Lista de Exercícios No. 3

Versão 1.0

Vers. 1.0 distr. em 22/ago/13 - Qui.
Sols. aceitas até 10:10h de 29/ago/13 - Qui.
(Um atraso de Δh horas implica um fator de correção $e^{-\Delta h/6{,}25}$)

Equações dinâmicas discretizadas

A solução geral da equação de estado

Para um sistema da forma

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

a solução completa da equação de estado é

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(0) + \int_{\tau=0}^{\tau=t} e^{(t-\tau)A}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{2}$$

onde τ é apenas uma variável auxiliar na integração.

Mudando o instante inicial

Na expressão (2) podemos mudar o instante inicial de $t = 0$ para $t = t_0$ arbitrário, obtendo

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}(t_0) + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} e^{(t-\tau)A}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{3}$$

após alguma manipulação. A forma (3) é mais abrangente, permitindo tratar casos que seriam mais difíceis através da forma (2). Um exemplo ocorre quando consideramos valores discretos para o tempo t:

A solução envolvendo os extremos de um intervalo

Consideremos apenas os instantes $t_0 = kT$ e $t_1 = t_0 + T$ onde k é um inteiro positivo e T um intervalo não nulo (no tempo) em segundos. Claramente podemos empregar (3) e escrever

$$\mathbf{x}(kT+T) = e^{TA}\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{(kT+T-\tau)A}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{4}$$

onde, por simplicidade, os limites da integração estão escritos na forma abreviada usual.

Entrada constante em cada intervalo

Temos interesse em discretizar $\mathbf{u}(t)$ supondo que em cada intervalo da forma

$$\mathcal{I}_k = kT \le t \le kT + T, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{5}$$

se verifica $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT)$, i.e, que a entrada se mantém constante e igual ao valor do início do intervalo. Isto naturalmente é uma simplificação, cujo desvio da realidade só pode ser ignorado se T for suficientemente pequeno. Uma discretização assim é dita discretização via *retentor de ordem zero*, porque em cada intervalo os valores do início são retidos até o final do mesmo; o MATLAB emprega *"zoh"*, de *"zero order hold"*. Se aplicarmos essa idéia à expressão (4) podemos escrever

$$\mathbf{x}(kT+T) = e^{TA}\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{(kT+T-\tau)A} B\mathbf{u}(kT)d\tau \tag{6}$$

Como B e $\mathbf{u}(kT)$ são matrizes constantes no intervalo de integração, podemos deixá-las de fora e escrever

$$\mathbf{x}(kT+T) = e^{TA}\mathbf{x}(kT) + \left[\int_{kT}^{kT+T} e^{(kT+T-\tau)A} d\tau\right] B\mathbf{u}(kT) \tag{7}$$

Uma nova mudança de variável
Como τ é uma variável auxiliar arbitrária, podemos mudá-la para $\eta = kT + T - \tau$, notando que a integral em (7) pode ser reescrita de forma bem mais simples:

$$\left[\int_{kT}^{kT+T} e^{(kT+T-\tau)A} d\tau\right] = \int_{0}^{T} e^{\eta A} d\eta \tag{8}$$

Uma notação econômica
Uma simplificação adicional consiste em escrever simplesmente k em lugar de kT, $k+1$ em lugar de $kT + T$, etc; com essa notação, (7) passa a ser

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{TA}\mathbf{x}(k) + \int_{0}^{T} e^{\eta A} d\eta B\mathbf{u}(k) \tag{9}$$

Tanto e^{TA} como o lado direito de (8) são matrizes com as dimensões de A e dependentes de T; adotamos

$$A_d = e^{TA}, \quad B_d = \int_{0}^{T} e^{\eta A} d\eta B \tag{10}$$

onde o índice d representa discretização.

A discretização da saída
Como a equação da saída não é uma equação diferencial, $\mathbf{y}(t)$ só depende do valor de t e logicamente

$$\mathbf{y}(kT) = C\mathbf{x}(kT) + D\mathbf{u}(kT) \tag{11}$$

Adotando $C_d = C$ e $D_d = D$ chegamos às

Equações dinâmicas discretizadas
A versão para tempo discreto, de (1) é simplesmente

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A_d\mathbf{x}(k) + B_d\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y} &= C_d\mathbf{x}(k) + D_d\mathbf{u}(k) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Para os exercícios abaixo considere um motor *Maxon* RE-40/148866, com a função de transferência

$$\frac{\Omega_m(s)}{V(s)} = G(s) = \frac{60740740,7405}{s^2 + 5850,3134s + 997981,66815} \tag{13}$$

Exercícios

1. Determine as matrizes A, B, C, e D da representação de estados, considerando a tensão da armadura $v(t)$ como entrada, a velocidade angular $\omega(t)$ como saída, e como variáveis de estado $x_1 = \omega(t)$ e $x_2 = i(t)$.

2. Determine ω_c, a largura de faixa de 3 dB correspondente, em rad/s, com 5 (cinco) casas decimais. **Cite** o método de cálculo ou procedimento empregado.

3. Converta ω_c para f_c, a largura de faixa de 3 dB em Hz.

4. Obtenha $f_c^{-1} = T_c$, o período de 3 dB, em *milissegundos*.

5. Para prosseguir é necessário que você determine um intervalo de amostragem personalizado T, executando os três seguintes passos:

   i - Tome, na ordem inversa, os três algarismos menos significativos do seu **No. USP**, dividindo por 100 o número assim obtido. O resultado é Np, um número entre 0 e 10.
   Exemplo: O No. USP 5630231 leva a $N_p = 1,32$.

   ii - Calcule $T_c/(20 + N_p)$.

   iii - Arredonde o resultado de $T_c/(20 + N_p)$ para o mais próximo número inteiro de microssegundos. Este número arredondado é o seu intervalo de amostragem personalizado, T.
   Exemplo: Para $T_c \approx 42,08173\,ms$, o No. USP 5630231 levaria a $T = 1974\,\mu s$.

6. Para uma matriz quadrada A, arbitrária mas não singular, determine a integral indefinida

$$\int e^{tA} dt \tag{14}$$

   Sugestão: Empregue a série de potências que define e^{tA}.

7. Sem empregar comando algum do MATLAB além de "`inv`", "`expm`" e dos comandos aritméticos usuais (soma, multiplicação, etc), obtenha as matrizes A_d e B_d, calculadas para T. Note que para calcular B_d você precisará do resultado do item anterior.

8. Declare a versão discretizada do motor empregando o comando "`ss`":

```
≫ velmotord = ss(ad, bd, cd, dd, tam);
```

Note que no exemplo acima "`tam`" representa o intervalo de amostragem personalizado, que tem que ser incluído na declaração de um sistema de tempo discreto.

9. Obtenha a saída do sistema para um degrau unitário na entrada. Empregue os comandos "`grid`" e "`hold`", e imprima a sua resposta superposta à resposta do sistema original, de tempo contínuo, para uma devida comparação.

Resumo
Apresente os seguintes resultados:

a - A, B, C, D.

b - ω_c em rad/s e repectivo método de cálculo.

c - f_c em *herz*.

d - T_c em *segundos* ou subunidades.

e - N_p.

f - T em *segundos* ou subunidades.

g - $\int e^{tA}dt$ em função de t, e^{tA}, etc.

h - A_d, B_d, C_d, D_d.

i - A resposta do sistema discretizado, para um degrau unitário, **impressa** superposta à do sistema contínuo, com o reticulado . Apenas um gráfico, em folha A4, em cores.

Instruções para a Apresentação dos Resultados

a - Retorne ao professor todos os dados e possíveis diagramas impressos, até o seguinte limite:

29/08/2013, 10:20h

b - Um atraso na entrega dos resultados, de Δh horas a partir do limite acima, implica um fator de correção $\eta = e^{-\Delta h/6{,}5}$.

c - Todas respostas devem ser suscintas, claras, objetivas e apresentadas em papel (A4).

d - Os resultados individuais entregues para serem avaliados deverão conter a identificação do autor, assim como a data e a hora da entrega efetiva.

e - Os resultados individuais entregues para serem avaliados deverão conter a identificação da lista de exercícios à qual se referem. Eg., "*Soluções e Resultados Relativos à LE-03*".

f - Somente resultados obtidos e apresentados individualmente serão considerados para avaliação. Em outras palavras, cada conjunto de resultados só será considerado se estiver inequivocamente associado a um único aluno ou aluna.

g - Listagens de computador não solicitadas **não** serão aceitas.

h - Resultados eletrônicos como arquivos, mensagens, etc., **não** serão aceitos.

i - O **Sistema Internacional de Unidades - SI** é mandatório. Termos e unidades consagradas mas não recomendadas pelo SI (eg. *graus* em lugar de *radianos*) são admissíveis excepcionalmente, quando houver uma justificativa.

Final da LE 03

Arquivo original: .... "tdm13le03.tex"
Arquivo p/ impressão: ... "tdm13le03.pdf"
Versão: 1.0
No. de páginas: 4
Concluído em: .... 22/08/2013 - 08:57h