposta em frequência dos dois circuitos sintonizados L_1 , C_1 e L_2 , C_2 , sendo que uma está invertida em relação à outra por π radianos. Esta inversão é necessária para se obter a resposta em frequência da figura 3.18 e a saída seja dada por $e_1 - e_2$. A curva resultante é conhecida como curva S do detector.

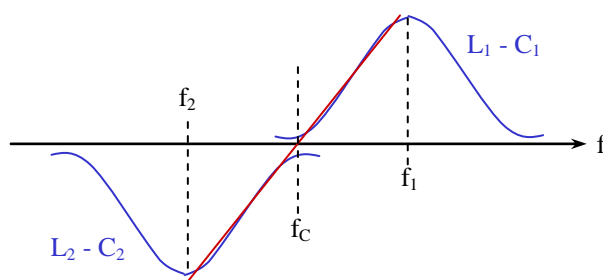


Figura 3.18: Resposta em frequência do detector Travis.

Os circuitos sintonizados do secundário convertem as variações de frequência da portadora em variações de amplitude e os detectores de envoltória recuperam a informação original. Para um desvio da portadora igual a zero o sinal na saída do detector deve ser nulo. As tensões nos circuitos sintonizados, e_3 e e_4 , são iguais e em oposição de fase, portanto as tensões em R_1 e R_2 são iguais. Como a saída do circuito é retirada através dos dois resistores e estão em oposição de fase, então ela será nula. Conforme a portadora se desvia acima (ou abaixo) da sua frequência central, a tensão em $L_1 - C_1$ será maior (ou menor) do que a tensão em $L_2 - C_2$, o que faz com que e_1 seja maior (ou menor) que e_2 . Desse modo uma variação na frequência instantânea da portadora resulta em uma variação proporcional da tensão de saída. Como a amplitude da tensão de saída é proporcional ao desvio de frequência, na saída do circuito tem-se o sinal demodulado.

Para que a distorção harmônica seja baixa, a frequência do sinal FM não deve variar acima da frequência f_1 ou abaixo de f_2 . A desvantagem deste detector é a dificuldade de sintonização dos dois circuitos ressonantes.

Seguindo esta mesma linha de raciocínio dois outros circuitos detectores de FM foram desenvolvidos: o detector Foster-Seeley e o detector de relação [7]. Contudo, com o desenvolvimento dos circuitos integrados, hoje em dia são mais utilizados os demoduladores utilizando circuitos de fase travada (PLL – *phase locked loop*) ou os detectores em quadratura que serão apresentados a seguir.

3.9.2. Demodulador FM utilizando o phase-locked loop (PLL)

O estudo da técnica de malha travada (*phase-locked*) data de 1932, mas somente com o avanço das técnicas de fabricação de circuitos integrados é que o PLL começou a realmente ser utilizado. Esta técnica é muito empregada em radio-difusão para controlar e estabilizar a frequência de transmissores e no processo de detecção de sinais modulados em frequência.

O PLL é um sistema com realimentação negativa, constituído de três blocos: um detector de fase (ou circuito multiplicador), um filtro passa-baixas, um amplificador e um oscilador controlado por tensão (VCO - *voltage controlled oscillator*) conectados como mostra a figura 3.19.

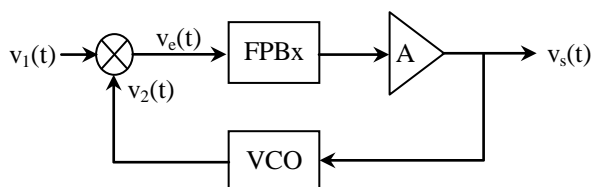


Figura 3.19: Diagrama de blocos do PLL.

Com nenhuma tensão aplicada na entrada do PLL a tensão de saída $v_s(t)$ é nula, nesta condição o VCO opera na sua frequência de oscilação livre (frequência pré-estabelecida, ω_0). Aplicando um sinal na entrada, o detector de fase compara a fase e a frequência deste sinal com a fase e frequência do sinal da saída VCO e gera um sinal de erro $v_e(t)$ que é filtrado, amplificado e em seguida aplicado na entrada do VCO. Esta tensão aumenta ou diminui a frequência do VCO de modo a reduzir o erro entre as frequências do sinal de entrada e do VCO. Quando a malha está “travada”, a frequência do VCO é exatamente igual à frequência da entrada e o circuito está operando em condições normais. Observe que um erro de fase deve sempre existir para manter o VCO fora de sua frequência de oscilação livre e igual à frequência de entrada. Este erro de fase é tanto menor, quanto maior for o ganho de malha.

3.9.2.1. Equacionamento matemático do PLL

Para a análise matemática do PLL o detector de fase será considerado um circuito multiplicador analógico e que os sinais de entrada e de saída do VCO sejam senoidais tais que:

$$v_1(t) = V_1 \sin(w_1 t + \phi_1(t)) \quad (3.53)$$

$$v_2(t) = V_2 \sin(w_2 t + \phi_2(t)) \quad (3.54)$$

O sinal na saída do detector de fase será dado pela multiplicação entre $v_1(t)$ e $v_2(t)$, assim após alguma manipulação algébrica tem-se que:

$$v_e(t) = \frac{V_1 V_2}{2} \{ \sin[(w_1 + w_2)t + \phi_1(t) + \phi_2(t)] + \sin[(w_1 - w_2)t + \phi_1(t) - \phi_2(t)] \} \quad (3.55)$$

O filtro passa-baixas elimina o termo de alta frequência do sinal (soma das frequências) da equação (3.55) e coloca em sua saída o termo de baixa frequência (diferença de frequências). Portanto, admitindo $h(t)$ a resposta ao impulso do filtro passa-baixas então o sinal de saída na figura (3.19) será dado por:

$$v_s(t) = K_1 h(t) * \sin[(w_1 - w_2)t + \phi_1(t) - \phi_2(t)] \quad (3.56)$$

em que $K_1 = \frac{V_1 V_2}{2} A$, e A é o ganho do amplificador.

Quando o PLL estiver amarrado (*locked*), as frequências w_1 e w_2 são exatamente iguais, assim,

$$v_s(t) = K_1 h(t) * \sin[\phi_d(t)] \quad (3.57)$$

em que $\phi_d(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$ é chamado de erro de fase.

Quando este erro de fase é pequeno, comparado com 1 radiano, a seguinte aproximação pode ser feita: $\sin[\phi_d(t)] \approx \phi_d(t)$, portanto,

$$v_s(t) = K_1 h(t) * \phi_d(t) \quad (3.58)$$

Neste caso PLL está trabalhando na região linear e podemos analisá-lo no domínio da frequência. A transformada de Fourier da equação (58) é dada por:

$$V_s(w) = K_1 H(w) \Phi_d(w) \quad (3.59)$$

em que $H(w)$ é a resposta em frequência do filtro passa-baixas, também conhecido como filtro de malha.

Como a frequência de oscilação do VCO é proporcional a $v_s(t)$, podemos escrever que,

$$w_2 t - w_1 t = \Delta w t = \phi_2(t) \rightarrow \frac{d}{dt} \phi_2(t) = \Delta w = K_0 v_s(t)$$

Aplicando a transformada de Fourier na equação acima se tem que:

$$jw \Phi_2(w) = K_0 V_s(w) \quad (3.60)$$

Como $\Phi_2(w) = \Phi_1(w) - \Phi_d(w)$, substituindo esta relação e a equação (3.60) na equação (3.59) obtém-se:

$$\Phi_d(w) = \frac{1}{1 + K_0 K_1 H(w) / jw} \Phi_1(w) \quad (3.61)$$

O PLL como demodulador FM

Vamos admitir que a entrada do circuito PLL da figura (3.19) seja um sinal modulado em frequência. Se o PLL estiver amarrado ao sinal de entrada então o frequência do VCO acompanha a frequência instantânea do sinal de entrada. Desse modo a tensão de erro filtrada pelo filtro passa-baixas e amplificada, $v_s(t)$, é a responsável por manter a frequência instantânea do VCO igual à frequência do sinal de entrada. Portanto $v_s(t)$ é igual ao sinal que gerou o sinal FM, isto é, o sinal demodulado. Este tipo de demodulador apresenta uma linearidade muito melhor do que os outros tipos de demoduladores FM.

Para se observar matematicamente o processo de demodulação, vamos considerar a fase do sinal de entrada como sendo aquela de um sinal FM, isto é,

$$\phi_1(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(t) dt \quad (3.62)$$

em que $m(t)$ é o sinal modulante.

Substituindo a equação (3.61) na equação (3.59) tem-se que:

$$V_s(w) = \frac{K_1 H(s)}{1 + K_0 K_1 H(w) / jw} \Phi_1(w) \quad (3.63)$$

Admitindo $|K_0 K_1| \gg 1$, de tal forma que o erro de fase seja sempre pequeno, então,

$$V_s(w) \approx \frac{1}{K_0} jw \Phi_1(w) \quad (3.64)$$

A figura (3.20) ilustra o diagrama de blocos do modelo linear para o PLL utilizado como um demodulador FM. Observe que o multiplicador é modelado no domínio da frequência como um somador e o VCO como um circuito integrador.

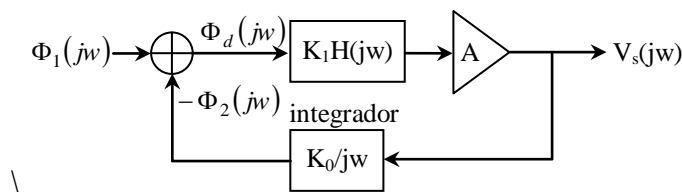


Figura 3.20: Modelo linear do PLL.

Pela propriedade da diferenciação da transformada de Fourier a equação (64) se reduz a:

$$v_s(t) \approx \frac{1}{K_0} \frac{d}{dt} \phi_1(t) \quad (3.65)$$

Ou seja:

$$v_s(t) \approx \frac{1}{K_0} \frac{d}{dt} \left[2\pi k_f \int_0^t m(t) dt \right]$$

logo,

$$v_s(t) \approx \frac{2\pi k_f}{K_0} m(t) \quad (3.66)$$

Portanto o sinal de saída do PLL é praticamente o mesmo sinal que gerou a onda FM, a menos de uma constante, assim a demodulação é executada.

Uma característica significativa do demodulador utilizando um PLL é que a largura de faixa do sinal modulado em frequência é muito maior que a largura de faixa do filtro de malha caracterizado por $H(w)$. A resposta em frequência deste filtro fica restrita ao sinal em banda base. Assim, o sinal de controle do VCO tem a mesma largura de faixa do sinal modulante $m(t)$, enquanto que o sinal de saída é uma onda FM cuja frequência instantânea é igual à do sinal de entrada.

3.9.3. Detector em quadratura

O detector em quadratura consiste de um circuito defasador, um bloco multiplicador e um filtro passa-baixas, interligados como mostra a figura (3.21). A maioria dos detectores de FM é sensível às variações de amplitude, assim o sinal de FI modulado, antes de ser aplicado ao circuito, é aplicado a um circuito **limitador** a fim de manter a sua amplitude constante. O defasador produz um deslocamento de fase de 90° mais uma parcela proporcional ao desvio de frequência sofrido pela FI em relação à frequência central w_0 , equação (3.67). Os sinais de entrada e o defasado são aplicados em um filtro passa-baixas que seleciona as componentes de áudio aí presentes.

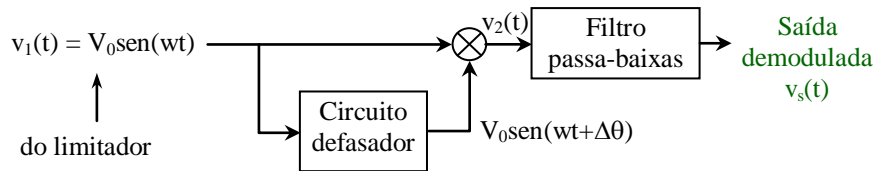


Figura 3.21: Detector FM em quadratura.

Admitindo w_0 a frequência central da FI e w a frequência instantânea, para que o circuito acima trabalhe como um detector de sinais FM o deslocamento de fase $\Delta\theta$ deve ser tal que:

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{2} - k(w - w_0) = \frac{\pi}{2} - k\Delta w \quad (3.67)$$

Sendo $v_1(t) = V_0 \text{sen}(wt)$ o sinal de entrada do demodulador, então a saída do circuito defasador será dada por:

$$v_d(t) = V_0 \text{sen}\left(wt + \frac{\pi}{2} - k\Delta w\right)$$

ou seja,

$$v_d(t) = V_0 \cos(wt - k\Delta w) \quad (3.68)$$

Na saída do circuito multiplicador se obtém o produto dos sinais, assim,

$$\begin{aligned} v_2(t) &= V_0 \text{sen}(wt) V_0 \cos(wt - k\Delta w) \\ &= \frac{V_0^2}{2} \{ \text{sen}(2wt - k\Delta w) + \text{sen}(-k\Delta w) \} \end{aligned}$$

Admitindo $k\Delta w \leq 0.25 \text{ rad}$ então $\text{sen}(k\Delta w) \approx k\Delta w$ então,

$$v_s(t) \approx -\frac{V_0^2}{2} k \Delta w \quad (3.69)$$

e a saída do filtro passa-baixas é aproximadamente um sinal diretamente proporcional ao desvio de frequência, assim a demodulação é realizada.

Um circuito capaz de fornecer o deslocamento de fase como mostrado na equação (3.67) é mostrado na figura (3.22). O circuito tanque L-C₂ deve estar sintonizado na frequência central ω_0 .

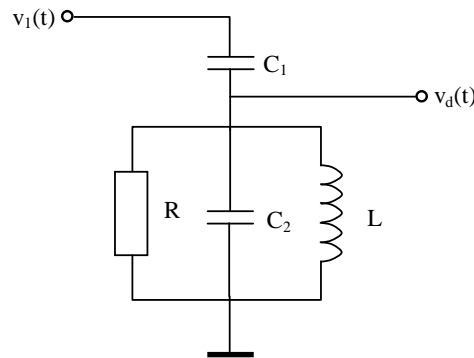


Figura 3.22: Circuito deslocador de fase.

Após alguma manipulação algébrica pode-se mostrar que o ângulo de fase entre as entrada e saída do circuito acima é dada por:

$$\Delta\theta = \arctan\left(\frac{\omega L}{R[w^2 L(C_1 + C_2)]}\right) \quad (3.70)$$

Como o fator de qualidade $Q = \frac{R}{\omega_0 L}$ e por hipótese $LC_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$, então,

$$\Delta\theta = \arctan\left(\frac{\omega L}{Q\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]}\right) \quad (3.71)$$

Simplificação do denominador da equação acima:

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w}\right) &= Q\left(\frac{w^2 - w_0^2}{ww_0}\right) = Q\frac{(w - w_0)(w + w_0)}{ww_0} \\ &= Q\Delta w\left(\frac{1}{w_0} + \frac{1}{w}\right) \end{aligned}$$

como $w = w_0 + \Delta w$ então,

$$Q\left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w}\right) = Q\Delta w\left(\frac{1}{w_0 + \Delta w} + \frac{1}{w_0}\right) \quad (3.72)$$

Nas transmissões comerciais de sinais FM o desvio máximo de frequência é de 75 kHz. Este desvio é muito pequeno quando comparado com a frequência intermediária (f_0) que é de 10.7 MHz, desse modo pode-se fazer a seguinte aproximação:

$$\frac{1}{w_0 + \Delta w} \approx \frac{1}{w_0}$$

logo, a equação (3.72) será dada por:

$$Q\left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w}\right) \approx \frac{2Q}{w_0} \Delta w \quad (3.73)$$

Como $Q = \frac{w_0}{2\pi B_w}$, em que B_w é a largura de faixa do circuito sintonizado L-C₂, então,

$$Q\left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w}\right) = \frac{1}{\pi B_w} \Delta w = k\Delta w$$

portanto,

$$\Delta\theta = \arctan\left(\frac{1}{k\Delta w}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(k\Delta w) \quad (3.74)$$

Estabelecendo um valor para a largura de faixa B_w tal que $k\Delta w \leq 0.25 \text{ rad}$, tem-se que:

$$\Delta\theta \approx \frac{\pi}{2} - k\Delta w \quad (3.75)$$

A equação (3.75) é a mesma mostrada na equação (3.67), assim, o circuito da figura (3.21) é um demodulador para sinais FM.

3.10. Receptor de sinais FM

Um receptor básico para sinais FM, assim como o receptor para sinais AM, utiliza o princípio super-heteródino. Basicamente ele consiste de um amplificador de RF, um circuito de conversão de frequências (misturador e oscilador local), um amplificador de FI, um demodulador e um amplificador de áudio. Os receptores FM diferem dos receptores AM por apresentarem maior largura de faixa da frequência intermediária, circuitos limitadores de amplitude, circuitos para controle automático de frequência, além de apresentarem detectores diferentes e circuito para de-ênfase. O misturador, o oscilador local e o amplificador de FI são similares aos receptores AM sendo que as frequências envolvidas são de valores maiores, por exemplo, a frequência intermediária para um receptor comercial de FM é de 10.7 MHz, enquanto para o de AM ela é de 455 kHz. O diagrama de blocos de um receptor FM é mostrado na figura (3.23).

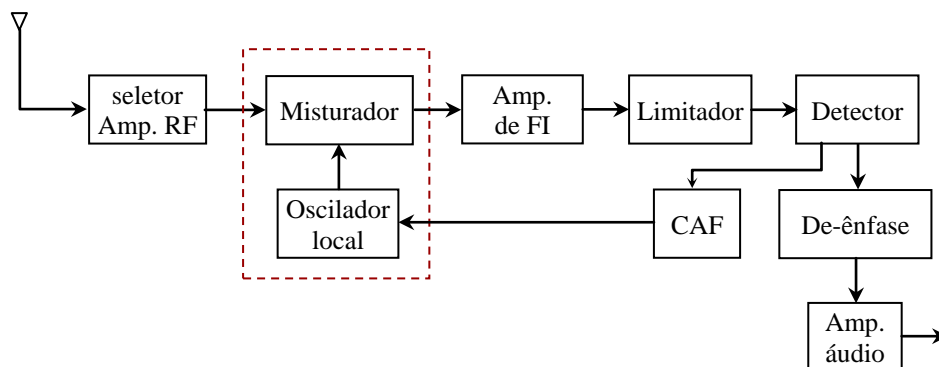


Figura 3.23: Receptor FM.

Amplificador de RF

Na recepção AM não há necessidade de se usar um estágio de amplificação de RF, mas nos receptores FM é necessária a utilização deste dispositivo. O fator de ruído do transistor usado no misturador é alto, pois ele é polarizado na região não linear e se o sinal for aplicado diretamente em sua entrada a relação sinal-ruído será muito baixa, podendo destruir a inteligibilidade da informação. O amplificador de RF aumenta a potência do sinal na entrada do misturador e como consequência aumenta a relação sinal-ruído. Nos receptores AM o amplificador de RF não é necessário, pois o ruído externo ao receptor, na faixa de operação, supera o ruído gerado internamente.

O do amplificador de RF de amplificar sinais na faixa de transmissão FM, entre 88 e 108 MHz, assim, reduz a interferência devido à frequência imagem e evita a irradiação pela antena do receptor do sinal do oscilador local.

Conversor de frequências

A frequência intermediária padronizada para os receptores de sinais FM é de 10.7 MHz e o oscilador local opera acima da frequência da portadora entre 98.7 a 118.7 MHz, para evitar a interferência de canais de baixa frequência de TV com frequências entre 66.6 a 86.6MHz. Desse modo a frequência imagem está na faixa entre 109.4 MHz e 129.4 MHz.

Limitador

O circuito limitador tem a função de manter a amplitude do sinal FM constante em sua saída. Ele elimina qualquer variação de amplitude provocada por ruído ou um outro tipo de interferência. Este circuito é necessário, pois os detectores para sinais FM são também sensíveis às variações de amplitude de um sinal. Ele consiste basicamente de um amplificador de FI polarizado com tensão de coletor baixa, seguido de um circuito tanque sintonizado em 10.7 MHz.

Detector FM

Os tipos de detectores (ou discriminadores) para sinais FM já foram estudados na secção 7 deste capítulo. Hoje em dia os detectores mais utilizados são os que usam PLL ou então os detectores em quadratura.

Controle automático de frequência (CAF)

O oscilador local nos receptores FM podem sofrer variações de frequência durante o tempo em que ele estiver operando. Se a sua frequência variar a frequência intermediária resultante do batimento de frequências entre o oscilador local e da portadora deve variar, provocando a perda de sintonia do receptor. A maneira de estabilizar o receptor é através da utilização de um controle automático de frequência.

Os circuitos que desempenham o controle automático de frequência utilizam um diodo (varicap) como mostra a figura 3.24. A capacitância do diodo varia inversamente com a tensão reversa aplicada em seus terminais. Os capacitores C_1 e C_2 são considerados como curto-circuito para as frequências de operação do oscilador, assim, C_D está em paralelo com C_0 . O diodo é polarizado reversamente através de R_1 e da tensão proveniente do discriminador através de R_2 . Se o oscilador sofrer oscilações acima (ou abaixo) da frequência de operação, vai aparecer no discriminador uma tensão contínua que diminui (ou aumenta) a tensão de polarização do diodo, aumentando (ou diminuindo) sua capacitância e consequentemente diminuindo (ou aumentando) a frequência de oscilação. Desse modo o circuito mantém estável a frequência intermediária do receptor.

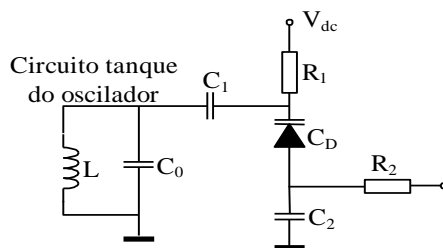


Figura 3.24: Circuito para controle automático de frequência.

Pré-ênfase e de-ênfase

Durante a transmissão, o ruído introduzido em um sinal FM provoca alterações tanto na amplitude, quanto na frequência do sinal. As alterações de amplitude podem ser eliminadas pelo estágio limitador do receptor, mas as alterações na frequência não podem ser completamente eliminadas.

O efeito do ruído nas variações da frequência pode ser minimizado desde que os desvios provocados pelo sinal modulante sejam muito maiores do que aqueles provocados pelo ruído. Para um sinal de áudio as amplitudes dos harmônicos de frequência alta são muito menores do que os de frequência baixa, assim, eles provocam desvios menores na portadora, podendo ser interferidos pelos desvios provocados pelo ruído. A solução encontrada para contornar este problema consiste em reforçar, amplificar, as amplitudes das frequências altas do sinal de áudio em relação às de baixa frequências antes de se fazer a modulação. Este reforço nas frequências altas é feito através de uma equalização utilizando uma rede de pré-ênfase como mostrada na figura 25.a. O circuito utilizado é um circuito passa-altas com constante de tempo (R_1C) igual a $75 \mu s$.

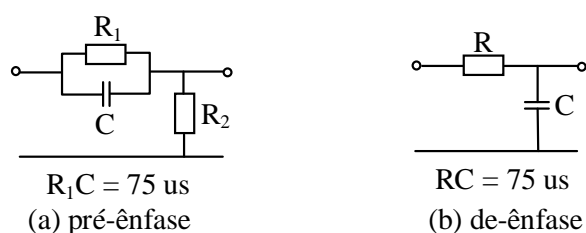


Figura 3.25: Circuitos para pré-ênfase e de-ênfase.

Uma constante de tempo de $75 \mu s$ implica em uma frequência de corte igual a 2122 Hz. Observe com o auxílio da figura 3.26 que a resposta em frequência do circuito de pré-ênfase aumenta gradualmente até atingir um ganho de 17 dB em 15 kHz. Observe também que foi omitido um circuito amplificador na rede de pré-ênfase. O circuito de de-ênfase é usado no receptor, é colocado após a demodulação e consiste de um filtro passa-baixas que faz a operação inversa da rede de pré-ênfase.

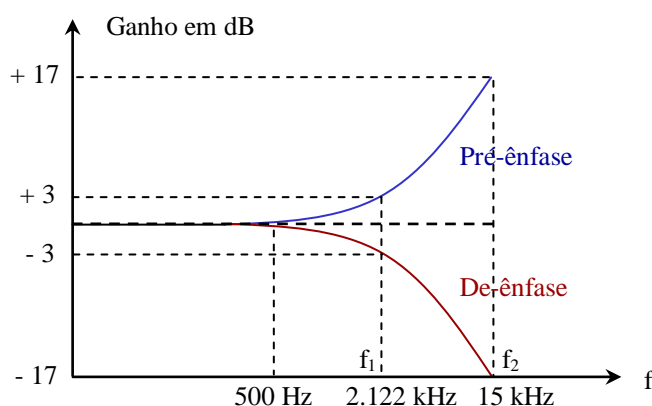


Figura 3.26: Resposta em frequência dos circuitos de pré-ênfase e de de-ênfase.

3.11. Transmissão estereofônica

Devido à qualidade da transmissão FM, ou seja, os sinais são recebidos com uma relação sinal-ruído alta em relação aos sinais AM e juntamente com o fato da largura de faixa de transmissão ser grande, é comum a radio-difusão estereofônica nos sistemas modulados em frequência.

3.11.1. Multiplexação estereofônica

Os sistemas estereofônicos envolvem a reprodução de dois ou mais sinais de áudio distintos de tal forma a criar uma impressão de um som mais natural, proveniente de várias direções ou lugares diferentes, como por exemplo, o som de uma orquestra em uma sala para concertos, captados por diferentes microfones colocados em diferentes partes da orquestra. Quando usamos sons estereofônicos utilizamos dois sinais que chamamos de canal esquerdo, $e(t)$, e canal direito, $d(t)$. Esse tipo de reprodução sonora é baseada no fato de que como temos dois [ouvidos](#), então temos uma percepção auditiva que nos permite perceber a direção de um som, por exemplo, se ele vem do lado esquerdo ou do lado direito ou seja os canais esquerdo e direito, e pela altura do som pode-se perceber também a sua distância.

A largura de faixa para transmissão FM, que é de 200 kHz, permite a transmissão estereofônica. Os canais esquerdo e direito devem ser transmitidos de tal modo que eles possam ser compatíveis com os receptores de radio monofônicos e possam ser separados pelos respectivos canais de áudio nos receptores estereofônicos.

A figura 3.27 mostra o diagrama de blocos de um sistema de multiplexação de sinais estereofônicos que é utilizado em rádio-difusão FM. Os sinais $e(t)$ e $d(t)$ não são diretamente transmitidos pois os receptores monofônicos devem ser capazes de receber o sinal monofônico que é a soma dos canais esquerdo mais o direito. Assim, os sinais $e(t)$ e $d(t)$, após passarem pelos circuitos de pré-ênfase, são aplicados em um circuito misturador que produz os sinais soma, $e(t) + d(t)$, e o sinal diferença, $e(t) - d(t)$. O sinal soma é o sinal monofônico que é mantido na sua banda base. O sinal diferença é aplicado em um modulador balanceado para modular em amplitude com portadora suprimida (AMDSB-SC) uma subportadora de 38 kHz. Esta subportadora é obtida de um sinal estável de 19 kHz que também é transmitido para facilitar o processo da demodulação AMDSB-SC. O sinal soma $e(t) + d(t)$, juntamente com o sinal modulado e a subportadora de 19 kHz formam o sinal composto que irá modular em frequência a portadora de RF.

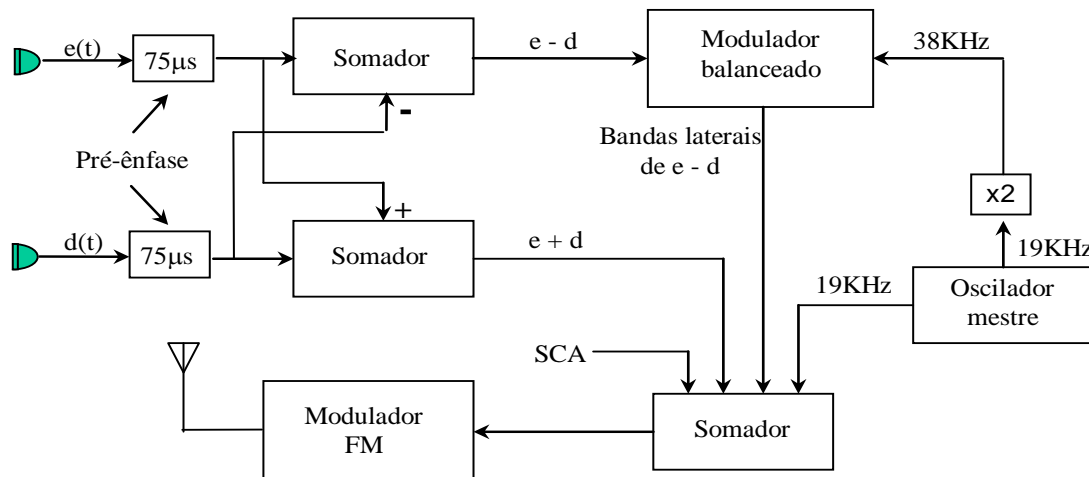


Figura 3.27: Multiplexador para a transmissão estereofônica.

Assim, o sinal composto na banda base que modula a frequência da portadora, excluindo o sinal SCA, pode ser escrito como:

$$s(t) = e(t) + d(t) + A \cos(2\pi f_p t) + [e(t) + d(t)] \cos(2\pi f_s t) \quad (3.76)$$

em que $f_p = 19\text{kHz}$ e $f_s = 38\text{ kHz}$.

A figura 3.28 mostra a composição espectral do sinal composto no domínio da frequência. Observe que os três sinais, o monofônico, o sinal modulado AMDSB-SC e a subportadora piloto de 19 kHz não se superpõem espectralmente. Dessa maneira eles podem ser separados por filtragem.

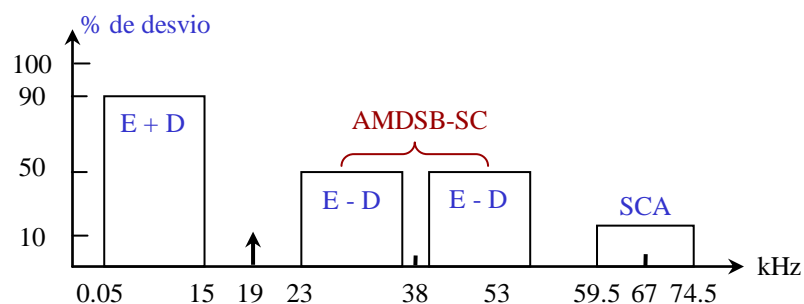


Figura 3.28: Espectro da banda base do sinal composto para transmissão estereofônica.

Na figura 3.28 o eixo das ordenadas é dado em porcentagem do desvio, pois o sinal composto deve ser tal que a amplitude máxima não cause desvios acima do valor máximo permitido que é de 75 kHz. Quando o sistema SCA é transmitido (*Subsidiary Communication Authorization*) o desvio máximo permitido para este sinal é de 10% e os desvios máximos permitido para os sinais $e(t) + d(t)$ e sinal modulado são reduzidos para 80%.

3.11.2. Recepção estereofônica

Na saída do demodulador FM tem-se presente o sinal multiplexado como na equação (3.76). Este sinal é aplicado no receptor estereofônico faz as operações inversas do transmissor como ilustra a figura 3.29.

Se este sinal é recebido por um receptor monofônico (parte superior do diagrama de blocos da figura (3.29)), ele é então aplicado a um circuito de de-ênfase seguido de um filtro/amplificador de áudio que recupera o sinal monofônico $e(t) + d(t)$, os outros sinais com frequências superiores a 15 kHz são rejeitados pelo processo de filtragem e amplificador de áudio.

Se o sinal estereofônico esta presente, processos de filtragem selecionam os sinais $e(t) + d(t)$, o sinal piloto de 19 kHz e o sinal AMDSB-SC que contém o sinal diferença entre o canal esquerdo e o direito. A rede matricial se encarrega de separar os canais fazendo a soma e a subtração como abaixo:

$$[e(t) + d(t)] + [e(t) - d(t)] = 2e(t) \rightarrow \text{canal esquerdo}$$

$$[e(t) + d(t)] - [e(t) - d(t)] = 2d(t) \rightarrow \text{canal direito}$$

Estes sinais passam por circuitos de de-ênfase e em seguida aplicados aos amplificadores de áudio.

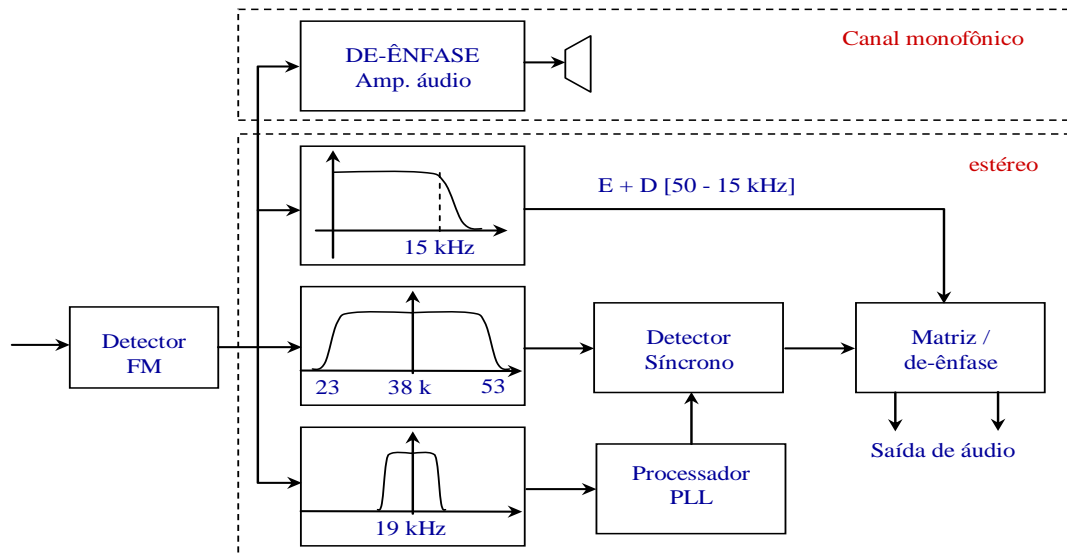


Figura 3.29: Diagrama de blocos do receptor monofônico/estereofônico.

Uma maneira para a regeneração da sub-portadora piloto de 38 kHz é através da utilização de um PLL, como mostra a figura 3.30. O oscilador controlado por tensão apresenta oscilação livre de 76 kHz (um quarto de 19 kHz) e passa por dois divisores de frequência ($\div 2$); este sinal de 19 kHz é aplicado juntamente com o sinal piloto ao detector de fase. Quando o PLL está travado, estes dois sinais estão sincronizados, assim a sub-portadora de 38 kHz também estará sincronizada com o sinal piloto e pode ser aplicada ao detector síncrono.

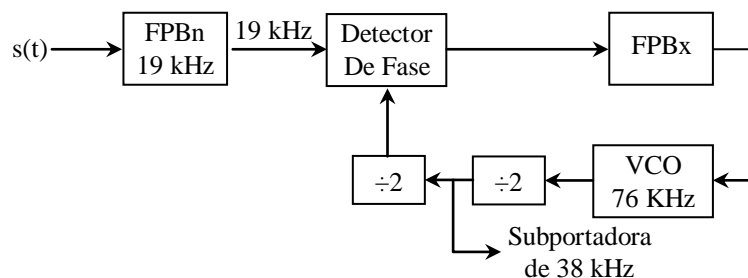


Figura 3.30: Sistema com PLL para recuperação da subportadora.

Capítulo 4

Sistemas de Modulação de Pulsos

4.1. Introdução

Em contraste com uma portadora senoidal, os sistemas de modulação de pulsos utilizam como portadora um trem de pulsos retangulares periódicos para transportar o sinal de informação. Neste caso algum parâmetro destes pulsos (amplitude, duração ou posição), é variado de acordo com as variações das amplitudes do sinal modulante. Estes sistemas são muito utilizados em sistemas de controle e instrumentação.

Nos sistemas de modulação em amplitude e da posição dos pulsos, os pulsos são projetados para ter duração curta de forma que na maior parte de cada intervalo de transmissão eles apresentem tensão nula. As principais razões para este procedimento é que utilizando pulsos com ciclo de trabalho estreito conseguimos economia de potência, além disso, o intervalo ocioso entre dois pulsos consecutivos pode ser preenchido por outros pulsos representando diferentes mensagens. Este último procedimento é chamado de multiplexação por divisão do tempo (TDM). A figura 4.1 mostra a forma de onda típica para os sistemas de modulação de pulsos em que PAM significa modulação da amplitude dos pulsos (*pulse amplitude modulation*), PWM significa modulação da largura dos pulsos (*pulse width modulation*) e PPM significa modulação da posição dos pulsos (*pulse position modulation*).

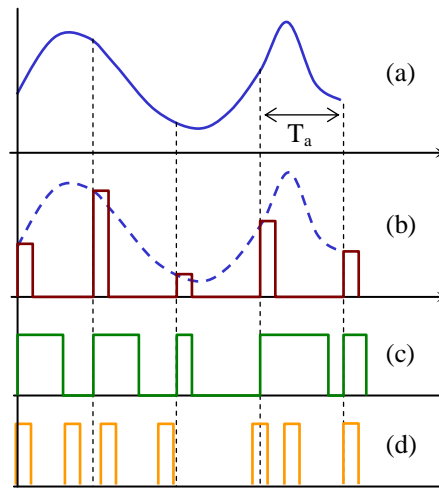


Figura 4.1: Sistemas de modulação de pulsos: (a) sinal modulante, (b) sistema PAM, (c) sistema PWM e (d) sistema PPM.

4.2. Modulação da amplitude dos pulsos

Na **modulação da amplitude** dos pulsos (PAM), figura 4.1.b, a amplitude de cada pulso varia proporcionalmente com a amplitude do sinal modulante. Este é o tipo de modulação mais simples. Pode ser provado matematicamente (teorema da amostragem) que para um sinal mensagem no qual a mais alta componente de frequência é f_{MAX} , o espaçamento máximo entre dois pulsos consecutivos de ser tal que:

$$T_a \leq \frac{1}{2f_{MAX}},$$

neste caso, o sinal pode ser recuperado completamente sem distorção. T_a é chamado de período de amostragem

Esta técnica é utilizada nos sistemas digitais PCM (*pulse code modulation* – modulação por código de pulso) onde cada pulso modulado é codificado digitalmente com palavras de 8 bits e depois transmitido.

O transmissor pode ser representado por um circuito de chaveamento, uma chave que abre e fecha durante o intervalo de amostragem (circuito amostrador). O intervalo em que a chave permanece aberta, em geral, é bem menor do que o intervalo

em que a chave permanece fechada. A detecção pode ser realizada por um simples filtro RC passa-baixas.

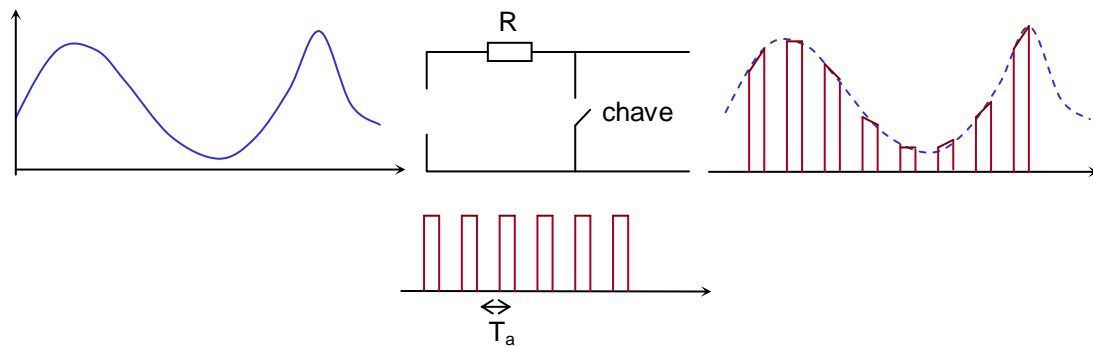


Figura 4.2: Modulador PAM

4.3. Modulação da largura e da posição dos pulsos

A **modulação por largura de pulso (PWM)** e a **modulação por posição de pulso (PPM)** são técnicas de modulação que consistem em variar, respectivamente, a duração ou a posição relativa dos pulsos. Na modulação por largura de pulso, figura 1.c, a tensão do sinal modulante varia diretamente a largura do pulso da portadora. Na modulação por posição de pulso, figura 1.d, a posição do pulso varia com a tensão do sinal modulante em relação a uma referência, enquanto que sua duração permanece constante. Nestes dois sistemas, a amplitude dos pulsos permanece constante, apresentando um desempenho superior em relação aos sistemas PAM analógico.

A figura 4.3 mostra um esquema de geração da modulação PWM. Na entrada positiva do comparador de alto ganho é aplicado o sinal modulante e na entrada negativa uma onda dente de serra. Conforme a diferença entre as tensões dos dois sinais for positiva ou negativa, na saída do comparador teremos uma tensão positiva ou nula. Observe que os pulsos de saída apresentam larguras diferentes, pois a comparação é feita em pontos diferentes de cada rampa. Para o circuito operar adequadamente, o nível médio de tensão dos dois sinais deve ser aproximadamente o mesmo.

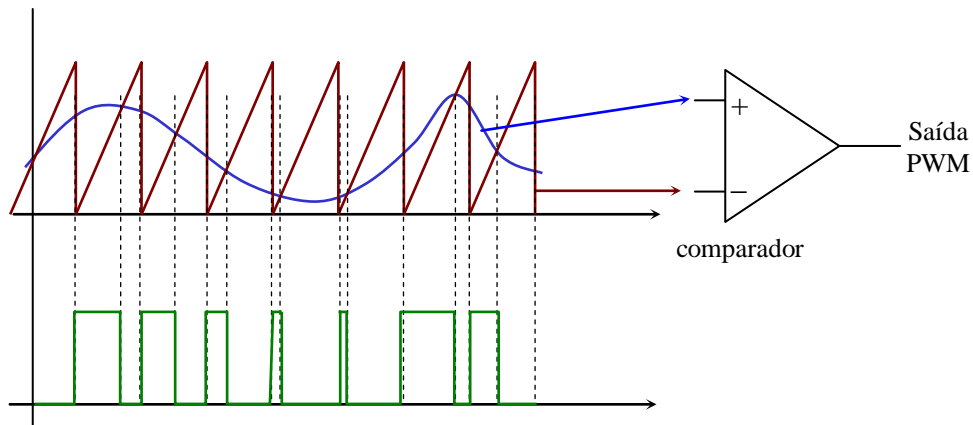


Figura 4.3: Modulador PWM.

A demodulação do sinal PWM é muito simples, um simples filtro de primeira ordem (um integrador) poderia ser usado para converter os pulsos para a forma original do sinal modulante, como mostra a figura 4.4. O valor médio do sinal PWM varia com o tempo, nos intervalos onde os pulsos são mais largos o valor médio é maior e nos intervalos onde os pulsos são estreitos o valor médio é menor. Portanto um circuito integrador recupera a informação original de um sinal PWM.

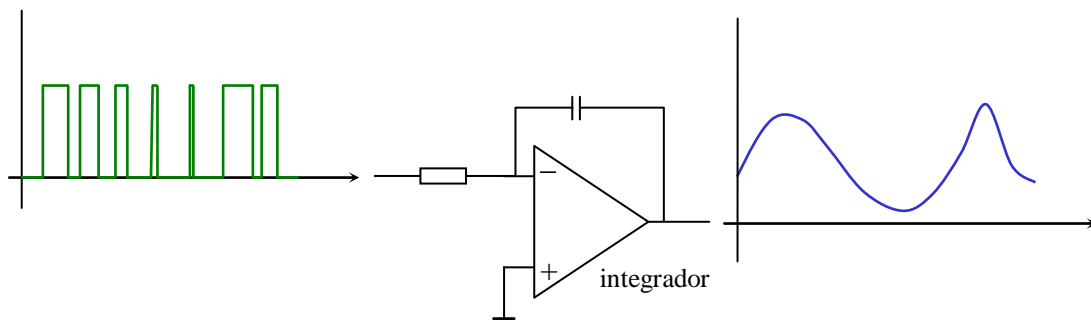


Figura 4.4: Demodulador PWM.

Os sistemas PWM e PPM são muito similares. Podemos obter a modulação PPM diferenciando e em seguida invertendo os pulsos PWM da figura 4.5. Transformando os pulsos positivos em pulsos retangulares de mesma duração podemos observar que a posição dos pulsos na figura 4.5.c é variável e proporcional ao sinal modulante original. Portanto, desse modo, geramos um sinal PPM. Observe que agora os pulsos apresentam largura fixa e desde que ela seja suficientemente pequena conseguimos uma economia de potência em relação ao sistema PWM.

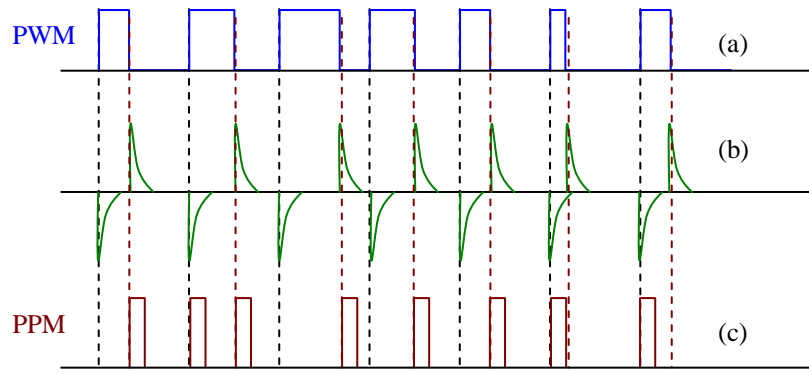


Figura 4. 5: Geração da modulação PPM.

4.4. Exemplo de aplicação da modulação PWM

A modulação PWM pode ser utilizada para controlar a velocidade de um motor DC. O controle da velocidade é feito através do chaveamento em alta frequência da tensão de alimentação fornecida ao motor. A tensão CC é convertida em uma onda quadrada que alterna entre uma tensão máxima (V_{CC}) e a tensão nula, fornecendo uma série de pulsos ao de tensão ao motor. Se a velocidade de chaveamento é suficientemente alta a velocidade do motor permanece estável.

A velocidade do motor é controlada pela variação da largura dos pulsos (PWM). Como somente durante um determinado intervalo de tempo é aplicada tensão no motor, a potência média e consequentemente a velocidade do motor pode ser variada variando a largura dos pulsos.

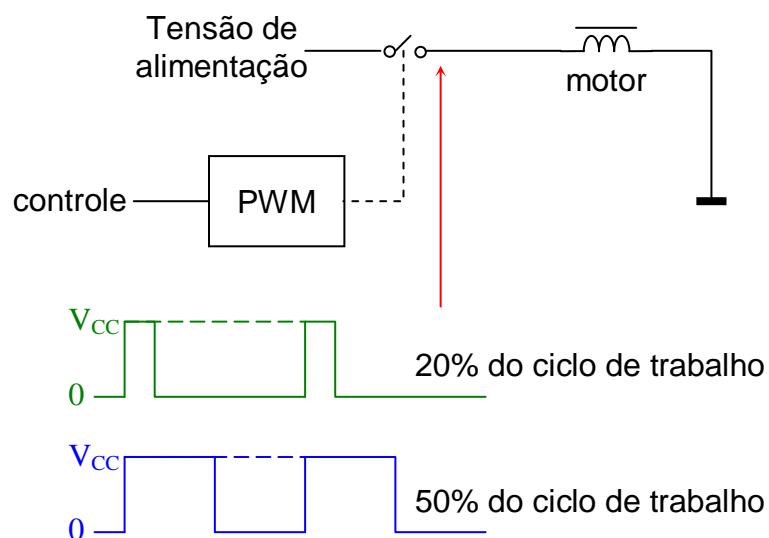


Figura 4.6: Controle da velocidade de um motor.

Capítulo 5

Modulação Digital

Os sistemas de modulação digital são muito superiores aos sistemas analógicos, pois, além apresentarem todas as vantagens da transmissão da informação por meios digitais, eles apresentam outras vantagens devido ao processo da modulação. As vantagens principais são que a modulação digital permite um uso mais eficiente da largura de banda do canal, menor potência de transmissão (o transmissor requer cerca de 10 dB a menos de potência para a mesma área de cobertura), em sistemas de longa distância o ruído não se acumula de um repetidor para o outro (imunidade) e desempenho melhor contra interferências. Neste capítulo iremos estudar algumas das técnicas mais comuns utilizadas na modulação digital em que a informação digital modula a amplitude frequência ou fase de uma portadora senoidal em passos discretos.

5.1 Introdução

As técnicas de modulação digital são empregadas quando se quer transmitir dados digitais na banda base através de canais de comunicação passa-banda. Estes canais podem ser um *link* de microondas, canais de satélite, ou até mesmo uma linha telefônica. Nestes casos, onde é disponível um canal passa-banda, é necessário modular uma portadora senoidal pelos dados digitais. Este procedimento é chamado de modulação digital.

Quando se transmite um sinal digital através de um cabo coaxial ou mesmo uma fibra ótica os dados, em geral, estão no formato binário e pulsos de tensão ou corrente são associados aos bits '0' e '1'. Já na modulação digital grande ênfase é dada na transmissão multiníveis onde se obtém uma maior eficiência espectral e taxas altas de transmissão de bits.

O processo de modulação digital consiste em modular uma portadora senoidal pelo sinal digital na banda básica. Ele envolve o chaveamento de algum parâmetro desta portadora (amplitude, frequência ou fase). Ela é empregada em transmissão digital, pois possibilita a transmissão via rádio, apresenta uma menor sensibilidade a ruídos e interferências e ainda um aproveitamento melhor da largura de faixa do canal disponível.

Do mesmo modo que na modulação analógica têm-se três tipos básicos de modulação digital: ASK, FSK e PSK, isto é, modulação por deslocamento (ou chaveamento) de amplitude, de frequência e de fase, respectivamente. A figura 5.1 mostra os sinais obtidos para estes três tipos de modulação no caso da transmissão de símbolos binários.

Na modulação ASK, com 100% de índice de modulação, o sinal é transmitido pela presença ou ausência da portadora durante o intervalo de bit, na modulação FSK duas frequências f_1 e f_2 e de mesma amplitude são utilizadas para se transmitir os dígitos binários e na PSK os dígitos binários são transmitidos alterando de 180° o ângulo de fase da portadora.

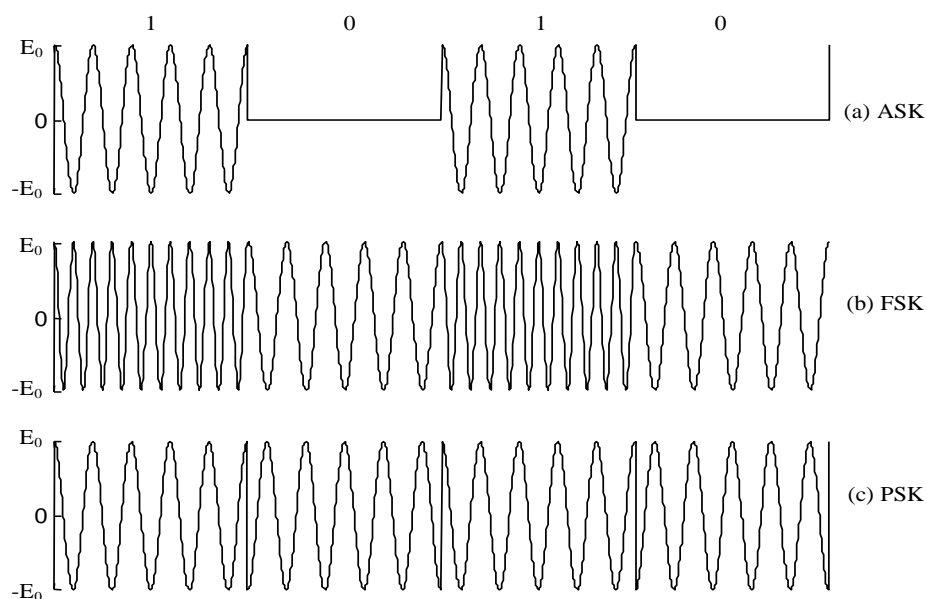


Figura 5.1: Esquemas de Modulação Digital binária

O sinal na banda básica é geralmente um sinal digital do tipo não retorno ao zero (NRZ), com níveis lógicos 0 e E_0 ou $-E_0$ e E_0 e que representam, respectivamente, os bits “0” e “1”. No sistema ASK o fluxo de bits modula diretamente a amplitude da

portadora. Nos sistemas FSK e PSK a envoltória da portadora é constante, mas a frequência e a fase são chaveadas pelo sinal digital.

Devido às limitações impostas pelo canal, o sinal modulado deve ser limitado em banda. A banda mínima é dada pelo teorema de Nyquist e é igual à metade da taxa de bits de transmissão, ou seja,

$$B_{w_{MIN}} = \frac{1}{2T_b} = \frac{f_b}{2} \quad (5.1)$$

em que: T_b é a duração de um bit e f_b é denominada de a taxa de bits do sistema (bps).

Organismos internacionais regulamentam que a banda de transmissão prática seja determinada pela seguinte relação:

$$B_w = kB_{w_{MIN}} \quad (5.2)$$

em que: $k = 3$ (para sistemas sem desvanecimento) ou $k = 5$ (para sistemas com desvanecimento).

Neste capítulo será sempre considerada como referência sempre a banda mínima de transmissão ($B_{w_{MIN}}$) do sistema.

5.2 Modulação ASK (*Amplitude shift keying*)

A modulação ASK consiste em modular diretamente a amplitude de uma portadora senoidal pelo sinal binário na banda básica. Assim, este processo consiste em transmitir a portadora senoidal com amplitude E_0 quando o sinal digital apresentar o valor “1” (marca), e transmitir tensão nula quando o sinal digital estiver no estado “0” (espaço), no qual os níveis de tensão para se transmitir os dados digitais são: E_0 e 0. O sinal ASK corresponde a uma modulação em amplitude com banda lateral dupla e índice de modulação igual a 100%. Ele pode ser gerado através de moduladores AM comuns ou diretamente através do chaveamento da portadora senoidal pelo sinal digital como é o caso mais frequente.

A largura de faixa deste sistema é estabelecida em $2Bw_{MIN}$ em que Bw_{MIN} corresponde à metade da taxa de bits do sistema como dito anteriormente. A figura 5.2. Ilustra o espectro de frequências de um sinal ASK binário. Neste caso:

$$Bw_{ASK} = 2Bw_{MIN} = f_b \quad (5.3)$$

O processo de demodulação é feito através de detectores de envoltória, como na modulação AMDSB analógica convencional. É possível também fazer uma detecção coerente, porém o sistema se torna mais complexo e raramente é utilizado.

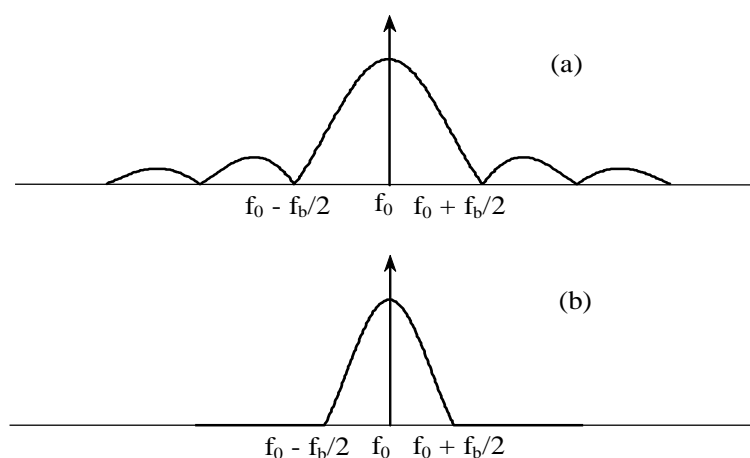


Figura 5.2: Espectro de um sinal ASK original (a) e limitado em banda (b)

Os principais inconvenientes da modulação ASK são que pelo menos 50% da energia do sinal é gasta para se transmitir a componente da portadora e a detecção de envoltória diminui a relação Sinal/Ruído do sistema em relação à detecção coerente. Poderia-se obter um sistema mais eficiente se fosse utilizada a modulação AM com portadora suprimida, AMDSB-SC, onde não há desperdício na transmissão da portadora, além do que a detecção coerente melhora a relação Sinal/Ruído. Porém, devido ao aumento da complexidade do sistema ela não é utilizada, além disso, existem outros sistemas mais eficientes, como será visto a seguir.

Observação: O sistema ASK binário é algumas vezes representado pela sigla BASK para diferenciá-lo dos sistemas MASK (ASK M-ário), isto é, sistema ASK com transmissão de M símbolos.

5.3 Modulação FSK (*Frequency shift keying*)

Sistemas de modulação angular, modulação em frequência ou fase, são mais eficientes que sistemas de modulação em amplitude, pois a portadora é transmitida com amplitude constante, podem ser transmitidos com maiores níveis de potência e fazem um uso mais eficiente da portadora. No sistema FSK binário dois sinais senoidais de mesma amplitude e frequências diferentes, f_1 e f_2 , são utilizados para representar e transmitir os bits “1” e “0” do sinal digital NRZ. Estes sinais podem ser descritos por:

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_i t), & 0 \leq t \leq T_b \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (5.4)$$

em que $i = 1, 2$; T_b é o intervalo de duração de um bit; E_b é a energia do sinal transmitido por bit; $\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_i t)$, $0 \leq t \leq T_b$ é o sinal da portadora e apresenta energia igual a um, e a frequência transmitida é dada pela seguinte relação:

$$f_i = \frac{n_c + i}{T_b} \quad n_c \in \mathbb{Z} \quad (5.5)$$

Observe que duas frequências f_1 e f_2 são escolhidas como múltiplos de $1/T_b$, assim os sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$ serão ortogonais entre si, o que facilita o processo de demodulação.

Para se gerar a modulação FSK o modo mais simples é utilizar dois sistemas ASK. Gera-se um sinal ASK_1 na frequência f_1 para o sinal digital e outro sinal ASK_2 , na frequência f_2 , para o complemento do sinal digital. A soma destes dois sinais produzirá a modulação FSK. Portanto, o sinal FSK pode ser encarado como a soma de dois ASK complementares, o que facilita a análise do sistema. A figura 5.3 mostra um esquema para a geração do sinal ASK binário. O sinal de entrada do tipo *on-off* com amplitudes $\sqrt{E_b}$ volts para o símbolo 1 e 0 volts para o símbolo 0 é aplicado diretamente ao modulador de produto com frequência f_1 e através de um inversor ao modulador com frequência f_2 . Assim quando um modulador está transmitindo uma frequência f_i o outro está chaveado em zero.

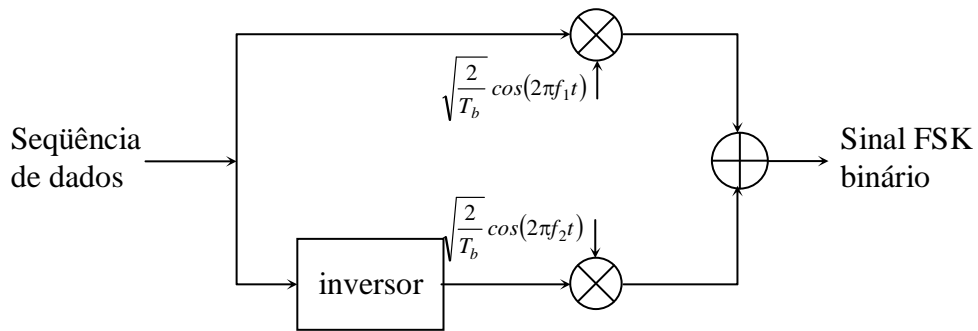


Figura 5.3: Geração do sinal FSK binário.

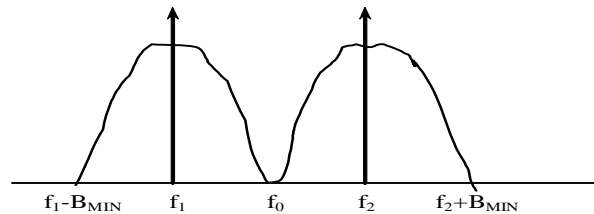


Figura 5.4: Espectro do sinal FSK.

Admitindo dois sistemas ASK, a largura de faixa do sinal FSK é dada pela diferença entre a maior frequência do espectro do ASK₁ e a menor do ASK₂. Assim:

$$Bw_{FSK} = (f_2 + Bw_{MIN}) - (f_1 - Bw_{MIN}) = 2Bw_{MIN} + f_2 - f_1$$

Admitindo $\Delta f = (f_2 - f_1)/2$, então:

$$Bw_{FSK} = 2Bw_{MIN} + 2\Delta f \quad (5.6)$$

O desvio de fase é definido como:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta f}{Bw_{MIN}}$$

E a frequência central é dada por:

$$f_0 = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Considerando a conclusão de que o sinal FSK pode ser encarado como dois ASKs distintos, o processo de demodulação pode ser realizado utilizando dois detectores de envoltória distintos, como mostra o diagrama em blocos mostrado na figura 5.5.

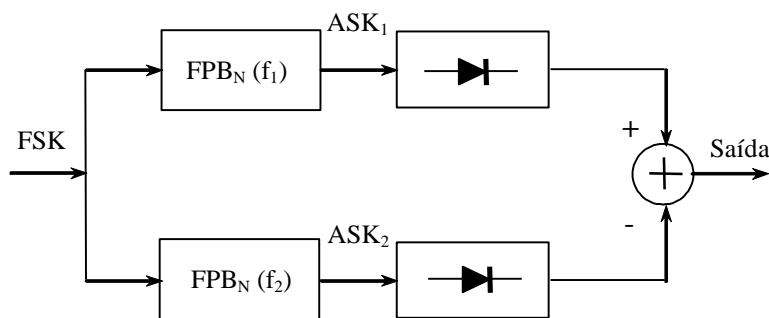


Figura 5.5: Demodulador FSK.

Os dois filtros passa-banda, centrados em f_1 e f_2 , separam os dois sinais ASK. Estes são demodulados pelos respectivos detectores de envoltória. Em seguida, como estes dois sinais são complementares, a diferença entre ambos produzirá o sinal digital na banda básica.

Como já se sabe muito bem, o esquema de demodulação de produto ou coerente produz uma relação sinal/ruído melhor do que o detector de envoltória. Desse modo, um método mais eficiente para se demodular o sinal FSK é utilizando um circuito *phase locked loop* (PLL), figura 5.6, da mesma forma que foi utilizado na modulação FM analógica.

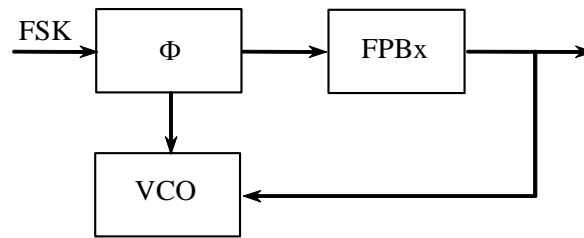


Figura 5.6: Demodulador coerente com PLL.

No regime estável, o VCO (Oscilador controlado por tensão) se trava ao sinal de entrada, acompanhando as variações de frequência deste sinal. Assim, a tensão que controla este circuito é o sinal digital na banda básica que gerou o FSK e a demodulação é realizada.

A grande desvantagem deste sistema é que a sua largura de faixa é no mínimo o dobro do sinal ASK. Outra desvantagem é o gasto desnecessário de potencia por causa da transmissão das componentes das portadoras. Contudo, como o FSK tem as propriedades da modulação angular, apresenta uma menor sensibilidade a interferências e ruído o que faz dele um sistema mais eficiente e mais utilizado do que o sistema ASK anterior. Em geral o sistema FSK apresenta uma taxa de erro maior do que o sistema PSK (que será visto a seguir), por esta razão ele não muito utilizado em aplicações de transmissão digital de sinais de rádio, TV e telefonia celular. Sua utilização é mais frequente nas transmissões assíncrona de dados sobre canais telefônicos analógicos.

5.3.1 Modulação por chaveamento mínimo – MSK (*Minimm Shift Keying*)

A modulação por chaveamento mínimo é uma modulação FSK, binária, na qual as duas frequências selecionadas apresentam uma diferença de fase de 180° entre dois intervalos adjacentes. Esta técnica apresenta uma diferença de fase máxima, enquanto que utiliza um desvio de frequência mínimo. Como características principais, este sistema mantém a continuidade da fase nas transições e apresenta uma largura espectral compacta em relação ao sistema PSK. Uma variante deste tipo de modulação é utilizada nos sistemas GSM (*Global System for Mobile Communications*) europeu.

A figura 5.7 mostra uma forma de onda típica do sistema MSK. Nesta figura a sequência de bits é $\{0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\}$, frequências selecionadas para os bits “0” e “1” são $f_1 = 1.5T_b$ e $f_2 = 2T_b$, e T_b é o intervalo de bit.

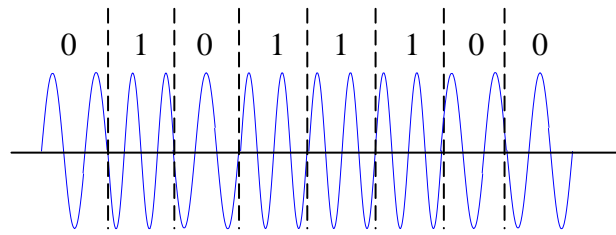


Figura 5.7: Sistema MSK.

O desvio de frequência é dado por:

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{1}{2T_b} \quad (5.7)$$

ou

$$\Delta w = \frac{\pi}{T_b} \quad (5.8)$$

Este desvio corresponde ao espaçamento de frequência mínimo permitido para os dois sinais FSK, de modo que eles sejam ortogonais, isto é, para não interferirem um no outro durante o processo de detecção e possam assim ser coerentemente detectados.

As expressões matemática para os dois pulsos MSK em um intervalo T_b são dada por:

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2T_b} t + \phi_0\right), \quad 0 \leq t \leq T_b \rightarrow "0"$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2T_b} t + \phi_0\right), \quad 0 \leq t \leq T_b \rightarrow "1"$$

(5.9)

O diagrama de fase está mostrado na figura 5.8. Ele ilustra a continuidade da fase do sistema MSK. Por causa de seu formato, ele é conhecido como treliça de fase.

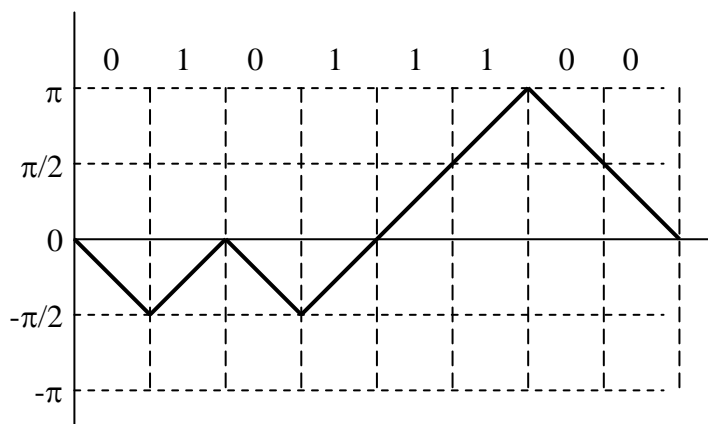


Figura 5.8: Treliça da fase (*Phase trellis*).

O sistema MSK apresenta um desempenho em termos de erro igual ao sistema PSK e como dito anteriormente o seu espectro é mais compacto, isto é, o primeiro nulo espectral é em $3/4T_b$, enquanto no sistema PSK ele está em $1/T_b$.

Uma variante deste tipo de modulação é o MSK Gaussiano. Neste sistema o pulso na banda base apresenta um formato Gaussiano que apresenta uma largura de banda menor. Esta técnica é utilizada nos sistemas GSM de celulares digitais.

5.4 Modulação PSK (*Phase shift keying*)

A modulação por deslocamento de fase é uma das técnicas mais empregadas para transmissão digital via rádio devido ao seu alto desempenho, isto é, envoltória constante e taxa de erro baixa. Para o sistema binário dois ângulos de fase 0° (0) e 180° (π) da portadora senoidal são utilizados para representar os estados $-E_o$ (0) e E_o (1) do sinal digital. Assim o sinal PSK pode ser representado por:

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_0 t), \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_0 t + \pi) = -\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_0 t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$
(5.10)

em que T_b é o intervalo de duração de um bit, E_b é a energia do sinal transmitido por bit e a quantidade $\sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_i t)$, $0 \leq t \leq T_b$ apresenta energia igual a unidade.

Observe que um deslocamento de fase de 180° na portadora corresponde a uma inversão de sinal na mesma. Desse modo o sinal PSK pode também ser representado como um sinal modulado em amplitude, isto é,

$$s(t) = m(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (5.11)$$

em que $m(t) = \pm E_0 = \pm \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}$, NRZ, o sinal positivo ou negativo depende do bit transmitido ser uma marca “1” ou um espaço “0”, T_b é o intervalo de duração de um bit e E_b é a energia do sinal transmitido por bit.

Analisando a expressão acima se conclui imediatamente que o sinal PSK corresponde a uma modulação em amplitude com portadora suprimida (AMDSB-SC) com largura de faixa $B_w = 2B_{\text{MIN}}$, igual ao ASK.

A grande vantagem deste sistema é que ele apresenta as mesmas propriedades da modulação angular, mas com uma largura de faixa menor do que a modulação FSK. Outra vantagem é a economia de 50% da energia na transmissão, pois a portadora é suprimida. Em geral o sistema PSK apresenta uma economia de 3 a 6 dB em relação aos outros sistemas.

A modulação PSK binária é muitas vezes denominada de BPSK para se distinguir dos sistemas multiníveis QPSK (4 níveis) ou M-QPSK. Ela também é denominada de PRK modulação por reversão da fase, quando se utiliza deslocamentos de fase iguais a 0° (0) e 180° (π).

5.4.1 Demodulação PSK

Como foi mostrado anteriormente o sistema BPSK é equivalente ao sistema AMDSB/SC, consequentemente, para se detectar o sinal digital em banda básica, deve-se utilizar demodulação coerente (demodulador de produto), como mostra a figura 5.9.

Para que este demodulador opere corretamente é necessário transmitir um pequeno nível da componente da portadora de modo a garantir que o circuito de recuperação da portadora a reproduza com sincronismo de frequência e fase. Caso não se transmitir uma parcela da portadora este circuito a recupera com ambiguidade de fase, isto é, com fase 0° ou 180° . Neste segundo caso seria detectado o complemento do sinal digital transmitido.

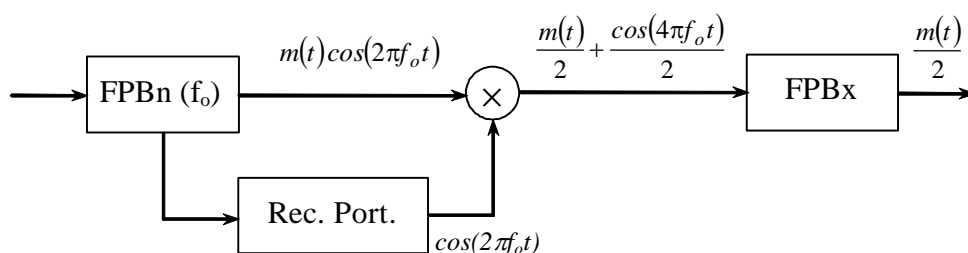


Figura 5.9: Demodulador coerente para o sistema PSK.

5.4.2 Modulação DEPSK (*Diferencial encoded PSK*)

A finalidade da modulação DEPSK é fazer com que o sistema de detecção se torne insensível à ambiguidade de fase do sistema PSK. Neste caso o sinal digital na banda básica é codificado de tal maneira que a informação fique contida nas transições de estado do sinal digital e não nos níveis lógicos de tensão.

Neste sistema, o sinal digital, antes de ser aplicado no modulador, é aplicado a um codificador diferencial que opera do seguinte modo: Quando aparecer o dígito binário “1” o sinal digital permanece no estado anterior, isto é, ele é representado por

uma ausência de transição; e o dígito binário “0” é transmitido por uma transição de estado no sinal digital. Este tipo de codificador é composto por uma porta X-NOR (coincidência) e um bloco de atraso, interligados como mostra a figura 5.10.a. A saída **S** deste circuito é dada por:

$$S = \overline{A \oplus S_{-1}} \quad (5.12)$$

O sinal codificado irá modular a fase de uma portadora cossenoidal, do mesmo modo que o sistema PSK.

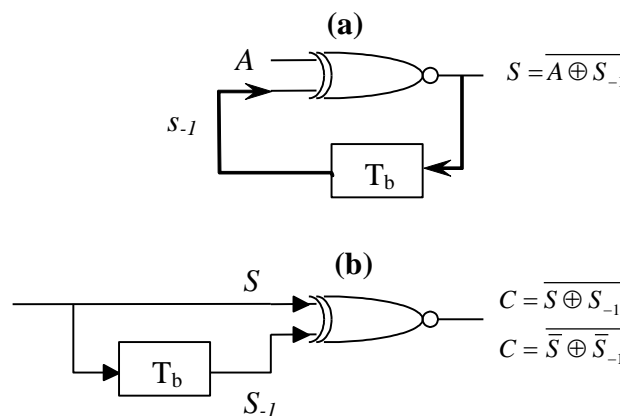


Figura 5.10: Codificador DEPSK (a) e decodificador diferencial (b).

No receptor, após a demodulação do sinal digital, a sequência **S** recebida, deve passar por um circuito decodificador para recuperar a sequência original **A**. Este decodificador é também composto por uma porta coincidência X-NOR e um bloco de atrasa colocado em uma das entradas, como mostra a figura 5.10.b. Neste caso a sequência decodificada é dada por:

$$C = \overline{S \oplus S_{-1}} = \overline{\overline{S} \oplus \overline{S_{-1}}} = A \quad (5.13)$$

Observe que tanto faz receber a sequência **S** ou \overline{S} , que como resultado final da decodificação, tem-se a mesma sequência transmitida **A**. Portanto a ambiguidade de fase foi eliminada.

Exemplo:

Considere a seguinte sequência transmitida: $A = \{1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\}$.
Abaixo são mostradas as sequências de saída do codificador $\{S\}$ e do decodificador diferencial $\{C\}$.

$$A \rightarrow x\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1$$

$$S = \overline{A \oplus S_{-1}} \rightarrow 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$

$$S_{-1} \rightarrow 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1$$

$$C = \overline{S \oplus S_{-1}} = A \rightarrow 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1$$

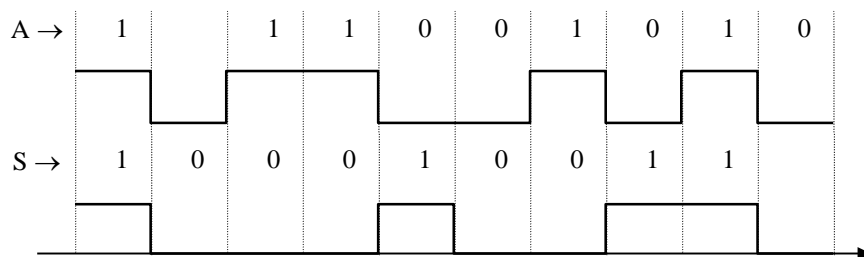


Figura 5.11: Codificação diferencial.

Caso a sequência recebida fosse a complementar de S , isto é \bar{S} , a sequência decodificada seria a mesma. Repita o exemplo acima considerando a sequência \bar{S} em vez da S para comprovar este fato.

Considere agora que um bit da sequência S foi recebido errado. Este bit está assinalado em **negrito**. Neste caso tem-se:

$$S = \overline{A \oplus S_{-1}} \rightarrow 1\ 1\ 0\ \mathbf{1}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$

$$S_{-1} \rightarrow 1\ 1\ 0\ \mathbf{1}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1$$

$C \neq A \rightarrow 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1$

Observe que este erro se propaga e a sequência decodificada apresenta dois bits errados (assinalados em **negrito**). Este é o grande problema na modulação DEPSK, a propagação de erros, que conduz a um aumento (o dobro) na probabilidade de erro do sistema. Mesmo com este inconveniente este sistema é preferível em relação ao PSK convencional por causa da facilidade no processo de demodulação que é insensível à ambiguidade de fase, não tem a necessidade de transmitir a portadora e apresenta demoduladores mais simples.

A demodulação DEPSK pode ser simplificada ainda mais pela eliminação do decodificador diferencial. A decodificação pode ser feita diretamente no sinal de RF como mostra o diagrama em blocos da figura 5.12.

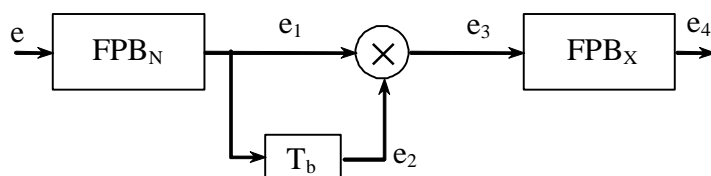


Figura 5.12 Demodulador DEPSK sem o decodificador diferencial.

O circuito, composto de um bloco multiplicador e uma linha de atraso (T_b) se comporta como uma porta lógica X-NOR, como mostra a tabela 5.1. Assim, o estágio de decodificação pode ser eliminado.

e_1	$e_2=e_1(t-T_b)$	e_4
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\cos(2\pi f_0 t)$	V
$-\cos(2\pi f_0 t)$	$\cos(2\pi f_0 t)$	-V
$\cos(2\pi f_0 t)$	$-\cos(2\pi f_0 t)$	-V
$-\cos(2\pi f_0 t)$	$-\cos(2\pi f_0 t)$	V

Tabela 5.1: Simulação porta X-NOR

O único inconveniente deste demodulador é que ele aumenta por um fator de 1.4 a probabilidade de erro em relação ao sistema anterior, porém devido a sua simplicidade ele é muito utilizado principalmente em sistemas de transmissão através de linhas telefônicas.

É possível fazer o chaveamento da portadora com múltiplas fases em vez de duas, isto é, conceber um sistema M-PSK onde M é uma potência de 2. Os exemplos mais comuns são os sistemas 4-PSK também chamado QPSK que será estudado a seguir, e o sistema 8-PSK, chaveamento com 8 fases.

5.5 Modulação QPSK (Modulação PSK em quadratura)

Este sistema utiliza quatro fases distintas $45^\circ (\pi/4)$, $135^\circ (3\pi/4)$, $-45^\circ (-\pi/4)$, e $-135^\circ (-3\pi/4)$, para transmitir o sinal digital. Cada uma das fases representa um símbolo transmitido, isto é, bits consecutivos (denominados *dibit*) do sinal digital. A cada *dibit* associa-se uma das fases acima conforme o padrão mostrado na tabela 5.2. A grande vantagem deste esquema é o código quaternário (código Gray) que reduz a taxa de transmissão pela metade em relação ao esquema binário.

<i>dibits</i>	Fase
00	$135^\circ (3\pi/4)$
01	$45^\circ (\pi/4)$
10	$-135^\circ (-3\pi/4)$
11	$-45^\circ (-\pi/4)$

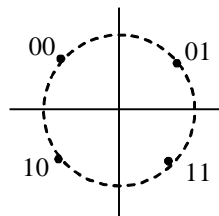


Tabela 5.2: Fases no sistema QPSK.

Neste caso, o sinal transmitido pode ser definido como:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \cos\left(2\pi f_0 t + (2i-1)\frac{\pi}{4}\right), \quad 0 \leq t \leq T_s \quad (5.14)$$

em que $i = 1, 2, 3, 4$, E_s é a energia do sinal transmitido por símbolo e T_s é a duração de um símbolo

Para a geração do sinal QPSK duas portadoras em quadratura ($\cos(2\pi f_0 t)$ e $\sin(2\pi f_0 t)$) são utilizadas para se obter as quatro fases. O esquema de modulação em quadratura é mostrado na figura 5.13. Este esquema tem como elementos principais dois moduladores de produto, um circuito distribuidor de seqüências e um bloco somador.

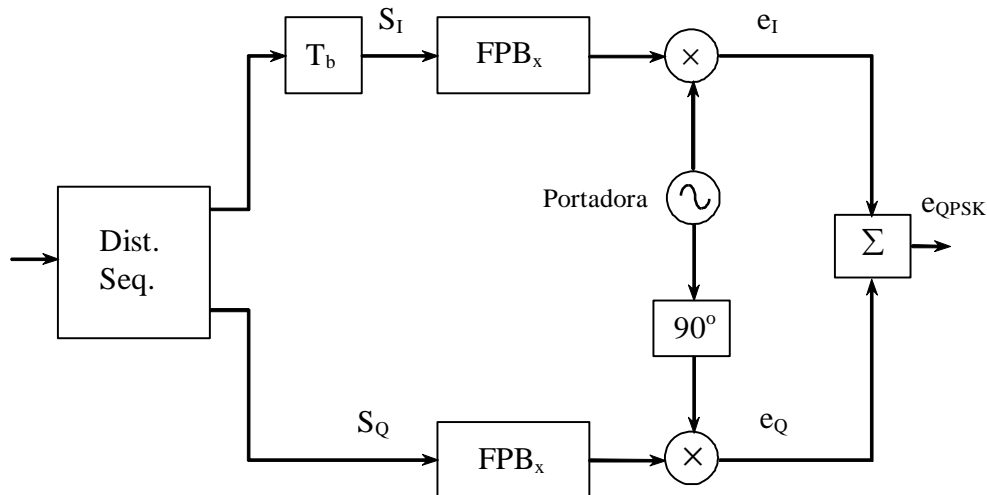


Figura 5.13: Esquema do modulador QPSK.

O circuito distribuidor de seqüências coloca alternadamente nas suas duas saídas os bits do sinal digital presentes em sua entrada. Em uma das saídas a seqüência é atrasada de T_b segundos. Tem-se assim, duas seqüências, S_I e S_Q , onde cada dois bits no mesmo intervalo de tempo formam um par de bits (*dibit*) que irão gerar as quatro fases do QPSK. A seqüência S_I modula o sinal cossenoidal que é considerado como a referência de fase (em *fase*) e a seqüência S_Q modula a portadora senoidal que está atrasada de 90° em relação ao cosseno (*quadratura*) Observe também que a taxa de bits destas seqüências se reduziu à metade como mostra a figura 5.14.

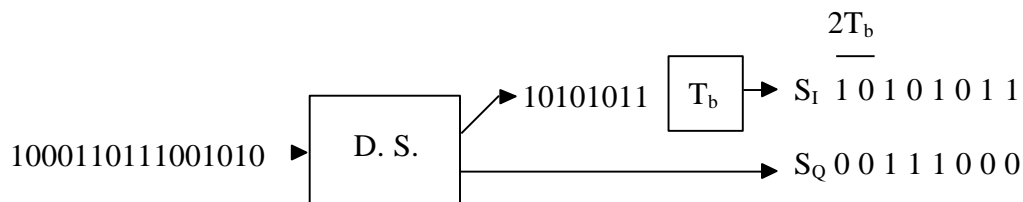


Figura 5.14: Distribuidor de seqüências.

Estas duas sequências são filtradas para limitar o sinal em banda e aplicadas aos dois moduladores. A sequência S_I modula uma portadora senoidal com fase nula e a S_Q modula a portadora com fase 90° . Tem-se assim, dois sinais BPSK $e_I(t)$ e $e_Q(t)$.

$$e_I(t) = V_I \cos(w_0 t)$$

$$e_Q(t) = V_Q \sin(w_0 t)$$

Em seguida estes sinais são somados para gerar o sinal QPSK. Portanto:

$$e_{QPSK}(t) = V_I \cos(w_0 t) + V_Q \sin(w_0 t) \quad (5.15)$$

Observe que $e_I(t)$ apresenta fases 0° e 180° e o $e_Q(t)$ apresenta fases -90° e 90° que representam os bits “1” e “0” respectivamente. Quando estes sinais são somados tem-se como resultado um sinal cossenoidal com fases 45° , 135° , -45° e -135° que representam os *dibits* mostrados anteriormente na tabela 5.2.

Observe também que para S_I e S_Q o intervalo entre bits vale agora $2T_b$, portanto a taxa de transmissão do sistema caiu pela metade. Isto significa que, para sistemas com mesma largura de faixa, o sistema QPSK pode transmitir o dobro de informação em relação aos sistemas BPSK, ou seja, é possível dobrar a taxa de bits. Existem outros sistemas que aumentam ainda mais esta relação.

5.5.1 Demodulação Coerente para o Sistema QPSK

O esquema para a demodulação do sinal QPSK é mostrado na figura 5.15. O sinal é inicialmente filtrado para limitar o ruído. Em seguida ele é aplicado aos dois multiplicadores e ao circuito de recuperação da portadora. Para que esta seja recuperada sem ambiguidade de fase uma pequena parcela deve ser adicionada no receptor como visto anteriormente. Os dois circuitos multiplicadores são utilizados para recuperar V_I e V_Q que representam as sequências S_I e S_Q respectivamente. Admitindo que na entrada do demodulador tem-se o sinal QPSK, equação 5.15, então na saída dos multiplicadores tem-se:

$$e_I(t) = e_{QPSK}(t) \cos(w_0 t) = \frac{1}{2} V_I + \frac{1}{2} V_I \cos(2w_0 t) + \frac{1}{2} V_Q \sin(2w_0 t) \quad (5.16)$$

$$e_Q(t) = e_{QPSK}(t) \sin(w_0 t) = \frac{1}{2} V_Q + \frac{1}{2} V_Q \cos(2w_0 t) + \frac{1}{2} V_I \sin(2w_0 t) \quad (5.17)$$

Estes dois sinais são filtrados e aplicados nos circuitos regeneradores para recuperar as sequências S_I e S_Q . Em seguida o circuito intercalador de bits faz a operação inversa do circuito distribuidor de sequências e recupera o sinal digital original.

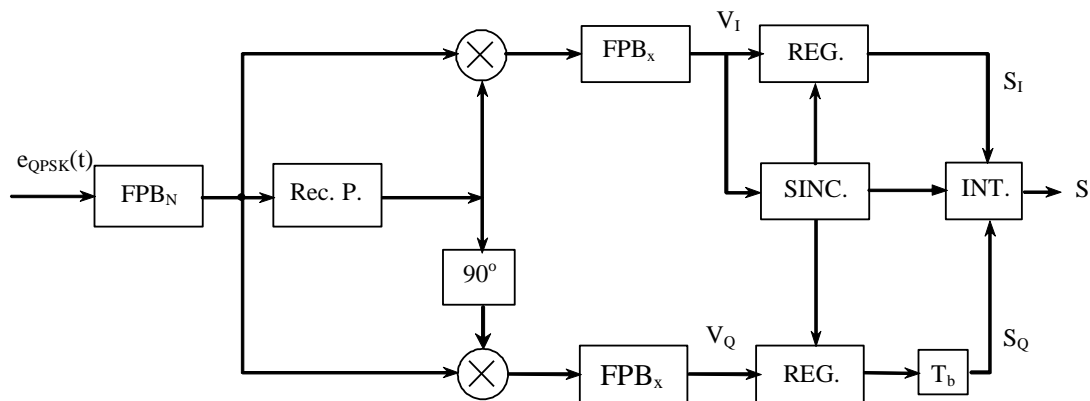


Figura 5.15: Demodulador QPSK.

Como mencionado anteriormente, a grande vantagem deste sistema é o aumento da taxa de transmissão de bits sem a necessidade do aumento da largura de faixa. É possível também construir outros sistemas tais como: O DEQPSK (QPSK com codificação diferencial) de modo a eliminar o problema da ambiguidade de fase, transmissão e recuperação da portadora; e sistema M-QAM que combinam o QPSK e o ASK. Estes sistemas serão tratados na seção 5.7.

5.6 Modulação MPSK (Modulação PSK M-ária)

A modulação QPSK é um caso particular da modulação MPSK, na qual a fase da portadora assume M valores possíveis para representar M símbolos distintos, enquanto que a amplitude da portadora é mantida constante. Durante um intervalo de símbolos T_s um dos sinais abaixo é transmitido:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \cos\left(2\pi f_0 t + (i-1)\frac{2\pi}{M}\right), \quad 0 \leq t \leq T_s \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5.18)$$

em que E_s é a energia do sinal transmitido por símbolo e T_s é a duração de um símbolo e $f_0 = n_c/T_s$.

As fases do sinal estão distribuídas uniformemente em um círculo de raio igual a $\sqrt{\frac{2E_s}{T_s}}$. A constelação para o sinal MPSK com 8 fases, $M = 8$, é mostrada na figura 5.16. O diagrama de fases é circularmente simétrico

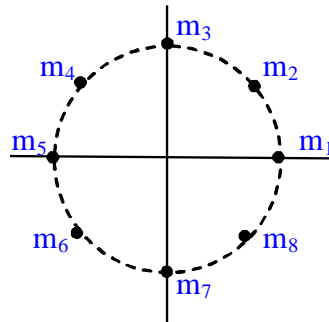


Figura 5.16: constelação para o sinal MPSK com 8 fases, $M = 8$

Admitindo que se transmita blocos de v bits, então, M , que representa todos os estados de fase possíveis do sistema é dado por:

$$M = 2^v \quad : \quad v = 2, 3, 4, \dots, 8 \quad (5.19)$$

A taxa de transmissão de símbolos será:

$$f_s = \frac{f_b}{v} \quad (5.20)$$

Observe que o sistema MPSK apresenta uma redução por um fator v na taxa de transmissão de símbolos e na largura de faixa em relação ao PSK binário. O sinal MPSK é demodulado usando detecção coerente.

5.7 Modulação em Amplitude e Quadratura (QAM)

A modulação em amplitude em quadratura (QAM) é um método de modulação digital que combina deslocamentos de amplitude (sistema ASK) e deslocamentos de fase (sistema PSK) e pode ser considerada como uma extensão da modulação PSK. Enquanto que nos sistemas PSK a envoltória da portadora é mantida constante, nos sistemas QAM a envoltória varia, permitindo uma combinação melhor dos estados ou níveis do sistema.

Esta modulação utiliza multi-níveis tanto de amplitude como de fase e é chamada de M-QAM, onde M representa os estados possíveis do sistema tais que:

$$M = 2^v \quad : \quad v = 2, 3, 4, \dots,$$

resultando nas modulações 4-QAM, 8-QAM, 16-QAM, ..., 256-QAM. Cada estado do sistema está relacionado com v bits, o que permite uma economia na largura de banda do sistema igual a $1/v$ em relação ao sistema PSK binário.

Admitindo $v = 2$ tem-se o sistema 4-PSK ou QPSK, assim o sistema 4-QAM é idêntico ao QPSK com envoltória constante, contudo, níveis mais altos do sistema M-QAM são diferentes do sistema M-PSK. Os sistemas QAM mais utilizados são os de 16, 64 e 256 estados.

A figura 5.17, abaixo, mostra a constelação dos estados para os sistemas 16-QAM e 16-PSK. Os pontos representam os sinais compostos ou os estados possíveis dos sistemas. As amplitudes dos estados para o sistema 16-PSK é constante para cada fase, enquanto que para o 16-QAM elas são diferentes, tornando o sistema mais eficiente do ponto de vista do processo de detecção pois os estados são melhor separados.

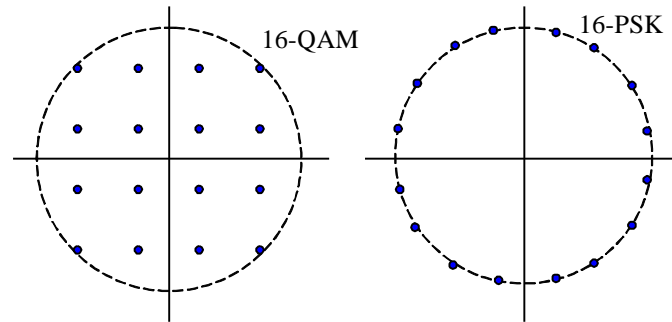


Figura 5.17: Constelação de estados para os sistemas 16-QAM e 16-PSK.

As figuras 5.18 e 5.19 ilustram os esquemas básicos para o modulador e demodulador do sistema 16-QAM, observe que eles utilizam basicamente a mesma técnica do sistema QPSK. A modulação é obtida utilizando portadoras em quadratura e os vários níveis de amplitude utilizando conversores digital-analógico de dois bits.

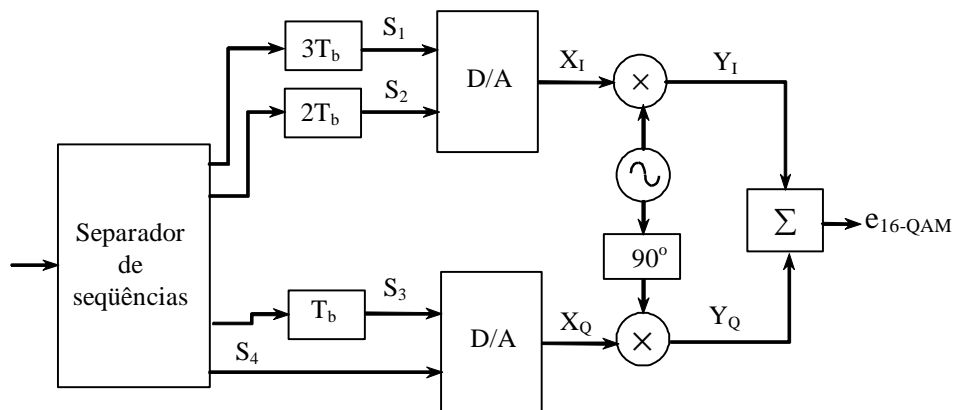


Figura 5.18: Modulador 16-QAM

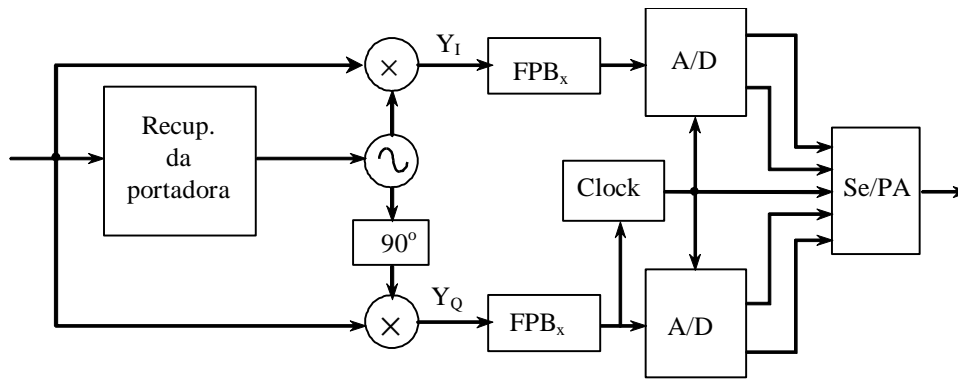


Figura 5.19: Demodulador 16-QAM

Na prática têm sido implementados sistemas M-PSK utilizando no máximo 8 fases. Sistemas utilizando mais que oito símbolos apresentam um desempenho melhor quando se utiliza de técnicas M-QAM. Os sistemas de televisão digital utilizam o 64-QAM na transmissão.

5.8 Desempenho dos sistemas MPSK e MQAM

O desempenho de um sistema MPSK com relação à taxa de erro (probabilidade de erro – P_e) depende basicamente da distância entre dois pontos adjacentes do diagrama espacial (constelação) de fases do sinal, mostrada na figura 5.20.

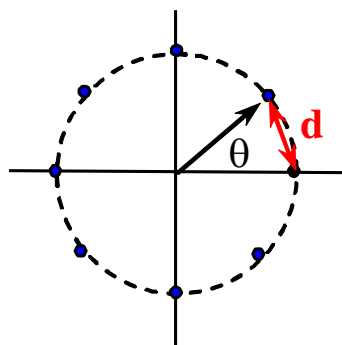


Figura 5.20: Diagrama de fases de um sistema MPSK.

Para um sistema PSK com M fases esta distância depende do ângulo teta e do raio da circunferência. Considerando o raio igual à unidade a distância entre dois pontos adjacentes é dada por:

$$d = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{M}\right) \quad (5.21)$$

em que: $\theta = \frac{2\pi}{M}$.

Admitindo um ruído branco gaussiano e aditivo, a expressão geral [17] para a probabilidade de erro de bit em função da relação sinal ruído será dada por:

$$Pe = \frac{1}{v} \operatorname{erfc}(z) \quad (5.22)$$

em que: $\operatorname{erfc}(z)$ é a função de erro complementar: $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-z^2} dz$,

$$v = \log_2(M) \quad M = 4, 8, \dots,$$

$$z = \sqrt{v \frac{E_b}{N_0}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{M}\right),$$

E_b é a energia associada a um bit e N_0 é a densidade espectral de potência do ruído em [W/Hz].

Admitindo $M = 2$ (duas fases) a probabilidade de erro de bit é a mesma do sistema 4-PSK (apêndice A5), isto é,

$$Pe = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (5.23)$$

E, para o sistema DEPSK a probabilidade de erro de bit é dada pela seguinte equação:

$$P_{ERRO} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right) \quad (5.24)$$

Para os sistemas M-QAM a taxa de erro teórica é derivada em Bellamy, 2000 [16]. Para os esquemas 16-QAM, 64-QAM e 256-QAM as probabilidades de erro podem ser aproximadas, respectivamente, pelas seguintes expressões, consulte Keiser, 1995 .

$$16-QAM \rightarrow Pe = \frac{3}{8} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{2}{5} \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (5.24)$$

$$64-QAM \rightarrow Pe = \frac{7}{24} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{1}{7} \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (5.25)$$

$$256-QAM \rightarrow Pe = \frac{15}{64} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{4}{85} \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (5.26)$$

A fórmula geral da probabilidade de erro de bit para um sistema M-QAM é dada por:

$$P_e = \frac{2(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M} \log_2(M)} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{2(M-1)} \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (5.27)$$

A expressão acima é calculada para M = 16; 63; 256, 512 e 1024.

Além da probabilidade de erro de bit, outra medida importante em sistemas demodulação digital é a densidade de informação (ou eficiência em largura de banda) δ , dada em bits por segundo por Hz, tal que,

$$\delta = \frac{f_b [bps]}{Bw [Hz]} \quad (5.28)$$

Esta medida caracteriza os diversos esquemas de modulação digita com relação à eficiência de largura de banda.

Considerando a transmissão passa-banda de sinais M-ários, a largura de faixa do sistema é dada por:

$$Bw = \frac{2f_b}{\log_2(M)} \quad (5.29)$$

Pela relação acima, a eficiência em largura de banda será dada por:

$$\delta = \frac{\log_2(M)}{2} \quad (5.30)$$

A tabela 5.3, [17], compara os esquemas mais comuns de modulação digital empregados nos sistemas de radio de microondas. Para cada sistema são mostradas as relações sinal-ruído necessárias no processo de detecção para se obter uma taxa de erro menor ou igual a 10^{-6} e a densidade de informação δ .

Sistema	δ [bps/Hz]	E_b/N_0 [dB]
2-PSK	1	10.6
4-PSK	2	10.6
8-PSK	3	14.0
16-PSK	4	18.3
16-QAM	4	14.5
32-QAM	5	17.4
64-QAM	6	18.8

Tabela 5.3: Comparação de alguns sistemas MPSK e MQAM para $P_e = 10^{-6}$.

Observe que os sistemas 2-PSK e 4-PSK (ou QPSK) são equivalentes, porém o esquema QPSK apresenta o dobro da eficiência em largura de banda. Os sistemas 8-PSK e 16-QAM também são praticamente equivalentes, porém o esquema 16-QAM apresenta o dobro da eficiência em largura de banda. Observe também que para os sistemas com mesma eficiência espectral, os sistemas MQAM apresentam um menor requerimento de potência dos que os sistemas MPSK. A figura 5.21 mostra o gráfico da probabilidade de erro em função da relação sinal/ruído, E_b/N_0 em dB, para alguns sistemas MPSK e MQAM

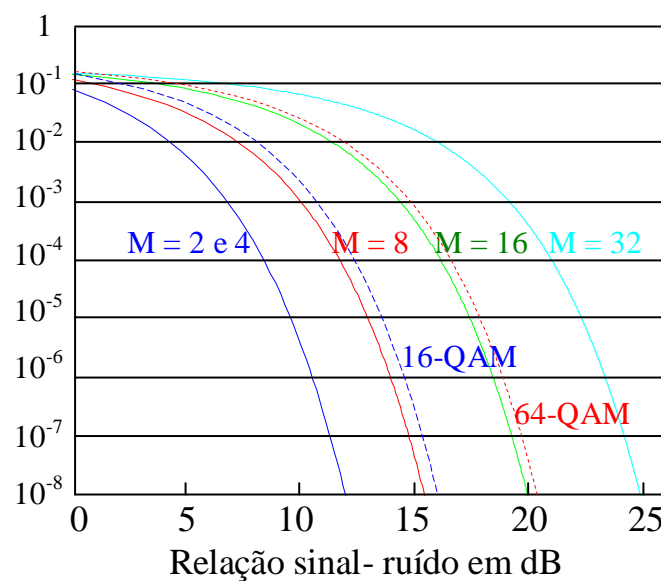


Figura 5.21: Probabilidade de erro para os sistemas MPSK e MQAM.

Considerando a tabela 5.3 e a figura 5.21 podemos observar que conforme o número de símbolos aumenta a eficiência em largura de banda aumenta, mas em contrapartida a taxa de erros também aumenta. O aumento na taxa de erros pode ser compensado (diminuído) com o aumento na relação sinal ruído sistema.

A técnica 8-PSK é empregada em muitos sistemas de comunicação por satélite, operando nas bandas de 6 e 11 GHz, neste caso, 1344 canais PCM de voz que apresentam uma taxa de bits de 90 Mbs são transmitidos utilizando uma banda dupla de 30 MHz. Os sistemas de microondas terrestres mais recentes utilizam alguma forma de modulação QAM com 64 ou 256 estados, bem como alguns sistemas operando com linhas telefônicas analógicas em canais com resposta em amplitude linear. Alguns sistemas com baixa taxa de bits utilizam modulação FSK ou PSK.

Bibliografia

1. Carlson, A. B., *Sistemas de Comunicação*, McGraw-Hill, 1981.
2. Carlson, A. B., *Communication Systems*, 4th. Ed., McGraw-Hill Higher Education, 2002.
3. Haykin, S., *Communication Systems*, 3rd. Ed. John Wiley & Sons, 1994.
4. Pearson, J., *Basic Communication Theory*, Prentice Hall, 1992.
5. Sartori, J. C., *Modulação em Amplitude*, Publicação EESC, 1980.
6. Joaquim, M. B. e Sartori, J. C., *Modulação Angular*, Publicação EESC, 1981.
7. Joaquim, M. B. e Sartori, J. C., *Análise de Fourier*, CD - EESC, 2003.
8. Haykin, S. & Moher, M., *Introdução aos Sistemas de Comunicação*, 2a. Ed. Bookman, 2008.
9. Haykin, S. & Moher, M., *Sistemas de Comunicação*, 5a. Ed. Bookman, 2011.
10. Shanmugam, K. S., *Digital and Analog Communication Systems*, John Wiley & Sons, 1979.
11. Hsu, H. P., *Analog and Digital Communications*, Schawm's Outline, McGraw-Hill, 1993.
12. Roden, M. S., *Analog and Digital Communication Systems*, Prentice Hall, 1996.
13. Roddy, C. & Coolen J., *Electronic Communications*, 4h. Ed., Prentice Hall, 1995.
14. Collins Radio Co., *Collins Mechanical Filters*, Bulletin 1031A, Newport Beach, CA, 1959.
15. Haykin, S. & Moher M., *Modern Wireless Communications*, Pearson-Prentice Hall, 2005.
16. Bellamy, J., *Digital Telephony*, 3rd. Ed. John Wiley & Sons, 2000.
17. Keiser, B. E. & Strange, E., *Digital Telephony and Network Integration*, 2nd. Ed., Van Nostrand Reinhold, 1995.
18. Haykin, S., *Digital Communications*, John Wiley & Sons, 1988.
19. Ribeiro, M. P. & Barradas, O., *Telecomunicações: Sistemas Analógicos e Digitais*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1980.
20. Feris, E. B. R., *Comunicações Digitais*, Telebras-CPqD, 1987.

apêndice 1

Modulador de Transcondutância Variável

I. Introdução

O modulador balanceado é um dispositivo que produz uma tensão de saída proporcional ao produto de dois sinais aplicados em suas entradas. Em geral, estes sinais correspondem a um sinal de informação com frequência baixa e um sinal de chaveamento (ou portadora senoidal de frequência alta). Hoje em dia existem dispositivos integrados que fazem esta operação com alta confiabilidade e o método mais popular, empregado para se obter um produto de dois sinais, é aquele que utiliza a propriedade de transcondutância variável (g_m varia com I_c) dos transistores bipolares. Os circuitos utilizando esta propriedade consistem de um amplificador diferencial em quadratura chaveado por um amplificador diferencial, como será visto a seguir.

II. Modulador de Transcondutância Variável

Para se compreender o funcionamento de um circuito modulador de transcondutância variável considere o circuito básico mostrado na figura II.1. Os dois transistores devem possuir características idênticas para o funcionamento correto do circuito.

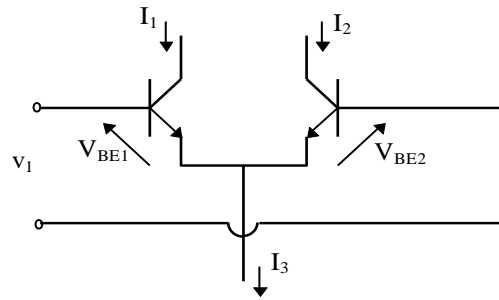


Figura II.1: Par diferencial casado.

Admitindo primeiramente que $v_1 = 0$ e $v_{BE1} = v_{BE2}$, então a corrente I_3 é formada por parcelas iguais das correntes de coletor I_1 e I_2 . Assim:

$$I_1 = I_2 = I_3/2 \quad (1)$$

Considerando que a transcondutância g_m dos transistores é proporcional à corrente DC de coletor (I_c) tem-se que:

$$g_m = \frac{1}{v_T} I_c$$

em que: v_T é a tensão equivalente de temperatura dada por: kT/q

$q = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C (carga do elétron)

$k = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J/°K (constante de Boltzman)

Na temperatura ambiente (17° C) g_m é dada por:

$$g_m \cong 40 \cdot I_c \quad (2)$$

Admitindo agora, que é aplicada uma tensão nos terminais de entrada do circuito da figura II.1, pode-se calcular o valor das correntes de coletor em função desta tensão de entrada.

Quando se aplica uma tensão v_1 na entrada do par diferencial ela se divide igualmente através das junções base-emissor dos transistores, somente que, com sinais trocados, pois, pela suposição inicial, os dois transistores têm características idênticas. Assim, se V_{BE1} muda por v_{be1} e V_{BE2} muda por v_{be2} então as correntes I_1 e I_2 mudam por quantidades iguais i_1 e i_2 , porém com sinais trocados. Desse modo,

$$v_{be1} = -v_{be2} = v_1/2 \quad (3.a)$$

$$i_1 = -i_2 \quad (3.b)$$

como $i_1 = g_m v_{be1}$, então pelas equações (1), (2) e (3) tem-se que:

$$i_1 = 40.I_1.v_1/2 = 40.(I_3/2).(v_1/2)$$

portanto,

$$i_1 = -i_2 = 10.I_3.v_1 \quad (4)$$

Observe que as correntes i_1 e i_2 são proporcionais ao produto de I_3 por v_1 , assim, conclui-se que é possível obter a modulação em amplitude utilizando como base o circuito mostrado na figura 1.

O circuito básico para o modulador de transcondutância consiste de um amplificador diferencial em quadratura cujas correntes de lastro (emissor) são controladas por um par diferencial como do circuito da figura II.1. Este circuito é mostrado na figura II.2, onde como anteriormente admite-se que todos os transistores têm as mesmas características. As correntes I_4 , I_5 , I_6 e I_7 são utilizadas para se obter o produto das tensões v_1 e v_2 , como será visto a seguir.

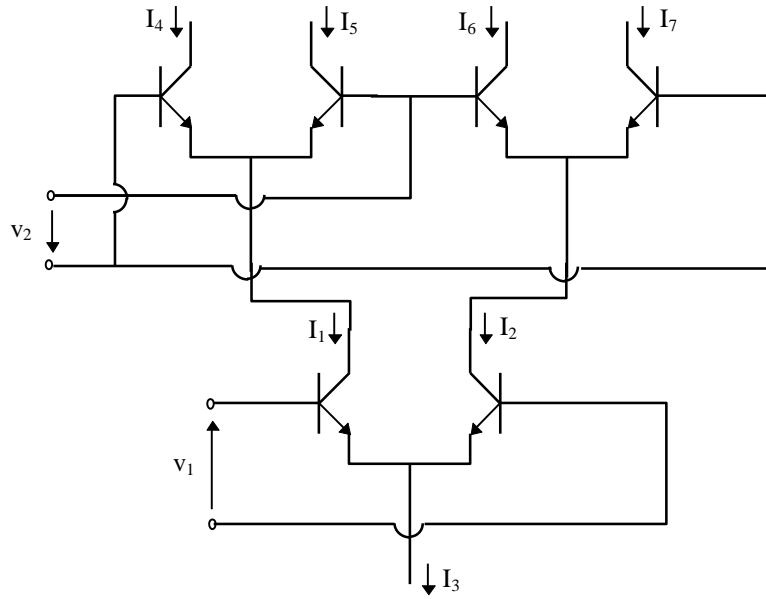


Figura II.2: Circuito multiplicador de tensões.

Para se calcular as correntes I_4 , I_5 , I_6 e I_7 , faz-se o mesmo procedimento anterior. Uma pequena tensão de entrada v_2 produzirá mudanças nas correntes de coletor (i_4 , i_5 , i_6 e i_7) do amplificador em quadratura. Assim, utilizando a equação (4) tem-se:

$$i_4 = -i_5 = 10 \cdot v_2 \cdot I_1 \quad (5)$$

$$i_6 = -i_7 = 10 \cdot v_2 \cdot I_2 \quad (6)$$

Observe que a corrente de coletor I_4 corresponde à metade da corrente I_1 mais a parcela de mudança i_4 , devido a aplicação da tensão v_2 . Assim tem-se:

$$I_4 = I_1/2 + i_4 \quad (7)$$

$$I_5 = I_1/2 + i_5 \quad (8)$$

$$I_6 = I_2/2 + i_6 \quad (9)$$

$$I_7 = I_2/2 + i_7 \quad (10)$$

Observe também que devido à tensão v_1 , aplicada ao par diferencial inferior, as correntes I_1 e I_2 contêm uma parcela correspondente às mudanças nas correntes de coletor. Assim:

$$I_1 = I_3/2 + 10.v_1.I_3 = I_3.(1/2 + 10.v_1) \quad (11)$$

$$I_2 = I_3/2 - 10.v_1.I_3 = I_3.(1/2 - 10.v_1) \quad (12)$$

Substituindo as equações (5), (6), (11) e (12) nas equações (7), (8), (9) e (10) tem-se:

$$I_4 = (1/4 + 5v_1 + 5v_2 + 100v_1v_2)I_3$$

$$I_5 = (1/4 - 5v_1 + 5v_2 - 100v_1v_2)I_3$$

$$I_6 = (1/4 - 5v_1 - 5v_2 + 100v_1v_2)I_3$$

$$I_7 = (1/4 - 5v_1 + 5v_2 - 100v_1v_2)I_3$$

O produto das tensões v_1 por v_2 é obtido adicionando os pares $I_4 + I_6$ e $I_5 + I_7$. Observe que esta soma é obtida acoplando alternadamente dois a dois os coletores dos transistores do circuito da figura 2. Subtraindo estes pares um em relação ao outro tem-se:

$$(I_4 + I_6) - (I_5 + I_7) = 400.I_3.(v_1.v_2) \quad (13)$$

Observe que lado direito da equação acima aparece o produto das duas tensões de entrada, como era de se esperar. Nos circuitos integrados comerciais a saída é obtida como uma tensão diferencial através de dois resistores colocados nos coletores dos transistores e a corrente I_3 é utilizada para alterar o ganho do circuito. A portadora corresponde à tensão v_2 , pois ela faz o chaveamento e v_1 é o sinal da banda básica.

Circuitos integrados da National Semiconductors ou da Motorola com os códigos MC ou LM1496/1596 utilizam o circuito explicado acima para serem aplicados como moduladores e demoduladores balanceados, misturadores, dobradores de frequências e detecção de sinais modulados em frequência. (Verifique manual de fabricante).

Apêndice 2

O espectro de radiofrequência

O espectro de radio frequência é dividido em bandas dependendo do tipo de aplicação ou serviço. Praticamente todos os países utilizam as mesmas normas para alocar todos os tipos de serviços aplicações da comunicação eletrônica.

O espectro de radiofrequências, considerado para propósito de comunicações através de ondas de rádio, compreende a faixa de frequências que se estende de 9 KHz a 275 GHz. Acima desta frequência (275 a 1000 GHz) a ITU (*International Telecommunications Union*) não apresenta algum tipo de regulamentação.

Procura-se dividir este espectro em bandas de frequências tais que cada uma seja “ótima” para um determinado propósito, por exemplo, usuários de celular querem manter o aparelho operando mesmo dentro de edifícios, ondas acústicas se propagam bem na água (sonar).

Algumas bandas de radiofrequência no Brasil

Abaixo são relacionadas algumas bandas de frequências reservadas para uma determinada aplicação. Estes dados foram obtidos no sitio da Agência Nacional de telecomunicações – Anatel. Dados de tabelas com data de 2006.

Radio navegação e comunicação móvel marítima:

→ Faixa de 9 a 535 KHz.

Sistema de radiodifusão por modulação da amplitude – radio AM

→ Faixa de 535 a 1625/1705 KHz, ondas médias.

→ 2.3 a 2.495 MHz // 15.1 a 15.8 MHz // 17.48 a 17.9 MHz...

Serviço de radio amador - SSB

→ 1.8 a 1.85 MHz // 3.5 a 3.8 MHz // 7 a 7.3 MHz...

SOS em radiotelefonia

→ Faixa de 2.1735 a 2.1905 MHz

→ 500 KHz (frequência internacional de chamada de socorro em radiotelegrafia),

→ 2.182 MHz (frequência internacional de chamada de socorro em radiotelefonia).

Faixa de frequência internacional de chamada de socorro:

→ 156,7625 a 156.8375 MHz.

Transmissão de sinais de TV

→ 54 a 72 MHz (canais de 2 a 4) // 76 a 88 MHz (canais 5 e 6),

→ 174 a 216 MHz (canais de 7 a 13),

→ 470 a 608 MHz (canais de 14 a 36) // 614 a 806 MHz (canais de 38 a 69).

Sistema de radiodifusão por modulação em frequência - radio FM:

→ Faixa de 88 a 108 MHz.

Dispositivos sem licença:

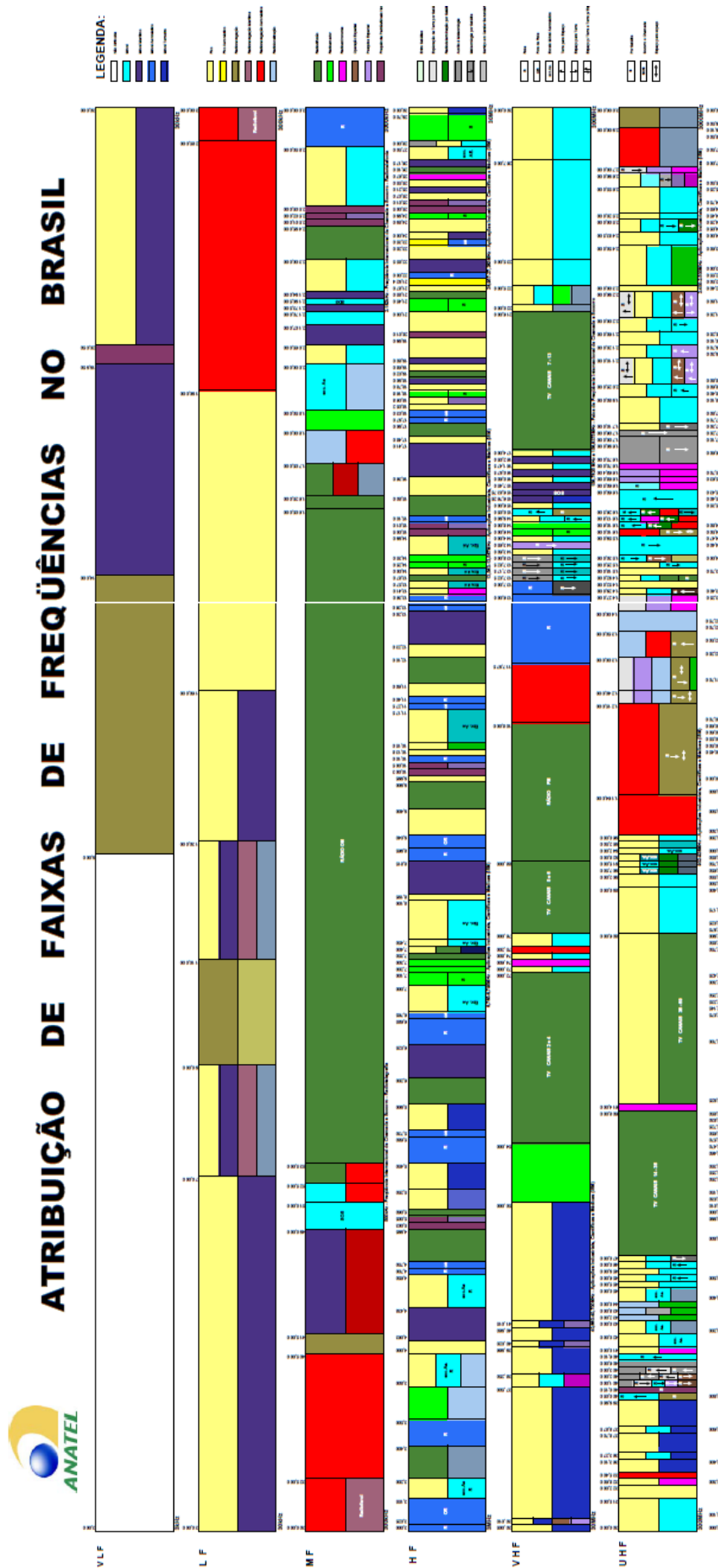
→ 59 a 64 GHz.

Distribuição do espectro de radiofrequência

<div>V</div> <div>L</div>	←300 Hz	Faixa da voz em telefonia, sinais de navegação marítima, sonar (submarinos).
	←3 kHz	
<div>L</div>	←30 kHz	Aparelhos de navegação, por exemplo, balizas de navegação.
<div>M</div>	←300 kHz	Faixa de ondas medias; rádio AM e comunicação marítima.
<div>H</div>	←3 MHz	Faixa de ondas curtas; rádio AM, rádio amador, aeronáutica.
<div>V</div> <div>H</div>	←30 MHz	Rádio FM, televisão, aparelhos para navegação, aeronáutica.
<div>U</div> <div>H</div>	←300 MHz	Televisão, telefonia celular, gps, telefone sem fio digital, faixa para uso
<div>S</div> <div>H</div>	←3 GHz	Comunicação por satélite, sistemas de micro-ondas (links ponto a
<div>V</div> <div>H</div>	←30 GHz	Astronomia, sistemas de radar.

Consultar: **Anatel: Atribuição, Destinação e Distribuição de Faixas**

<http://www.anatel.gov.br/Portal/exibirPortalInternet.do?exibirPortalInternetRodape=true>



apêndice 3**Exemplo SSB****Transmissor e receptor SSB com conversão dupla**

Apresentaremos neste apêndice um esquema para gerar diretamente um sinal SSB a partir de um sinal DSB-SC. Será admitido modulação SSB superior, portadora final com frequência igual a 7 MHz e um sinal de voz cujo espectro está compreendido entre 300 e 4000 Hz.

1. Transmissor

Um modo direto de se obter a modulação SSB é através da combinação das operações de filtragem e conversão de frequências como ilustra o diagrama de blocos da figura A3. Primeiramente o sinal mensagem é modulado em amplitude (DSB-SC) em uma frequência mais baixa do que a da portadora a ser transmitida. A frequência foi estabelecida em 455 kHz, pois nesta têm-se disponíveis filtros seletivos, com bandas de transições extremamente rápidas, capazes de atenuar fortemente (60 dB/oitava ou 200 dB por década) as componentes espectrais adjacentes e selecionar somente a banda espectral de interesse [Colins Radio Co.]. Após a modulação sinal é aplicado em um filtro passa-banda para selecionar o sinal SSB com parte superior ou inferior do espectro e amplificado, neste exemplo foi selecionado a parte superior do espectro.

Em uma segunda etapa o sinal, já modulado em banda lateral única, é aplicado em um conversor de frequência no intuito de elevar a frequência da portadora ao valor desejado. Neste exemplo a frequência do transmissor escolhida foi igual a 7000 KHz, assim a frequência do segundo oscilador deverá ser de 6545 KHz. Após a conversão o sinal é amplificado, filtrado e transmitido.

Observe que o segundo filtro passa-banda não precisa necessariamente apresentar fator de qualidade muito alto, pois após a conversão a banda inferior resultante do deslocamento está situada há aproximadamente 910 KHz da banda lateral superior.

Para boa estabilidade de frequência dos moduladores, na implementação de ambos osciladores devem ser utilizados cristais, no caso de nosso exemplo nas frequências de 455 KHz e de 6545 KHz.

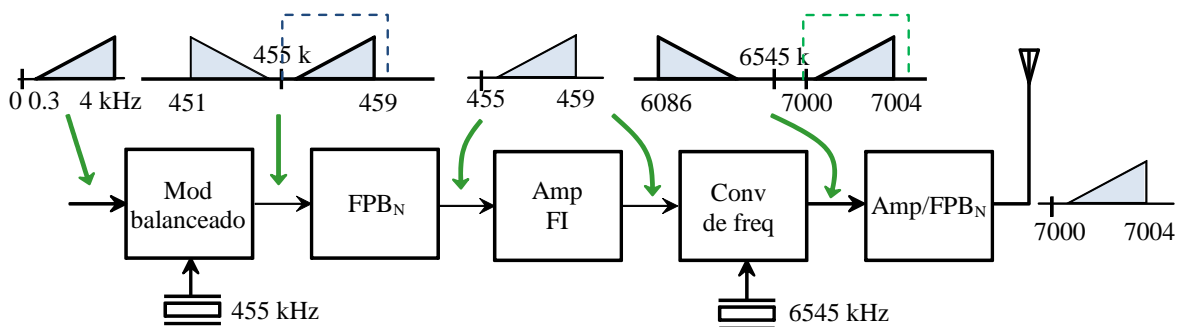


Figura A3.1: Transmissor SSB por conversão dupla.

2. Receptor

Na recepção um receptor super-heteródino é utilizado. Nele são realizadas as operações inversas do transmissor, como mostra a figura A3.2. O receptor está sintonizado em 7000 KHz, frequência da portadora ou do canal. O sinal é amplificado e convertido para a frequência intermediária de 455 KHz, em seguida ele é novamente amplificado e demodulado por um detector de produto.

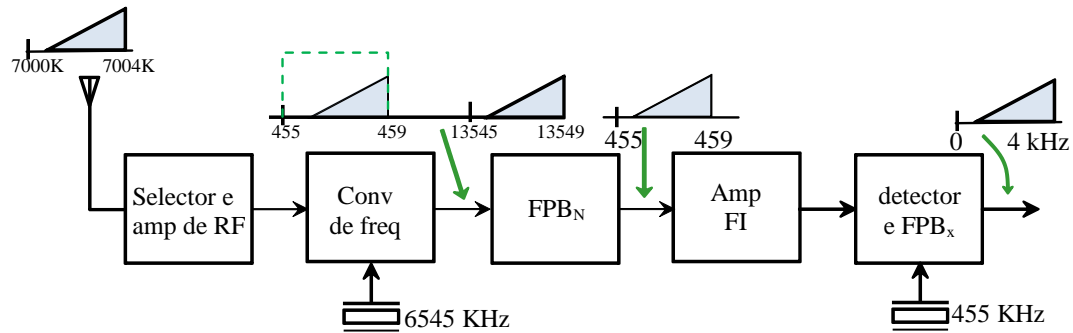


Figura A3.2: Receptor SSB.

Para uma recepção com boa qualidade (inteligibilidade) é necessário estabilidade de frequência por isso são utilizados osciladores são a cristais. Os filtros do amplificador de frequência intermediária devem apresentar seletividade alta e a detecção deve ser coerente.

Apêndice 4**Exemplo VSB****Aplicação da modulação VSB em sinais de TV**

Apresentaremos neste apêndice uma aplicação da modulação VSB em sistemas de transmissão de televisão analógicos.

3. Transmissor

Um sinal de vídeo apresenta um conteúdo de frequências que se entende desde frequências muito baixas até a frequências um pouco acima de 4MHz. Se utilizarmos modulação DSB a largura de faixa necessária deverá ser maior que 8 MHz mesmo porque deveríamos incluir uma banda para a transmissão do sinal de áudio.

A solução empregada nos sistemas de televisão para economia de banda recaiu no emprego da modulação em amplitude com banda vestigial e portadora presente. A portadora é transmitida de modo para possibilitar o emprego de detectores de envoltória na recepção do sinal de vídeo e baratear o receptor.

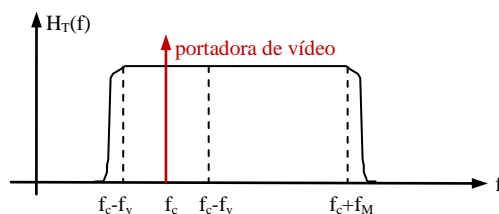


Figura A4.1: Filtro do transmissor para sinais de TV.

Na transmissão a banda lateral vestigial, compreendida entre f_c e $f_c - f_v$, é transmitida integralmente, sem atenuação, e com isso os sinais nessa faixa são transmitidos com maior potência. A atenuação será feita durante a recepção do sinal, figura A4.2. Este esquema possibilita um melhor desempenho do sistema em relação ao ruído, pois a maior parte do ruído é introduzida durante a transmissão. A atenuação da banda lateral no receptor atenua também o ruído. A portadora também é transmitida para possibilitar o uso de detector de envoltória no receptor.

A figura A4.2 ilustra o espectro de amplitude padrão de um sinal de TV. A largura de banda nominal do sinal de vídeo é de 4 MHz. A banda lateral superior é transmitida integralmente enquanto que as componentes de frequência entre 0 e 0,75 MHz são transmitidas com banda lateral dupla. Duas portadoras são transmitidas a portadora de vídeo e a portadora de áudio (ou som) está situada 4,5 MHz acima da de vídeo. O sinal de áudio é transmitido usando modulação em frequência. A banda total alocada para um canal de televisão analógico é de 6 MHz.

Como exemplo, o primeiro canal alocado para as emissoras de TV é o canal 2 que ocupa a faixa entre 54 e 60 MHz. A frequência da portadora de vídeo é de 55,25 MHz e a frequência da portadora de áudio é de 58,5 MHz.

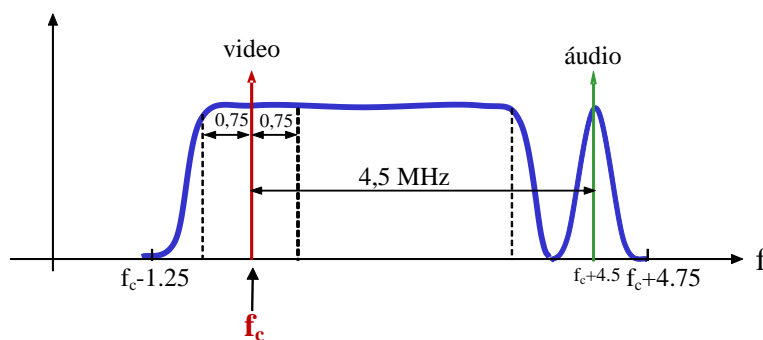


Figura A4.2: Espectro de amplitude padrão da TV analógica.

4. Receptor

A TV também utiliza um receptor super-heteródino, isto é, após o processo de conversão de frequências, o sinal é amplificado. O módulo da resposta em frequência do amplificador de FI apresenta uma curva característica como mostra a figura A4.3. Nesta figura a banda está invertida com relação ao transmissor, pois no processo de conversão a diferença de frequências é selecionada. Observe que a banda vestigial é atenuada para compensar o excesso de potencia transmitido pela banda lateral dupla. A frequência intermediária utilizada é de 45.75 MHz e a frequência intermediária do áudio é de 41.25 MHz.

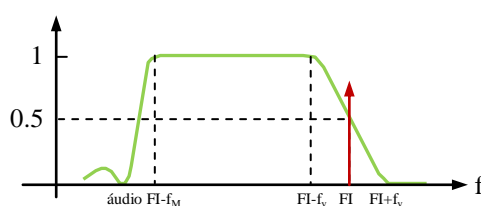


Figura A4.3: Resposta em amplitude dos amplificadores de FI.

As frequências alocadas para os canais de TV são as que se seguem:

Para a faixa de VHF os canais de 2 a 6 ocupam a faixa de frequências entre 54 e 88 MHz e os canais de 7 a 13 ocupam a faixa entre 174 e 216 MHz. Para a banda de UHF os canais de TV entre 14 e 83 ocupam a faixa de frequências compreendida entre 470 e 894 MHz. O canal 37 (608 a 614 MHz) está reservado para utilização em radioastronomia.

apêndice 6

Cálculo do desempenho dos sistemas de modulação digital

1. Introdução

Para analisar o desempenho dos sistemas chaveados binários: ASK, FSK e PSK será utilizado um diagrama de blocos para o processo de detecção como o mostrado na figura 1. Ele é constituído de dois estágios principais: um demodulador convencional que depende do sistema de transmissão empregado, e um circuito de decisão. O circuito de decisão é composto basicamente de um circuito comparador e de uma *interface* cuja finalidade é equalizar os níveis lógicos de tensão em sua saída.

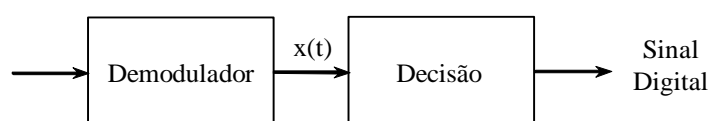


Figura A5.1: Demodulação digital.

Na saída do circuito de decisão tem-se dois estados de tensão: 0 e V, que correspondem aos dígitos binários “0” e “1”, respectivamente. A saída deste circuito é praticamente isenta de ruído, pois os pulsos digitais foram regenerados. Assim, não tem sentido calcular uma relação sinal-ruído para analisar o desempenho do sistema. O que pode estar ocorrendo nesta saída são erros no processo de decisão dos dígitos binários, devido ao ruído presente em sua entrada. Estes erros irão degradar o sistema.

Dessa maneira, o melhor método de se avaliar o desempenho destes sistemas é através da medida da **Probabilidade de Erro de bit** (BER – *bit error rate*) de detecção de bits na saída do circuito de decisão e não simplesmente medir a relação sinal-ruído do sistema.

Para o cálculo desta probabilidade será admitido que na entrada do circuito de decisão o sinal demodulado, $x(t)$, consiste do sinal digital na banda básica mais um componente de ruído aditivo que foi introduzido durante a transmissão. Isto é,

$$x(t) = m(t) + n(t) \quad (1)$$

em que: $m(t)$ é um sinal de tensão digital, NRZ, que apresenta dois estados com tensões: 0 e V , ou $-V$ e $+V$ e que dependem do processo de demodulação empregado. Cada um destes estados tem duração T_b . O sinal $n(t)$ é admitido ser um ruído branco, gaussiano e aditivo, com valor médio zero e densidade espectral de potência (variância) $\sigma^2 = N_0/2$.

O circuito de decisão atua de tal maneira que:

$$\begin{aligned} x(t) > \lambda &\rightarrow \text{saída} = V \rightarrow "1" \\ x(t) < \lambda &\rightarrow \text{saída} = 0 \text{ ou } -V \rightarrow "0" \\ x(t) = \lambda &\rightarrow \text{saída anterior} \end{aligned} \quad (2)$$

em que: λ é o limiar de decisão e é igual a $V/2$, caso os níveis de tensão sejam 0 e V , ou vale 0 caso estes níveis sejam $\pm V$.

Como, por hipótese, o ruído é admitido ser gaussiano, então a saída $x(t)$ será também uma variável aleatória gaussiana com valores médios 0 ou V para o caso unipolar, ou então $-V$ ou V para sinais polares. A variância de $x(t)$ será a mesma do ruído, ou seja, σ^2 . Assim, considerando que a saída do demodulador é polar, isto é, ela apresenta níveis de tensão $\pm V$, pode-se dividir a função densidade de probabilidade de $x(t)$ em duas partes:

i. Função densidade de probabilidade quando $x(t)$ assume o estado “0”.

$$p_o(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x+V)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.a)$$

ii. Função densidade de probabilidade quando $x(t)$ assume o estado “1”.

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-V)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.b)$$

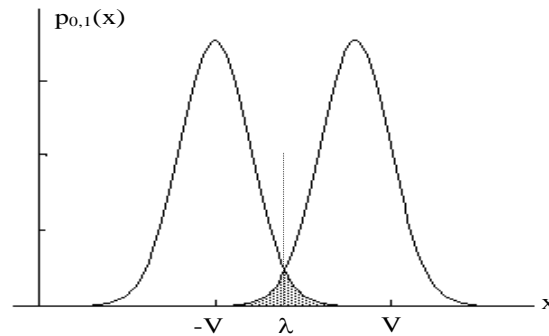


Figura A52: Função densidade de probabilidade.

Admitindo que os dois estados sejam equiprováveis, isto é,

$$P(x = "0") = P(x = "1") = \frac{1}{2} \quad (4)$$

então, a probabilidade de erro do circuito de decisão será dada pela área hachurada da figura 2., isto é,

$$P_{ERRO} = P(x = "0").P_1(x = "1" / x = "0") + P(x = "1").P_0(x = "0" / x = "1") \quad (5)$$

em que: $P_1(x = "1" / x = "0")$, é a probabilidade de ocorrência do estado “1” dado que o estado “0” foi transmitido.

$$P_{ERRO} = \frac{1}{2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x+V)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-V)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Assim, após alguma manipulação algébrica obtém-se:

$$P_{ERRO} = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x+V)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (6)$$

como neste caso o sinal é polar, então $\lambda = 0$, assim,

$$P_{ERRO} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x+V)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$P_{ERRO} = \int_{V/\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{V}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{V}{\sqrt{N_0}}\right) \quad (7)$$

Na situação onde os estados de tensão valem 0 e V tem-se que:

$$P_{ERRO} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{N_0}}\right) \quad \text{em que } \lambda = V/2 \quad (8)$$

As equações, (7) ou (8), são utilizadas para se analisar o desempenho dos sistemas de modulação digital binária, quando o ruído presente na saída do demodulador é gaussiano.

Para se fazer uma avaliação do desempenho de alguns sistemas é necessário também saber calcular a potência ou energia de um sinal modulado digitalmente. Quando o sinal modulante é composto de diversos estados de tensão, a energia (E_m) para um sistema M-ário é dada por:

$$E_m = \sum_{i=0}^{M-1} P(i) E_i \quad (9)$$

em que: $P(i)$ é a probabilidade de ocorrência do estado “i” e E_i é a energia deste estado.

Para um sinal binário, com iguais probabilidades de ocorrência dos estados tem-se:

$$E_m = \frac{1}{2} E_0 + \frac{1}{2} E_1 \quad (10)$$

A seguir serão calculadas as probabilidades de erro para alguns esquemas de modulação digital binária que foram abordados anteriormente.

2. Modulação ASK

Para o cálculo da probabilidade de erro será admitido um sistema ASK com índice de modulação 100%, amplitude do sinal igual a $\sqrt{2E_b}$, e que o processo de detecção utiliza demodulação coerente.

Neste caso o sinal $x(t)$ na saída do demodulador apresenta níveis de tensão $\sqrt{2E_b}$ e 0 e a energia média será $E_m = E_b$. Desse modo, pela equação (8), $\lambda = \sqrt{2E_b} / 2$, e a probabilidade de erro de bit será dada por:

$$P_{ERRO} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right) \quad (11)$$

3. Modulação PSK

Admitindo que se esteja utilizando demodulação síncrona (coerente) e que na saída do detector tem-se um sinal polar com níveis de tensão $\pm \sqrt{E_b}$. Assim, o limiar de decisão será $\lambda = 0$. Portanto a probabilidade de erro deste sistema é dada pela equação (7) com a substituição de V por $\sqrt{E_b}$. Assim:

$$P_{ERRO} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (12)$$

em que E_b é a energia associada a um bit.

Para a modulação DEPSK, onde se emprega o próprio sinal de entrada para se fazer a decodificação diferencial, a probabilidade de erro é calculada pela seguinte equação:

$$P_{ERRO} = \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{E_b}{N_0} \right) \quad (13)$$

4. Modulação FSK

Admitindo que no processo de demodulação que o sinal FSK é decomposto, através de filtragem, em dois sinais ASK. Supondo ainda que estes sinais são aplicados em demoduladores de produto (detecção coerente) e não em detectores de envoltória. Então, como visto anteriormente, o sinal detectado será a soma das saídas dos demoduladores. Neste caso os estados de tensões na saída do demodulador valem $\pm \sqrt{E_b}$. Observe, porém que a variância do ruído na saída é a soma das duas variâncias do ruído presente nas saídas dos demoduladores de produto. Assim:

$$\sigma_s^2 = 2\sigma^2 \quad (14)$$

Portanto, a probabilidade de erro será dada por:

$$P_{ERRO} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{E_b}}{2\sigma} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right) \quad (15)$$

5. Comparação dos Sistemas

Para se realizar uma comparação do desempenho entre os sistemas de modulação digital é necessário estabelecer algum critério de equivalência. Neste texto serão considerados que a mesma energia média (E_m) do sinal de entrada e mesma densidade de ruído (σ^2) estão presentes nas entradas dos circuitos demoduladores. Tomando como base a energia média de entrada para uma modulação PSK com amplitude $\sqrt{E_b}$ e fazendo todos os outros sistemas com esta mesma potência tem-se:

$$E_m = E_b \quad (16)$$

As probabilidades de erro de vários tipos de sistemas em função de E_b e σ são mostradas na tabela 1, e ilustradas na figura 3.

Sistema de Modulação	Probabilidade de erro
ASK (coerente)	$P_{ERRO} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$
PSK (coerente)	$P_{ERRO} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$
DEBPSK	$P_{ERRO} = \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{E_b}{N_0} \right)$
FSK (coerente)	$P_{ERRO} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$

Tabela A5.1: Probabilidade de erro em modulação digital.

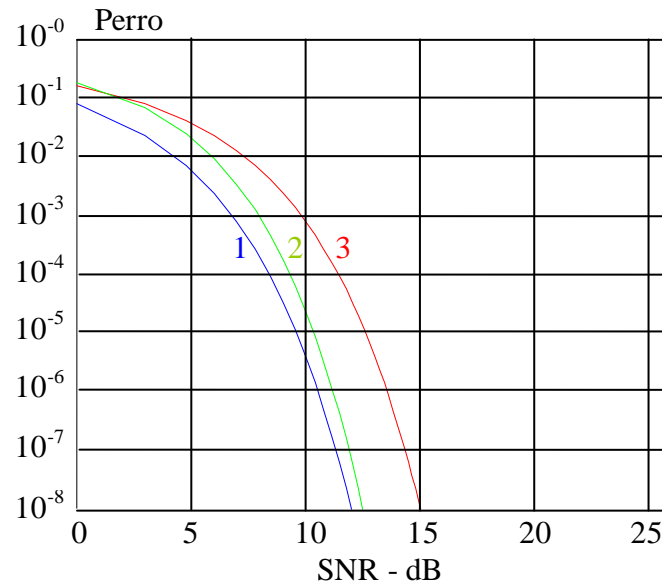


Figura A53: Probabilidade de erro: 1 - PSK; 2 - FSK e ASK; 3 - DEBPSK.

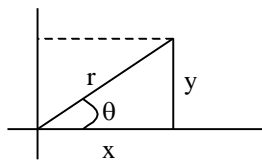
Pode-se verificar com o auxílio da figura 3 que a probabilidade de erro decai monotonicamente com o aumento da relação sinal ruído e que o sistema que apresenta o melhor desempenho é o PSK com detecção coerente. Portanto, sempre que possível, ele deveria ser utilizado. Ele é indicado principalmente para a transmissão de dados com alta taxa de bits. Para valores grandes de E_b/N_0 os sistemas são praticamente equivalentes. O sistema DEBPSK apresenta um desempenho um pouco pior, porém o processo de demodulação é mais fácil o que faz este sistema ser muito atrativo.

Pode-se observar ainda que os sistemas ASK e FSK que utilizam detecção coerente são basicamente iguais, eles apresentam a mesma probabilidade de erro. Porém, observando com mais cuidado, pode-se verificar que a potência de pico do ASK é maior do que o FSK, além disso, o sistema FSK apresenta as propriedades da modulação angular, por esta razão ele é preferível aos sistemas ASK.

Apêndice 6

Fórmulas e relações matemáticas usuais

1. Fórmulas trigonométricas



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{y}{r} & \cos \theta &= \frac{x}{r} & \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \end{aligned}$$

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} [e^{j\theta} + e^{-j\theta}]$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{2j} [e^{j\theta} - e^{-j\theta}]$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\theta)]$$

$$\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\theta)]$$

$$\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\theta)$$

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) \pm \operatorname{sen}(b)\cos(a)$$

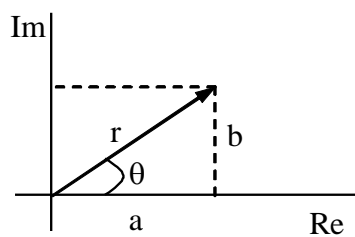
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)]$$

2. Números complexos



$$a + jb = r[\cos \theta + j\operatorname{sen} \theta] = re^{j\theta}$$

forma retangular ou cartesiana: $z = a + jb$

forma polar: $z = re^{j\theta}$

em que: r é o módulo, $r^2 = a^2 + b^2$ e $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Complexo conjugado: $z^* = a - jb = re^{-j\theta}$

Relações usuais

$$\{r[\cos \theta + j \sin \theta]\}^p = r^p [\cos p\theta + j \sin p\theta]$$

$$\{r[\cos \theta + j \sin \theta]\}^{1/N} = r^{1/N} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{N}\right) + j \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{N}\right) \right] \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$zz^* = r^2$$

$$\frac{z}{z^*} = e^{j2\theta}$$

Fórmulas de Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} [e^{j\theta} + e^{-j\theta}]$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{1}{2j} [e^{j\theta} - e^{-j\theta}]$$

outros resultados

$$j = e^{j\pi/2}$$

$$e^{jk\pi} = (-1)^k = \cos(k\pi)$$

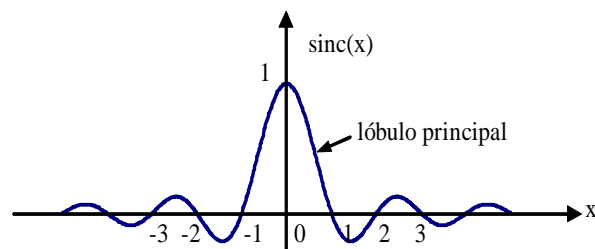
3. Nomenclatura de algumas funções e relações usuais em engenharia elétrica

função retângulo

$$\text{ret}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

função sinc

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$$



função degrau unitário

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

função *signum*

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

função impulso unitário

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

função trem de impulsos (*comb*)

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

algumas relações importantes

$$r(t) = tu(t) \rightarrow u(t) = \frac{d}{dt} r(t) \rightarrow \delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

$$x(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

$$\text{sen}(w_o t) = \cos(w_o t - \pi / 2)$$

4. Séries de Fourier

(a) Série exponencial

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

(b) Série trigonométrica

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(k\omega_0 t) + B_k \sin(k\omega_0 t))$$

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad A_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad B_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

5. Transformada de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Relação de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

pares de transformadas de Fourier

Sinal	Transformada
$ret\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \frac{\text{sen}(w\tau/2)}{w\tau/2}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+jw}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+jw)^2}$
$e^{-a t } \quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + w^2}$
$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2 w^2/2}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-jw t_0}$
1	$2\pi\delta(w)$
$u(t)$	$\frac{1}{jw} + \pi\delta(w)$
$e^{jw_0 t}$	$2\pi\delta(w-w_0)$
$\frac{1}{2\pi}e^{-t^2/2}$	$e^{-w^2/2}$
$\cos(w_0 t)$	$\pi[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)]$
$\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)]-\frac{jw}{w^2-w_0^2}$
$\text{sen}(w_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(w-w_0)-\delta(w+w_0)]$
$\text{sen}(w_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)]-\frac{w^2}{w^2-w_0^2}$
$e^{-\alpha t} \cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{\alpha+jw}{(\alpha+jw)^2+w_0^2}$
$e^{-\alpha t} \text{sen}(w_0 t)u(t)$	$\frac{w_0}{(\alpha+jw)^2+w_0^2}$

propriedades da transformada de Fourier

Sinal	Transformada
$x(t - t_0)$	$X(w)e^{-j\omega t_0}$
$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(w - \omega_0)$
$x(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha} X\left(\frac{w}{\alpha}\right)$
$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$(j\omega)^n X(w)$
$(-jt)^n x(t)$	$\frac{d^n}{dw^n} X(w)$
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(w) + \pi X(0)\delta(w)$
$X(t)$	$2\pi x(-w)$

6. Quantidades e abreviações

Símbolo	Nome	Fator
E	Exa	10^{18}
P	Peta	10^{15}
T	Tera	10^{12}
G	Giga	10^9
M	Mega	10^6
k	Kilo	10^3
h	Hecto	10^2
da	Deca	10
d	Deci	10^{-1}
m	Mili	10^{-3}
μ	Micro	10^{-6}
n	Nano	10^{-9}
p	Pico	10^{-12}
f	Femto	10^{-15}
a	Atto	10^{-18}

7. Sinais de energia e potência

Energia de um sinal de tempo contínuo $E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} x(t)x^*(t)dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt$

- sinais de energia são aqueles para os quais $0 < E < \infty$. Em geral os sinais **não** periódicos e sinais determinísticos que tendem a zero conforme t tende ao infinito são sinais de energia.

Potência de um sinal $P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt$

- sinais de potência são aqueles para os quais $0 < P < \infty$. Os sinais periódicos e sinais aleatórios são sinais de potência.

Potência média para sinais periódicos: $P_m = \frac{\text{energia em um período}}{\text{período}} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$

8. Outras medidas em sinais

Valor rms ou eficaz $V_{rms} = V_{ef} = \sqrt{P_m}$

Valor médio $x_m = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} x(t)dt$

Valor médio em um período $x_m = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t)dt$

Valor ac $x_{ac}(t) = x(t) - x_m$

9. Letras gregas

Nome	Minúscula	Maiúscula
Alfa	α	A
Beta	β	B
Gama	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ϵ	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	H
Teta	θ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
Mu	μ	M
Nu	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omicron	\omicron	O
Pi	π	Π
Rho	ρ	P
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Upsilon	υ	Y
Phi	ϕ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω