COMPUTAÇÃO GRÁFICA

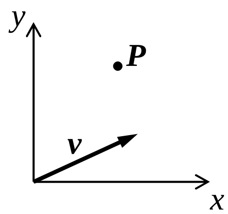
Unidade 4 – Transformações Geométricas (2D)

Ivan Nunes da Silva

Pontos e Vetores (2D)

- **<u>Ponto</u>**: Denota posição no plano.
- **<u>Vetor</u>**: Denota deslocamento, isto é, inclui a noção de direção/sentido e magnitude.
- Ambos são normalmente expressos por pares de coordenadas (em 2D), mas <u>não são a "mesma coisa"</u>.

$$P = (x_P, y_P)$$
$$\vec{v} = (x_v, y_v)$$



Transformações

- Transformação é uma função que mapeia pontos de um espaço Euclidiano em outros pontos do mesmo espaço.
- Se uma transformação é linear, então:
  - Se um conjunto de pontos está contido em uma reta, depois de transformados eles também estarão contidos sobre uma reta.
  - Se um ponto P guarda uma relação de distância com dois outros pontos Q e R, então essa relação de distância é mantida pela transformação.

3

Transformações Lineares em 2D

- Uma transformação linear:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

- Uma transformação linear afim (translações são permitidas):

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

4

Forma Matricial

- É a forma mais conveniente para uso em um computador. Assim, tem-se:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

- Então, uma transformação linear afim (t.l.a.) pode ser escrita $T(P) = P'$, onde:

$$P' = A \times P + D$$

5

Transformações Geométricas

- São aplicações de operações matemáticas que alteram as coordenadas dos pontos de objetos, causando alterações na orientação, tamanho e forma dos mesmos.
- Transformações Geométricas Básicas:
  - Translação.
  - Rotação.
  - Escala.
- Transformações Especiais:
  - Reflexão.
  - Simetria.

6

Transformações de Escala (2D) / Parte I

- A transformação de escala é obtida pela multiplicação de todas as coordenadas que definem o desenho por fatores de escala não nulos.
- Estes fatores, no caso bidimensional, são:
  - Fator de Escala Horizontal (S_x)→ multiplica as coordenadas referentes ao eixo x.
  - Fator de Escala Vertical (S_y)→ multiplica as coordenadas referentes ao eixo y.
- As coordenadas (x',y') obtidas pela transformação de escala das coordenadas (x,y) valem:

$$x' = S_x.x$$
$$y' = S_y.y$$

Em termos matriciais

$$P' = S \cdot P \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

7

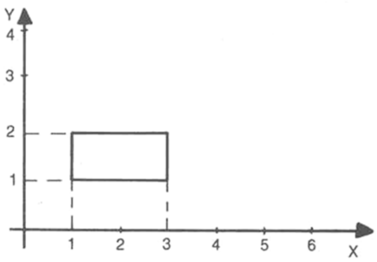
Transformações de Escala (2D) / Parte II

- Aspectos da transformação de escala:
  - Valores menores do que 1 para S_x e S_y <u>reduzem o tamanho do objeto</u>, enquanto que valores maiores do que 1 <u>aumentam o tamanho do objeto</u>.
  - Valores diferentes para S_x e S_y resultam em <u>escala diferencial</u>, enquanto que valores iguais mantêm as proporções relativas dos objetos.
  - Fatores de escala menores do que 1 aproximam o objeto da origem, enquanto que fatores de escala maiores do que 1 afastam o objeto da origem.

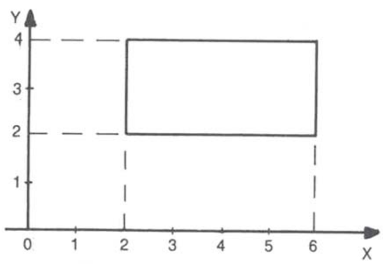
8

Transformações de Escala (2D) / Parte III

- Exemplos de Transformações de Escala:



Desenho Original

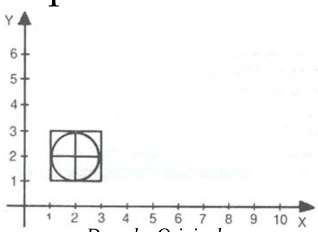


Desenho Transformado
$S_x = S_y = 2$

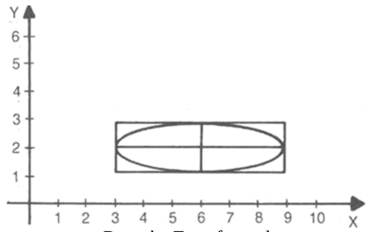
9

Transformações de Escala (2D) / Parte IV

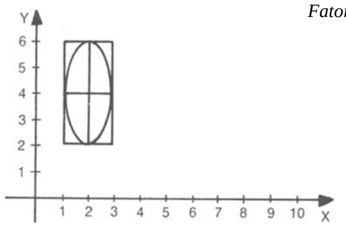
- Exemplos de Transformações de Escala:



Desenho Original



Desenho Transformado
Fatores de Escala $S_x = 3$ *e* $S_y = 1$



Desenho Transformado
Fatores de Escala $S_x = 1$ *e* $S_y = 2$

10

Transformações de Translação (2D) / Parte I

- Chama-se translação a movimentação de uma figura para uma outra posição no sistema de coordenadas, de modo que todos os pontos da imagem sejam deslocados de uma mesma distância em relação à sua posição anterior.
- A transformação de translação é obtida adicionando-se a todas as coordenadas que definem o desenho, as constantes de translação.
- Estas constantes, no caso bidimensional, são:
  - Fator (T_x) de deslocamento/translação paralelamente ao eixo x → adiciona aos pontos do desenho o fator T_x.
  - Fator (T_y) de deslocamento/translação paralelamente ao eixo y → adiciona aos pontos do desenho o fator T_y.

11

Transformações de Translação (2D) / Parte II

- As coordenadas (x', y') obtidas pela transformação de translação de pontos (x, y) de uma figura, transladado por uma distância T_x e T_y, valem:

  $x' = x + T_x$

  $y' = y + T_y$

- Em termos matriciais, tem-se a seguinte expressão para a transformação de translação:

$$P' = P + T \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

12

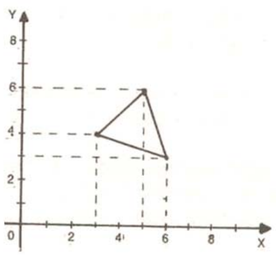
Transformações de Translação (2D) / Parte III

- Um segmento de reta é transladado adicionando-se o vetor de translação aos pontos extremos do segmento, e redesenhando o segmento na nova posição.
- Um polígono é transladado, somando-se o vetor de translação às coordenadas de cada vértice, e regenerando o polígono a partir do novo conjunto de vértices.
- Para o círculo e elipse, translada-se as coordenadas do centro e redesenha a figura na nova posição.

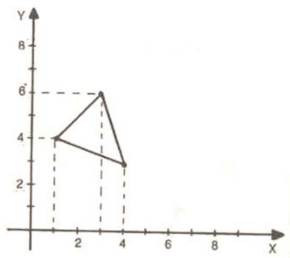
13

Transformações de Translação (2D) / Parte IV

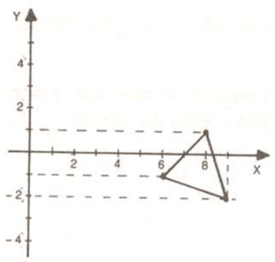
- Exemplos de Transformações de Translação:



Desenho Original



Desenho Transformado
Fator de Translação T_x = -2 e T_y = 0



Desenho Transformado
Fator de Translação T_x = 3 e T_y = -5

14

Transformações de Rotação (2D) / Parte I

- Chama-se **rotação** em torno da origem a movimentação de uma figura para uma outra posição, de modo que todos os pontos da imagem mantenham a mesma distância da origem que possuíam antes da transformação.
- Para gerar uma rotação, especifica-se um ângulo de rotação θ, e a posição (x,y) do **ponto de rotação** (ou **ponto pivô**), ao redor do qual o objeto será rotacionado.
- Valores positivos para o ângulo de rotação → sentido anti-horário.

15

Transformações de Rotação (2D) / Parte II

- A partir da interpretação da figura abaixo, a expressão da rotação de um ponto $P(x,y)$ em relação à origem, através de um ângulo θ, para um ponto $P'(x',y')$ é dada por:

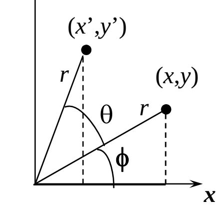
$$x' = r.\cos(\phi+\theta) = r.\cos(\phi).\cos(\theta) - r.\sin(\theta).\sin(\phi)$$
$$y' = r.\sin(\phi+\theta) = r.\cos(\phi).\sin(\theta) + r.\sin(\phi).\cos(\theta)$$

Mas:

$$x = r.\cos(\phi) \text{ e } y = r.\sin(\phi)$$

Então:

$$x' = x.\cos(\theta) - y.\sin(\theta)$$
$$y' = x.\sin(\theta) + y.\cos(\theta)$$



16

Transformações de Rotação (2D) / Parte III

- Assim, as coordenadas (x', y') obtidas pela transformação de rotação de pontos (x,y) de uma figura, rotacionados por um ângulo θ, são:

  $x' = x.\cos(\theta) - y.\mathrm{sen}(\theta)$

  $y' = x.\mathrm{sen}(\theta) + y.\cos(\theta)$

- Em termos matriciais, tem-se a seguinte expressão para a transformação de rotação:

$$P' = R \cdot P \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

17

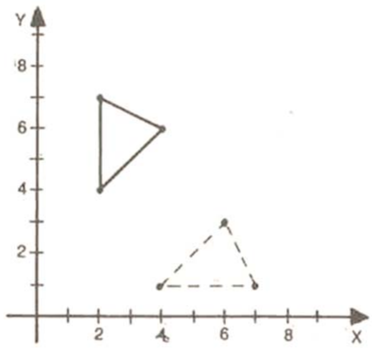
Transformações de Rotação (2D) / Parte III

- Para a obtenção de uma rotação em torno de um ponto qualquer que não a origem, deve-se fazer uma combinação de transformações de translação e de rotação em torno da origem.
- Para um segmento de reta a rotação é aplicada aos pontos extremos do segmento, e o segmento é então redesenhando na nova posição;
- Um polígono é rotacionado, aplicando-se a equação anterior às coordenadas de cada vértice, regenerando-se o polígono a partir do novo conjunto de vértices.
- Na circunferência é rotacionado o centro, e é redesenhada a figura na nova posição.

18

Transformações de Rotação (2D) / Parte IV

- Exemplo de Transformação de Rotação:



Desenho Transformado
Rotação com θ = 45°

19

Coordenadas Homogêneas (2D) / Parte I

- Para o cálculo de transformações pelo método matricial, dispõem-se a matriz de transformação 2x2 multiplicada pelas coordenadas do ponto dadas através de um vetor (matriz coluna).
- Esta sistemática é aplicada apenas para a transformação de **escala** e **rotação**, ou seja:

$$P' = S \cdot P \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P' = R \cdot P \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

20

Coordenadas Homogêneas (2D) / Parte II

- No entanto, conforme observado abaixo, torna-se impossível a utilização de uma única matriz 2x2 para as transformações de translação.

$$P' = P + T \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

- Para resolver este problema foi criado o método das **coordenadas homogêneas**.
- As **coordenadas homogêneas** permitem unificar o tratamento.
- Problema é levado para uma dimensão acima daquela de referência:
  - Problema em 2D ➔ 3 Dimensões em coordenadas homogêneas.
  - Problema em 3D ➔ 4 Dimensões em coordenadas homogêneas.

21

Coordenadas Homogêneas (2D) / Parte III

- Em coordenadas homogêneas, uma matriz de transformação para um problema em 2D possui dimensão 3x3.
- As coordenadas dos pontos são representadas em uma matriz coluna de três posições onde a terceira é colocada apenas para o efeito de consistência nos cálculos (seu valor não é considerado).
- Para o caso 2D interessa-se apenas as posições referentes às coordenadas x e y. Normalmente, este terceiro valor é feito igual a 1.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{Matriz 2D de} \\ \textit{Transformação} \\ \textit{Homogênea} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

22

Coordenadas Homogêneas (2D) / Parte IV

- **MATRIZ DE ESCALA (Coord. Homogêneas):**

$$x' = S_x . x$$
$$y' = S_y . y$$

$\xrightarrow{\text{Matriz de Escala}}$ *(Coordenadas Homogêneas)*

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Transformação que produz o mesmo efeito acima usando coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

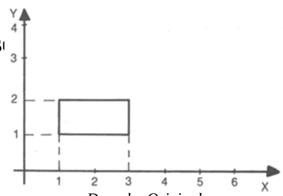
23

Coordenadas Homogêneas (2D) / Parte V

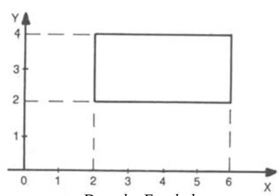
- **MATRIZ DE ESCALA**
  Coordenadas Homogêneas / Exemplo
  - O canto superior direito do retângulo ao lado tem coordenadas (3,2). Sua transformação pelos fatores de escala $S_x = 2$ e $S_y = 2$ pode s feita pelo seguinte cálculo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} (ignorado)$$



Desenho Original



Desenho Escalado
($S_x = 2$ e $S_y = 2$)

24

Coordenadas Homogêneas (2D) / Parte VI

- **MATRIZ DE TRANSLAÇÃO (Coord. Homogêneas):**

$$x' = T_x + x \qquad y' = T_y + y \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Translação
(Coordenadas Homogêneas)

- Transformação que produz o mesmo efeito acima usando coordenadas homogêneas:

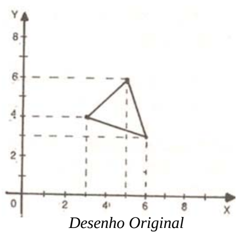
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas (2D) / Parte VII

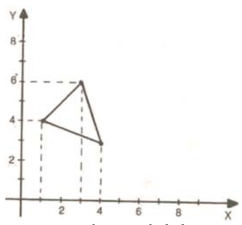
- **MATRIZ DE TRANSLAÇÃO**
  Coordenadas Homogêneas / Exemplo
  - O ponto (3,4) do vértice do triângulo ao lado pode ser transladado de $T_x = -2$ e $T_y = 0$ através da seguinte transformação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} (\textit{ignorado})$$



Desenho Original



Desenho Transladado
(T_x = -2 e T_y = 0)

Coordenadas Homogêneas (2D) / Parte VIII

- **MATRIZ DE ROTAÇÃO (Coord. Homogêneas):**

$x' = R_x \,.\, x$

$y' = R_y \,.\, y$

Matriz de Rotação
(Coordenadas Homogêneas)

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Transformação que produz o mesmo efeito acima usando coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

27

Transformações Compostas / Parte I

- Muitas aplicações gráficas envolvem sequências de transformações geométricas.
- **Matriz de transformação composta** é a matriz resultante do produto de matrizes homogêneas de uma sequência de transformações.
- **Concatenação ou composição** de matrizes é um produto de matrizes de transformação.
- Para representação de matriz coluna, a multiplicação de matrizes é feita da direita para a esquerda.

28

Transformações Compostas / Parte II

- **Composição de Transformação Similares:**
  - Duas translações sucessivas são aditivas.

    $P' = T(t_{x2}, t_{y2}) \,.\, \{T(t_{x1}, t_{y1}) \,.\, P\}$

    $= \{T(t_{x2}, t_{y2}) \,.\, T(t_{x1}, t_{y1})\} \,.\, P$

    $= T(t_{x1} + t_{x2}, t_{y1} + t_{y2}) \,.\, P$
  - Duas rotações sucessivas são aditivas.

    $P' = R(\theta_2) \,.\, \{R(\theta_1) \,.\, P\}$

    $= \{R(\theta_2) \,.\, R(\theta_1)\} \,.\, P$

    $= R(\theta_2 + \theta_1) \,.\, P$
  - Duas escalas sucessivas são multiplicativas.

    $P' = S(s_{x2}, s_{y2}) \,.\, S(s_{x1}, s_{y1}) \,.\, P$

    $= S(s_{x1}.s_{x2}, s_{y1}.s_{y2}) \,.\, P$

29

Transformações Compostas / Parte III

- **Rotação em Torno de Um Ponto Arbitrário:**
  - Esta transformação é obtida pela combinação de três outras, a saber:
    1. Translação do objeto de forma que o ponto de referência (x_r, y_r) coincida com a origem.
    2. Aplicação da transformação de rotação desejada com relação à origem.
    3. Translação do objeto de forma que o ponto de referência retorne à sua posição original.
  - A matriz de transformação composta é então definida por:

P' = R(x_r, y_r, θ) . P

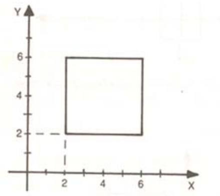
onde: **R(x_r, y_r, θ) = T(x_r, y_r) . R(θ) . T(-x_r, -y_r)**

$$R(x_r, y_r, \theta) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\textit{Translação para o} \\ \textit{ponto } x_r \textit{ e } y_r}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\textit{Rotação}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\textit{Translação para a} \\ \textit{origem}}}$$

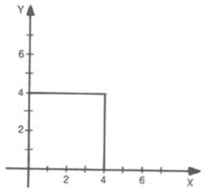
30

Transformações Compostas / Parte IV

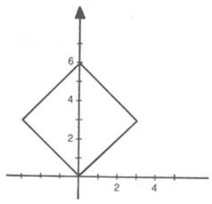
- **Rotação em Torno de Um Ponto Arbitrário (Exemplo):**
  - **Rotação de um quadrado em torno do seu canto inferior esquerdo.**



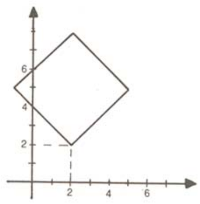
1. Desenho Original



2. Objeto Transladado Para Origem
(x_r = -2 e y_r = -2)



3. Objeto Rotacionado
($\theta = 45°$)



4. Objeto Transladado Para Referência
(x_r = 2 e y_r = 2)

31

Transformações Compostas / Parte V

- **Escala em Relação a Um Ponto Arbitrário:**
  - Esta transformação é obtida pela combinação de três outras, a saber:
    1. Translação do objeto de forma que o ponto de referência (x_r , y_r) coincida com a origem.
    2. Aplicação da transformação de escala desejada com relação à origem.
    3. Translação do objeto de forma que o ponto de referência retorne à sua posição original.
  - A matriz de transformação composta é então definida por:

P' = S(x_r , y_r , s_x , s_y) . P

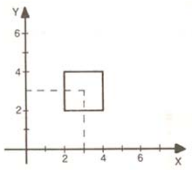
onde: **S(x_r , y_r , s_x , s_y) = T(x_r , y_r) . S(s_x , s_y) . T(-x_r , -y_r)**

$$S(x_r, y_r, s_x, s_y) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Translação para o ponto } x_r \text{ e } y_r} \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & x_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Escala}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Translação para a origem}}$$

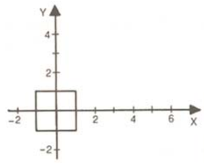
32

Transformações Compostas / Parte VI

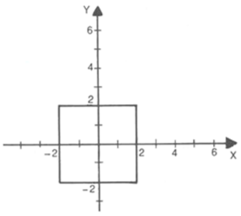
- **Escala em Relação a Um Ponto Arbitrário (Exemplo):**



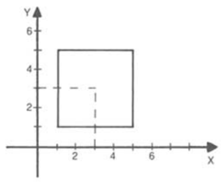
1. Desenho Original



2. Objeto Transladado Para Origem
(x_r = -3 e y_r = -3)



3. Objeto Escalado
(s_x = 2 e s_y = 2)



4. Objeto Transladado Para Referência
(x_r = 3 e y_r = 3)

33

Transformações Especiais / Parte I

- **Espelhamento (Reflexão):**
  - Efetuando-se uma transformação de escala com um dos fatores negativos provoca-se como resultado uma imagem simétrica a anterior.
  - Reflexão em relação ao eixo *x*:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

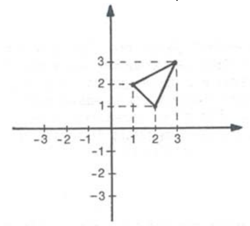
  - Reflexão em relação ao eixo *y*:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

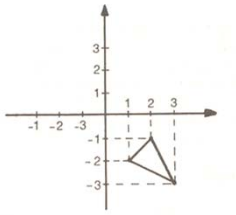
34

Transformações Especiais / Parte II

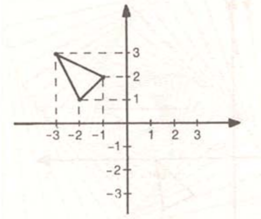
- **Espelhamento (Reflexão) / Exemplo:**



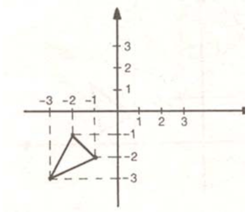
Desenho Original



Escala com $S_x = 1$ e $S_y = -1$
(espelhamento em relação ao eixo x)



Escala com $S_x = -1$ e $S_y = 1$
(espelhamento em relação ao eixo y)



Escala com $S_x = -1$ e $S_y = -1$
(espelhamento em relação ao eixo x e y)

35