COMPUTAÇÃO GRÁFICA

Prática 11 – Modelos Fractais

Ivan Nunes da Silva

Modelos Fractais

- Objetivos da Aula:
  - Introduzir os principais conceitos envolvidos com a modelagem fractal.
  - Descrever as principais regras de modelagem das fractais, identificando a complexidade associada aos seus modelos.
  - Realizar exercícios aplicativos envolvendo a modelagem gráfica por fractais.
  - Mostrar aplicação de fractais em problemas práticos envolvendo computação gráfica.

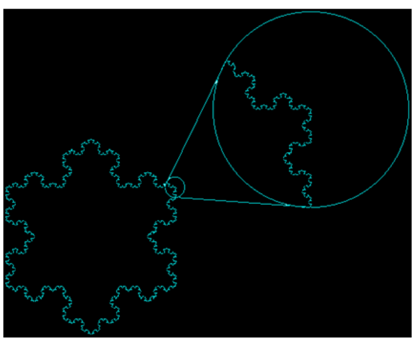
O Que é Uma Fractal

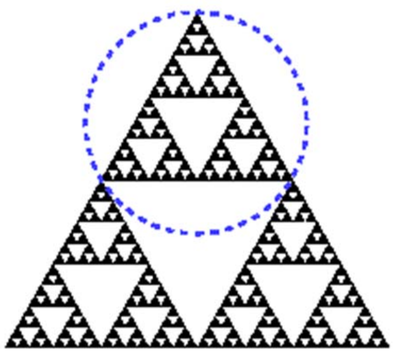
- **Fractais** são formas igualmente complexas no detalhe e na forma global (Benoit B. Mandelbrot).
  - Fractal vem do latim "fractus", que significa "irregular" ou "quebrado".
  - Um fractal é uma forma geométrica irregular ou fragmentada que pode ser subdividida em partes, e cada parte será uma cópia reduzida da forma toda.
  - As formas geométricas são obtidas através de processos iterativos (recursivos).

3

Características das Fractais

- **Auto-Similaridade**
  - Cada porção pequena do fractal pode ser vista como uma réplica reduzida do todo.

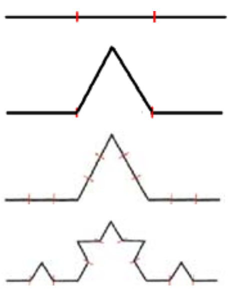


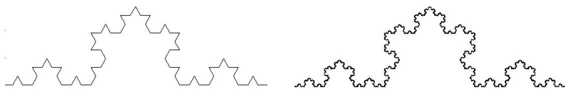


4

Fractal Curva de Koch

- Foi apresentada pelo matemático sueco Helge Von Koch, em 1904, cuja construção é a partir de um segmento de reta.
- **Princípio de Construção:**
  1. Divide-se o segmento de reta em três partes iguais.
  2. Substitui-se o segmento médio por dois segmentos iguais, de modo que, o segmento médio e os dois novos segmentos formem um triângulo equilátero.
  3. Repetindo os passos 1 e 2 sucessivamente durante um número finito de vezes, tem-se:

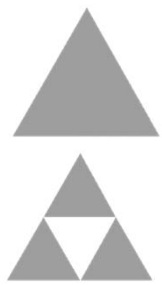




5

Fractal Triângulo de Sierpinsky

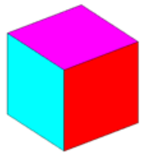
- O triângulo de Sierpinsky foi descoberto pelo matemático Waclav Sierpinsky (1882-1969).
- **Princípio de Construção:**
  1. Define-se um triângulo qualquer.
  2. Traçam-se os segmentos que unem os pontos médios dos lados do triângulo e tira-se o triângulo do centro.
  3. Repetindo o passo 2 para todos os outros triângulos (ainda não retirados) durante um número finito de vezes, tem-se:

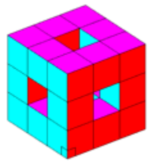


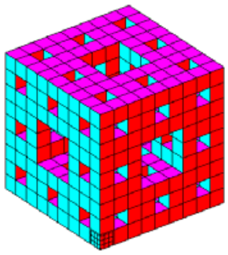
6

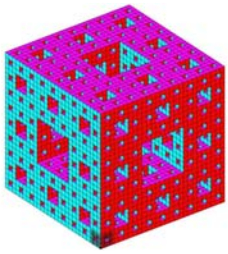
Fractal Cubo de Sierpinsky

- O cubo de Sierpinsky foi também proposto pelo matemático Waclav Sierpinsky.
- **Princípio de Construção:**
  1. Define-se um cubo qualquer.
  2. Divide-se o cubo em 27 cubos iguais e retiram-se o cubos centrais de cada face.
  3. Repetindo o passo 2 para todos os outros cubos (ainda não retirados) durante um número finito de vezes, tem-se:









7

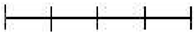
Conceito de Dimensão Fractal

- A Dimensão Fractal representa o nível de irregularidade de um fractal.
- Quanto maior a irregularidade de uma forma, maior é a sua Dimensão Fractal.
- A dimensão de um objeto fractal, ao contrário da Geometria Euclidiana, não é necessariamente um número inteiro. Pode ser um número fracionário.
- Essa característica da Dimensão Fractal a torna uma ferramenta muito útil para a comparação de duas ou mais formas fractais.

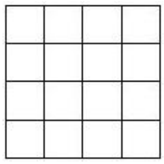
8

Cálculo da Dimensão Fractal (I)

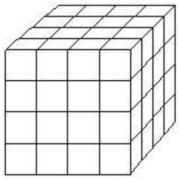
- **Dimensão 1 ➔** Considere um segmento de reta que vamos dividir em 4 partes iguais. Após a redução, têm-se 4 partes iguais. **{ 4^1 partes iguais }**



- **Dimensão 2 ➔** Efetuando o mesmo processo para o quadrado, ou seja, dividir cada um dos lados em 4 partes iguais, obtêm-se 16 partes iguais. **{4^2 partes iguais}**



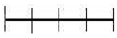
- **Dimensão 3 ➔** Procedendo o mesmo processo para o cubo, obtêm-se 64 partes iguais. **{ 4^3 partes iguais }**



9

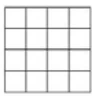
Cálculo da Dimensão Fractal (II)

- **Portanto, sejam as seguintes variáveis:**
  - ***N*** → Número de partes em que se divide o objeto.
  - ***r*** → Coeficiente de redução.
- **Para o Caso Anterior de Dimensão 1**
  - O segmento foi dividido em 4 partes (***N*** = 4).
  - A redução foi de ¼ (***r*** = 0.25).



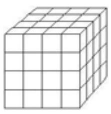
$$N = \frac{1}{r^1}$$

- **Para o Caso Anterior de Dimensão 2**
  - O quadrado foi dividido em 16 partes (***N*** = 16).
  - A redução de cada quadrado foi de 1/16 (***r*** = ¼ · ¼).



$$N = \frac{1}{r^2}$$

- **Para o Caso Anterior de Dimensão 3**
  - O cubo foi dividido em 64 partes (***N*** = 64).
  - A redução de cada cubo foi de 1/64 (***r*** = ¼ · ¼ · ¼).



$$N = \frac{1}{r^3}$$

- **Generalizando, tem-se:**

$$N = \frac{1}{r^d} \Leftrightarrow N = \left(\frac{1}{r}\right)^d \Leftrightarrow d = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$$

onde *d* é a dimensão da fractal

10

Cálculo da Dimensão Fractal (III)

- **Dimensão da Curva de Kock:**
  - ***N*** → Número de sub-objetos iguais em que se divide o objeto. {$N = 4$}
  - ***r*** → Coeficiente de redução. {$r = 1/3$}

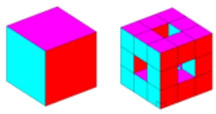
$$d = \frac{\log N}{\log {}^{1}\!/_{r}} \Leftrightarrow d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1{,}26$$

- **Dimensão do Triângulo de Sierpinsky :**
  - ***N*** → Número de sub-objetos iguais em que se divide o objeto. {$N = 3$}
  - ***r*** → Coeficiente de redução. {$r = 1/4$}

$$d = \frac{\log N}{\log {}^{1}\!/_{r}} \Leftrightarrow d = \frac{\log 3}{\log 4} \approx 0{,}79$$

- **Dimensão do Cubo de Sierpinsky :**
  - ***N*** → Número de sub-objetos iguais em que se divide o objeto. {$N = 20$}
  - ***r*** → Coeficiente de redução. {$r = 1/27$}

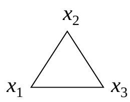
$$d = \frac{\log N}{\log {}^{1}\!/_{r}} \Leftrightarrow d = \frac{\log 20}{\log 27} \approx 0{,}91$$



11

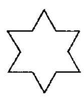
Exercícios Sobre Fractais

- **Exercício 1:**
  - Fazer a implementação no Matlab da fractal Floco de Neve.
  - Forneça apenas os pontos da base e o número de iterações.
- **Princípio de Construção:**
  - **Comece com um triângulo equilátero:**

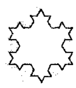


  - **Para cada segmento retilíneo, substitua por:**

  - **Após uma iteração completa, tem-se:**



  - **Após duas iterações completas, tem-se:**

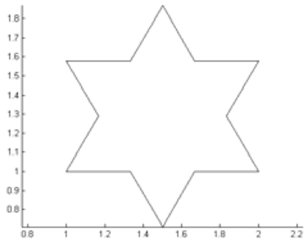


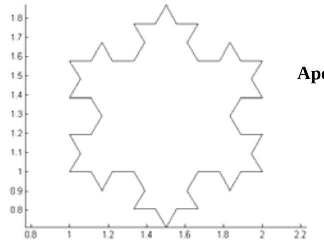
12

Exercícios Sobre Fractais

- **Resultados do Exercício 1:**
  - Ponto da Base: $(x_1,y_1) = (1,1)$ e $(x_3,y_3) = (2,1)$.

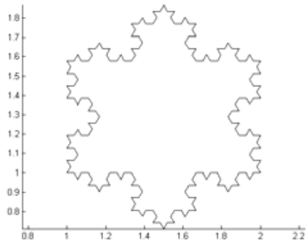
Após 1 iteração
(n = 1)

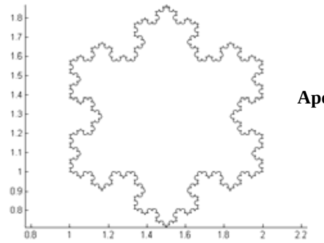




Após 2 iterações
(n = 2)

Após 3 iterações
(n = 3)





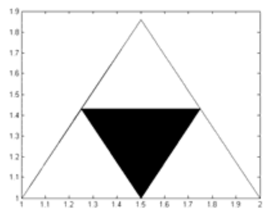
Após 4 iterações
(n = 4)

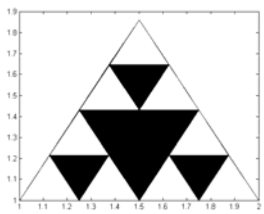
13

Exercícios Sobre Fractais

- **Exercício 2:**
  - Fazer a implementação do **Triângulo de Sierpinsky.** {não precisa ser equilátero}
  - Forneça os três pontos representando os vértices do triângulo e o número de iterações. Ex: $(x_1, y_1) = (1; 1) \rightarrow (x_3, y_3) = (2; 1) \rightarrow (x_2, y_2) = (1.5; 1.86)$

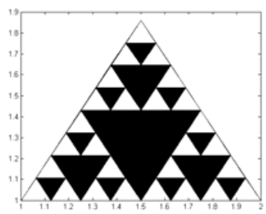
Após 1 iteração
(n = 1)

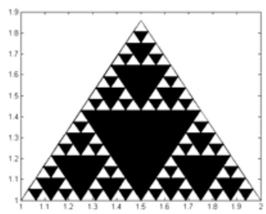




Após 2 iterações
(n = 2)

Após 3 iterações
(n = 3)



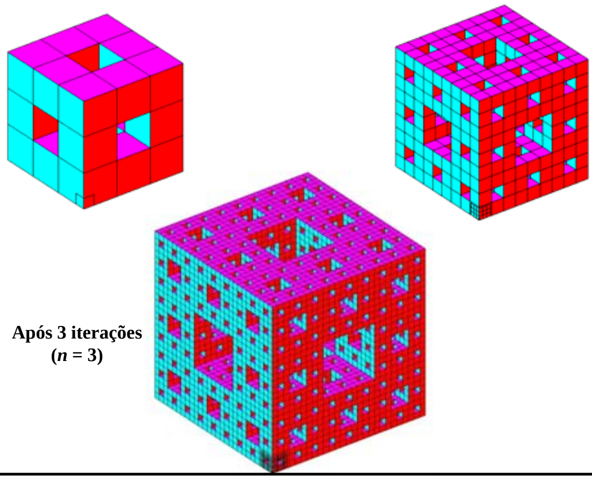


Após 4 iterações
(n = 4)

14

Exercícios Sobre Fractais

- **Exercício 3:**
  - Fazer a implementação do **Cubo de Sierpinsky.**
  - Forneça apenas o número de iterações.



Após 1 iteração (n = 1)

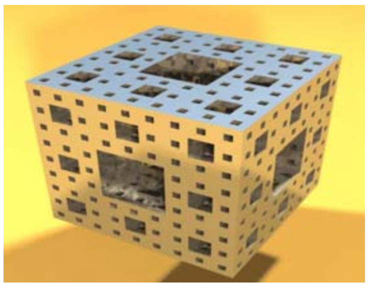
Após 2 iterações (n = 2)

Após 3 iterações (n = 3)

15

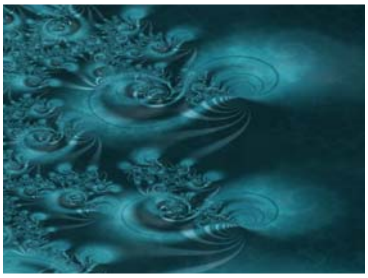
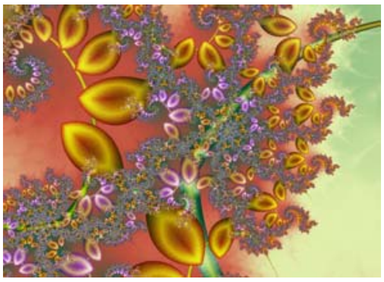
Aplicações de Fractais (I)

- **Em Computação Gráfica**
  - Ferramenta de interesse de designers gráficos e cineastas.
  - Utilizada para criar formas e objetos novos.
  - Usada para geração de efeitos especiais.
  - Criação de lugares artificiais mais realistas.
    - Planeta Gênesis (Filme Jornada nas Estrelas 2 – A Ira de khan).
    - Superfície do Asteróide (Filme Armagedon).



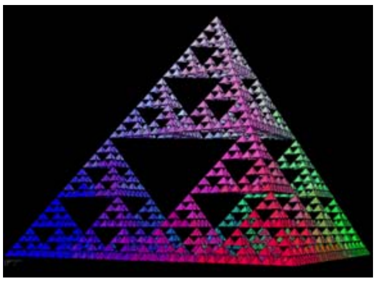
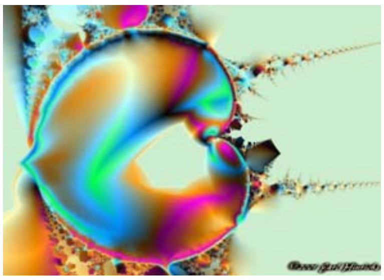
16

Aplicações de Fractais (II)

17

Aplicações de Fractais (III)

18