TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Introdução

- A transformada discreta de Fourier é a transformada de Fourier de uma sequência de comprimento (ou tamanho) finito.
  - Ela corresponde a amostras igualmente espaçadas em frequência da T. F. de uma sequência.
    - a frequência também é discreta: w_k
  - abreviação: DFT ou TDF
- No cálculo da TDF substitui-se a função complexa e^{jwn} por:

$$e^{jw_k n} = e^{j(2\pi/N)nk} \quad ou\ seja\ w_k = \frac{2\pi}{N}k$$

  - Primeiramente vamos estudar a série discreta de Fourier (SDF), depois passaremos à transformada discreta de Fourier (TDF).

Série discreta de Fourier

- Seja uma sequência periódica $x_p(n) = x_p(n+kN)$.
  - Como $x_p(n)$ é periódica: ela não tem transformada z.
  - Pode-se representar $x_p(n)$ pela série discreta de Fourier.
- A série consiste da soma ponderada de N valores de uma função exponencial complexa com frequências múltiplas da fundamental $2\pi/N$.
  - Considere a seguinte exponencial complexa:

$$e_k(n) = e^{j(2\pi/N)nk} \quad e \quad w_k = (2\pi/N)k$$

  - $e_k(n)$ é periódica em k, com período N, isto é, $e_0(n) = e_N(n)$:
    - $e_k(n) = e_{N+k}(n)$ ..., k = 0,1, ..., N-1.
  - $e_k(n)$ formam uma base ortogonal para sequências periódicas.

- A série discreta Fourier de x(n) é definida como uma combinação linear das exponenciais complexas tais que:

$$\boxed{x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(2\pi/N)nk}}$$

cálculo dos coeficientes $X_p(k)$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)nr} = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(2\pi/N)(k-r)n}$$

  - trocando a ordem das somatórias tem-se:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)nr} = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n}\right\}$$

$$como: \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(2\pi/N)nr} = \begin{cases} 1, & r = mN \\ 0, & c.c. \end{cases} \quad então$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(2\pi/N)(k-r)n} = 1, \quad r = k \qquad ou \qquad 0, \quad r \neq k$$

  - utilizando esta relação na equação anterior tem-se:

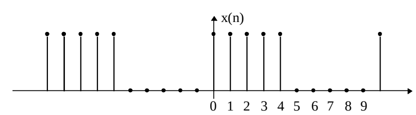
$$\boxed{X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)nk}}$$

  - Note que:
    - $X_p(k)$ é periódica com período N.
    - Pode ser interpretada como uma sequência finita de tamanho N.

  - Representação:

$$x_p(n) \xleftrightarrow{SDF} X_p(k) \qquad e^{-j\left(2\pi/N\right)} = W_N$$

exemplo 1: calcular a SDF da sequência abaixo.



$$X(k) = \sum_{n=0}^{4} W_{10}^{nk} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{2\pi}{10}nk} = \frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{10}k}} = e^{-j\frac{2\pi}{5}k}\,\frac{sen(\pi k/2)}{sen(\pi k/10)}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots, 9$$

- **OBSERVAÇÃO:**
  - **Para o primeiro período desta sequência a transformada z é:**

$$X(z) = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}}$$

  - **No círculo unitário, isto é, fazendo z = e^{jw} tem-se:**

$$X\left(e^{jw}\right) = e^{-j2w}\,\frac{sen5w/2}{senw/2}$$

  - **Admitindo: $w_k = 2\pi k/N$, com N = 10, tem-se:**

$$X(w_k) = e^{-j\frac{2\pi}{5}k}\,\frac{sen(\pi k/2)}{sen(\pi k/10)}$$

convolução periódica

- **Sejam duas sequências periódicas, $x_{p1}(n)$ e $x_{p2}(n)$, com período N.**
  - **Pergunta-se: qual é a sequência, $x_{p3}(n)$, cuja DFS é: $X_{p3}(k)$ = Xp1(k)Xp2(k)?**

$$\left.\begin{aligned} X_{p1}(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} x_{p1}(m) W_N^{mk} \\ X_{p2}(k) &= \sum_{r=0}^{N-1} x_{p2}(r) W_N^{rk} \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_{p1}(k) X_{p2}(k) = \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1} x_{p1}(m) x_{p2}(r) W_N^{(m+r)k}}$$

substituindo e trocando as ordens das somatórias tem-se que: →

$$x_{p3}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_{p1}(k) X_{p2}(k) W_N^{-nk}$$

$$x_{p3}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_{p1}(m) \sum_{r=0}^{N-1} x_{p2}(r) \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m-r)}\right]}$$

$$W_N^{-k(n-m-r)} = 1, \quad n - m = r$$

- **o termo entre colchetes vale: 1, para r = n – m, e vale zero caso contrário. Assim:**

$$x_{p3}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_{p1}(m) x_{p2}(n-m)$$

- **a equação acima nos mostra que $x_{p3}(n)$ é obtida de um modo muito similar à convolução entre sequências não periódicas.**

- **Como $x_1(n)$ e $x_2(n)$ são periódicas e a somatória é realizada em um período, $x_3(n)$ também é periódica, com período N.**
- **Este tipo de operação é chamada de convolução periódica.**
- **Com uma simples mudança no índice da somatória pode-se mostrar que:**

$$x_{p3}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_{p2}(m) x_{p1}(n-m)$$

Transformada discreta de Fourier

- **Considere uma sequência de tamanho finito x(n), n = 0, 1, ..., N - 1. O par da transformadas discreta de Fourier é definido como:**

$$\begin{cases} X(k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & \longleftarrow \text{equação de análise} \\ x(n) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & \longleftarrow \text{equação de síntese} \end{cases}$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

- **OBSERVAÇÕES:**
  - **x(n): amostras tomadas a cada nT segundos do sinal contínuo.**
  - **X(k): são calculadas em frequências múltiplas de $\Omega_0 = 2\pi/NT$.**
  - **X(k) é periódica => O primeiro período é o que interessa.**
    - **Cuidado na interpretação dos resultados**

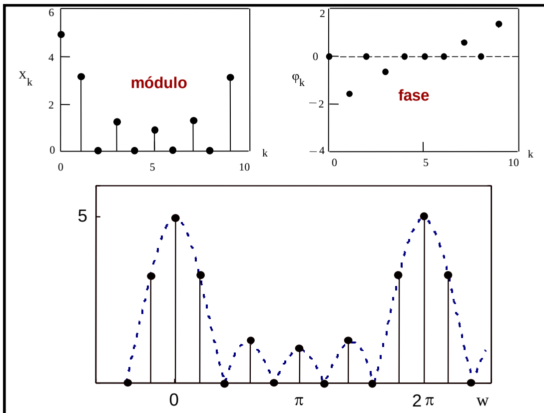
exemplo 2: Determine a TDF de x(n) = {1,1,1,1,1, 0, 0, 0, 0, 0}

N = 10 => $X(k) = \sum_{n=0}^{9} x(n) W_{10}^{nk} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{2\pi nk}{10}}$

como: $\sum_{n=0}^{N-1} ar^n = \frac{a\left(1 - r^N\right)}{1 - r}$ **então:**

$$X(k) = \frac{1 - e^{-j2\pi k/2}}{1 - e^{-j2\pi k/10}} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}}{e^{-j\frac{\pi}{10}k}} \cdot \frac{e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k}}{e^{j\frac{\pi}{10}k} - e^{-j\frac{\pi}{10}k}}$$

$$X(k) = e^{-j\frac{2\pi k}{5}}\,\frac{sen(k\pi/2)}{sen(k\pi/10)} \qquad k = 0, 1..., 9$$

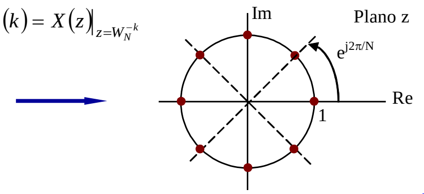


Interpretação da TDF através da transformada z

- A TDF de uma sequência finita x(n) pode ser interpretada como sendo as amostras regularmente espaçadas da transformada z no círculo unitário.

Como: $X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$, admitindo: $z = e^{j(2\pi/N)k} = W_N^{-k}$

Então: $X(k) = X(z)\big|_{z=W_N^{-k}}$



Propriedades da TDF

1. **Linearidade**

$$x_3(n) = a x_1(n) + b x_2(n) \Leftrightarrow X_3(k) = a X_1(k) + b X_2(k)$$

- A duração de $x_3(n)$ é a máxima entre x_1 e x_2.
- A sequência de tamanho menor deve ser preenchida com zeros

2. **Deslocamento circular de uma sequência**

- Seja x(n) uma sequência finita tal que: $x_1(n) = x((n+M))$.

$$X_1(k) = W^{-kM} X(k)$$

3. **Teorema de Parseval**

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

4. Propriedades de simetria:

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(-k)$$
$$x_e(n) = \tfrac{1}{2}\left[x(n) + x^*(-n)\right] \leftrightarrow \mathrm{Re}\{X(k)\}$$
$$x_o(n) = \tfrac{1}{2}\left[x(n) - x^*(-n)\right] \leftrightarrow j\,\mathrm{Im}\{X(k)\}$$

$$x(n): real \rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{X(k)\} \rightarrow par \\ \mathrm{Im}\{X(k)\} \rightarrow impar \\ |X(k)| \rightarrow par \\ Fase\{X(k)\} \rightarrow impar \end{cases}$$

$$X(k) = X^*(N-k), \qquad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

5. Convolução circular e linear

- Na TDF os sinais, no tempo e na frequência são admitidos periódicos.
- Considere duas sequências $x_1(n)$ e $x_2(n)$ de comprimento N.
- Qual é a sequência $x_3(n)$ tal que: $X_3(k) = X_1(k)X_2(k)$?
- Define-se a convolução circular entre duas sequências de tamanho N:

$$x_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m)) = \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))$$

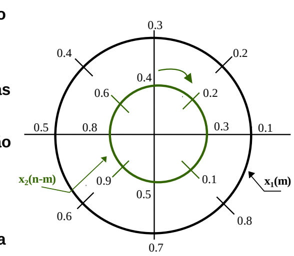
- A quantidade entre parênteses (n - m) é calculada via módulo N.

- **exemplo de convolução circular**

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1(n)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$x_2(n)$	0.3	0.1	0.5	0.9	0.8	0.6	0.4	0.2

cálculo da convolução circular

- No círculo interno coloca-se, no sentido horário, $x_2(n-m)$.
- No círculo externo coloca-se, no sentido anti-horário, $x_1(m)$.
- As amostras correspondentes ao mesmo raio são multiplicadas e os produtos somados.
- Os outros valores da convolução são obtidos rotacionando o círculo interno no sentido horário.
- O processo é repetido até que a primeira amostra do círculo interno chegue a sua posição original.



exemplo: convolução circular

sejam: $x_1(n) = x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n < L-1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$

- Estabelecendo N=L, as TDFs das sequências acima serão:

$$X_1(k) = X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N, & k = 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

- Multiplicando $X_1(k)$ por $X_2(k)$ tem-se:

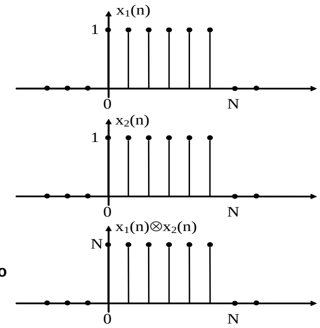
$$Z(k) = X_1(k) X_2(k) = \begin{cases} N^2, & k = 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

- A TDF inversa da equação acima resultará na convolução circular entre $x_1(n)$ e $x_2(n)$, isto é:

$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) W_N^{nk} = \frac{1}{N} Z(0) = N, \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

figura ao lado:

- Observe que o resultado acima não é a convolução linear entre $x_1(n)$ e $x_2(n)$.
- Para a obtenção da convolução linear é necessário acrescentar zeros às sequências, como será visto em seguida.



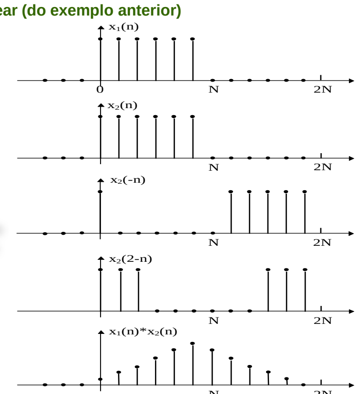
- A convolução linear entre duas sequências de tamanho N e M, é uma sequência de tamanho N+M-1.

obtenção da convolução linear

- Primeiramente se forma duas novas sequências de tamanho N+M-1.
- Acrescenta-se zeros nas duas sequências para formar duas novas sequências de tamanho N+M-1.
- Em seguida faz-se a convolução circular a partir destas duas novas sequências.
- No exemplo anterior, acrescenta-se N-1 zeros nas duas sequências, de modo que ambas fiquem com comprimento 2N-1 e em seguida faz-se a convolução circular.
- Como resultado tem-se a convolução linear entre as duas sequências originais.

exemplo: convolução linear (do exemplo anterior)

constrói-se duas sequências novas de tamanho 2N e faz-se a convolução.

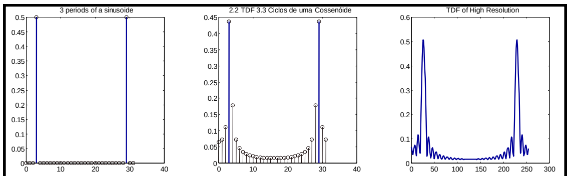


Convolução linear utilizando DFT (FFT)

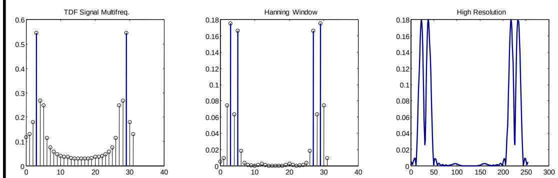
- Considere duas sequências de tamanho N_1 e N_2.
- Forma-se duas sequências novas de tamanho $N_1 + N_2 - 1$ acrescentando zeros.
- Calcula-se a DFT das duas sequências $X_1(k)$ e X2 (k).
- Calcula-se o produto $X_3(k) = X_1(k)$.X2 (k).
- Calcula-se a DFT inversa $x_3(n)$.
- $X_3(n)$ é a convolução linear entre as duas sequências originais.
- Como a DFT é calculada através de algoritmos de FFT, o procedimento acima é rápido.

Exemplos de cálculo da TDF no computador

- Para um sinal senoidal
- Para um sinal composto de dois tons senoidais



exemplos de cálculo da TDF no Computador



exemplo de análise espectral

- **Considere um sinal composto por dois tons senoidais com frequências de 100 e 300 Hz, amostrados à taxa de 1000Hz, e que se tem disponível 100ms deste sinal.**

fs = 1000; t = 0:1/fs:0.1;

x = sin(2*pi*t*100) + sin(2*pi*t*300);

N = length(x);

- **A FFT necessita de dados de tamanho igual a uma potência de 2. Se o tamanho do vetor não for uma potência de 2, então deverão ser acrescentados zeros ao sinal, como é o caso deste exemplo. A função fft faz isso automaticamente fornecendo-se um segundo argumento Nfft como é mostrado abaixo:**

Nfft = 2^(nextpow2(N));

Fftx = fft(x,Nfft);

Mx = abs(Fftx); % Módulo da DFT

- **OBS: A fft é simétrica em torno de 1+Nfft/2 e Fftx(1) é o componente DC.**

- **Escalamento para a fft não ser função do tamanho do sinal**

Mx = Mx/N;

- **Criação do vetor frequência f para saída gráfica**

f = (0:Nfft-1)/Nfft; f = f*fs;

plot (f,Mx);

title('3. - Análise Espectral');

xlabel('frequência [Hz]'); ylabel('Escalar');

análise espectral