

Filtros Digitais

Infinite Impulse Response - IIR

FILTROS DIGITAIS

❖ Vamos estudar projetos de filtros seletivos em frequência.

❖ Filtros IIR: Resposta ao impulso infinita.

➢ $h(n) \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots$

➢ Projeto baseado nos Filtros Contínuos.

➢ Três tipos de projeto: Aproximação das derivadas, Invariância ao impulso e Transformação bilinear.

❖ Filtros FIR: Resposta ao impulso finita.

➢ $h(n) \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots, M-1$.

➢ Filtros com fase linear.

➢ Projeto por janelas e por amostragem em frequência.

❖ Exemplos de projeto.

Introdução

❖ Filtros:

➢ São uma classe muito importante de sistemas lineares invariantes no tempo.

➢ São aplicados onde há necessidade de tratamento do sinal.

❖ Função:

➢ Deixar passar algumas componentes de frequência de um sinal e rejeitar outras.

❖ Definição:

➢ Um sistema que modifica as componentes de frequência de um sinal aplicado em sua entrada.

❖ Notação:

➢ Frequência analógica: Ω (rad/s) e F (Hz).

• limites positivos: $[0 - \infty]$

➢ Frequência digital: w ou f .

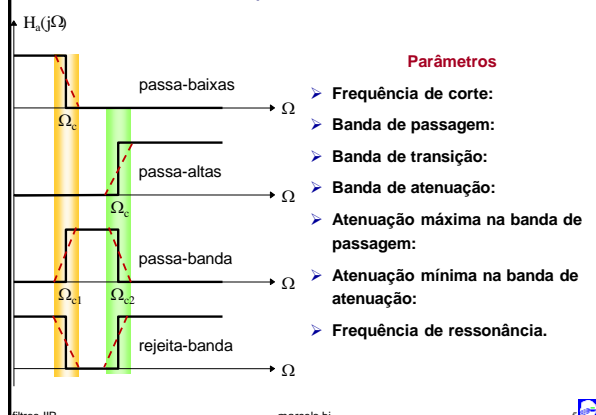
• limites positivos: $[0 - \pi]$ ou $[0 - 0.5]$

❖ Relação entre frequência analógica e digital:

➢ Em que: F_a é a frequência de amostragem

$$w = \frac{\Omega}{F_a} \text{ ou } f = \frac{F}{F_a}$$

Característica em frequência dos filtros seletivos ideais

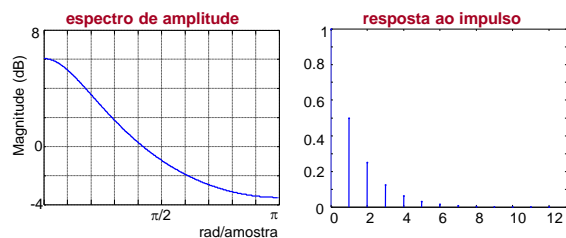


Exemplo de um filtro IIR

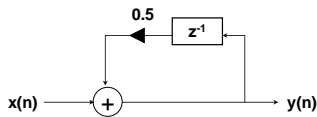
❖ equação de diferenças do um filtro:

$$y(n) = x(n) + 0.5y(n-1)$$

❖ transformada z: $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$



❖ diagrama de blocos



❖ equação de diferenças geral e função do sistema

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_Mx(n-M) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2) - \dots - a_Ny(n-N)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

filtros IIR

marcelo bi

7

Representação de um filtro analógico contínuo no tempo

1. Função do sistema: $H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k}$

2. Resposta ao impulso: $h_a(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H_a(s) e^{st} ds$

3. Equação linear diferencial: $\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$

filtros IIR

marcelo bi

8

❖ Em que: α_k e β_k são coeficientes constantes.

❖ Estas três representações, acima, conduzem a três métodos de projeto diferentes

- **Aproximação das derivadas** – (a partir da representação por equações diferenciais).
- **Invariância ao impulso** – (a partir da representação pela resposta ao impulso).
- **Transformação bilinear** – (a partir da resposta em frequência do sistema).

❖ Para projetar filtros IIR o importante é conhecer o projeto clássico dos filtros seletivos de frequência contínuos no tempo.

filtros IIR

marcelo bi

9

Projeto de filtros IIR

❖ Função de Transferência de um filtro IIR

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

❖ Considerações:

- O objetivo é encontrar os coeficientes a_k e b_k que satisfazem determinadas especificações de projeto.
- O projeto de um filtro IIR é feito, em geral, a partir de um protótipo analógico.
- O filtro digital é obtido a partir de uma função de transformação do domínio "s" para o "z".

filtros IIR

marcelo bi

10

Projeto de filtros IIR por aproximação das derivadas

❖ Objetivo: aproximar a equação diferencial do filtro por uma equação de diferenças.

primeira derivada: $\frac{d}{dt} y(t) \Big|_{t=nT} = \frac{1}{T} [y(n) - y(n-1)] \Leftrightarrow s = \frac{1}{T} [1 - z^{-1}]$

segunda derivada: $\frac{d^2}{dt^2} y(t) \Big|_{t=nT} = \frac{1}{T^2} [y(n) - 2y(n-1) + y(n-2)]$

$$\rightarrow s^2 = \left(\frac{1 - z^{-1}}{T} \right)^2$$

k-ésima derivada: $s^k = \left(\frac{1 - z^{-1}}{T} \right)^k$ T é o intervalo de amostragem

filtros IIR

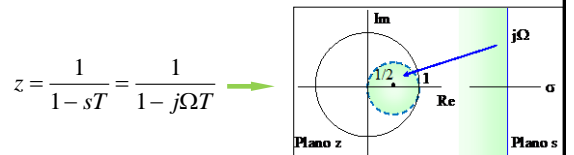
marcelo bi

11

❖ Transformação de $H_a(s)$ em $H(z)$

Faz-se a substituição: $s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \rightarrow H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$

❖ Mapeamento do plano s no plano z:



❖ **Polos:** dentro do círculo unitário \Rightarrow filtro estável e causal

❖ **Aplicação:** filtros passa-baixas e passa-banda com frequências de corte e de ressonância baixas.

filtros IIR

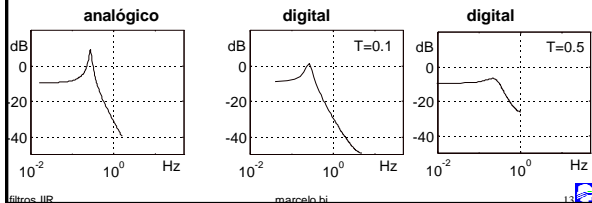
marcelo bi

12

Exemplo: Projeto de um filtro passa-baixas pelo método de aproximação das derivadas

$$H_a(s) = \frac{1}{(s+0.1)^2 + 3} \rightarrow H(z) = \frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T} + 0.1\right)^2 + 3}$$

$$H(z) = \frac{T^2/K}{1 - \frac{2(1+0.1T)}{K}z^{-1} + \frac{1}{K}z^{-2}} \text{ onde } K = 1 + 0.2T + 3.01T^2$$



Projeto de filtros IIR por invariância ao impulso

❖ $h(n)$ é uma cópia amostrada de $h_a(t)$: $\rightarrow h(n) = h_a(nT)$ $n = 0, 1, 2, \dots$

❖ No domínio da frequência: $\rightarrow H(F) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(F - kF_s)$

Em que: $F_s = 1/T$ é a frequência de amostragem.
 F_s deve ser grande para evitar *aliasing*.
 Por causa do *aliasing*, este projeto é inadequado para os filtros passa-altas.

❖ Expandindo o filtro analógico em frações parciais tem-se que:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - p_k} \Leftrightarrow h_a(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{p_k t}, t \geq 0$$

Em que: p_k são os polos de $H_a(s)$

❖ Amostrando $h_a(t)$ tem-se: $h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N c_k e^{p_k T n}$

❖ Calculando a transformada z de $h(n)$ tem-se: $H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$

❖ Para o projeto: os polos de $H(z)$ serão dados por:

$$d_k = e^{p_k T} : k = 1, 2, \dots, N$$

❖ Observações:

– O mapeamento guia a um filtro estável pois:

$$p_k = \sigma_k + j\Omega_k \text{ e } \sigma_k < 0 \Rightarrow |d_k| = e^{\sigma_k T} < 1 \Rightarrow \text{filtro estável}$$

– Não é necessário determinar $h_a(t)$

Roteiro de projeto

1. Determina-se o protótipo analógico $H_a(s)$ de ordem N.
2. Calcula-se os polos p_k e os coeficientes c_k da expansão em frações parciais do filtro.
3. Calcula-se os polos d_k do filtro digital, tal que:

$$d_k = e^{p_k T} : k = 1, 2, \dots, N$$

4. Determina-se o filtro digital tal que:

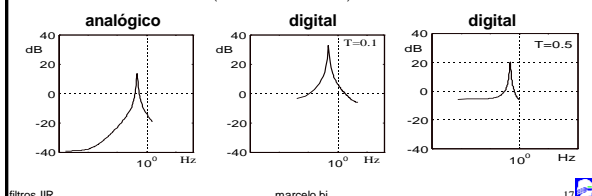
$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

Exemplo: Projeto de um filtro passa-banda pelo método de invariância ao impulso.

$$H_a(s) = \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2 + 9} \Rightarrow H_a(s) = \frac{1/2}{s+0.1-j3} + \frac{1/2}{s+0.1+j3}$$

❖ Os polos do filtro digital serão dados por: $e^{-0.1T} e^{\pm j3T}$

$$H(z) = \frac{1 - (e^{-0.1T} \cos 3T)z^{-1}}{1 - (2e^{-0.1T} \cos 3T)z^{-1} + e^{-0.2T}z^{-2}}$$



Projeto de filtros IIR por transformação bilinear

❖ Vantagem: elimina o problema de *aliasing*.

❖ Utilização: todos os três tipos de filtros.

❖ Método: é baseado na Regra de Integração do Trapézio.

❖ Problema: apresenta distorção no eixo das frequências.

❖ Desenvolvimento

➤ Seja um sistema de primeira ordem com função de transferência dada abaixo:

$$H_a(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b}{s+a} \rightarrow \frac{d}{dt} y(t) + ay(t) = bx(t)$$

❖ A integral da derivada de $y(t)$ é dada por: $y(t) = \int_{t_0}^t y'(t) dt + y(t_0)$

❖ Admitindo $t = nT$ e $t_0 = (n-1)T$. Então, pela regra do trapézio tem-se:

$$y(n) = \frac{T}{2} [y'(n) + y'(n-1)] + y(n-1)$$

❖ Substituindo a equação das derivadas para $t = nT$ na equação anterior tem-se que:

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)y(n) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)y(n-1) = \frac{bT}{2}[x(n) + x(n-1)]$$

❖ Calculando a transformada z: $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + a}$

❖ Equivalência dos filtros:

$$H_a(s) = \frac{b}{s+a} \quad \rightarrow \quad H(z) = \frac{b}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + a}$$

❖ O mapeamento de s no plano z será feito por: $s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$

Filtros IIR

Marcelo B. Ioaquim

18

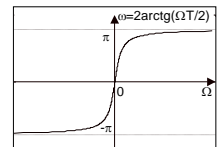
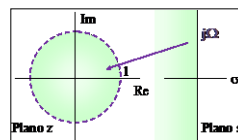
❖ Sejam: $z = re^{jw}$ e $s = \sigma + j\Omega$. Substituindo na equação anterior tem-se:

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos w} + j \frac{2r \sin w}{1 + r^2 + 2r \cos w} \right) \quad \text{se } r < 1 \Rightarrow \sigma < 0$$

Polos dentro do círculo unitário

❖ Seja $r = 1$ então: $\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{w}{2}\right)$

Mapeamento dentro do círculo unitário Distorção na frequência: "warping"



Filtros IIR

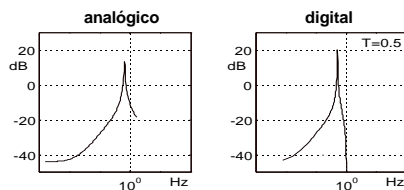
marcelo bi

20

Exemplo: Projeto de um filtro passa-banda utilizando o método da transformação bilinear.

$$H_a(s) = \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2 + 16} \Rightarrow \text{para } T=0.5 \Rightarrow 4 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

❖ Portanto o filtro digital será: $H(z) = \frac{0.128 + 0.006z^{-1} - 0.122z^{-2}}{1 + 0.0006z^{-1} + 0.975z^{-2}}$



Filtros IIR

marcelo bi

21

Famílias de filtros analógicos

❖ **Técnica de projeto de filtros IIR consiste:**

- Obtenção de um filtro analógico que obedece a determinadas condições de Projeto.
- Conversão de $H(s)$ em $H(z)$.

❖ **Família de filtros analógicos típicos:**

- Filtro de Butterworth,
- Filtro de Chebyshev: Tipo I e Tipo II,
- Filtro Elíptico (ou de Cauer),
- Filtro de Bessel (Fase Linear).
- Não utilizado => Para fase linear utiliza-se filtros FIR.

❖ Revisão no projeto clássico de filtros

Filtros IIR

marcelo bi

22

Filtro de Butterworth

❖ Apresenta uma resposta de amplitude maximamente plana na faixa de passagem. Isto é,

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(-s^2/\Omega_c^2\right)^N} = \frac{1}{1 + \left(\Omega/\Omega_c\right)^{2N}} \quad \text{em que: } \Omega_c \text{ é a frequência de corte (3dB). } N \text{ é a ordem do filtro.}$$

❖ Os pólos de $H(j\Omega)$ são dados por:

$$-\frac{s^2}{\Omega_c^2} = (-1)^{1/N} = e^{j(2k+1)\pi/N} \rightarrow \begin{cases} p_k = \Omega_c e^{j7/2} e^{j(2k+1)\pi/2N} \\ k = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

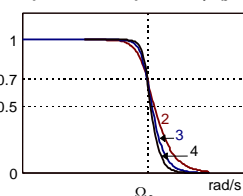
❖ Estes pólos estão localizados no semi-plano esquerdo do plano s e em pontos regularmente espaçados de um círculo de raio Ω_c .

Filtros IIR

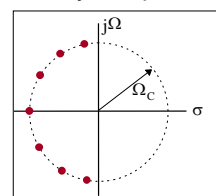
marcelo bi

23

Espectro de amplitudes $|H(j\Omega)|$



Localização dos pólos



❖ Na banda de transição: a taxa de atenuação é igual a 20N dB/década.

❖ Determinando N e Ω_c o filtro está definido.

❖ **A ordem do filtro pode ser determinada por:**

$$1 + \left(\Omega_s/\Omega_c\right)^{2N} = \delta^2$$

δ : atenuação mínima na banda de atenuação.
 Ω_s : frequência de início da banda de atenuação

Filtros IIR

marcelo bi

24

Exemplo: Sendo dados: $\Omega_c = 1000\pi$, $\Omega_s = 2000\pi$ e $\delta_{dB} = 40$ dB.
Determine a ordem do filtro de Butterworth e os seus polos.

➤ **Cálculo da ordem do filtro:**

sabe-se que: $1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = \delta^2$ e que: $\delta = 10^{\frac{40}{20}} = 100$

$$1 + \left(\frac{2000\pi}{1000\pi}\right)^{2N} = 100^2 \Rightarrow N = \frac{\log(10^4 - 1)}{2\log(2)} = 6.64 \Rightarrow N = 7$$

➤ **Cálculo dos polos:**

$$\begin{cases} p_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j(2k+1)\pi/2N} = 1000\pi e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{14}\pi)} \\ k = 0, 1, \dots, 6 \end{cases}$$

Filtros IIR

marcelo bi

25

Filtro de Chebyshev

❖ Apresenta maior taxa de atenuação na banda de transição do que as outras famílias de filtros.

❖ Tem-se dois tipos: I e II

➤ TIPO I: Apresenta comportamento oscilatório na banda de passagem (*equiripple*) e monotônico na banda de atenuação.

➤ TIPO II: Comportamento monotônico na banda de passagem e oscilatório na banda de atenuação.

❖ Resposta de amplitudes: Tipo I

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$$

ε : parâmetro relacionado com a ondulação (*ripple*).

$C_N(x)$: polinômio de Chebyshev.

O polinômio de Chebyshev de ordem N $\rightarrow C_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(x)) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1}(x)) & |x| > 1 \end{cases}$

Filtros IIR

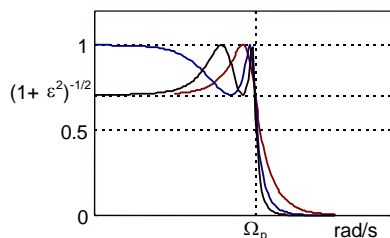
marcelo bi

26

❖ Fórmula de recursão para o cálculo de $C_N(x)$

$$\begin{cases} C_{N+1}(x) = 2xC_N(x) - C_{N-1}(x) & C_n(x): \text{Varia entre } \pm 1 \text{ para } |x| \leq 1 \\ \text{em que: } C_0(x) = 1 \text{ e } C_1(x) = x & \text{Aumenta monotonicamente para } |x| > 1. \end{cases}$$

❖ Resposta de amplitudes para o filtro de Chebyshev: tipo I



Filtros IIR

marcelo bi

27

❖ Localização dos polos

➤ Os polos do filtro de Chebyshev (tipo I) estão localizados em uma elipse cujos eixos maior (r_1) e menor (r_2) são dados por:

$$r_1 = \frac{\Omega_p}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \quad e \quad r_2 = \frac{\Omega_p}{2} \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right)$$

➤ O parâmetro β depende de ε , e é dado por:

$$\beta = \left[\sqrt{1 + \varepsilon^{-2}} + \frac{1}{\varepsilon} \right]^{1/N}$$

➤ Cálculo dos polos:

$$p_k = r_2 \cos \phi_k + j r_1 \sin \phi_k$$

$$\text{em que: } \phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{2N} \pi, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Filtros IIR

marcelo bi

28

❖ Para o projeto dos filtros de Chebyshev são requeridos 4 parâmetros:

- Frequências da banda de passagem e de atenuação: Ω_p e Ω_s ;
- Ondulação (*Ripple*) (δ);
- Atenuação mínima na banda de atenuação.
- O parâmetro ε é calculado através da ondulação (*ripple*):

$$\varepsilon^2 + 1 = \delta_1^2$$

➤ A ordem do filtro é determinada através de:

$$N = \frac{\log \left\{ \left[\sqrt{\delta_2^2 - 1} + \sqrt{\delta_2^2 + \varepsilon^2 + 1} \right] / 2\varepsilon \right\}}{\log \left[\frac{\Omega_s}{\Omega_p} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)^2 - 1} \right]}$$

❖ Com os valores de N e ε , os polos são determinados pelas equações anteriores.

Filtros IIR

marcelo bi

29

Exemplo: Sendo dados: $\Omega_p = 1000\pi$, $\Omega_s = 2000\pi$, $\delta_1 = 1$ dB e $\delta_2 = 40$ dB.
Determine a ordem do filtro de Chebyshev e os seus polos.

➤ Cálculo de ε :

$$\varepsilon^2 + 1 = (10^{\frac{1}{20}})^2 \Rightarrow \varepsilon = 0.5080$$

➤ Cálculo da ordem do filtro:

$$20 \log(\delta_2) = 40 \Rightarrow \delta_2 = 100 \quad N = \frac{\log 196.54}{\log(2 + \sqrt{3})} = 4$$

➤ Cálculo dos polos:

$$\begin{aligned} \beta &= 1.429 \\ r_1 &= 1.06 \Omega_p \Rightarrow \begin{cases} p_{0,2} = -0.1397 \Omega_p \pm j0.979 \Omega_p \\ p_{1,3} = -0.337 \Omega_p \pm j0.4056 \Omega_p \end{cases} \\ r_2 &= 0.365 \Omega_p \end{aligned}$$

Filtros IIR

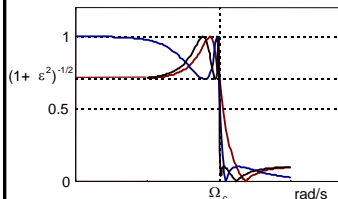
Marcelo B. Joaquim

30

Filtro Elíptico

- ❖ Apresenta comportamento oscilatório (*equiripple*) tanto na banda de passagem quanto na banda de atenuação.
- ❖ A resposta em amplitudes é caracterizada pela equação:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$$



ϵ : Relacionado com a ondulação (ripple).
 $U_N(x)$: Função Elíptica Jacobiana
 (Tabelada em Zverev).
Vantagens: Fornece ordem menor do que os outros filtros e também banda de transição menor.

filtros IIR

marcelo bi

31

exemplo de projeto de filtros digitais

- ❖ Projeto de um filtro digital passa-baixas com as seguintes especificações:

- Família de Butterworth,
- Banda de passagem: 0 - 1 kHz e atenuação máxima 1 dB.
- Banda de atenuação: A partir de 3 kHz e atenuação mínima de 10 dB.
- Frequência de amostragem: 10 kHz

- ❖ Projeto por equação de diferenças.

- ❖ Projeto por transformação bilinear com *pre-warping*.

$$\begin{cases} \Omega_p = 2\pi 1000 & e & R_p = 1dB \\ \Omega_s = 2\pi 3000 & e & R_s = 10dB \\ f_a = 10kHz \end{cases}$$

filtros IIR

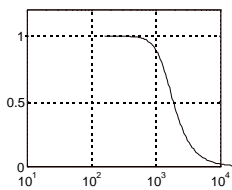
marcelo bi

32

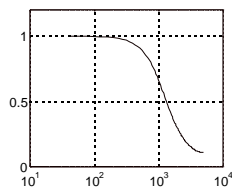
exemplo: projeto por equação de diferenças

$$H(z) = \frac{0.2568}{1 - 1.0742z^{-1} + 0.3309z^{-2}}$$

analógico



digital



filtros IIR

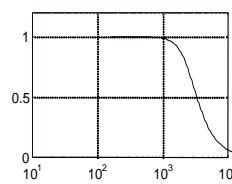
marcelo bi

33

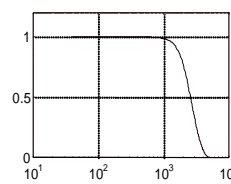
exemplo – projeto por transformação bilinear

$$H(z) = \frac{0.22918 + 0.45837 z^{-1} + 0.22918 z^{-2}}{1 - 0.26751 z^{-1} + 0.18426 z^{-2}}$$

analógico



digital



filtros IIR

marcelo bi

34