UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ⋆ ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação

⋆ 44a. Turma de Engenharia Elétrica ⋆

PROF. B. J. MASS – *bjmass@sc.usp.br* – tel. (16) 33 73 93 61 – sala 3005 – campus 1

www.sel.eesc.usp.br:8085/Disciplinas → Graduação → sel326/Controle de Sistemas Lineares (B. J. Mass) → sel0326bjm → tdm_bjm_tredici

Lista de Exercícios No. 5

Versão 1.0

Vers. 1.0 distr. em 12/set/13 - Qui.
Sols. aceitas até 10:10h de 19/set/13 - Qui.
(Um atraso de Δh horas implica um fator de correção $e^{-\Delta h/6{,}5}$)

Realim. de Estados e Alocação de Polos - Recursos Numéricos

Um dos objetivos de SEL 0326 é estimular o interesse pela abordagem computacional e o impacto da mesma na solução de diferentes problemas de controle. De nosso particular interesse são os comandos do MATLAB que permitem explorar com facilidade realimentação de estado e alocação de polos.

Exercícios

1. Quais os três comandos MATLAB para realimentação de estado introduzidos no início do semestre letivo?
   Resposta: `acker`, `place`, `lqr`.

2. Diga um pouco sobre cada um desses comandos (`acker`, `place`, `lqr`).
   Resposta: A fórmula ou procedimento de Ackermann deu origem a `acker`. `Place` significa, em inglês, alocar ou colocar algo em algum local. LQR significa, em inglês, "regulador linear quadrático".

3. Qual a relação de cada um destes três comandos (`acker, place, lqr`) com realimentação de estado?
   Resposta: Todos os três calculam a matriz K da realimentação de estado $\mathbf{u} = \mathbf{v} - K\mathbf{x}$.

4. Além do sistema de malha aberta, o que mais devemos declarar ao MATLAB, para utilizarmos cada um dos comandos `acker`, `place` e `lqr`?
   Resposta: Os polos de malha fechada desejados ou as matrizes de ponderação, Q e R.

5. Considerando um sistema definido por $A_{n\times n}, B_{n\times l}, C_{m\times n}, D_{m\times l}$, qual a diferença entre as matrizes K da realimentação de estado $\mathbf{u} = \mathbf{r} - K\mathbf{x}$, e K da realimentação de saída $\mathbf{u} = \mathbf{r} - K\mathbf{y}$?
   Resposta: A primeira é $l \times n$ enquanto a segunda é $l \times m$.

6. Quais as diferenças entre `acker`, `place` e `lqr`?
   Resposta: O MATLAB recomenda `place` em lugar de `acker`, que só se aplica a sistemas com uma entrada. Com `lqr` o usuário tem que aceitar os polos de malha fechada escolhidos pelo algoritmo.

7. Qual a sintaxe de `acker`?
   Resposta: `k = acker(a, b, p)` onde `p` é o vetor dos polos de malha fechada desejados. O sistema só pode ter uma entrada; o par de matrizes (`a, b`) tem que satisfazer uma restrição adicional chamada controlabilidade.

8. Qual a sintaxe de `place`?
Resposta: `k = place(a, b, p)`, onde `p` é o vetor dos polos de malha fechada desejados.

9. Qual a sintaxe para `lqr`?
Resposta: `k = lqr(a,b,q,r)`

10. Como se chamam as matrizes Q e R exigidas por `lqr`?
Resposta: Respectivamente matriz de ponderação dos estados; matriz de ponderação das entradas.

11. Quais as dimensões de Q e de R?
Resposta: $n \times n$ e $l \times l$, respectivamente.

12. O que acontece ao aplicarmos `lqr`?
Resposta: O algoritmo encontra uma matriz K de realimentação de estado tal que os polos de malha fechada sejam satisfatórios, i.e., o sistema de malha fechada seja estável, e ao mesmo tempo a integral
$$J = \int_{t=0}^{t=\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt \tag{1}$$
seja minimizada.

13. Verifique que em qualquer caso; quaisquer que sejam as dimensões de $\mathbf{x}$ e de $\mathbf{u}$, os produtos $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ e $\mathbf{u}^T R \mathbf{u}$ são escalares, i.e., de dimensão 1×1.

14. Como se chama a quantidade J da expressão (1)?
Resposta: Há vários nomes aceitáveis: custo quadrático; função de custo quadrático; índice de desempenho quadrático, etc.

15. Quando ou por que empregar `lqr`?
Resposta: Porque a realimentação resultante é ótima ou otimizada num certo sentido. Também é uma vantagem não precisarmos nos preocupar com a escolha dos polos de malha fechada; os mesmos serão escolhidos automaticamente pelo algoritmo. Implementar realimentação de estado calculada via `lqr` é aplicar uma concepção conhecida como *controle ótimo*.

16. Ao aplicar `lqr` não precisamos escolher os polos de malha fechada; precisamos escolher as matrizes Q e R?
Resposta: Sim.

17. Como escolher Q e R?
Resposta: Uma escolha preferencial consiste em tomar Q e R simétricas. Na falta de informações adicionais podemos tomar $Q = I_n$ e $R = I_l$. Uma escolha mais criteriosa exigiria um conhecimento maior do algoritmo LQR, o que ainda não foi discutido em sala de aula.

18. Para um sistema linear com
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
determine a matriz K da realimentação de estado que minimiza
$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{x} + u^2) dt$$
Resposta: Claramente $Q = I_2$, $R = I_1$ e `lqr` resulta em $K = [1 \quad 1]$.
Exercício baseado no Probl. B.12.19, p.779 de K. Ogata - *Engenharia de Controle Moderno, 4a. ed.*, Pearson, S. Paulo, 2003.

19. No exercício anterior os polos de malha aberta são $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1$; e os de malha fechada?
Resposta: $\mu_1 = -1,\ \mu_2 = -1$.

20. Dado um sistema linear com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20,601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

escreva um segmento de MATLAB para determinar a matriz K da realimentação de estado que minimiza o índice de desempenho quadrático com

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = 1$$

Exercício baseado no Probl. B.12.21, pp.779-780 de K. Ogata - *Engenharia de Controle Moderno, 4a. ed.*, Pearson, S. Paulo, 2003.
Resposta: Por exemplo

```
≫ a = [0 1 0 0; 20.601 0 0 0; 0 0 0 1; -0.4905 0 0 0]; b = [0; -1; 0; 0.5];
≫ q = [100 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1]; r = 1;
≫ k = lqr(a, b, q, r);
```

21. Para o sistema do exercício anterior, escreva um trecho de MATLAB para determinar os autovalores de malha fechada.
Resposta: Uma possibilidade seria

```
≫ a = [0 1 0 0; 20.601 0 0 0; 0 0 0 1; -0.4905 0 0 0]; b = [0; -1; 0; 0.5];
≫ q = [100 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1]; r = 1;
≫ k = lqr(a, b, q, r);   amf = a - k*b;
≫ pmf = eig(amf);   %% o vetor dos polos de malha fechada
```

22. Um determinado alimentador empregado na indústria de papel pode ser modelado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0,8 & 0,02 \\ -0,02 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0,05 & 1 \\ 0,001 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

Para este modelo

a - Aponte o que está errado ou inconsistente no enunciado acima.
Pista: Verifique as dimensões da matriz C.

b - Conserte o enunciado e escreva um trecho de MATLAB para calcular uma matriz K de realimentação de estado que garanta estabilidade e polos de malha fechada reais; cada um com módulo superior a cinco.
Pista1: Verifique como mudar C e ainda obter $\mathbf{y}$ em função de x_1 e x_2.
Pista2: Neste caso não é possível empregar `lqr`, portanto ....

Exercício baseado no Probl. PP11.5, p.529 de R. C. Dorf & R. H. Bishop - *Sistemas de Controle Modernos, 8a. ed.*, LTC, Rio, 2001.

23. Um modelo linearizado de uma aeronave é dado por $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1 u_1 + B_2 u_2$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -0,0366 & 0,027 & 0,0188 & -0,4555 \\ 0,0482 & -1,0100 & 0,0024 & -4,0208 \\ 0,1002 & 0,3681 & -0,7070 & 1,4200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,4422 \\ 3,5446 \\ -5,5200 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0,1761 \\ -7,5922 \\ 4,4900 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escreva um trecho de MATLAB para calcular uma matriz K de realimentação de estado que resulte em

$$P(s) = s^4 + 15s^3 + 101s^2 + 431s + 812$$

como polinômio característico de malha fechada.
Sugestão: Empregue o comando `roots` para declarar os polos de malha fechada, ...
Exercício baseado no Probl. PM11.5, p.530 de R. C. Dorf & R. H. Bishop - *Sistemas de Controle Modernos, 8a. ed.*, LTC, Rio, 2001.

Final da LE-05

Arquivo original:	"tdm13le05.tex"
Arquivo p/ impressão: ...	"tdm13le05.pdf"
Versão:	1.0
No. de páginas:	04
Concluído em:	12/09/2013 - 08:32h