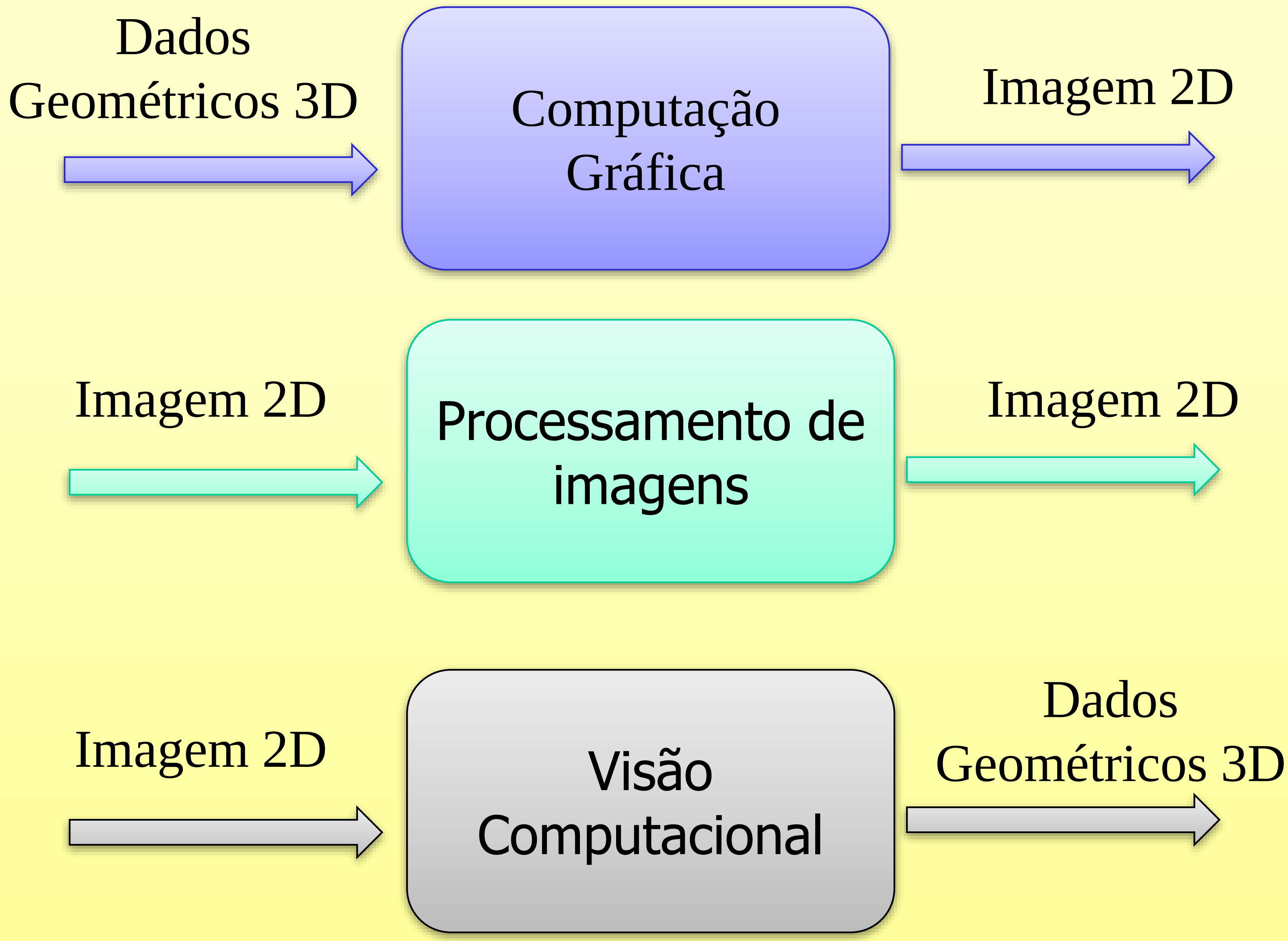
Departamento de Engenharia Elétrica - EESC-USP

SEL-0339 Introdução à Visão Computacional

Aula 5
Representação e Descrição

Prof. Dr. Marcelo Andrade da Costa Vieira
Prof. Dr. Adilson Gonzaga

mvieira@sc.usp.br

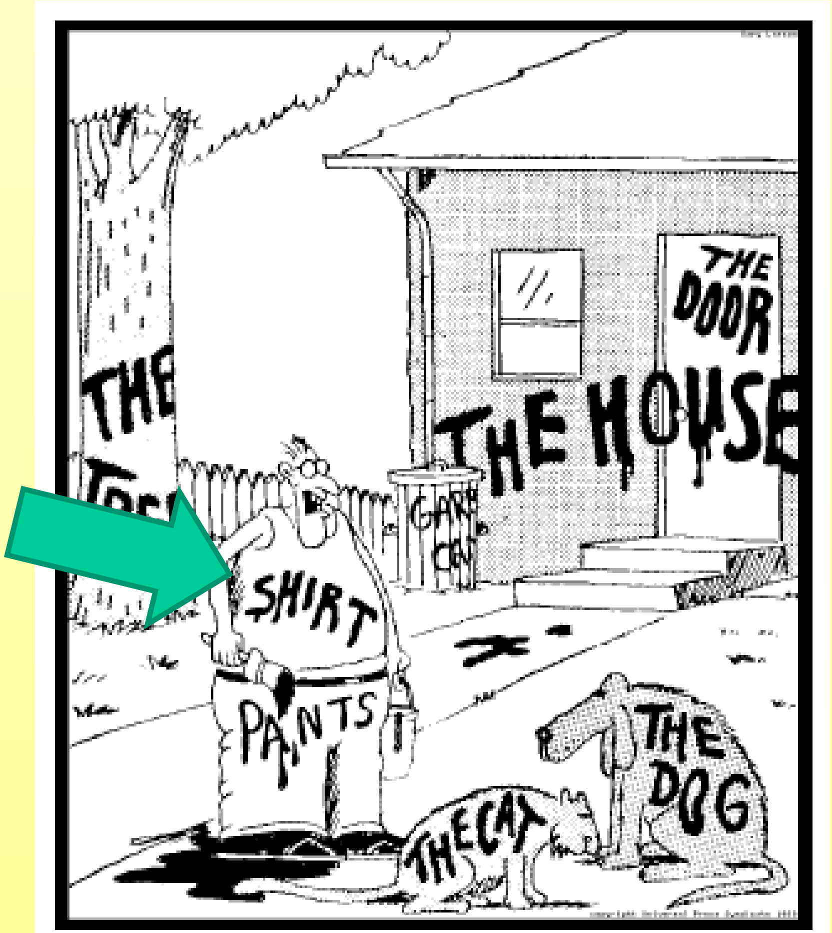

Dados Geométricos 3D
Computação Gráfica
Imagem 2D
Imagem 2D
Processamento de imagens
Imagem 2D
Imagem 2D
Visão Computacional
Dados Geométricos 3D

Visão Computacional

Imagem Digital → Processamento de Imagem → Extração/ Seleção de Características → Reconhecimento

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1200 \\ \textit{Chapéu} \\ \textit{Vermelho} \\ 220 \\ 0{,}34 \\ 10 \\ \textit{Cabelo} \\ \textit{Preto} \\ \textit{Mulher} \\ 2{,}3456 \\ 98{,}9 \\ 1 \\ 0 \\ 1100110 \end{pmatrix}$$

LENNA



"Now! *That* should clear up a few things around here!"

Introdução

- Após a segmentação, os agrupamentos resultantes são usualmente **representados** por meio de dados em um formato apropriado chamados de **descritores**.

Representação

- **Fronteiras**: Características externas. Foco na forma do objeto
- **Regiões**: Características internas. Foco na textura ou cor do objeto

- Uma fronteira pode ser descrita pelo seu tamanho, orientação, número de concavidades, etc...

- Uma região pode ser descrita pela sua cor, textura, área, etc...

- Os descritores devem ser insensíveis à translação, rotação e mudança de escala

Representação de Fronteiras

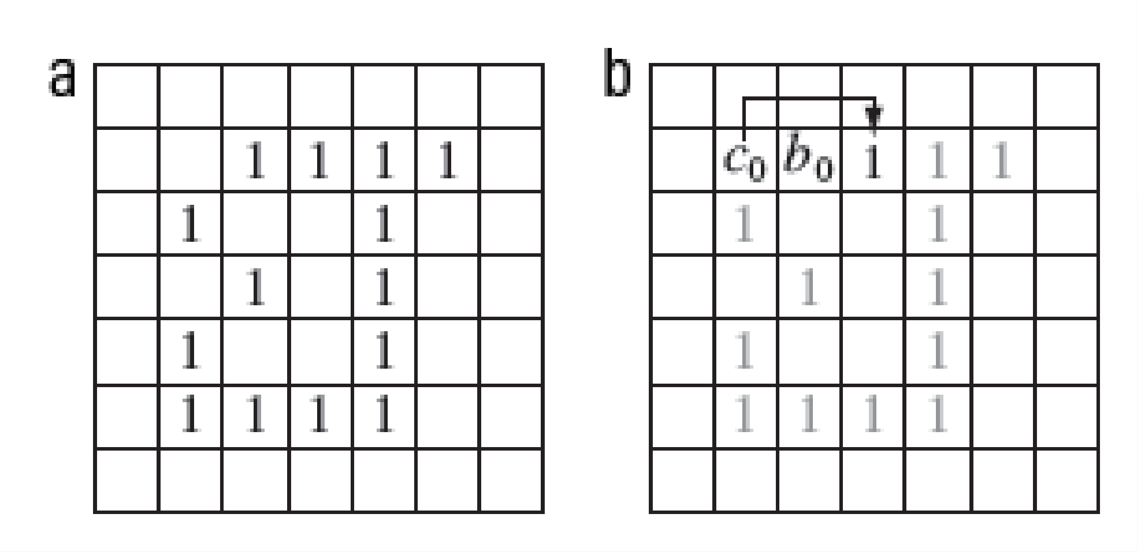
1) Seguidor de fronteira

- Define uma *sequência ordenada de pontos* que descrevem uma fronteira. Para imagens binárias com a fronteira segmentada.

- Representação 1-D de uma forma bidimensional em uma imagem

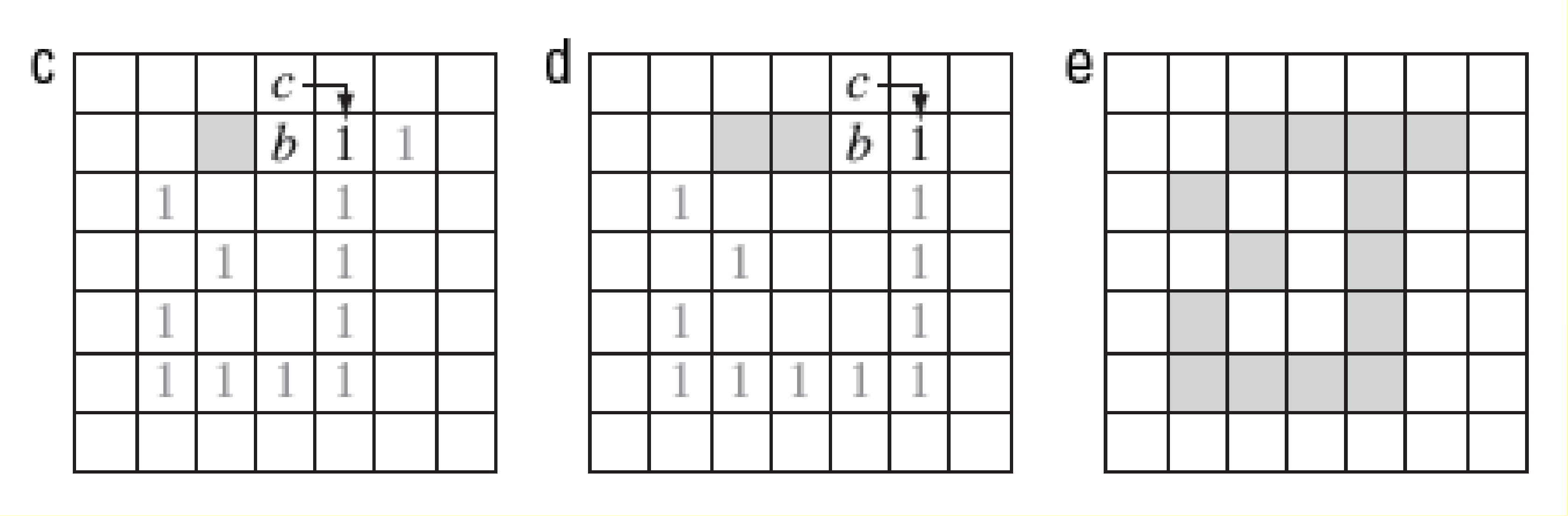
Algoritmo:

1. Considere o ponto de partida "$\mathbf{b_0}$" como o ponto mais alto e mais a esquerda rotulado com valor 1 (objeto);
2. Denote por "$\mathbf{c_0}$" o vizinho à esquerda (ponto de fundo);
3. Examine todos os vizinhos-8 do ponto $\mathbf{b_0}$ a partir de $\mathbf{c_0}$ considerando o sentido horário e marque o primeiro ponto rotulado com **1** que for encontrado.



Algoritmo:

4. Inclua as coordenadas desse ponto na sequência como "$\mathbf{b_1}$". Ele faz parte da fronteira do objeto;
5. Denote por "$\mathbf{c_1}$" o ponto imediatamente anterior ao ponto $\mathbf{b_1}$ encontrado na sequência (ponto de fundo);
6. Repita o passo 3 a 5 até que o ponto encontrado seja novamente $\mathbf{b_0}$.

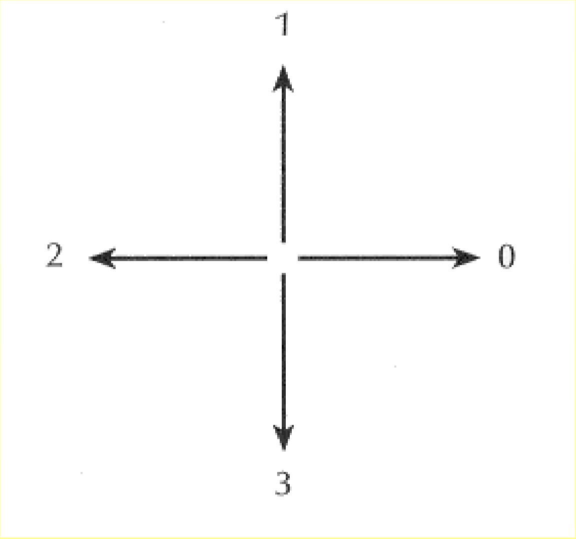


2) Código da Cadeia:

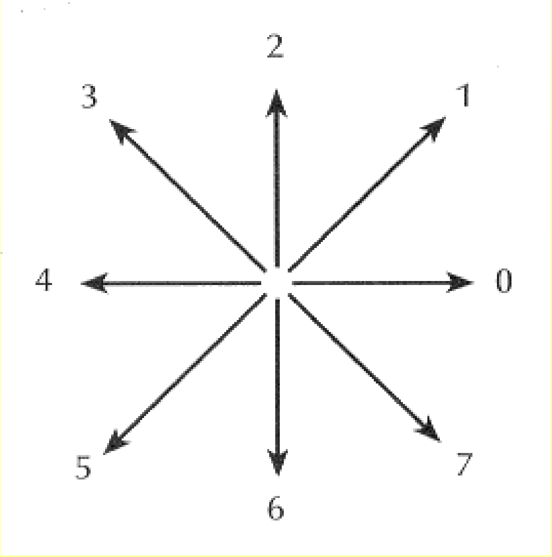
("Chain Code" ou Código de Freeman)

- Representam uma fronteira através de uma sequência conectada de segmentos, de direção e comprimento definidos.

Código de 4 direções

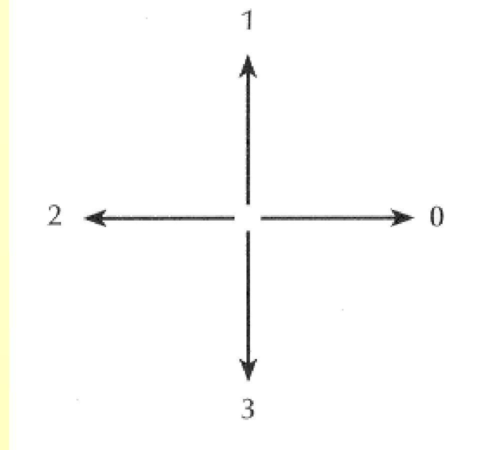


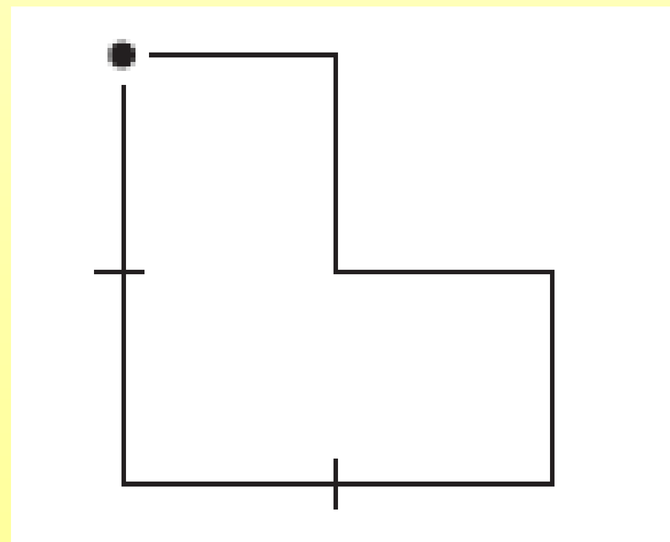
Código de 8 direções



Exemplo:

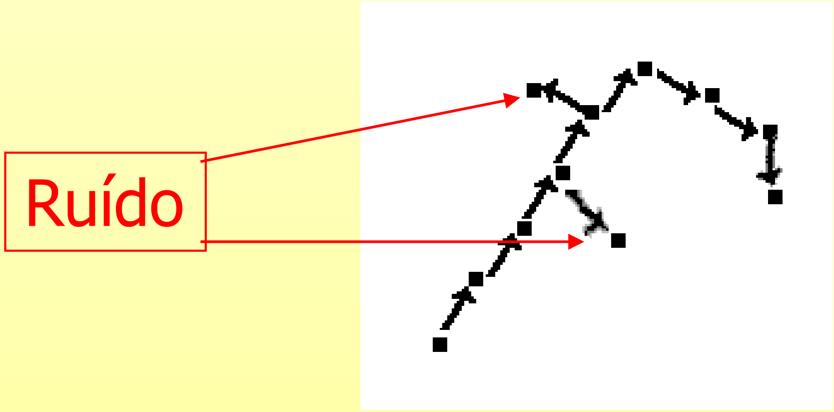
Código de 4 direções:



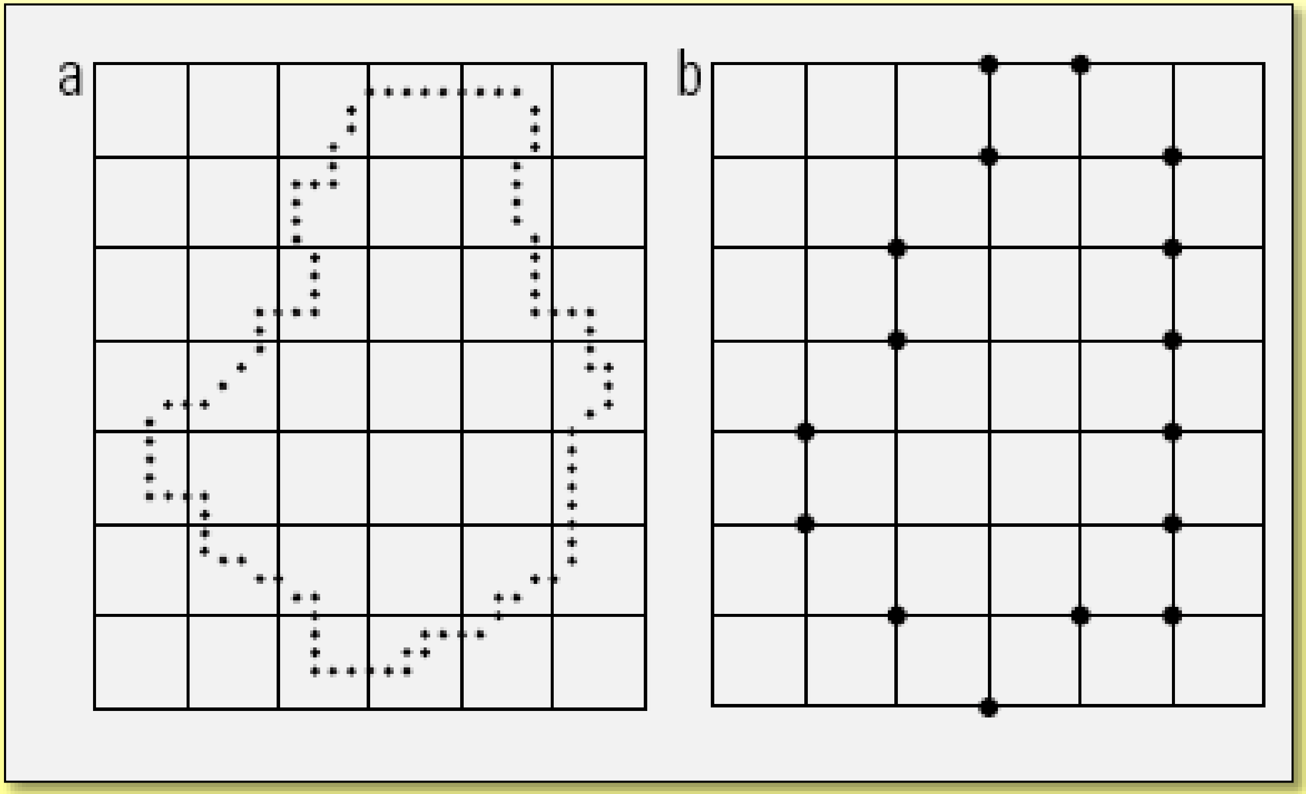


Chain Code → 0 3 0 3 2 2 1 1

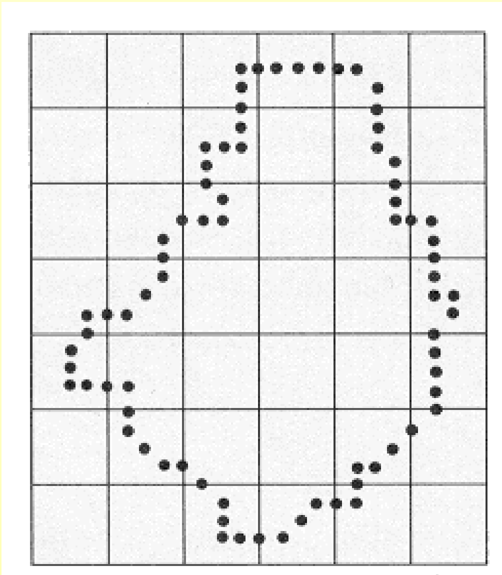
❑ Se a representação da fronteira for feita a cada par de pixels o custo computacional do algoritmo é alto e o torna mais susceptível a ruídos.



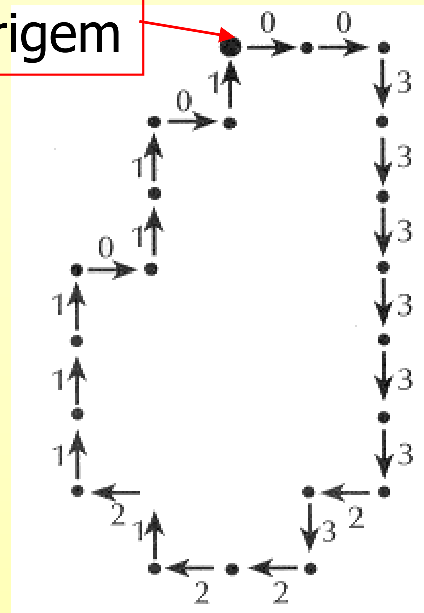
- Deve-se reamostrar a fronteira através de uma grade de amostragem de tamanho maior.
- Então, conforme a fronteira é percorrida, um ponto na fronteira é atribuído a cada nó da grade em função da sua proximidade.
- O código de cadeia deve ser calculado para a fronteira reamostrada.



Imagem

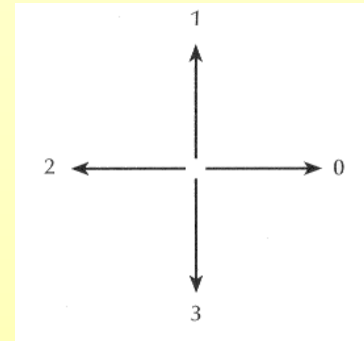


Origem

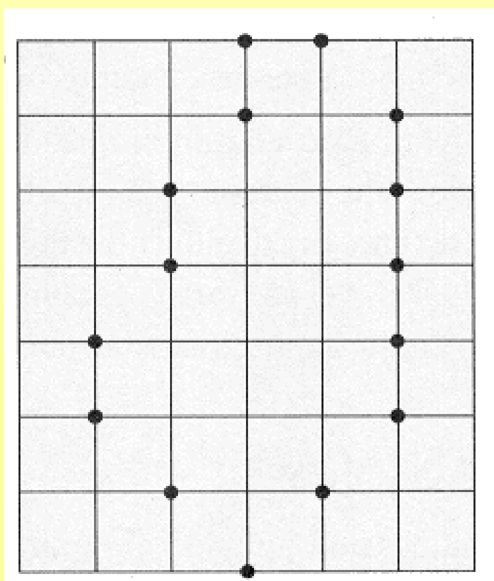


Código de 4 direções:

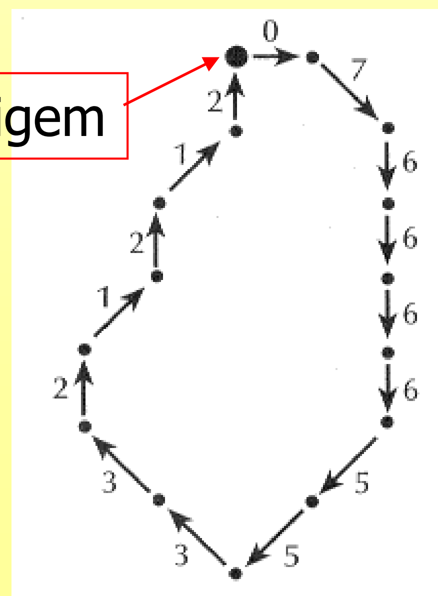
00333333232221211101101



Grade de reamostragem

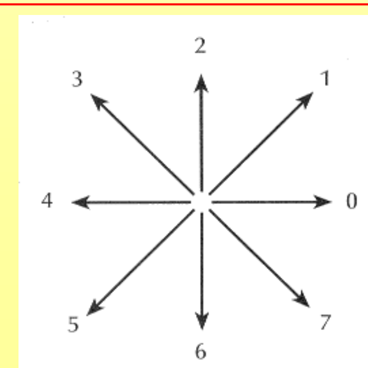


Origem



Código de 8 direções:

07666655333321212



Exemplo:

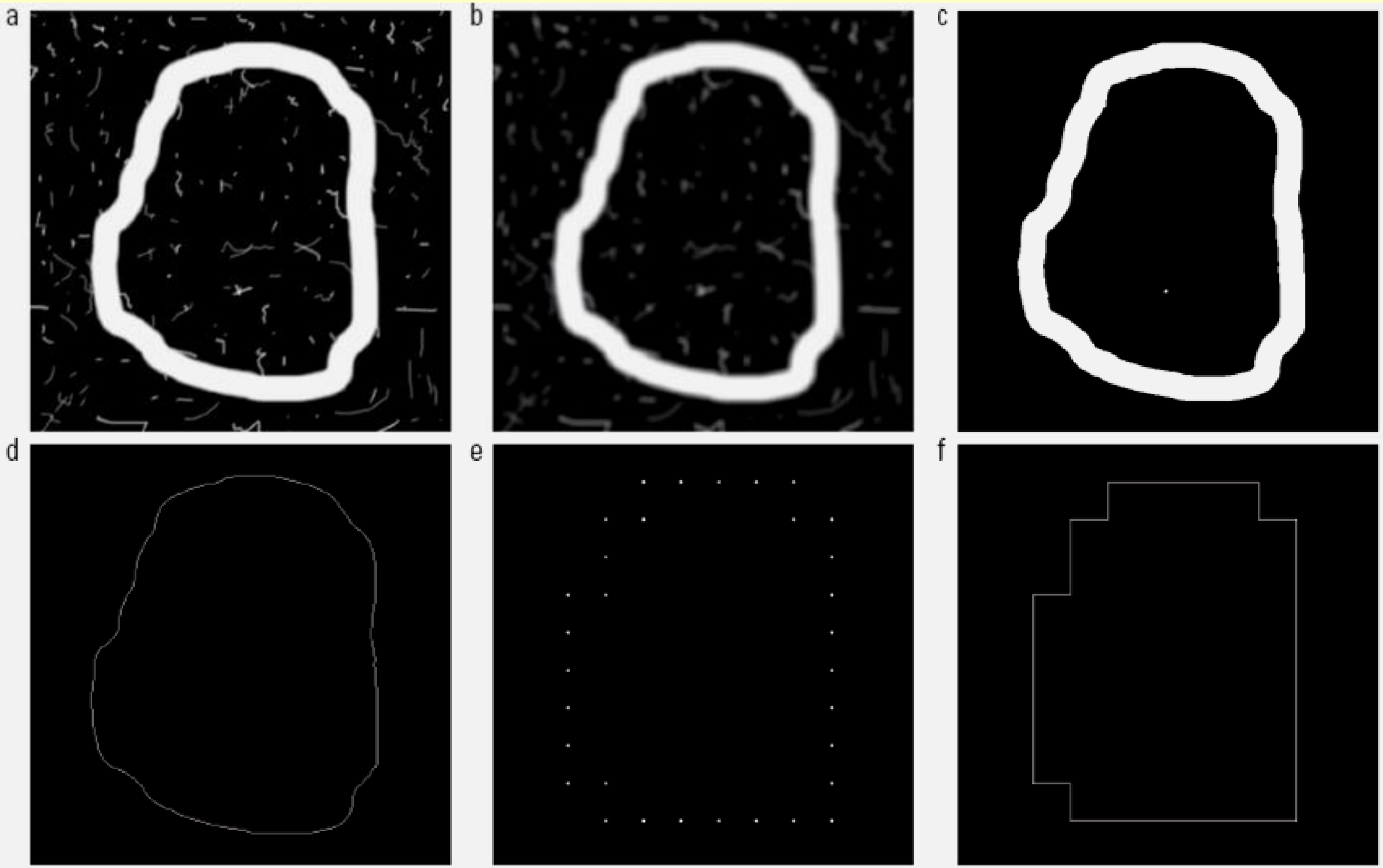


Figura 11.5 (a) Imagem ruidosa. (b) Imagem suavizada com uma máscara de média 9×9. (c) Imagem suavizada após a limiarização utilizando o método de Otsu. (d) Borda maior externa de (c). (e) Fronteira subamostrada (os pontos são mostrados ampliados para maior clareza). (f) Pontos conectados a partir de (e).

Normalização do Código da Cadeia:

- O Código da Cadeia de uma dada fronteira depende de uma origem.

- A solução é normalizar o código para que independa da origem.

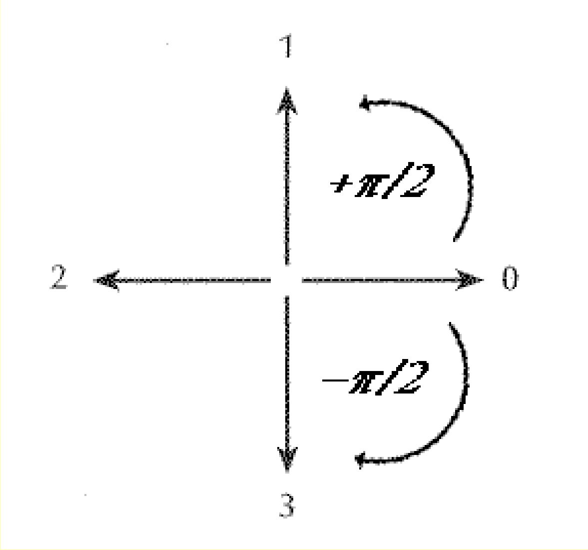
Primeira Diferença ou Derivativo do Código da Cadeia:

Invariante com relação à Rotação

Primeira Diferença ou Derivativo do Código da Cadeia:

Método:

1. Considerar o Código da Cadeia de forma “circular”, ou seja, fechado em suas extremidades.
2. Montar o Código Derivativo de acordo com a distância no sentido anti-horário:



4 direções

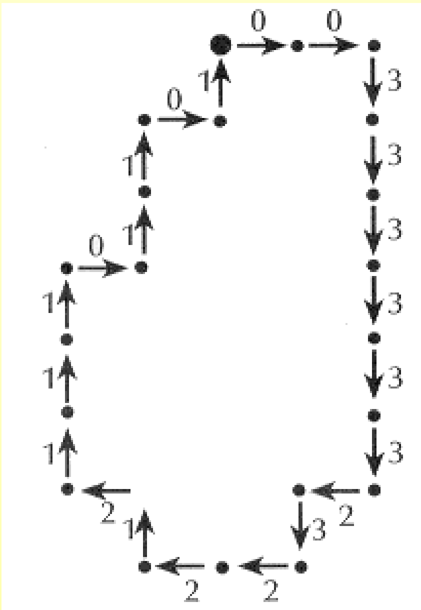
$$0 \Rightarrow 1 = \frac{\pi}{2} = 1$$
$$1 \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{2} = 3$$
$$1 \Rightarrow 2 = \frac{\pi}{2} = 1$$
$$2 \Rightarrow 1 = -\frac{\pi}{2} = 3$$
$$2 \Rightarrow 3 = \frac{\pi}{2} = 1$$
$$3 \Rightarrow 2 = -\frac{\pi}{2} = 3$$

$$3 \Rightarrow 0 = \frac{\pi}{2} = 1$$
$$0 \Rightarrow 3 = -\frac{\pi}{2} = 3$$

$$0 \Rightarrow 0 = 0$$
$$1 \Rightarrow 1 = 0$$
$$2 \Rightarrow 2 = 0$$
$$3 \Rightarrow 3 = 0$$

$$0 \Rightarrow 2 = 2$$
$$2 \Rightarrow 0 = 2$$
$$1 \Rightarrow 3 = 2$$
$$3 \Rightarrow 1 = 2$$

Exemplo:



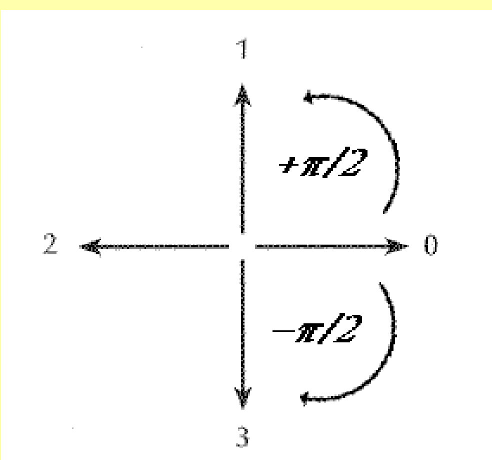
Código da Cadeia:

00333333232221211101101

$$1 \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{2} = 3$$

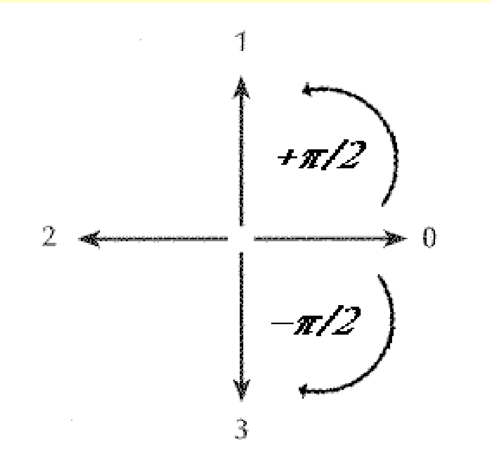
Código Derivativo:

3 0 3 0 0 0 0 0 3 1 3 0 3 1 3 0 0 3 1 0 3 1



Exemplo:

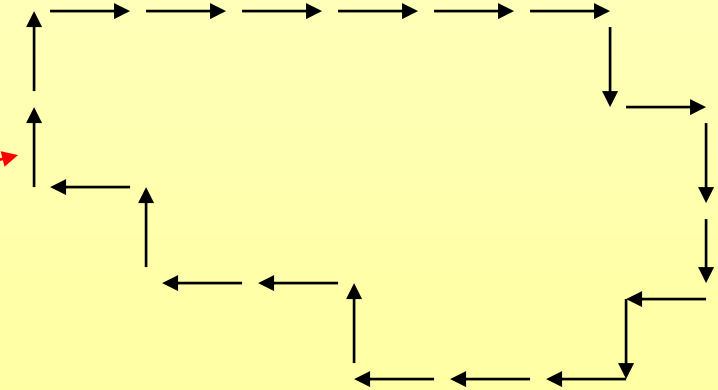
3	0	3	0	0	0	0	0	3	1	3	0	3	1	3	0	0	3	1	0	3	1

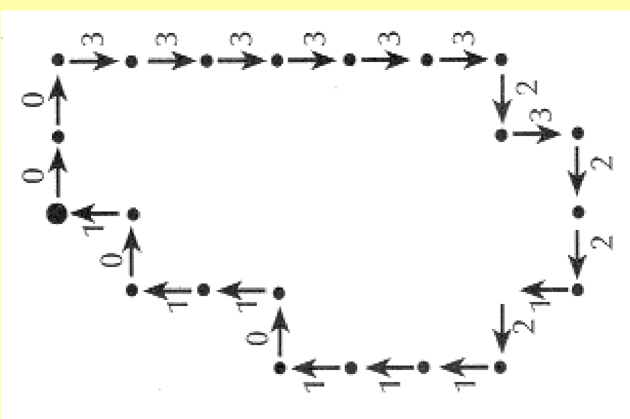


$3 \Rightarrow -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ Virar à Direita 90º

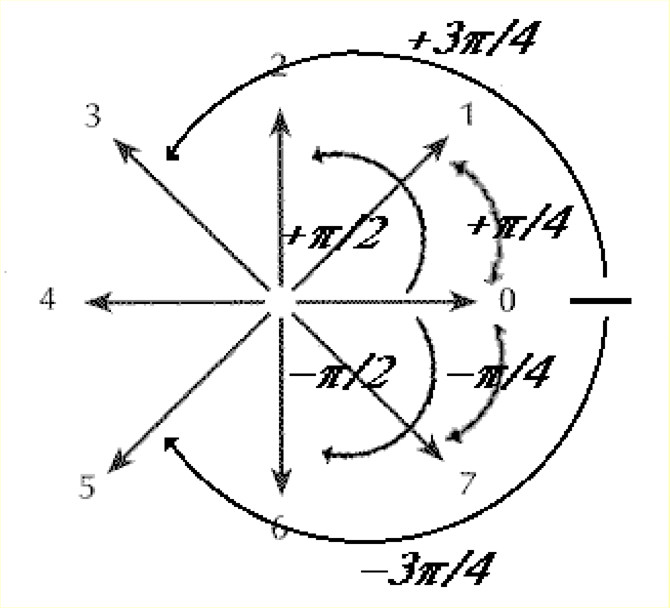
$1 \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ Virar à Esquerda 90º

Direção arbitrária
(3)





Código Derivativo de 8 Direções:



Sentido anti-horário

$$0 \Rightarrow 1 = \frac{\pi}{4} = 1$$

$$1 \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{4} = 7$$

$$0 \Rightarrow 2 = \frac{\pi}{2} = 2$$

$$2 \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{2} = 6$$

$$0 \Rightarrow 3 = \frac{3\pi}{4} = 3$$

$$3 \Rightarrow 0 = -\frac{3\pi}{4} = 5$$

$$0 = (0 \Rightarrow 0)(1 \Rightarrow 1)(2 \Rightarrow 2)(3 \Rightarrow 3)(4 \Rightarrow 4)(5 \Rightarrow 5)(6 \Rightarrow 6)(7 \Rightarrow 7)$$

$$1 = (0 \Rightarrow 1)(1 \Rightarrow 2)(2 \Rightarrow 3)(3 \Rightarrow 4)(4 \Rightarrow 5)(5 \Rightarrow 6)(6 \Rightarrow 7)(7 \Rightarrow 0)$$

$$2 = (0 \Rightarrow 2)(1 \Rightarrow 3)(2 \Rightarrow 4)(3 \Rightarrow 5)(4 \Rightarrow 6)(5 \Rightarrow 7)(6 \Rightarrow 0)(7 \Rightarrow 1)$$

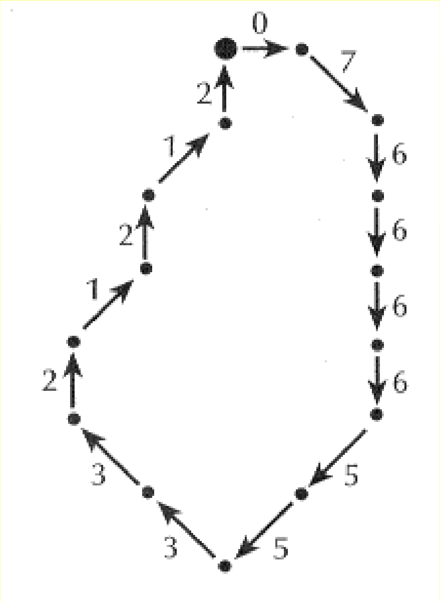
$$3 = (0 \Rightarrow 3)(1 \Rightarrow 4)(2 \Rightarrow 5)(3 \Rightarrow 6)(4 \Rightarrow 7)(5 \Rightarrow 0)(6 \Rightarrow 1)(7 \Rightarrow 2)$$

$$7 = (0 \Rightarrow 7)(1 \Rightarrow 0)(2 \Rightarrow 1)(3 \Rightarrow 2)(4 \Rightarrow 3)(5 \Rightarrow 4)(6 \Rightarrow 5)(7 \Rightarrow 6)$$

$$6 = (0 \Rightarrow 6)(1 \Rightarrow 7)(2 \Rightarrow 0)(3 \Rightarrow 1)(4 \Rightarrow 2)(5 \Rightarrow 3)(6 \Rightarrow 4)(7 \Rightarrow 5)$$

$$5 = (0 \Rightarrow 5)(1 \Rightarrow 6)(2 \Rightarrow 7)(3 \Rightarrow 0)(4 \Rightarrow 1)(5 \Rightarrow 2)(6 \Rightarrow 3)(7 \Rightarrow 4)$$

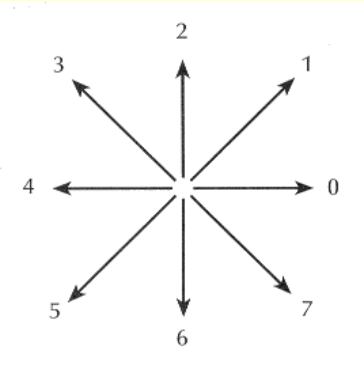
$$0=(0\Rightarrow 0)(1\Rightarrow 1)(2\Rightarrow 2)(3\Rightarrow 3)(4\Rightarrow 4)(5\Rightarrow 5)(6\Rightarrow 6)(7\Rightarrow 7)$$
$$1=(0\Rightarrow 1)(1\Rightarrow 2)(2\Rightarrow 3)(3\Rightarrow 4)(4\Rightarrow 5)(5\Rightarrow 6)(6\Rightarrow 7)(7\Rightarrow 0)$$
$$2=(0\Rightarrow 2)(1\Rightarrow 3)(2\Rightarrow 4)(3\Rightarrow 5)(4\Rightarrow 6)(5\Rightarrow 7)(6\Rightarrow 0)(7\Rightarrow 1)$$
$$3=(0\Rightarrow 3)(1\Rightarrow 4)(2\Rightarrow 5)(3\Rightarrow 6)(4\Rightarrow 7)(5\Rightarrow 0)(6\Rightarrow 1)(7\Rightarrow 2)$$
$$7=(0\Rightarrow 7)(1\Rightarrow 0)(2\Rightarrow 1)(3\Rightarrow 2)(4\Rightarrow 3)(5\Rightarrow 4)(6\Rightarrow 5)(7\Rightarrow 6)$$
$$6=(0\Rightarrow 6)(1\Rightarrow 7)(2\Rightarrow 0)(3\Rightarrow 1)(4\Rightarrow 2)(5\Rightarrow 3)(6\Rightarrow 4)(7\Rightarrow 5)$$
$$5=(0\Rightarrow 5)(1\Rightarrow 6)(2\Rightarrow 7)(3\Rightarrow 0)(4\Rightarrow 1)(5\Rightarrow 2)(6\Rightarrow 3)(7\Rightarrow 4)$$



Código da Cadeia:

07666655332121 2

$$2\Rightarrow 0=6$$



Código Derivativo:

6 7 7 0 0 0 7 0 6 0 7 7 1 7 1

3) Aproximações Poligonais:

- Uma fronteira pode ser aproximada por um polígono.
- Para uma fronteira fechada, a aproximação é exata quando o número de segmentos do polígono é igual ao número de pontos da fronteira.
- O objetivo da aproximação poligonal é capturar o formato da fronteira utilizando o menor número possível de segmentos.

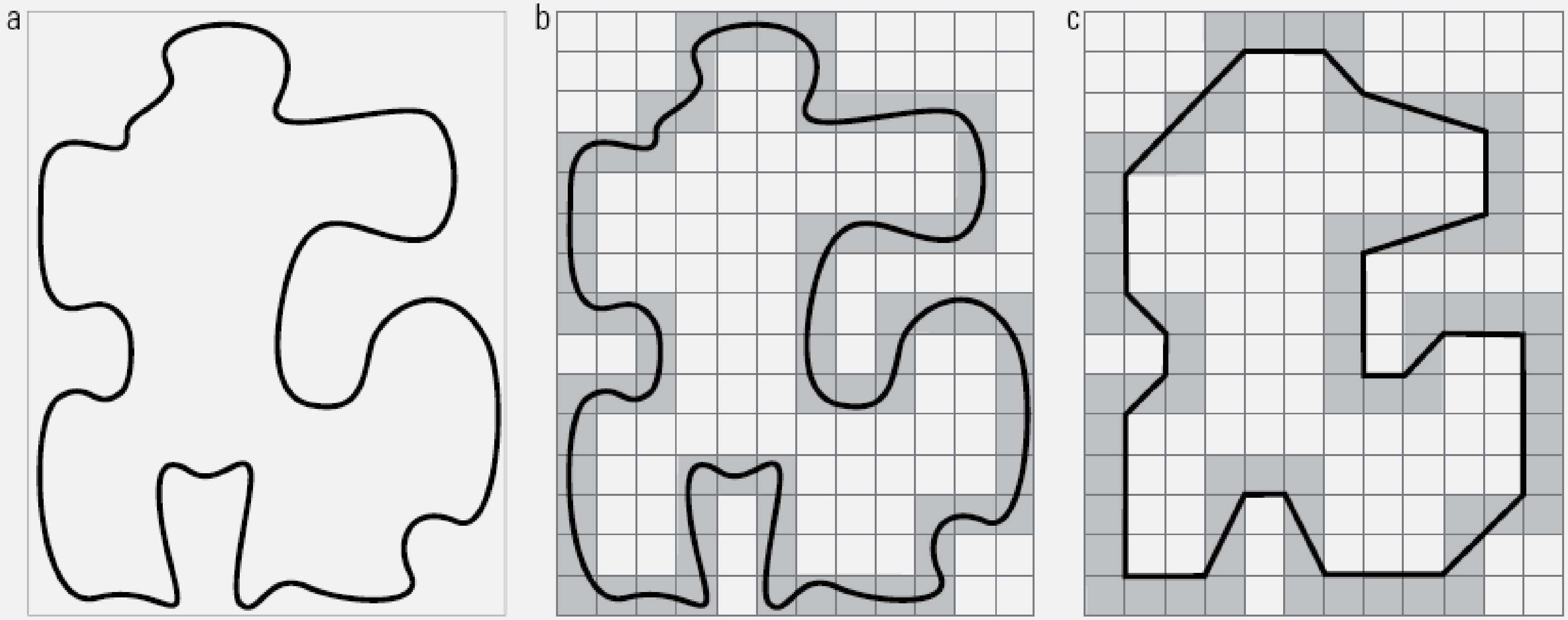


Figura 11.6 (a) Fronteira de um objeto (curva preta). (b) Fronteira cercada por células (em cinza). (c) Polígono de perímetro mínimo obtido quando é permitido que a fronteira se encolha. Os vértices do polígono são criados pelos cantos das paredes internas e externas da região cinza.

Polígono de perímetro mínimo

• Cercar a fronteira por um conjunto de células concatenadas de tamanho definido (esse tamanho define a precisão da aproximação).
• O polígono é definido como se fosse um "elástico"que se encolhe e contorna a fronteira encontrando seus limites nos cantos **interiores** e **exteriores** da região delimitada pelas células.

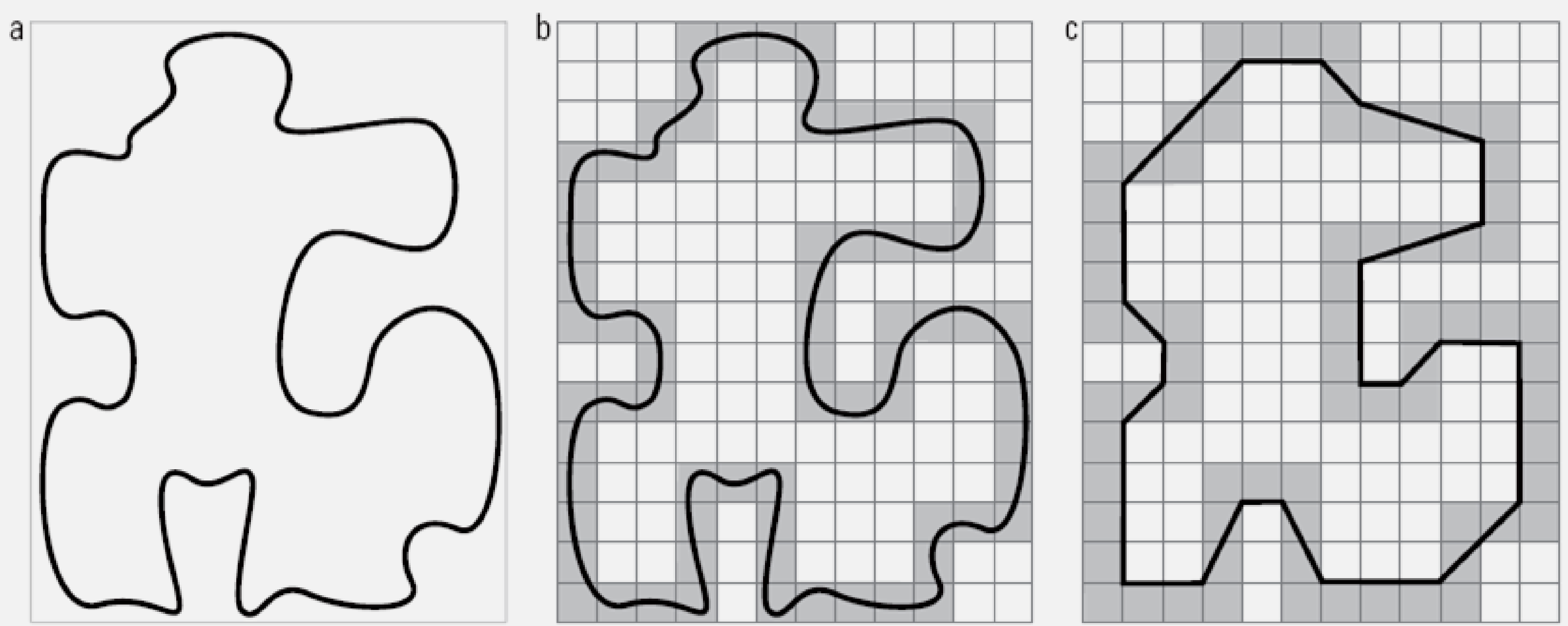
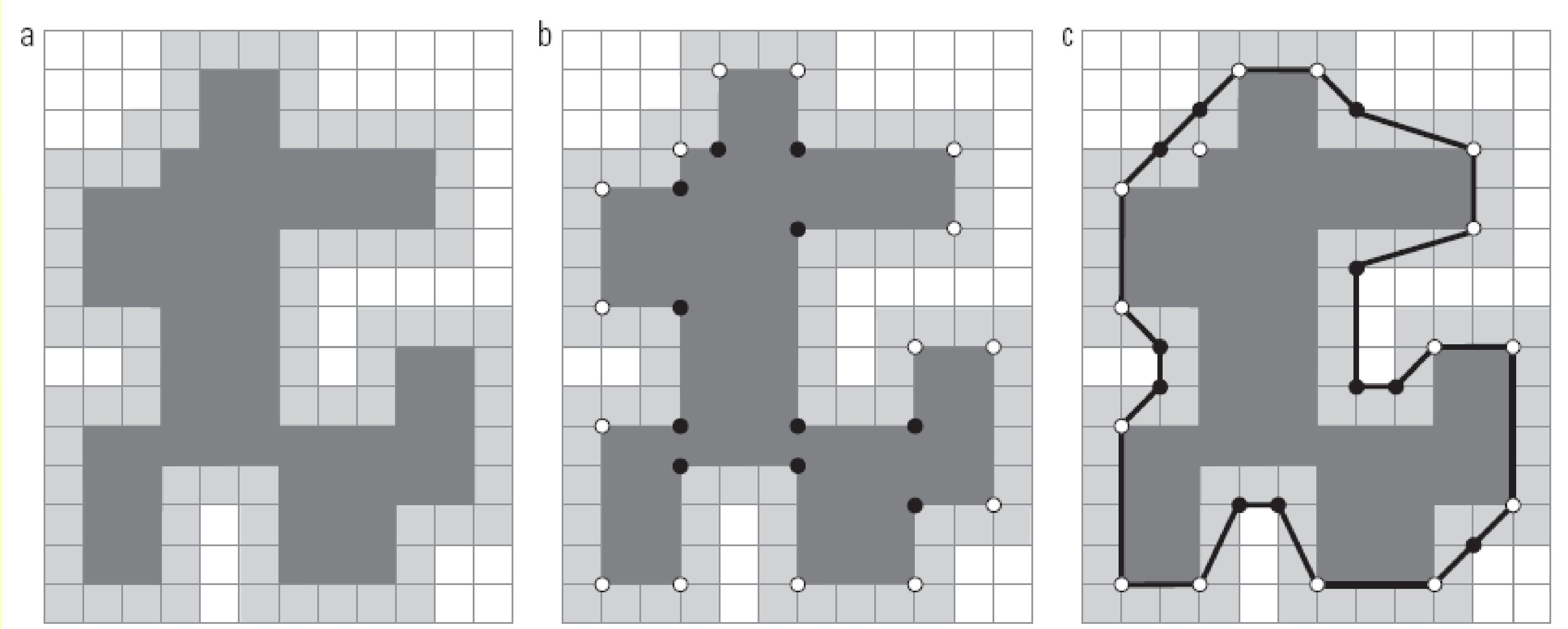


Figura 11.6 (a) Fronteira de um objeto (curva preta). (b) Fronteira cercada por células (em cinza). (c) Polígono de perímetro mínimo obtido quando é permitido que a fronteira se encolha. Os vértices do polígono são criados pelos cantos das paredes internas e externas da região cinza.

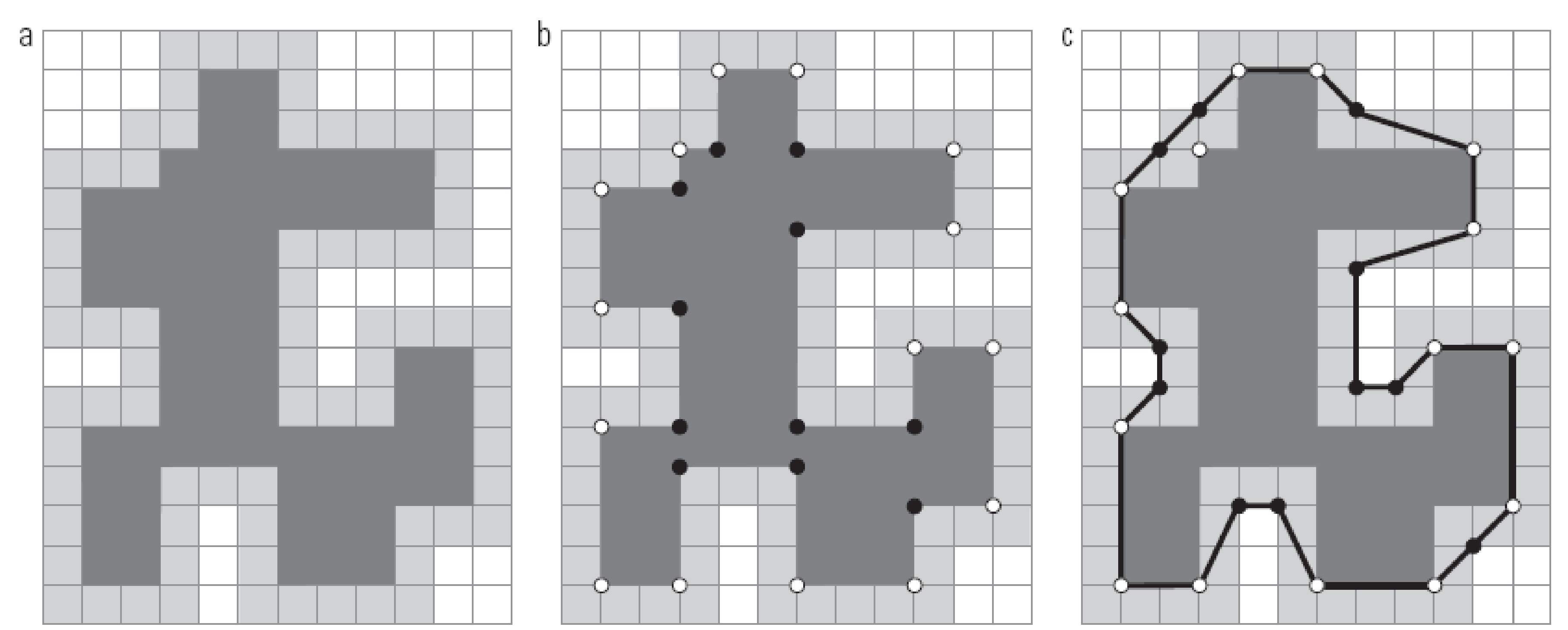
Polígono de perímetro mínimo

- Define-se a região interna do conjunto de células concatenadas utilizando vizinhança-4 (cinza-escuro).
- Deve-se rotular cada vértice do polígono interno em **côncavo** (preto) ou **convexo** (branco);
- Um vértice **convexo** é o ponto central de um trio de pontos que definem um ângulo na faixa de 0°<θ<180° e um vértice **côncavo** tem um ângulo na faixa de 180°<θ<360°.



Polígono de perímetro mínimo

- Todos os vértices côncavos devem ser "espelhados" considerando a diagonal oposta da célula externa da região.
- O **polígono de perímetro mínimo** é formado ligando-se os vértices encontrados (convexo e côncavo espelhado), desprezando-se os vértices brancos que estão entre dois vértices pretos.



Como saber se um ponto é convexo ou côncavo?

- A orientação de um trio de pontos (a,b,c) com coordenadas (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), respectivamente, pode ser calculado considerando-se a matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \left\{ \begin{matrix} > 0 & Côncavo \\ = 0 & Colineares \\ < 0 & Convexo \end{matrix} \right\}$$

Exemplo:

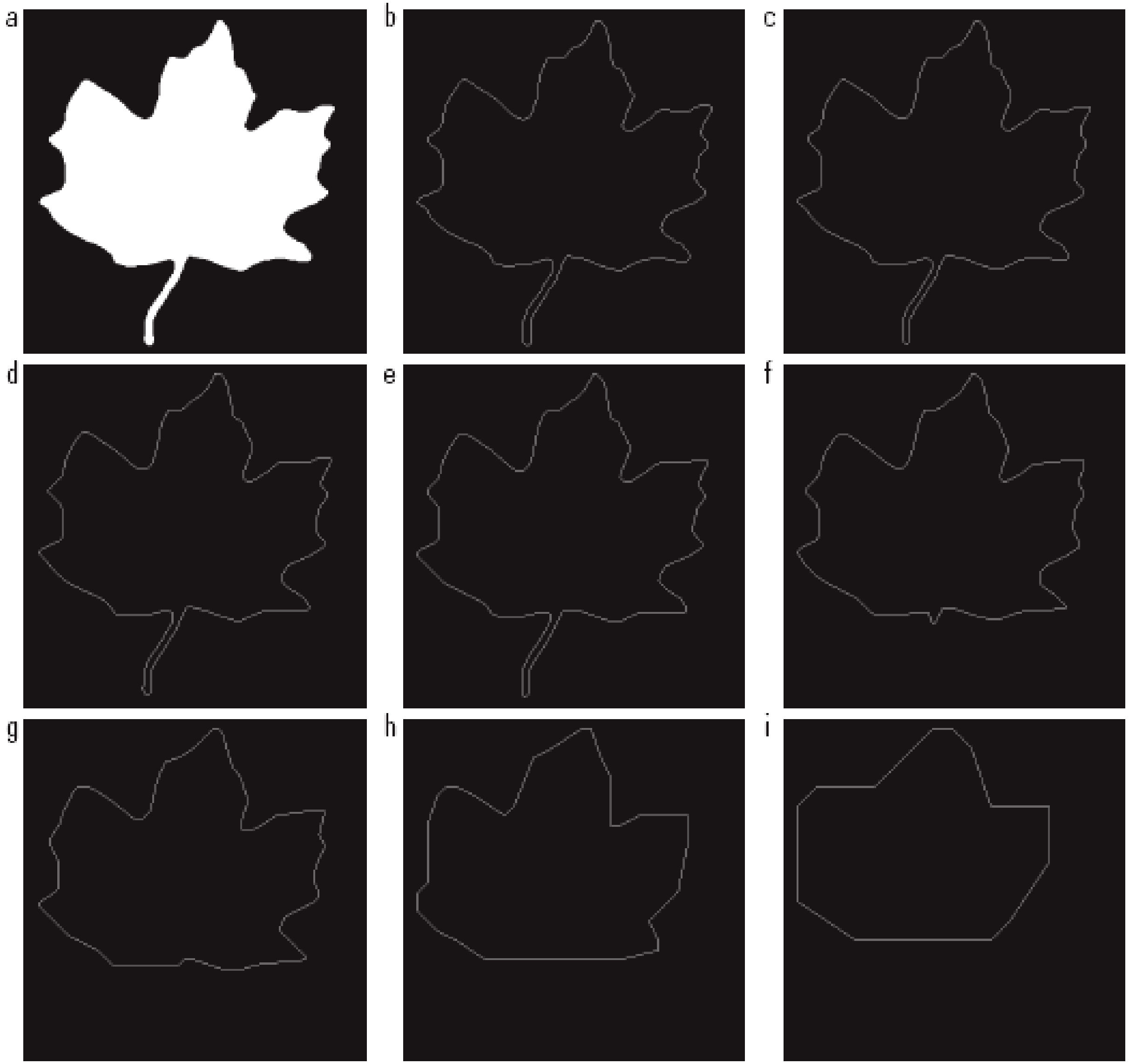
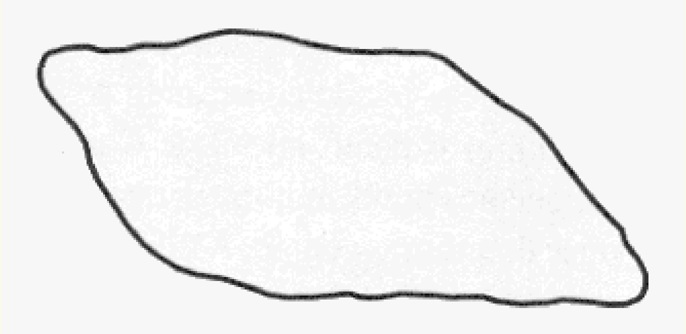


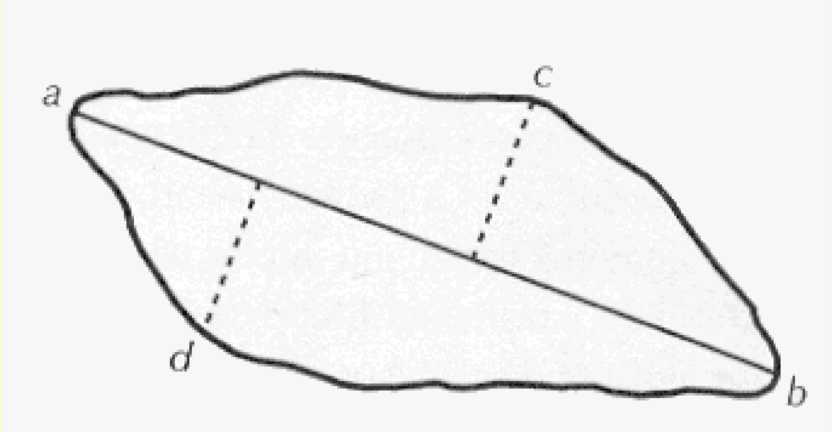
Figura 11.8 (a) Imagem binária de 566 × 566. (b) Fronteira 8-conectada. (c) Até (i), MPPs obtidos com células quadradas de tamanhos 2, 3, 4, 6, 8, 16 e 32, respectivamente (os vértices foram unidos por linhas retas para exibição). O número de pontos da fronteira em (b) é 1900. O número de vértices de (c) até (i) são 206, 160, 127, 92, 66, 32 e 13, respectivamente.

Inscrição de Polígono Convexo:

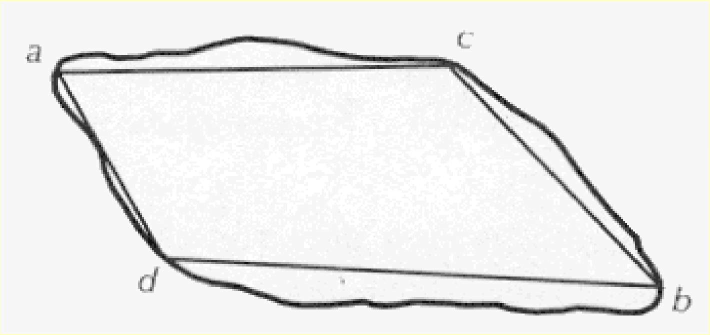


Fronteira Original Convexa

- Determinar os dois pontos mais distantes da fronteira (**a** e **b**);
- A forma foi subdividida em duas regiões;
- Determinar os pontos de maior distância perpendicular ao segmento **a-b** para as regiões superior e inferior (**c** e **d**);

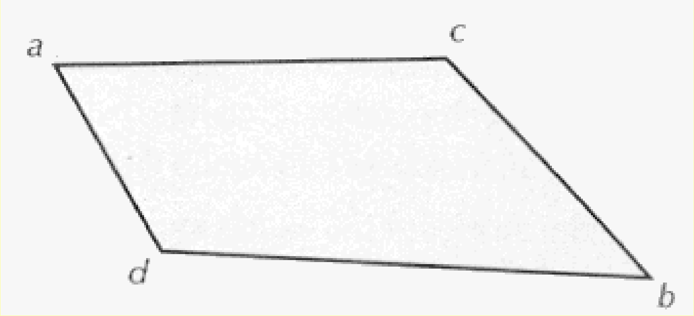


Inscrição de Polígono Convexo:



Inscrever o Polígono através da união dos pontos da fronteira determinados (a,b,c,d)

Estabelecer um nível de Limiar para a distância perpendicular para definir o número de pontos do polígono.



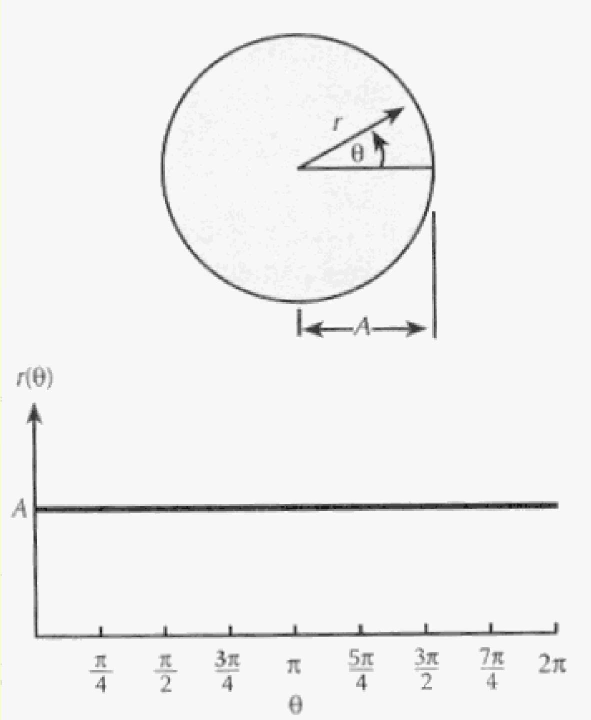
A Fronteira é então descrita através dos pontos que formam os vértices do Polígono inscrito (a,b,c,d, ...)

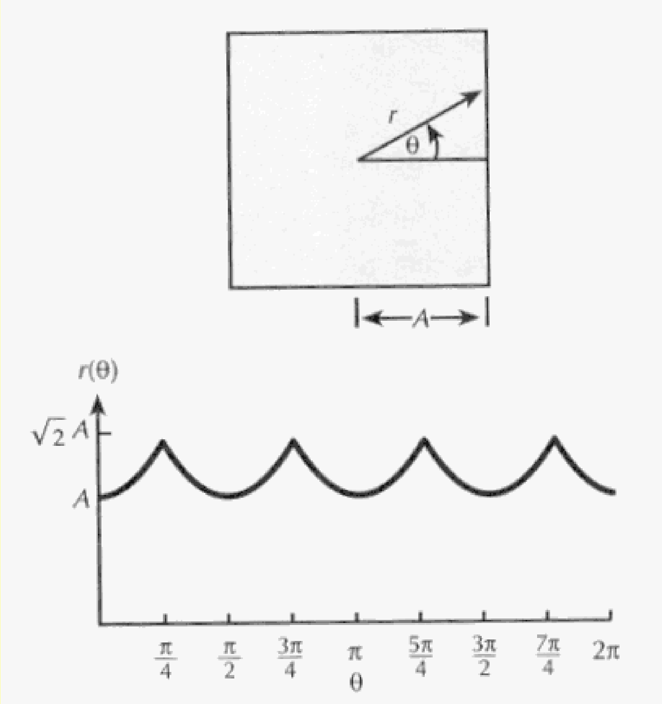
4) Assinaturas:

- Representação unidimensional de uma fronteira em coordenadas polares.

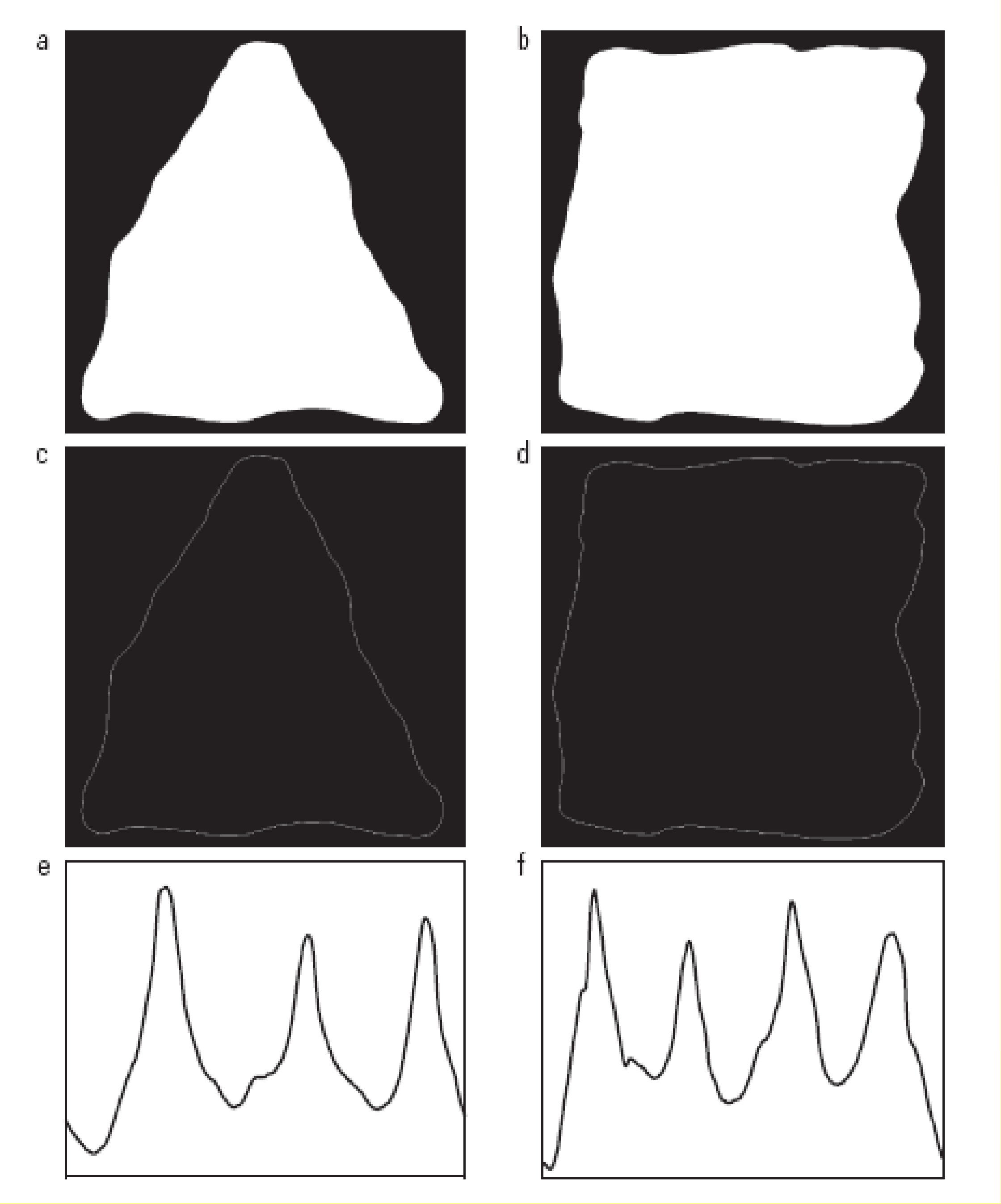
Exemplos:

1) Gráfico da Distância do centro de massa versus Ângulo:





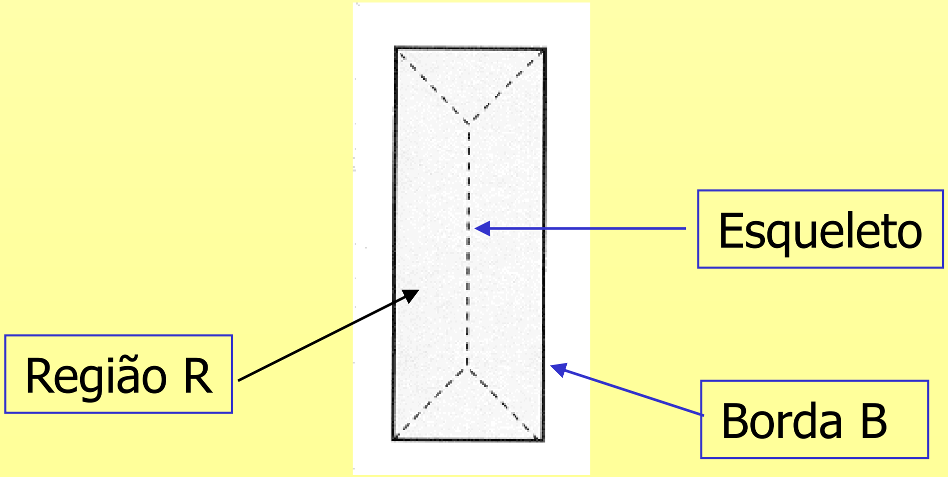
Exemplo:



Representação de Regiões

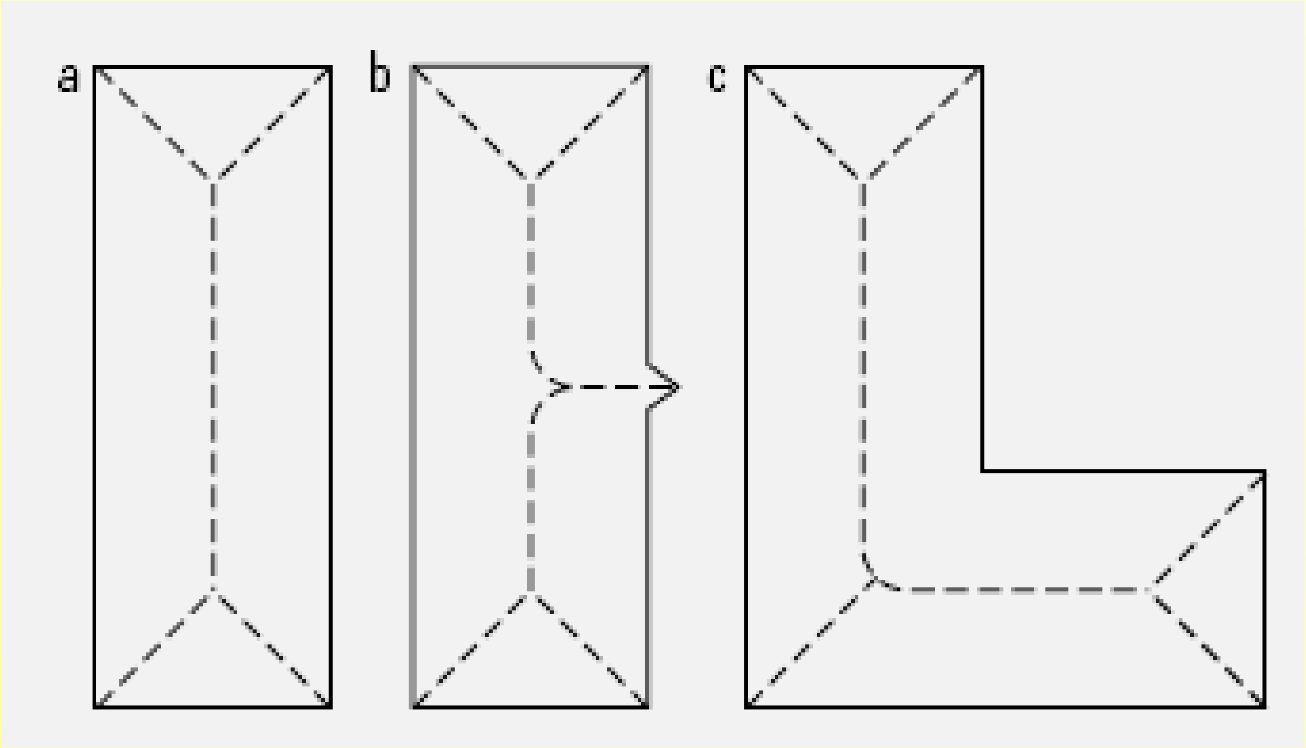
1) Esqueleto de uma Região:

- Redução de uma região ao seu esqueleto, através de um algoritmo de afinamento ou esqueletização.
- O esqueleto de uma região pode ser definido pela Transformação do Eixo Médio ("Medial Axis Transform" - MAT).
- A MAT de uma região R com borda B é definida da seguinte forma:
  - Para cada ponto p em R, encontramos seu vizinho mais próximo em B.
  - Se p tiver mais de um vizinho desse tipo, então diz-se que ele pertence ao eixo médio (esqueleto) de R.



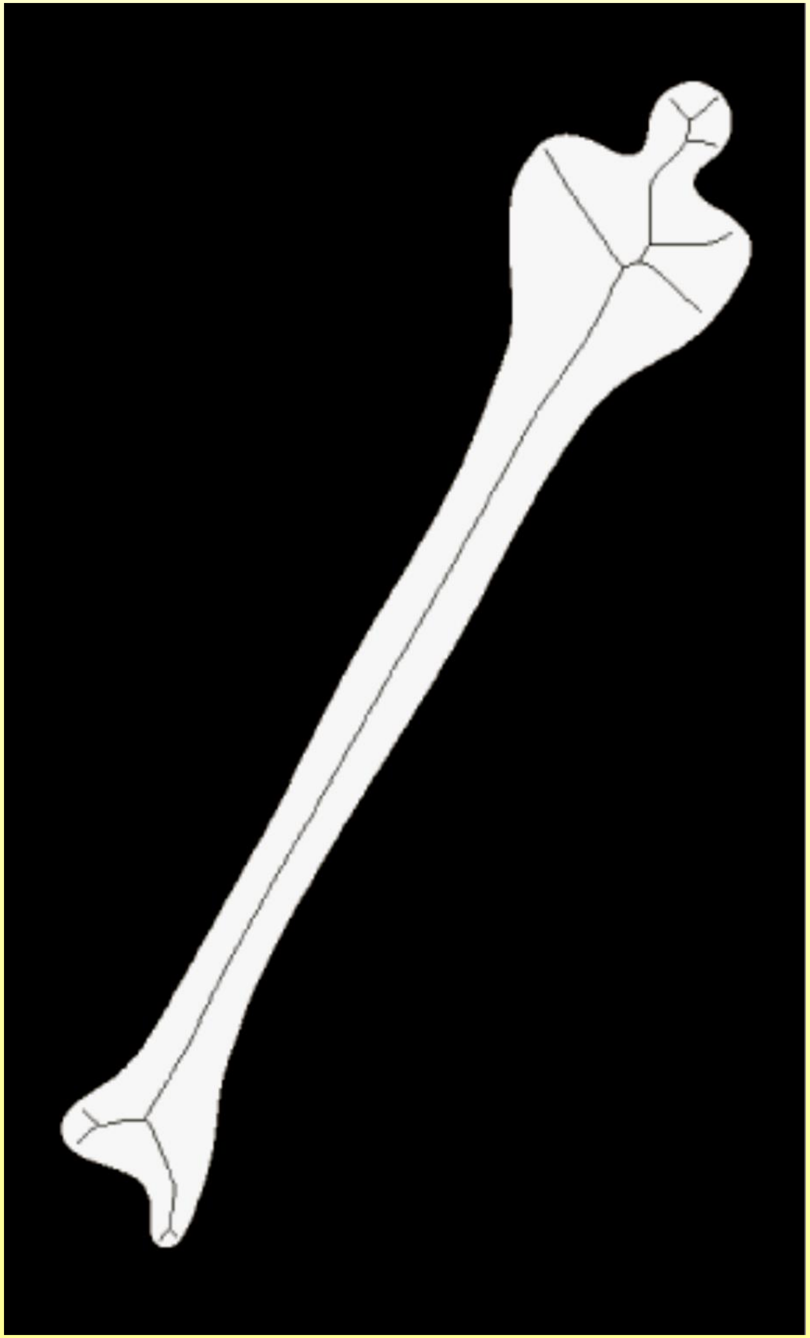
Exemplo:

Esqueleto de regiões considerando a Distância Euclidiana.



Os pontos do Esqueleto possuem pelo menos dois pontos em B de mesma Distância Euclidiana.

Exemplo:



Descritores de Fronteiras

1) Comprimento da Fronteira (Perímetro):

- Contagem do número de pixels da Fronteira.

❑ Usando o Código da Cadeia:

- de 4 direções ⇒ Número de elementos.

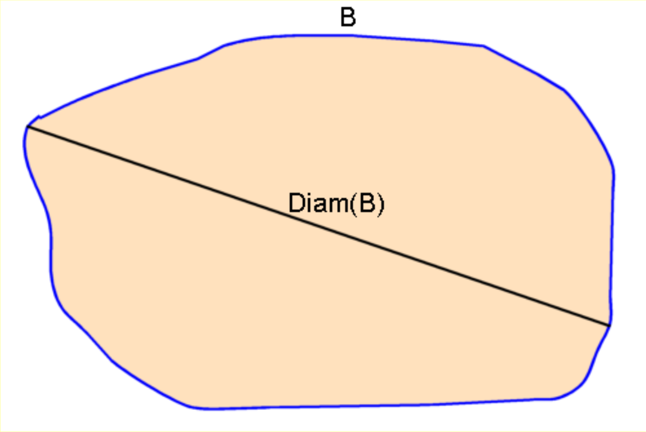
- de 8 direções ⇒ Número de elementos pares (horizontais e verticais) mais $\sqrt{2}$ x (número de elementos ímpares) elementos diagonais.

2) Diâmetro da Fronteira:

$$Diam(B) = \max_{i,j}\left[D(p_i, p_j)\right]$$

Onde: $D(p_i, p_j)$ É a distância entre os píxels i e j sobre a Fronteira B.

- O valor do Diâmetro e a orientação da linha que conecta os dois pontos da fronteira mais distantes são descritores úteis da fronteira.



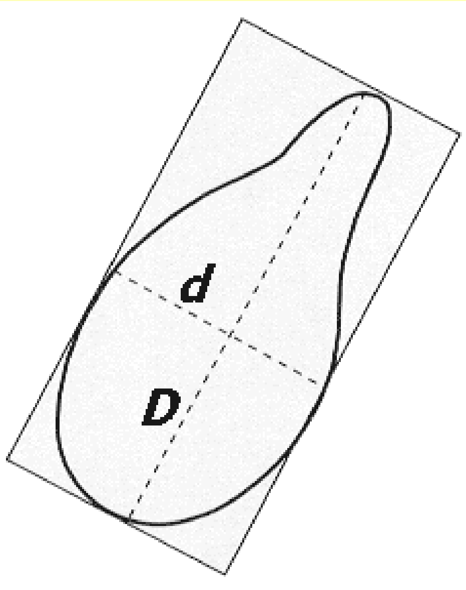
- Esta linha é também chamada de **Eixo Maior** da fronteira.

3) Excentricidade da Fronteira:

- É a razão entre o **Eixo Maior** (D) e o **Eixo Menor** (d) da fronteira.

$$E = \frac{D}{d}$$

- **Eixo Menor** é a maior distância entre dois pontos da fronteira B sobre uma perpendicular ao **Eixo Maior**.



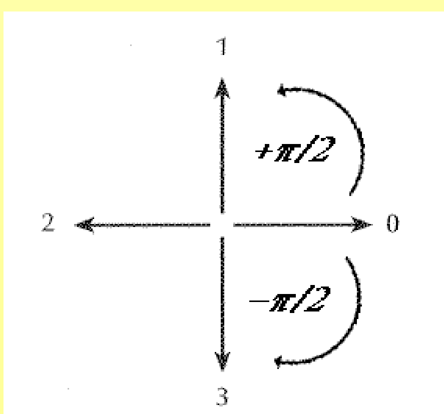
4) Número do Formato:

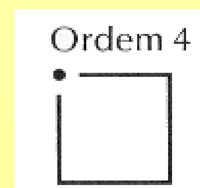
("Shape Numbers")

❑ Utilizando o Código da Cadeia de 4 direções, o Número do Formato da fronteira é definido como " o menor número formado pela primeira diferença (Código Derivativo) " através da Rotação do Derivativo.

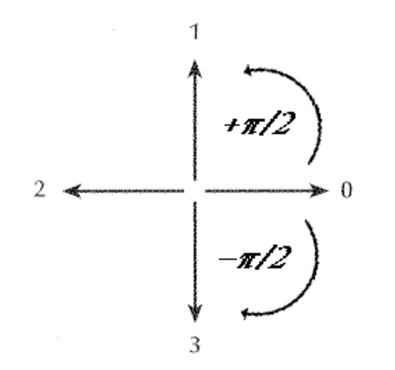
❑ A " Ordem n " do Número do Formato é definida como o número de dígitos para representá-lo.

- n é par para fronteiras fechadas

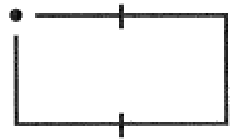




Código da Cadeia:	0 3 2 1
Derivativo:	3 3 3 3
Número do Formato:	3 3 3 3

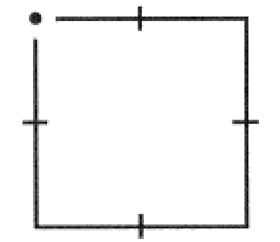


Ordem 6

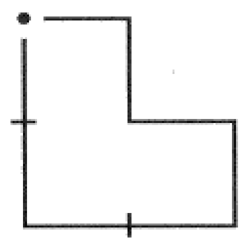


Código da Cadeia:	0 0 3 2 2 1
Derivativo:	3 0 3 3 0 3
Número do Formato:	0 3 3 0 3 3

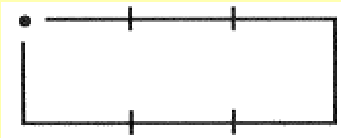
Ordem 8



Código da Cadeia:	0 0 3 3 2 2 1 1
Derivativo:	3 0 3 0 3 0 3 0
Número do Formato:	0 3 0 3 0 3 0 3



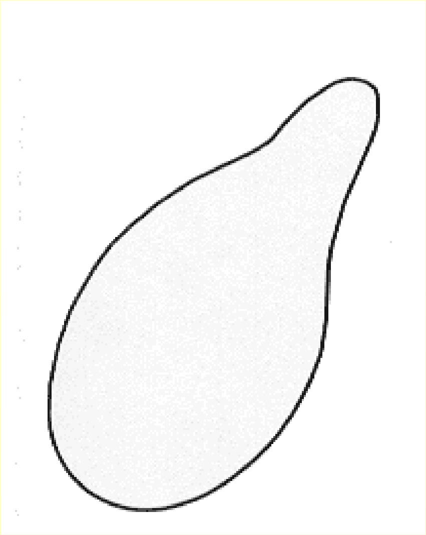
Código da Cadeia:	0 3 0 3 2 2 1 1
Derivativo:	3 3 1 3 3 0 3 0
Número do Formato:	0 3 0 3 3 1 3 3



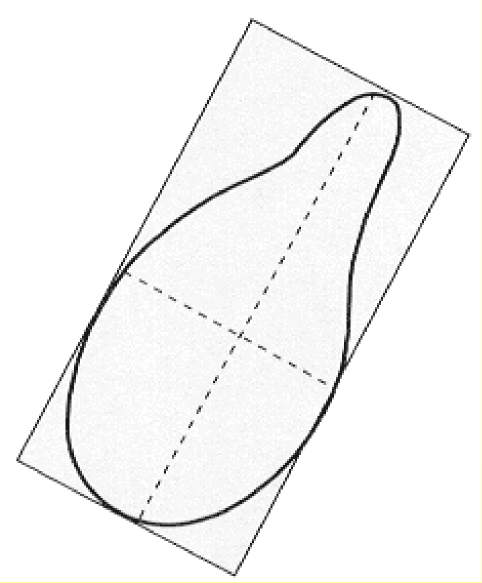
Código da Cadeia:	0 0 0 3 2 2 2 1
Derivativo:	3 0 0 3 3 0 0 3
Número do Formato:	0 0 3 3 0 0 3 3

Geração do Número do Formato:

1. Dada a Fronteira que se quer determinar seu Número do Formato, localizar o Eixo Maior e o Eixo Menor.



2. Definir o **Retângulo Básico** que envolve a fronteira, baseado nos dois eixos localizados.

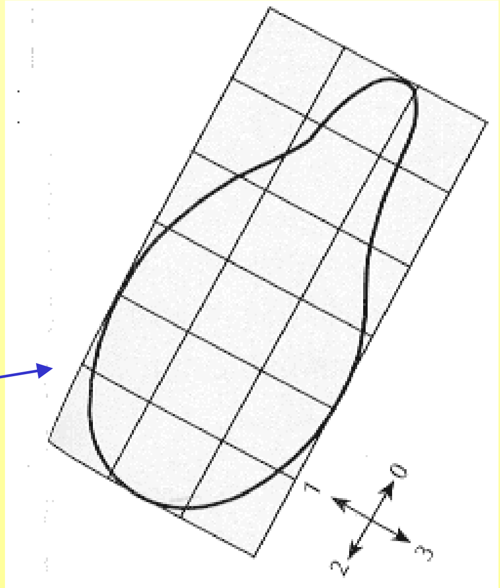


3. Aproximar o retângulo que envolve a fronteira através de um retângulo cuja Excentricidade (E) melhor aproxima a do Retângulo Básico.

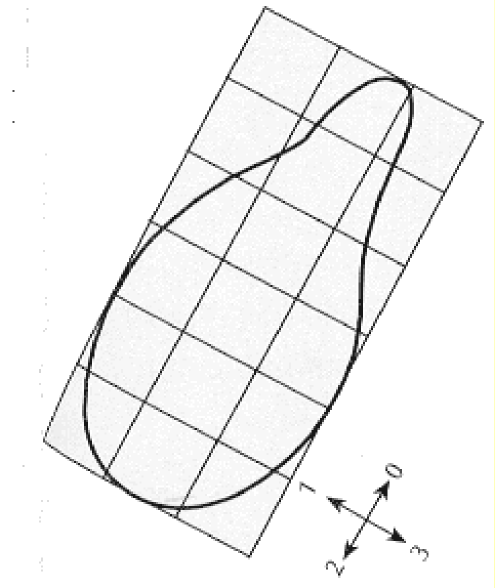
- Exemplo: Supondo-se que a excentricidade medida foi E=2.

O Retângulo 3 x 6 foi escolhido pois possui excentricidade E = 2. O polígono tem ordem 18, ou seja, o código da Cadeia terá 18 elementos.

1 x 8 →	E=8
2 x 7 →	E=3.5
3 x 6 →	E=2
4 x 5 →	E=1,25



4. Alinhar a direção do Código da Cadeia com a grade resultante e gerar os códigos e o Número do Formato equivalentes à fronteira.



Código da Cadeia:

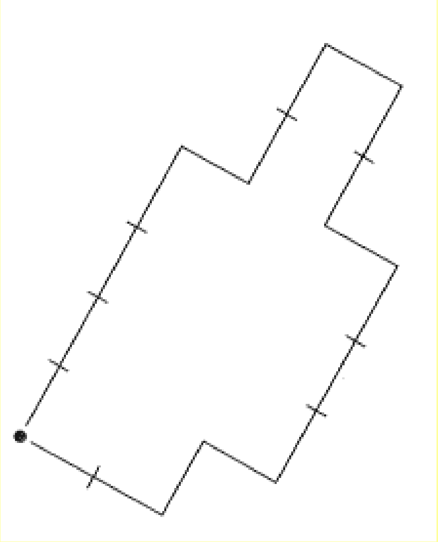
0 0 0 0 3 0 0 3 2 2 3 2 2 2 1 2 1 1

Derivativo:

3 0 0 0 3 1 0 3 3 0 1 3 0 0 3 1 3 0

Número do Formato:

0 0 0 3 1 0 3 3 0 1 3 0 0 3 1 3 0 3

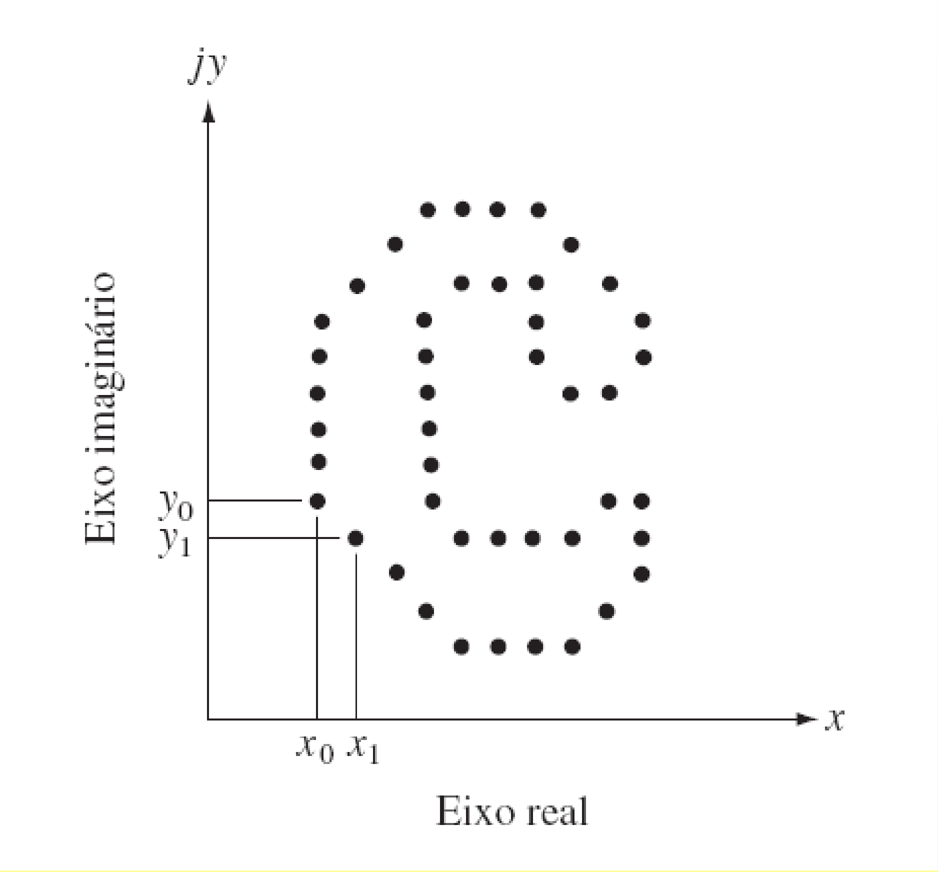


6) Descritores de Fourier:

• A sequência de coordenadas de uma fronteira percorrida no sentido horário pode ser representada utilizando números complexos, com as coordenadas **x** no eixo real e a coordenadas **y** no eixo imaginário:

• Reduz a representação 2-D para 1-D.

$$\boxed{s_i = x_i + jy_i}$$



6) Descritores de Fourier:

- Aplicando a transformada de Fourier na sequência determinada, temos os descritores de Fourier da fronteira;

- A transformada inversa desses coeficientes reconstrói a fronteira.

- Ao invés de usarmos todos os coeficientes na transformada inversa, pode-se obter uma fronteira aproximada (reduzir os detalhes da forma) utilizando-se apenas alguns coeficientes de Fourier (utiliza-se um filtro passa baixa).

- Os componentes de alta frequência são responsáveis pelos detalhes finais da imagem e os de baixa frequência determinam a forma global da imagem.

- Quanto menor a frequência de corte, mais detalhes são perdidos mas menos descritores são utilizados para descrever a fronteira.

Exemplo:

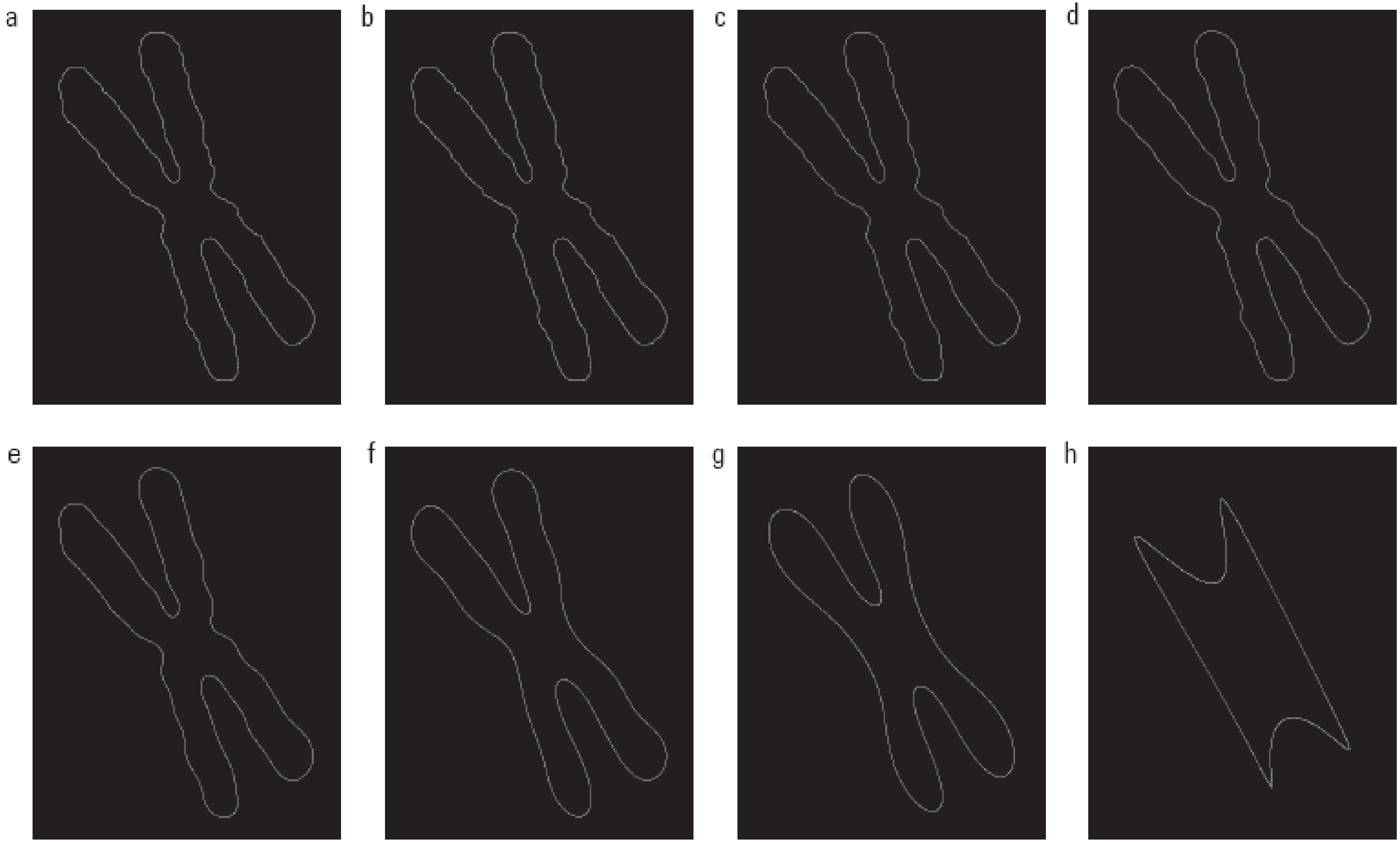


Figura 11.20 (a) Fronteira de um cromossomo humano (2.868 pontos). (b)–(h) Fronteiras reconstruídas usando 1.434, 286, 144, 72, 36, 18 e 8 descritores de Fourier, respectivamente. Estes números são aproximadamente 50%, 10%, 5%, 2,5%, 1,25%, 0,63% e 0,28% de 2.868, respectivamente.

Descritores de Regiões

1) Área de uma Região (A):

- A = Número de pixels contido dentro de sua fronteira.

2) Compacidade:

$$\boxed{C = \frac{P^2}{A}}$$

Onde P = Perímetro da fronteira e
A = Área da Região

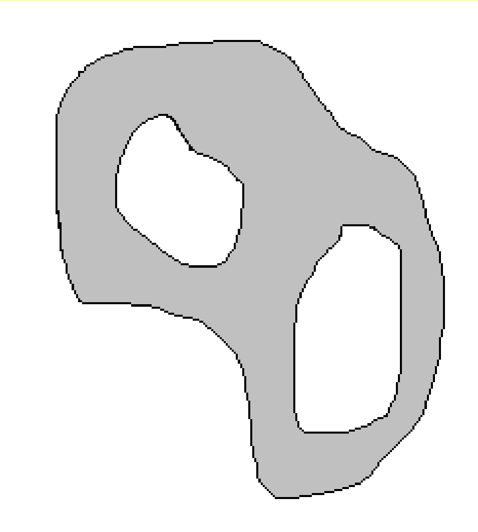
❑ A Compacidade é adimensional e insensível a mudanças de escala e orientação.

3) Descritores Topológicos:

- Úteis para descrições globais no plano de Imagem.

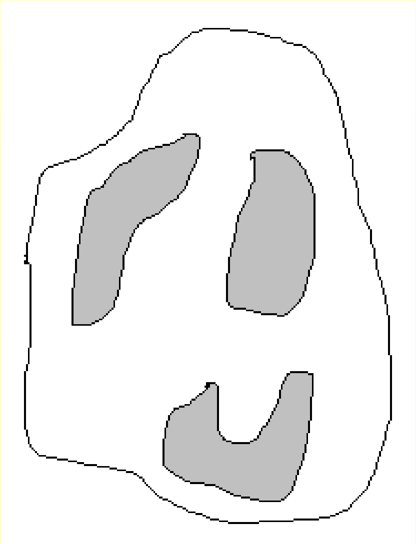
- Topologia é o estudo das propriedades de uma figura que não sejam afetadas por deformações, desde que não existam divisão ou fusão da figura.

Número de Furos:



Região com 2 furos

Número de Componentes conectados:



Região com 3 componentes conectados

Número de Euler:

$$\boxed{E = C - H}$$

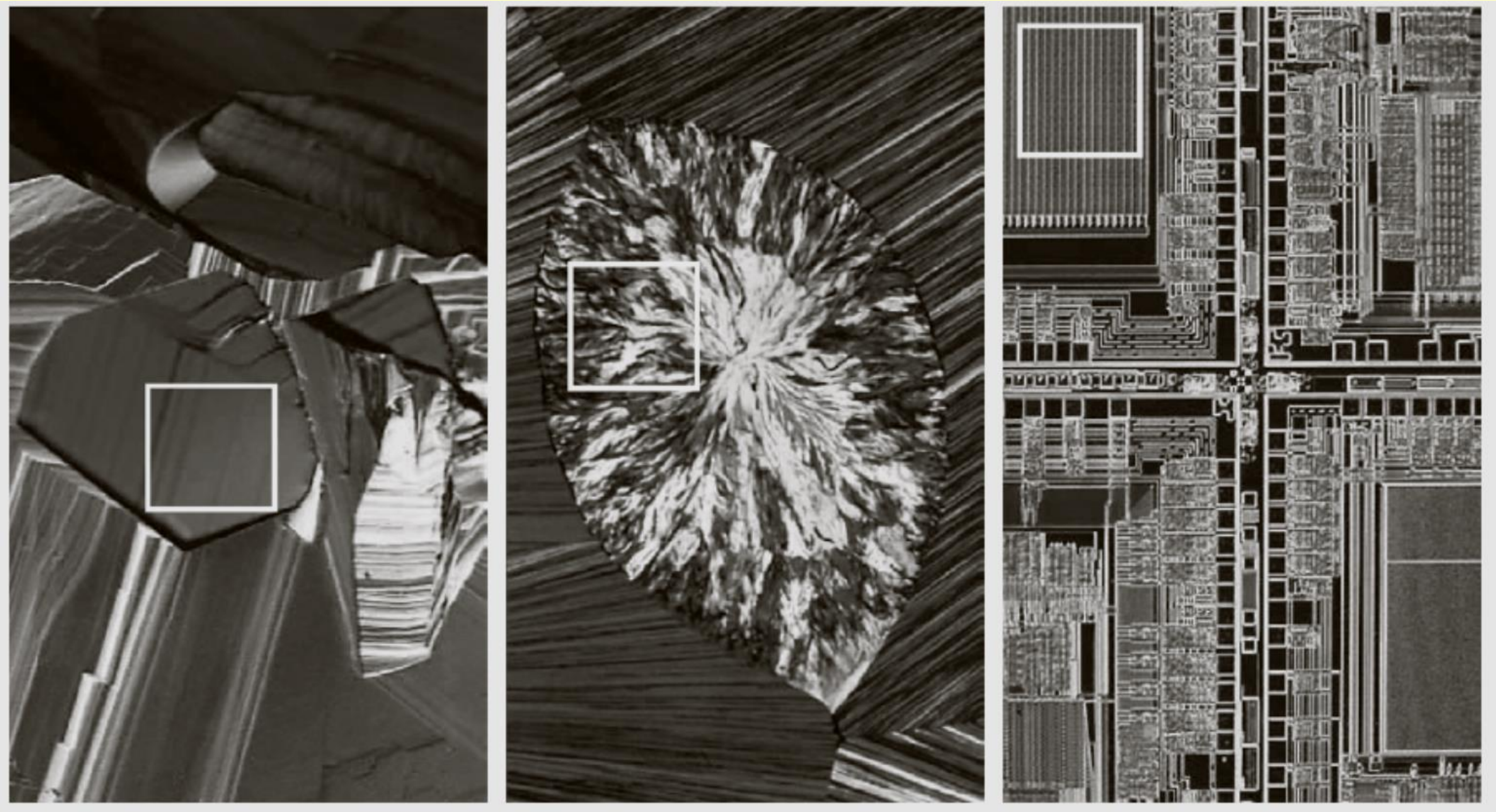
Onde: C = número de componentes Conectados
H = número de furos

E = 0

E = -1

4) Textura:

• Fornece medidas de propriedades da imagem como suavidade, rugosidade e regularidade.



Abordagem Estatística: Baseada em histograma

Moment	Expression	Measure of Texture
Mean	$m = \sum_{i=0}^{L-1} z_i p(z_i)$	A measure of average intensity.
Standard deviation	$\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\sigma^2}$	A measure of average contrast.
Smoothness	$R = 1 - 1/(1 + \sigma^2)$	Measures the relative smoothness of the intensity in a region. R is 0 for a region of constant intensity and approaches 1 for regions with large excursions in the values of its intensity levels. In practice, the variance, σ^2, used in this measure is normalized to the range [0, 1] by dividing it by $(L-1)^2$.
Third moment	$\mu_3 = \sum_{i=0}^{L-1} (z_i - m)^3 p(z_i)$	Measures the skewness of a histogram. This measure is 0 for symmetric histograms; positive by histograms skewed to the right about the mean; and negative for histograms skewed to the left. Values of this measure are brought into a range of values comparable to the other five measures by dividing μ_3 by $(L-1)^2$, the same divisor we used to normalize the variance.
Uniformity	$U = \sum_{i=0}^{L-1} p^2(z_i)$	Measures uniformity. This measure is maximum when all intensity values are equal (maximally uniform) and decreases from there.
Entropy	$e = -\sum_{i=0}^{L-1} p(z_i) \log_2 p(z_i)$	A measure of randomness.

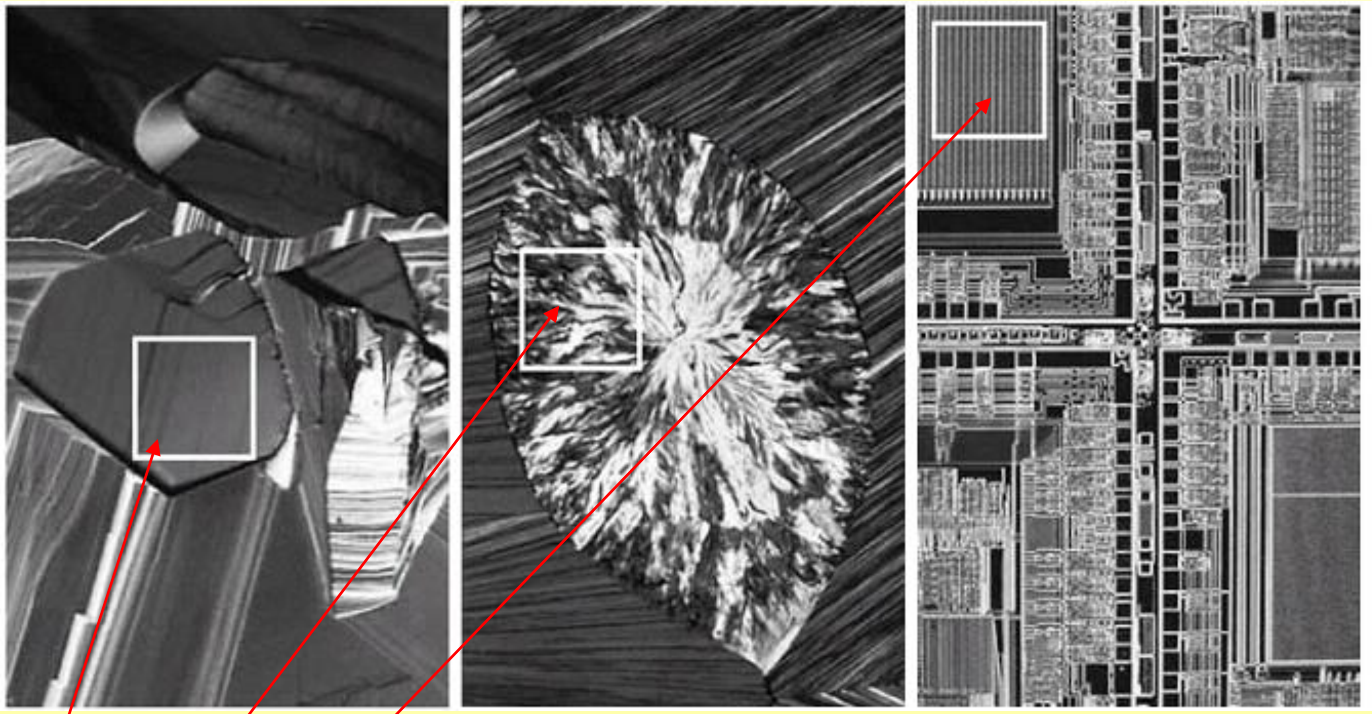
Alguns descritores de textura baseados no histograma de uma região.

Z_i → Intensidade dos pixels

P(z) →Histograma das intensidades

L → número dos possíveis níveis de cinza

Exemplo de valores de textura em diferentes imagens



Textura	Média	Desvio padrão	R(normalizado)	Terceiro momento	Uniformidade	Entropia
Suave	82,64	11,79	0,002	−0,105	0,026	5,434
Rugosa	143,56	74,63	0,079	−0,151	0,005	7,783
Regular	99,72	33,73	0,017	0,750	0,013	6,674

5) Momentos:

- O momento de ordem (p+q) de uma função contínua bi-dimensional é definido como:

$$\boxed{m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x,y)\,dx\,dy}$$

para p,q = 0,1,2,......

$$m_{00} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^0 y^0 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

m_{00}= área da Região

$$m_{01} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^0 y^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)\,dx\,dy$$

$$m_{10} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^1 y^0 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\,dx\,dy$$

m_{01} e m_{10} são as coordenadas do Centro de Massa da Região

Momentos Centrais Normalizados:

- São Momentos centralizados em regiões e podem ser expressos como:

$$\boxed{\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^p (y-\bar{y})^q f(x,y)\,dx\,dy}$$

Onde: $\bar{x} = \dfrac{m_{10}}{m_{00}}$ e $\bar{y} = \dfrac{m_{01}}{m_{00}}$ São as coordenadas do Centro de Massa, normalizadas pela área da região.

Para uma Imagem Digital:

$$\boxed{\mu_{pq} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^p (y-\bar{y})^q f(x,y)}$$

Momentos Centrais até a ordem 3:

$$\mu_{00} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^0 (y-\bar{y})^0 f(x,y) = \sum_x \sum_y f(x,y) = m_{00}$$

Ordem 1

$$\mu_{10} = \mu_{01} = 0$$

Ordem 2

$$\mu_{20} = m_{20} - \bar{x} m_{10}$$

$$\mu_{02} = m_{02} - \bar{y} m_{01}$$

$$\mu_{11} = m_{11} - \bar{y} m_{10}$$

Ordem 3

$$\mu_{12} = m_{12} - 2\bar{y} m_{11} - \bar{x} m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{10}$$

$$\mu_{21} = m_{21} - 2\bar{x} m_{11} - \bar{y} m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{01}$$

$$\mu_{30} = m_{30} - 3\bar{x} m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{10}$$

$$\mu_{03} = m_{03} - 3\bar{y} m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{01}$$

São Invariantes com relação à escala.

Momentos Invariantes:

- Conjunto de Momentos (Momentos Invariantes de Hu) que são relativamente invariantes à translação, rotação e escala.

Momentos Centrais Normalizados pela área:

$$\boxed{\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{\gamma}}}$$ Onde: $$\boxed{\gamma = \frac{p+q}{2} + 1}$$ Para p+q=2,3,4,....

- Hu calculou 7 desses momentos.

- A experiência tem mostrado que os 7 Momentos Invariantes de Hu, são suficientes para descrever uma região independente da rotação, translação e escala.

Momentos Invariantes de Hu:

$$\phi_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$$

$$\phi_2 = (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2$$

$$\phi_3 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2$$

$$\phi_4 = (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2$$

$$\phi_5 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12})\left[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2\right] + (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03})\left[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2\right]$$

$$\phi_6 = (\eta_{20} - \eta_{02})\left[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2\right] + 4\eta_{11}(\eta_{30} + \eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03})$$

$$\phi_7 = (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{30} + \eta_{12})\left[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2\right] + (3\eta_{12} - \eta_{30})(\eta_{21} + \eta_{03})\left[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2\right]$$

Exemplo:

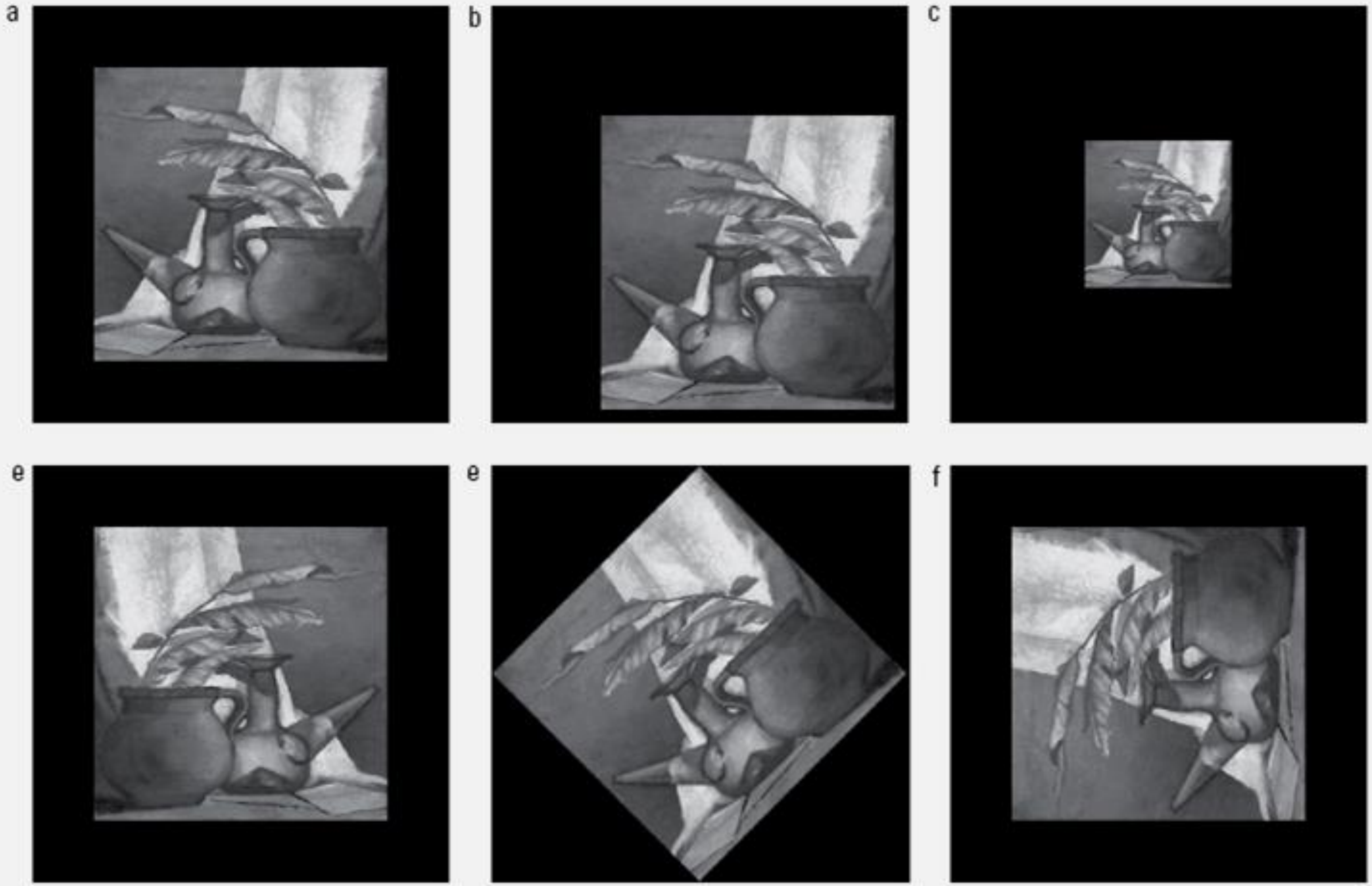
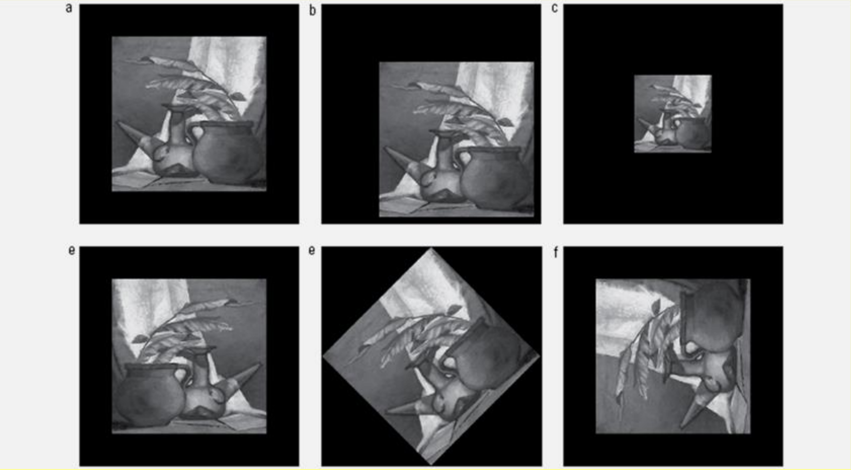


Figura 11.37 (a) Imagem original. (b)–(f) Imagens transladadas, redimensionadas por 0,5, espelhadas, rotacionadas em 45° e 90°, respectiva-mente.

Exemplo:

Momento invariante	Imagem original	Transladada	Redimensionada por 0,5	Espelhada	Rotacionada em 45°	Rotacionada em 90°
ϕ_1	2,8662	2,8662	2,8664	2,8662	2,8661	2,8662
ϕ_2	7,1265	7,1265	7,1257	7,1265	7,1266	7,1265
ϕ_3	10,4109	10,4109	10,4047	10,4109	10,4115	10,4109
ϕ_4	10,3742	10,3742	10,3719	10,3742	10,3742	10,3742
ϕ_5	21,3674	21,3674	21,3924	21,3674	21,3663	21,3674
ϕ_6	13,9417	13,9417	13,9383	13,9417	13,9417	13,9417
ϕ_7	–20,7809	–20,7809	–20,7724	20,7809	–20,7813	–20,7809



FIM