Departamento de Engenharia Elétrica - EESC-USP

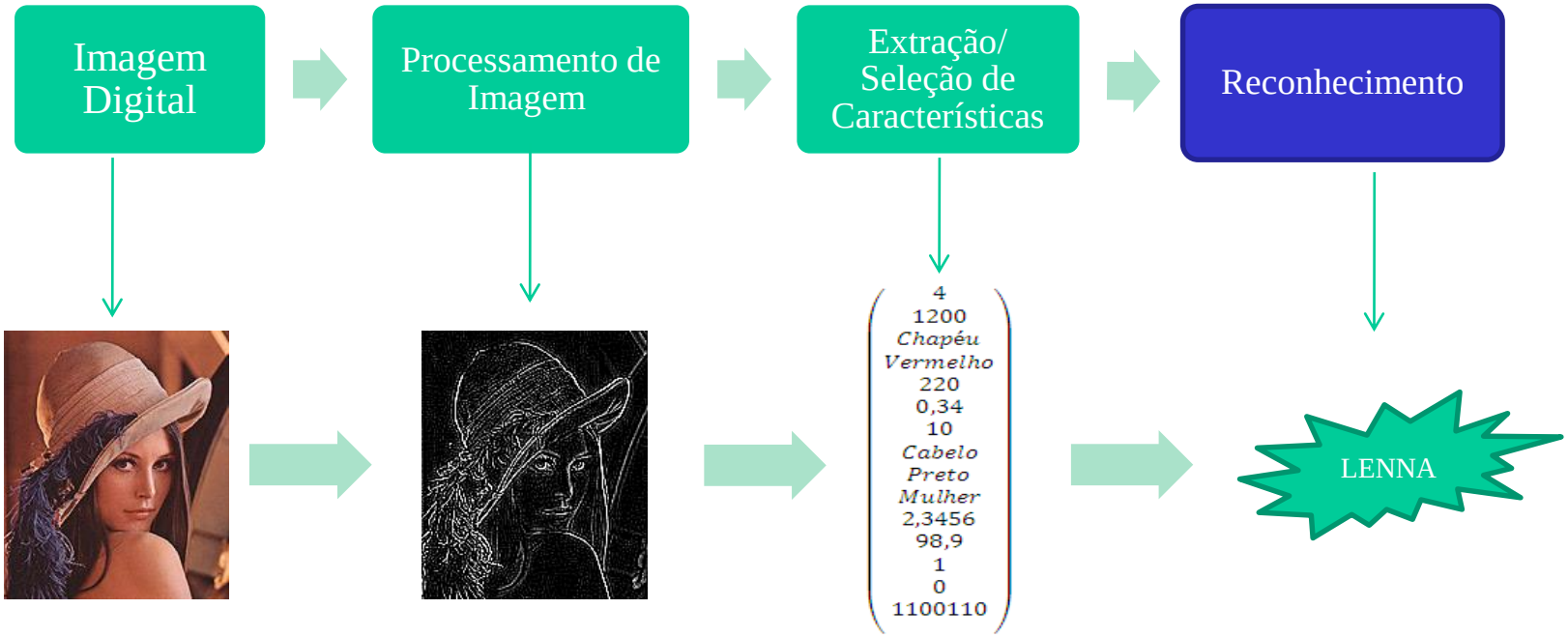
SEL-0339 Introdução à Visão Computacional

Aula 6
Reconhecimento de Objetos

Prof. Dr. Marcelo Andrade da Costa Vieira
Prof. Dr. Adilson Gonzaga

mvieira@sc.usp.br

Visão Computacional

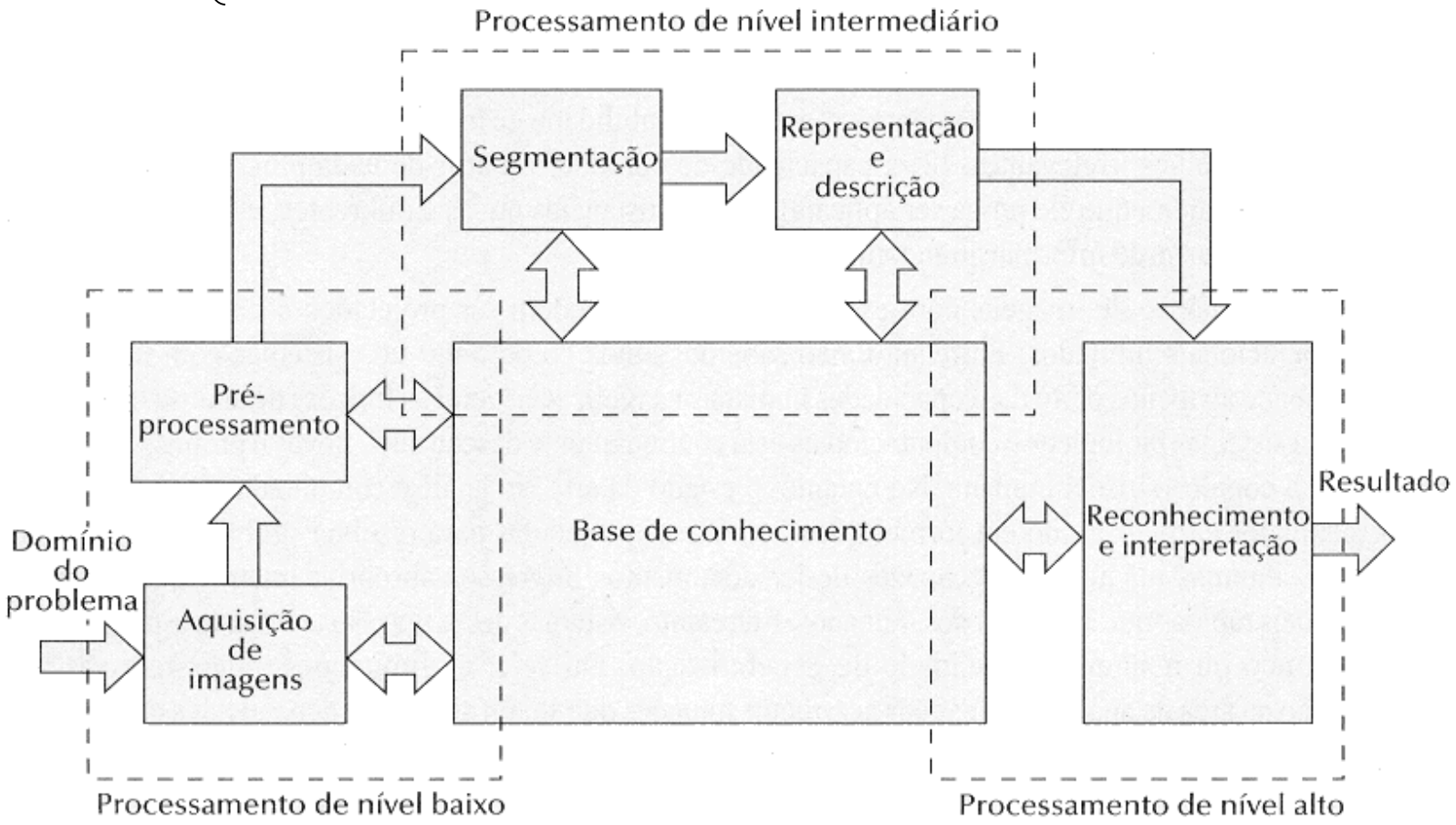


Elementos de Visão Computacional:

Visão Computacional

- Processamento de Baixo Nível
- Processamento de Nível Intermediário

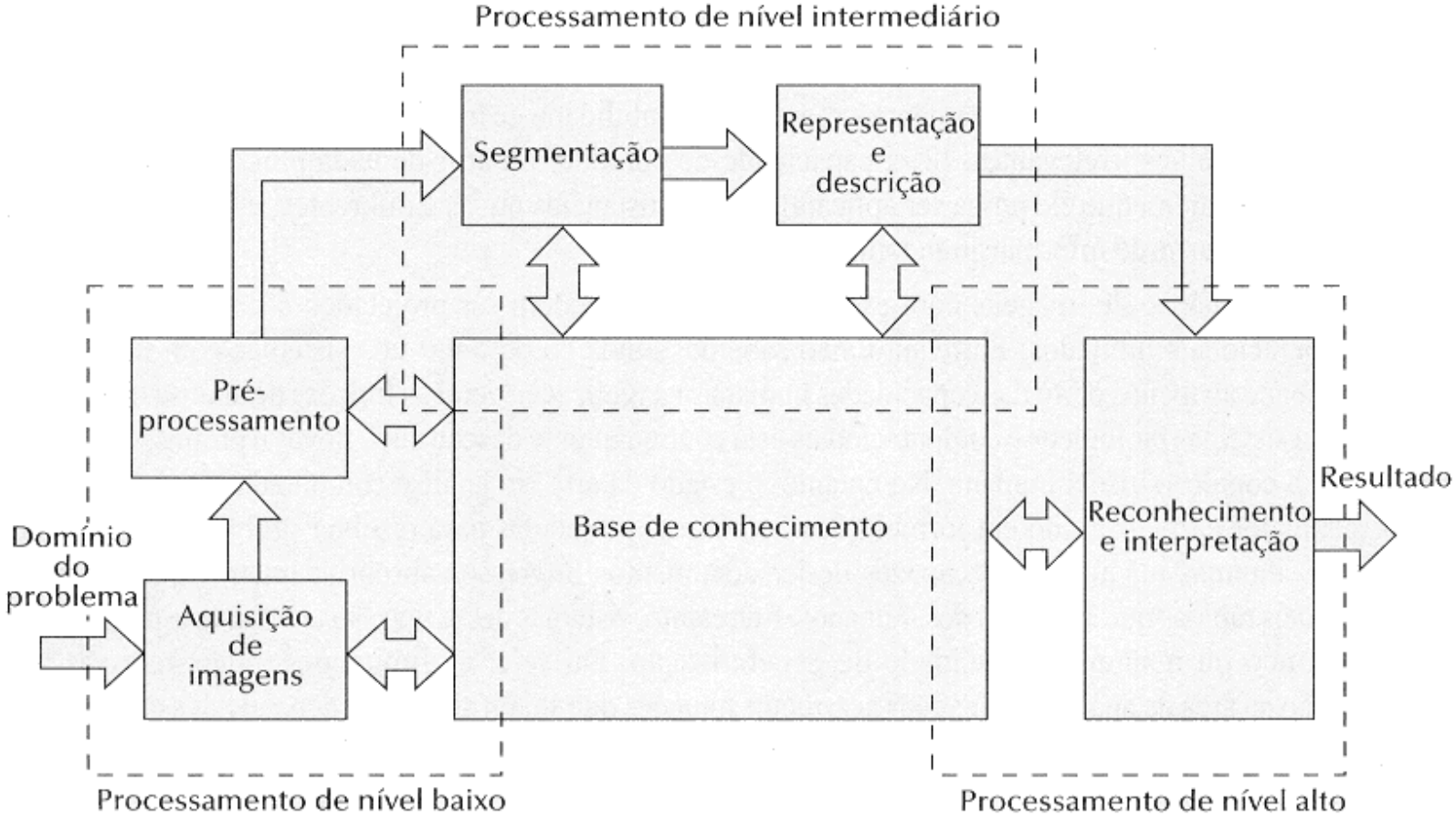
  (Processamento de Imagens)
- Processamento de Alto Nível



Elementos de Visão Computacional:

As linhas tracejadas mostram que a divisão não é rígida:

Ex: **Limiarização** - pode ser usada tanto para melhoramento da Imagem (pré-processamento) como para segmentação.



Padrões:

- Um Padrão é uma descrição quantitativa ou estrutural de um objeto ou de uma região de interesse em uma imagem.

- Um Padrão é formado por uma ou mais características, também chamados de descritores.

- O ato de gerar os descritores que caracterizam um objeto ou partes de uma imagem é chamado de Extração de Características.

- Uma Classe de Padrões é uma família de padrões que compartilham algumas propriedades comuns e são denotadas como w_1, w_2, w_3, ...w_M onde M é o número de classes.

Arranjos de Padrões:

- Vetores - descrições quantitativas (área, largura, textura, etc..)

Vetores de Características:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

x_i é o i-ésimo descritor

n é o número de descritores ou características

Exemplo_1:

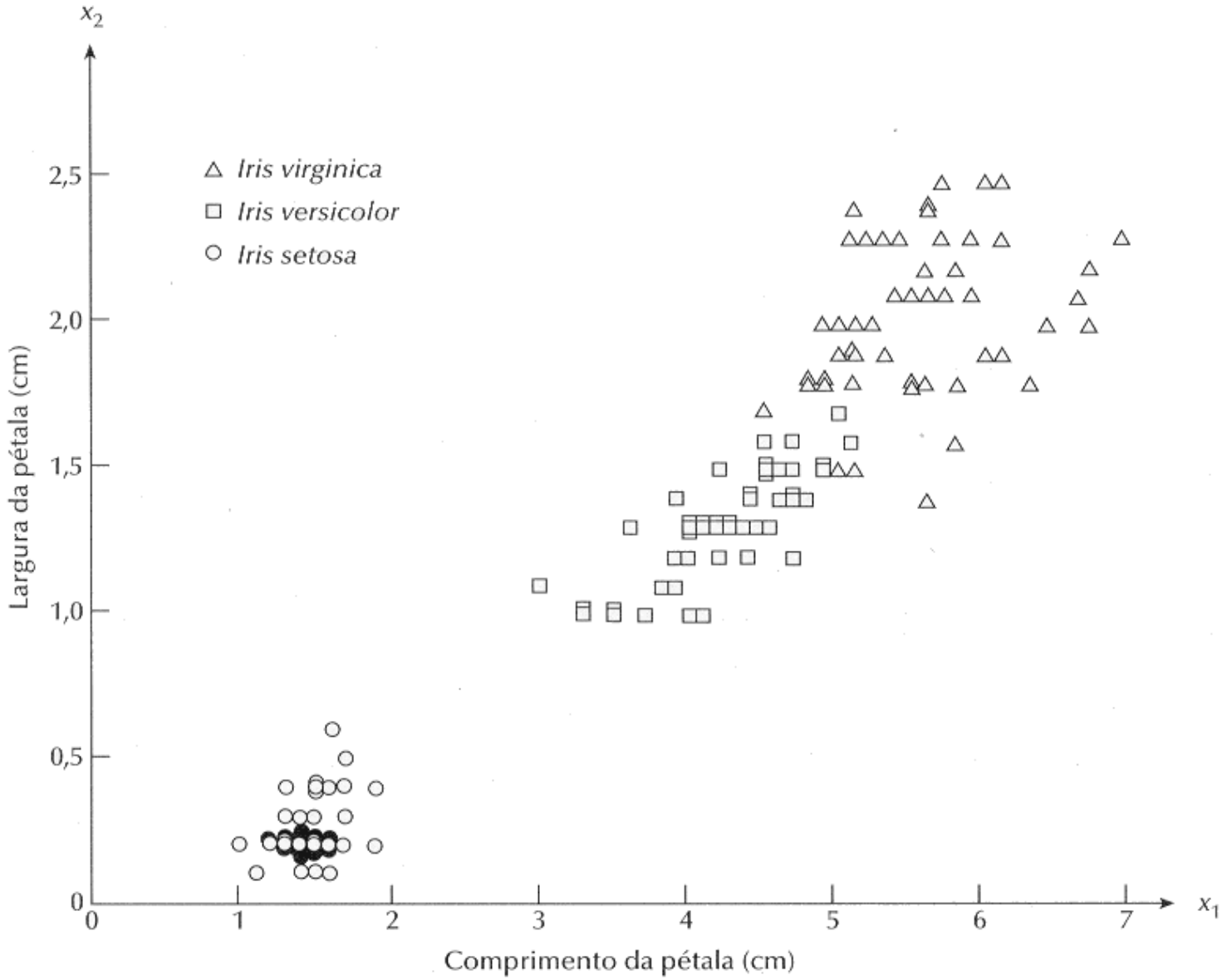
Descrever três tipos de flores:
(Iris setosa, virginica e versicolor) ⇒ 3 classes w_1, w_2, w_3

Características a serem utilizadas:
(largura e comprimento de suas pétalas) ⇒ 2 descritores x_1 e x_2

- Uma vez que um conjunto de medidas tenha sido selecionado, um vetor de características torna-se a representação completa de cada amostra física.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Cada flor do conjunto de amostras de flores, é um ponto no espaço euclidiano bi-dimensional.



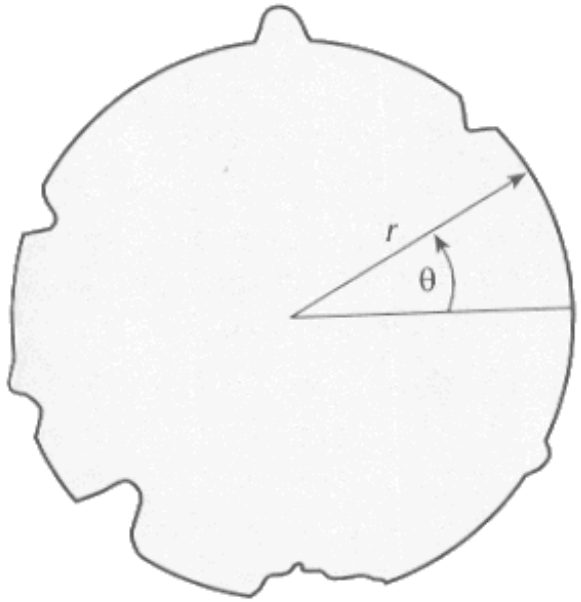
Seleção das Características:

- No exemplo anterior, as características “comprimento e largura” das pétalas permitiram separar bem apenas a classe das “Iris Setosa”.

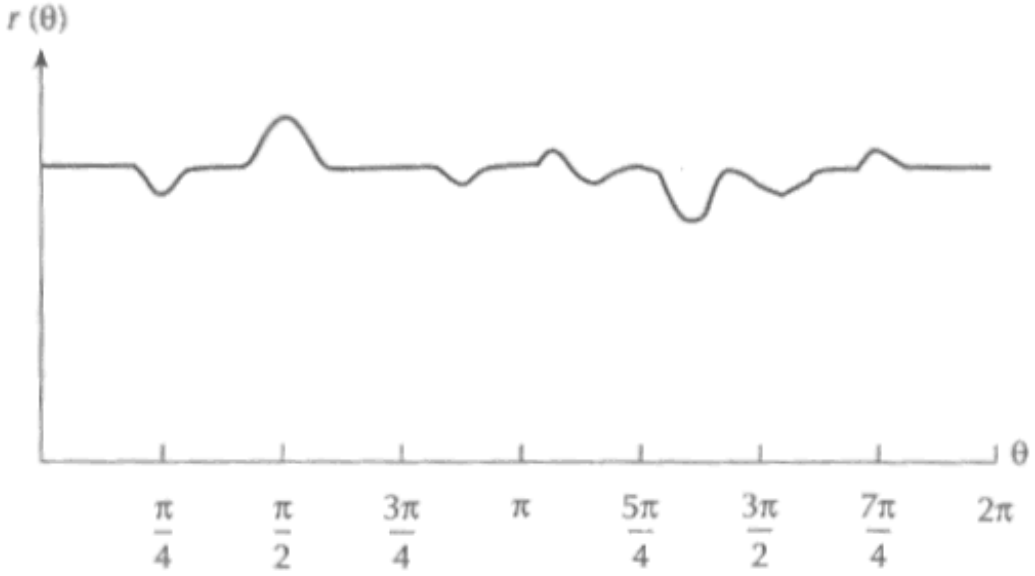
- A Seleção das Características que gerarão o Vetor de Características, possui uma influência profunda no desempenho de um sistema de Visão Computacional.

Exemplo_2:

Escolher as características para o Vetor de Características, visando classificar diversas formas ruidosas quase-circulares. (Peças com desgastes ou defeitos)



Uma solução seria utilizar a descrição por Assinatura:



A cada intervalo θ $dado$ por $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_n$

Gerar os Vetores de Características:

$$x_1 = r(\theta_1)$$
$$x_2 = r(\theta_2)$$
$$\vdots$$
$$x_n = r(\theta_n)$$

Esses vetores tornam-se pontos no espaço n-dimensional, e as Classes de Padrões "nuvens" de n dimensões.

❑ Outra solução seria calcular os Momentos de cada peça e gerar o Vetor de Características com os *m* primeiros momentos.

❑ As Características a serem selecionadas podem gerar o Vetor de Características através de diversas técnicas como por exemplo:

- Momentos
- Número do Formato
- Descritores Topológicos
- outros....

❑ Geralmente a utilização de características geradas por diferentes metodologias, tornam o Reconhecimento facilitado.

Métodos de Decisão:

Funções de Decisão ou Funções Discriminantes.

Seja $x=(x_1,x_2,.....x_n)^T$ um Vetor de Características n-dimensional e $w_1,w_2,.....w_M$ M Classes de Padrões.

O Reconhecimento de Padrões consiste em encontrar as M funções de decisão $d_1(x)$, $d_2(x)$, ...$d_M(x)$ tal que:

- Se o padrão x pertencer à classe w_i , então:

$$d_i(x) > d_j(x) \quad j = 1,2,\ldots,M;\ j \neq i$$

Ou seja:

$$x \in w_i \quad se \ \ d_i(x) \ é \ \ o \ \ \ maior \ \ \ valor$$

Fronteira de Decisão:

A Fronteira que separa duas classes w_i e w_j é dada pelos valores de x para os quais $d_i(x) = d_j(x)$, ou seja:

$$d_i(x) - d_j(x) = 0$$

Pode-se identificar a Fronteira de Decisão entre duas classes através da função:

$$d_{ij} = d_i(x) - d_j(x) = 0$$

Ou seja, se $d_{ij}(x) > 0$ o padrão pertence à classe w_i e se $d_{ij}(x) < 0$ o padrão pertence à classe w_j

Classificador de Distância Mínima:

- Uma Classe de Padrões pode ser representada por um vetor protótipo (ou médio).

$$m_j = \frac{1}{N_j} \sum_{x \in w_j} x \qquad j = 1,2,....,M$$

- Uma maneira de definir a pertinência de um Vetor de Características (x) desconhecido, é atribuí-lo à classe de seu protótipo mais próximo.

Distância euclidiana: $D_j(x) = \left\| x - m_j \right\| \qquad j = 1,2,....M$

Onde: $\|a\| = \left(a^T a\right)^{1/2}$ é a norma euclidiana.

$$x \in w_i \quad se \quad D_i(x) \quad for \quad a \quad menor \quad distância$$

Classificador de Distância Mínima:

Isso equivale a avaliar as funções:

$$d_j(x) = x^T m_j - \frac{1}{2} m_j^T m_j \qquad j = 1,2,.....,M$$

e atribuir x à classe w_i se $d_i(x)$ for o maior valor.

- A Fronteira de Decisão entre as classes w_i e w_j para o Classificador de Distância Mínima é:

$$d_{ij} = d_i(x) - d_j(x) =$$

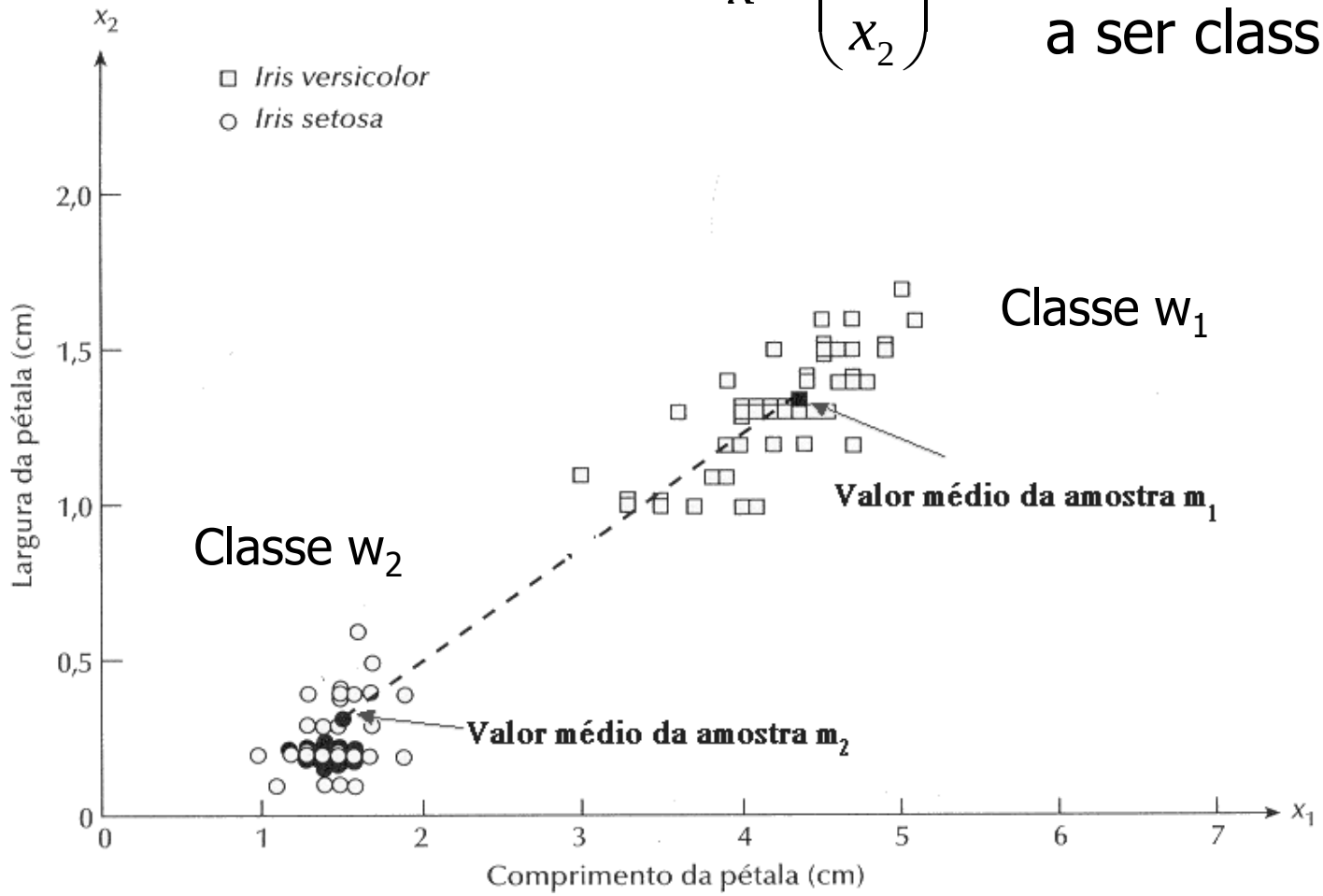
$$x^T (m_i - m_j) - \frac{1}{2}(m_i - m_j)^T (m_i - m_j) = 0$$

n=2 ----- uma reta
n=3 ----- um plano
n>3 ----- hiperplano

Exemplo:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Vetor desconhecido a ser classificado



$m_1=(4.3\ ,\ 1.3)^T$

$m_2=(1.5\ ,\ 0.3)^T$

Fronteira de Decisão:

$$d_j(x) = x^T m_j - \frac{1}{2} m_j^T m_j \qquad j = 1,2,.....,M$$

$$d_1(x) = x^T m_1 - \frac{1}{2} m_1^T m_1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.3 \\ 1.3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4.3 & 1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.3 \\ 1.3 \end{pmatrix} =$$

$$4.3x_1 + 1.3x_2 - \frac{1}{2}\left(4.3 \times 4.3 + 1.3 \times 1.3\right) =$$

$$4.3x_1 + 1.3x_2 - 10.09$$

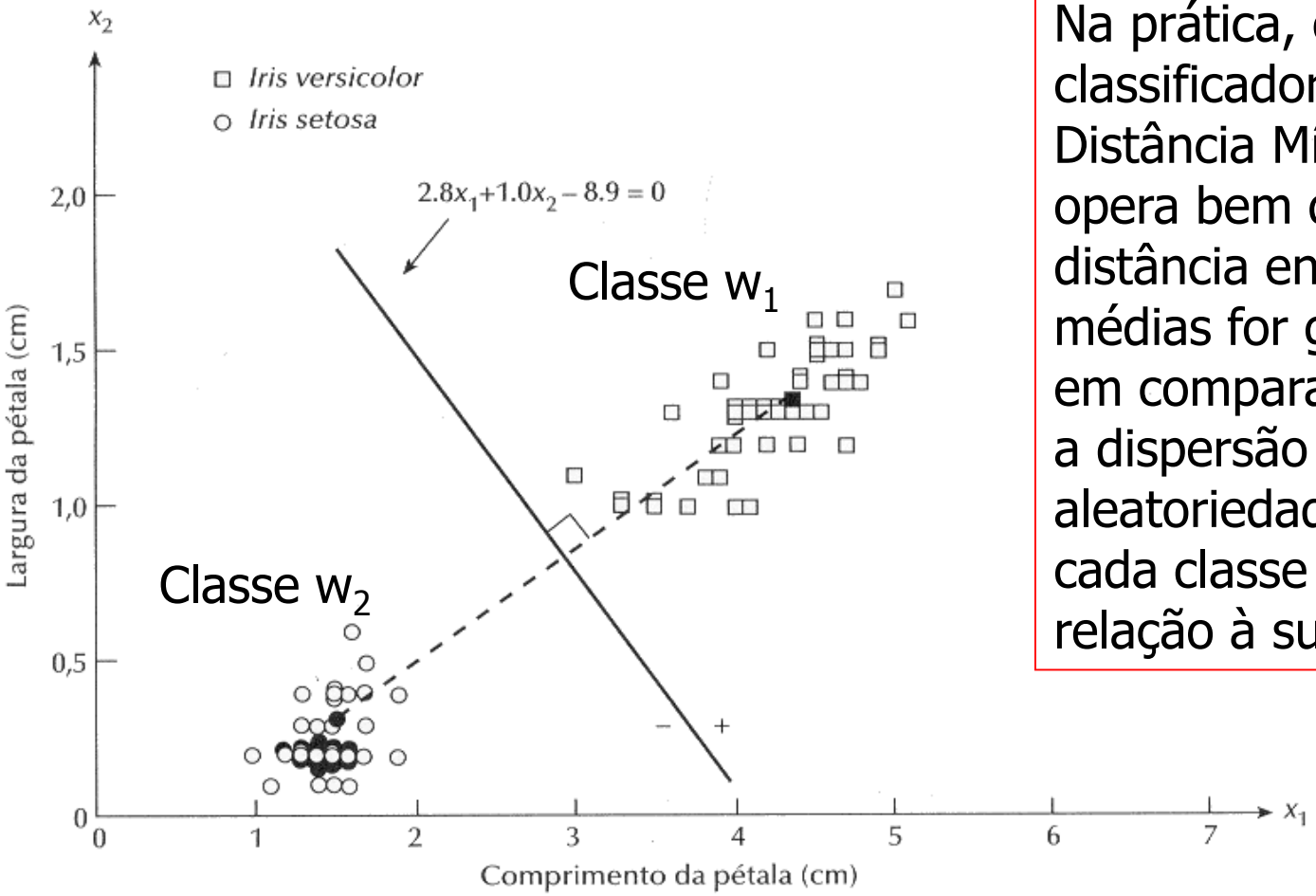
$$d_2(x) = x^T m_2 - \frac{1}{2} m_2^T m_2$$

$$d_2(x) = 1.5x_1 + 0.3x_2 - 1.17$$

Equação da Fronteira:

$$d_{12}(x) = d_1(x) - d_2(x) =$$

$$2.8x_1 + 1.0x_2 - 8.9 = 0$$



Na prática, o classificador de Distância Mínima opera bem quando a distância entre as médias for grande em comparação com a dispersão ou aleatoriedade de cada classe em relação à sua média.

Qualquer padrão desconhecido x pode ser classificado observando-se o sinal de d_{12}

$d_{12}(x) < 0$ --- Classe w_2

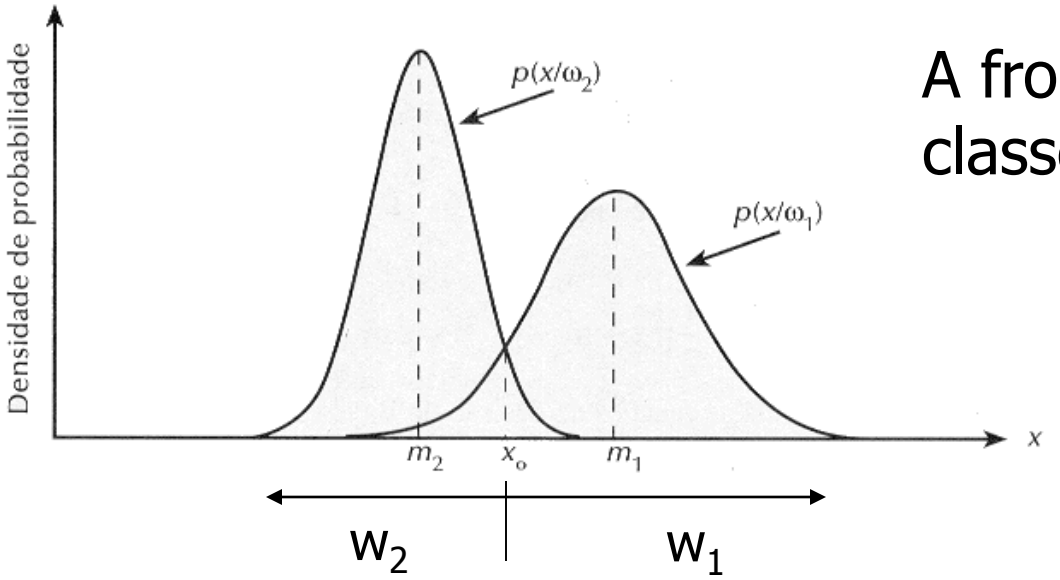
$d_{12}(x) > 0$ --- Classe w_1

Classificador Bayesiano:

Um problema envolvendo duas classes de padrões governadas por densidades gaussianas, com médias m_1 e m_2 e desvios padrão σ_1 e σ_2 respectivamente, pode ser resolvido usando-se as funções de decisão na forma:

$$d_j(x) = p(x/w_j)P(w_j) =$$

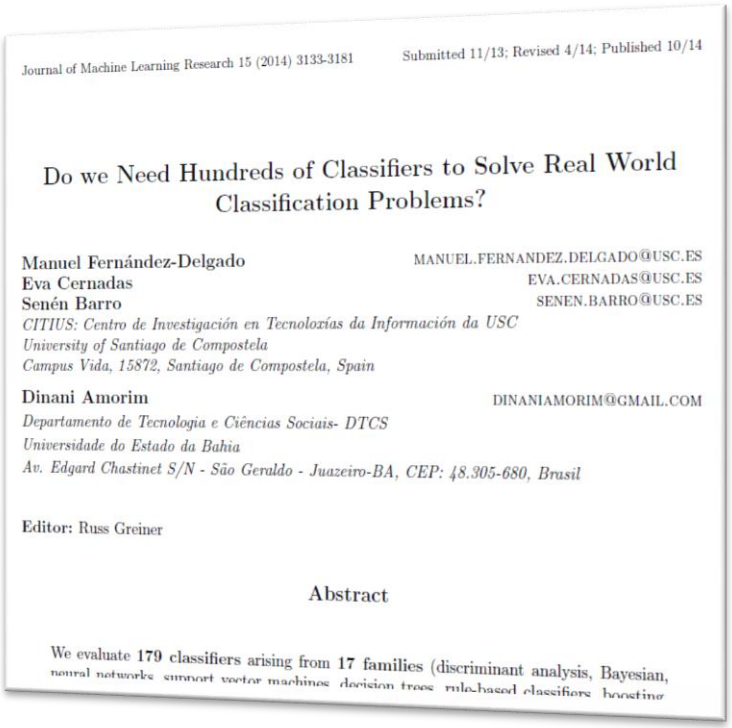
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j}} \exp\left[-\frac{(x-m_j)^2}{2\sigma_j^2}\right] P(w_j) \qquad j = 1,2$$



A fronteira entre as classes é o ponto x_0

Outros Classificadores:

- Classificadores por Redes Neurais Artificiais
- Classificadores por Lógica Nebulosa (“Fuzzy Sets”)
- Existem muitos outros classificadores:



Journal of Machine Learning Research 15 (2014) 3133-3181 Submitted 11/13; Revised 4/14; Published 10/14

Do we Need Hundreds of Classifiers to Solve Real World Classification Problems?

Manuel Fernández-Delgado MANUEL.FERNANDEZ.DELGADO@USC.ES
Eva Cernadas EVA.CERNADAS@USC.ES
Senén Barro SENEN.BARRO@USC.ES
CITIUS: Centro de Investigación en Tecnoloxías da Información da USC
University of Santiago de Compostela
Campus Vida, 15872, Santiago de Compostela, Spain
Dinani Amorim DINANIAMORIM@GMAIL.COM
Departamento de Tecnologia e Ciências Sociais- DTCS
Universidade do Estado da Bahia
Av. Edgard Chastinet S/N - São Geraldo - Juazeiro-BA, CEP: 48.305-680, Brasil

Editor: Russ Greiner

Abstract

We evaluate 179 classifiers arising from 17 families (discriminant analysis, Bayesian, neural networks, support vector machines, decision trees, rule-based classifiers, boosting

Cluster Analysis: (Análise de agrupamentos)

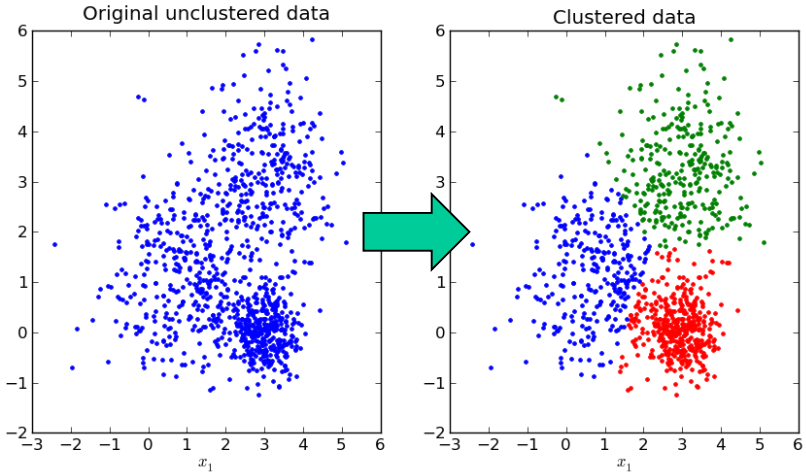
• É um método de Estatística Multivariada que identifica grupos em um grande número de objetos, baseado em suas características.

•Similarmente à Análise Discriminante, cada objeto tem múltiplas características que podem ser expressas como um vetor **X = (x1, x2, ...xp)** com valores que variam de objeto para objeto.

•O Objetivo principal da Análise de Agrupamentos é identificar objetos similares baseada em suas características.

Cluster Analysis: (Análise de agrupamentos)

• “Cluster analysis” agrupa objetos similares em grupos tal que os objetos dentro de um grupo são similares e objetos entre os diferentes grupos são significativamente diferentes em suas características.



• Diferentemente da Análise Discriminante onde o número de grupos e seus nomes são conhecidos previamente, na Análise de Agrupamentos o número de grupos e suas características são desconhecidas antes da análise.

Exemplo: Analisar o Agrupamento de cereais da Tabela de acordo com suas características nutricionais.

Brand	Calories (Cal/oz)	Protein (g)	Fat (g)	Na (mg)	Fiber (g)	Carbs (g)	Sugar (g)	K (mg)
Cheerios	110	6	2	290	2.0	17.0	1	105
Cocoa Puffs	110	1	1	180	0.0	12.0	13	55
Honey Nut Cheerios	110	3	1	250	1.5	11.5	10	90
Kix	110	2	1	260	0.0	21.0	3	40
Lucky Charms	110	2	1	180	0.0	12.0	12	55
Oatmeal Raisin Crisp	130	3	2	170	1.5	13.5	10	120
Raisin Nut Bran	100	3	2	140	2.5	10.5	8	140
Total Corn Flakes	110	2	1	200	0.0	21.0	3	35
Total Raisin Bran	140	3	1	190	4.0	15.0	14	230
Trix	110	1	1	140	0.0	13.0	12	25
Wheaties Honey Gold	110	2	1	200	1.0	16.0	8	60
All-Bran	70	4	1	260	9.0	7.0	5	320
Apple Jacks	110	2	0	125	1.0	11.0	14	30
Corn Flakes	100	2	0	290	1.0	21.0	2	35
Corn Pops	110	1	0	90	1.0	13.0	12	20
Mueslix Crispy Blend	160	3	2	150	3.0	17.0	13	160
Nut & Honey Crunch	120	2	1	190	0.0	15.0	9	40
Nutri Grain Almond Raisin	140	3	2	220	3.0	21.0	7	130
Nutri Grain Wheat	90	3	0	170	3.0	18.0	2	90
Product 19	100	3	0	320	1.0	20.0	3	45
Raisin Bran	120	3	1	210	5.0	14.0	12	240
Rice Krispies	110	2	0	290	0.0	22.0	3	35
Special K	110	6	0	230	1.0	16.0	3	55
Life	100	4	2	150	2.0	12.0	6	95
Puffed Rice	50	1	0	0	0.0	13.0	0	15

O número de variáveis e quais serão selecionadas, afetarão o resultado final.

Conjunto de Dados típicos em Cluster Analysis:

	Variables			
Objects	1	2	...	p
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2p}
⋮	⋮	⋮	...	⋮
N	x_{N1}	x_{N2}	...	x_{Np}

Passo 1: Selecionar as Variáveis de Agrupamento e a Medida de Distância.

Passo 2: Selecionar o algoritmo de Agrupamento (Hierárquico ou não-hierárquico)

Passo 3: Realizar a Análise de Agrupamento.

Passo 4: Interpretar os Agrupamentos.

Medidas de Similaridade : Distâncias

Distância Euclidiana (DE):

$$d_{ik} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - x_{kj})^2}$$

	Variables			
Objects	1	2	...	p
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2p}
⋮	⋮	⋮	...	⋮
N	x_{N1}	x_{N2}	...	x_{Np}

d_{ik} → DE entre o objeto *i* e o objeto *k (Vetor i e Vetor k)*

- A escala numérica das variáveis pode variar significativamente.

No Exemplo:

Brand	Calories (Cal/oz)	Protein (g)	Fat (g)	Na (mg)	Fiber (g)	Carbs (g)	Sugar (g)	K (mg)
Cheerios	110	6	2	290	2.0	17.0	1	105
Cocoa Puffs	110	1	1	180	0.0	12.0	13	55
Honey Nut Cheerios	110	3	1	250	1.5	11.5	10	90

Distância Euclidiana Normalizada: (Distância de Pearson)

- Se não se deseja que dados com maiores valores dominem o resultado, deve-se normalizar a escala.

- Cada dado x_{ij} deve ser normalizado para z_{ij}:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \overline{x}_j}{s_j}$$

Onde:

$$\overline{x}_j = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_{kj}}{N}$$

É a Média de cada característica

$$s_j = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N} (x_{kj} - \overline{x}_j)^2}{N-1}}$$

É o Desvio Padrão das características

Logo, a Distância Euclidiana Normalizada (Distância de Pearson) entre cada Vetor (*i* e *k*) será:

$$d_{ik} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} (z_{ij} - z_{kj})^2}$$

Matriz de Distâncias:

As Distâncias entre cada objeto, ou melhor, entre todos os Vetores de toda a população de Vetores de Características, podem ser colocadas em uma Matriz de Distância para a análise.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1N} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & \cdots & d_{2N} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & \cdots & d_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{N1} & d_{N2} & d_{N3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

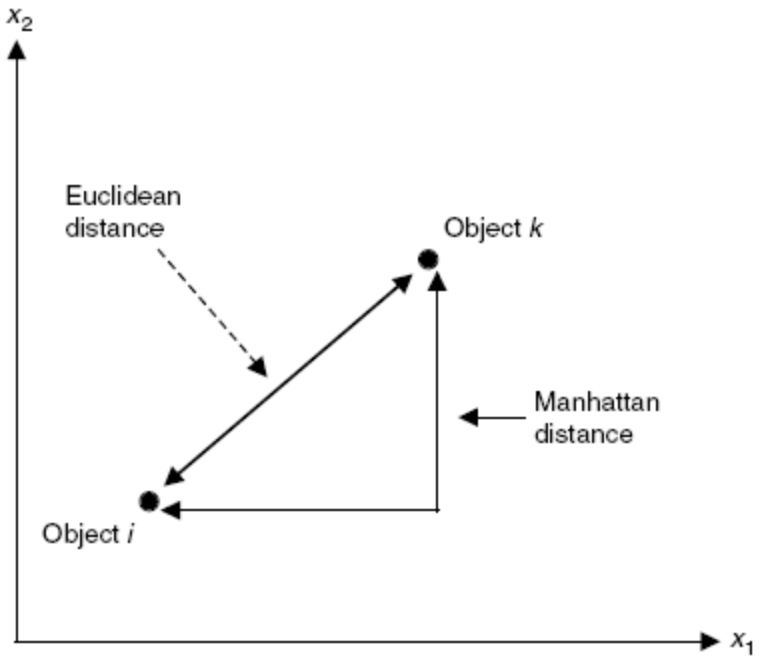
Distância Manhattan ou Distância City Block:

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{p} | x_{ij} - x_{kj} |$$

Distância Manhattan ou Distância City Block Normalizada:

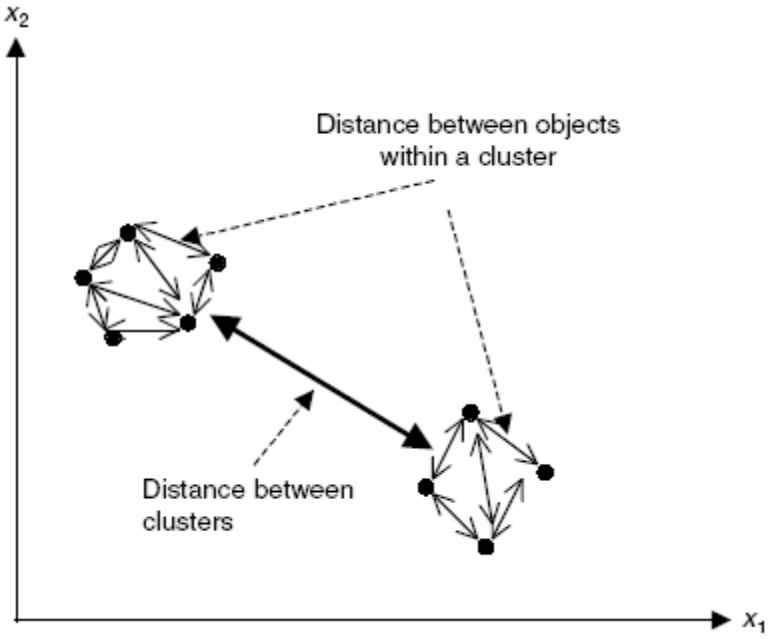
$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{p} | z_{ij} - z_{kj} |$$

Diferença entre a Distância Manhattan e a Distância Euclidiana:



Diferença entre Agrupamentos e Método de Ligação:

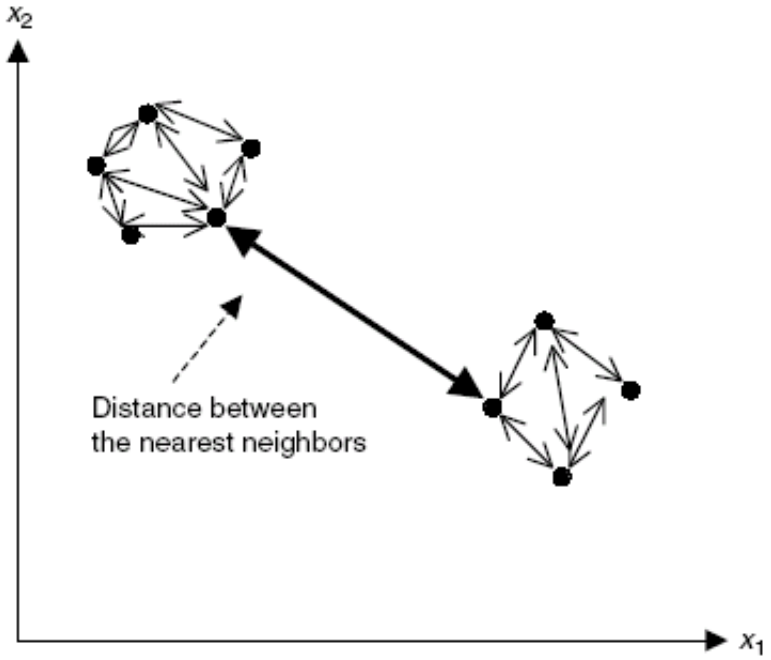
• Em “Cluster Analysis” é desejável que as distâncias entre os Vetores(objetos) dentro de um “cluster” (grupo) sejam pequenas e que as distâncias entre diferentes “clusters” sejam grandes.



• A Distância entre os grupos depende da relação definida entre eles.

• Esta relação é chamada de Método de Ligação (“Linkage Method”)

Método de Ligação Simples.



$$d_{(R)(S)} = \min\{d_{rs} \mid r \in R, s \in S\}$$

- A distância entre dois grupos ("clusters") é definida como a Distância entre os Vizinhos mais Próximos.

Exemplo:

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} . & . & . & 10 & 8 & 6 \\ . & . & . & 6 & 9 & 5 \\ . & . & 0 & 13 & 11 & 8 \\ . & . & . & 0 & . & . \\ . & . & . & . & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

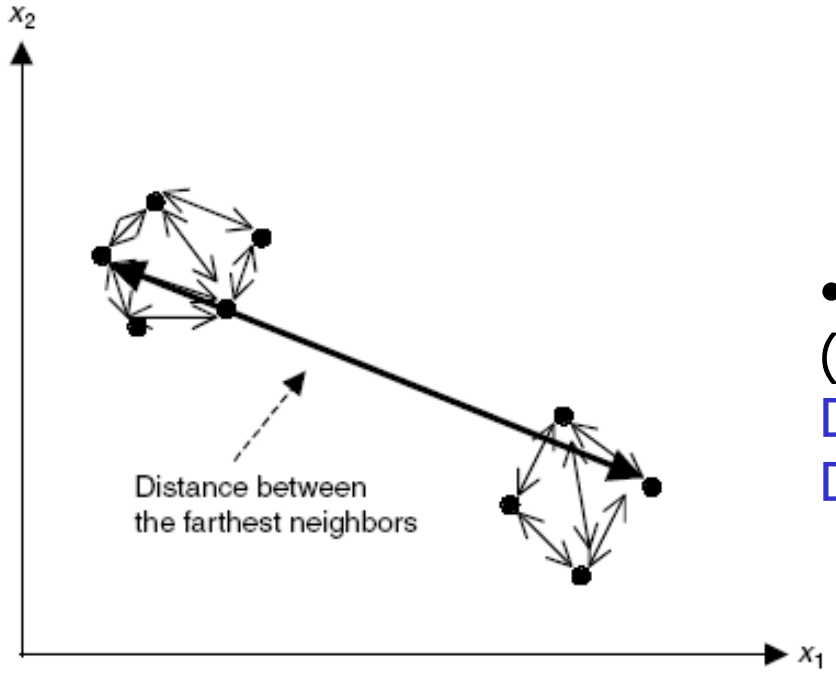
Cluster 1 (Objetos 1,2,3)

Cluster 2 (Objetos 4,5,6)

- A Distância entre os dois grupos (1 e 2) será:

$$d_{(1)(2)} = \min\{d_{14}, d_{15}, d_{16}, d_{24}, d_{25}, d_{26}, d_{34}, d_{35}, d_{36}\}$$
$$= \min\{10, 8, 6, 6, 9, 5, 13, 11, 8\} = 5 = d_{26}$$

Método de Ligação Completa:



$$d_{(R)(S)} = \max\{d_{rs} \mid r \in R, s \in S\}$$

- A distância entre dois grupos ("clusters") é definida como a Distância entre os Vizinhos mais Distantes.

Exemplo:

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} . & . & . & 10 & 8 & 6 \\ . & . & . & 6 & 9 & 5 \\ . & . & 0 & 13 & 11 & 8 \\ . & . & . & 0 & . & . \\ . & . & . & . & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Cluster 1 (Objetos 1,2,3)

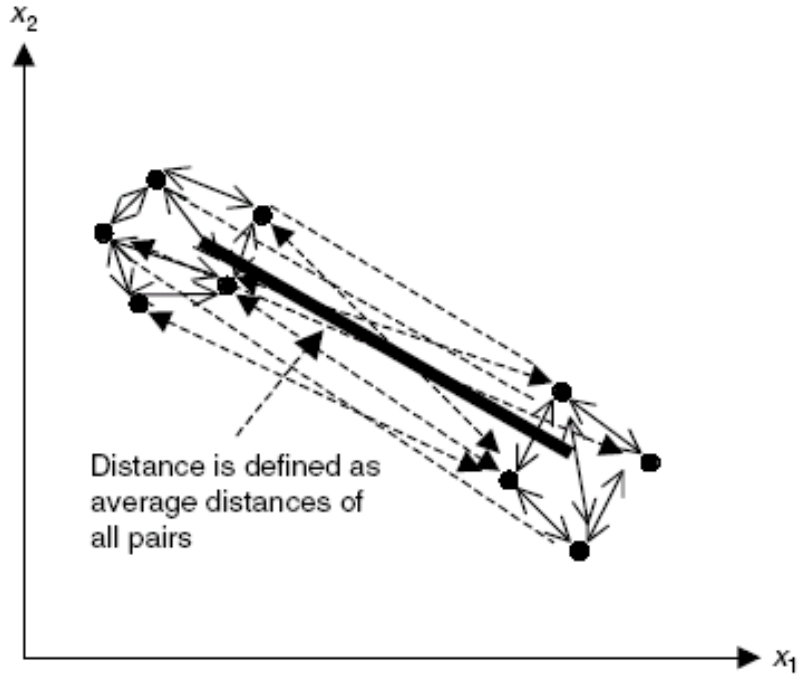
Cluster 2 (Objetos 4,5,6)

- A Distância entre os dois grupos (1 e 2) será:

$$d_{(1)(2)} = \max\{d_{14}, d_{15}, d_{16}, d_{24}, d_{25}, d_{26}, d_{34}, d_{35}, d_{36}\}$$

$$= \max\{10, 8, 6, 6, 9, 5, 13, 11, 8\} = 13 = d_{34}$$

Método de Ligação Média:



$$d_{(R)(S)} = \frac{\sum_r \sum_s d_{rs}}{n_R n_S}$$

- A distância entre dois grupos ("clusters") é definida como a A Média de todas as distâncias entre os dois grupos.

Exemplo:

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} . & . & . & 10 & 8 & 6 \\ . & . & . & 6 & 9 & 5 \\ . & . & 0 & 13 & 11 & 8 \\ . & . & . & 0 & . & . \\ . & . & . & . & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Cluster 1 (Objetos 1,2,3)

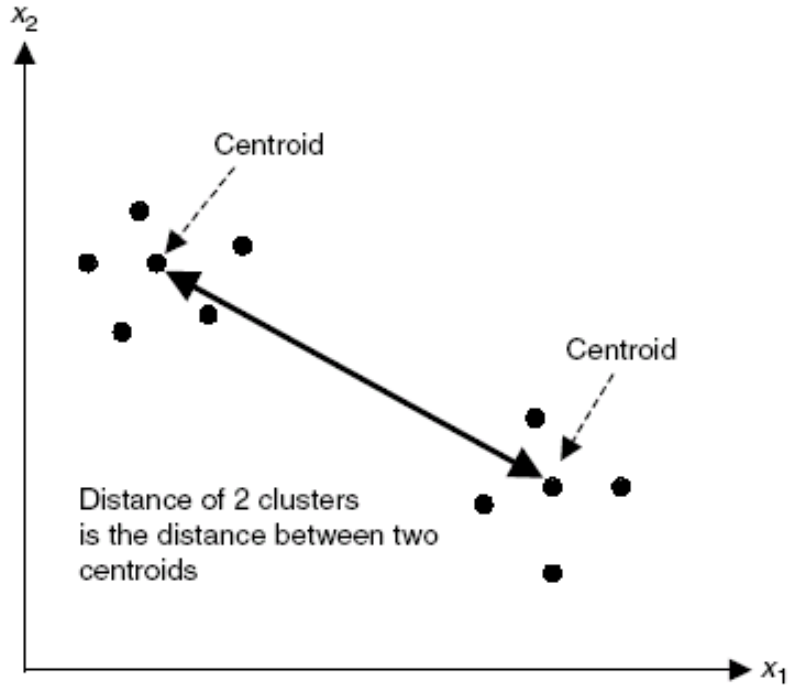
Cluster 2 (Objetos 4,5,6)

- A Distância entre os dois grupos (1 e 2) será:

$$d_{(1)(2)} = \frac{d_{14} + d_{15} + d_{16} + d_{24} + d_{25} + d_{26} + d_{34} + d_{35} + d_{36}}{3 \times 3}$$

$$= \frac{10 + 8 + 6 + 6 + 9 + 5 + 13 + 11 + 8}{9} = 8.44$$

Método de Ligação Centróide:



- A distância entre dois grupos ("clusters") é definida como a A distância entre os Centros Gravitacionais de cada grupo.

- Sejam os grupos: R com n_R objetos e S com n_S objetos:

- A coordenada do Centro de Gravidade de cada Grupo será:

$$\bar{\mathbf{x}}_R = \frac{\sum_r \mathbf{x}_r}{n_R} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{r1} \\ \bar{x}_{r2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{rp} \end{bmatrix} \qquad \bar{\mathbf{x}}_S = \frac{\sum_s \mathbf{x}_s}{n_S} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{s1} \\ \bar{x}_{s2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{sp} \end{bmatrix}$$

- Logo, a Distância Euclidiana entre os dois grupos será:

$$d_{(R)(S)} = \sqrt{(\bar{x}_{r1} - \bar{x}_{s1})^2 + \cdots + (\bar{x}_{rp} - \bar{x}_{sp})^2}$$

Similaridade:

- Similaridade é a diferença entre dois objetos (vetores) ou entre dois Grupos de Objetos ("clusters").

- Quanto maior é a Similaridade menor é a distância entre eles.

- Dados dois objetos $\boldsymbol{x}_r$ e $\boldsymbol{x}_s$, a Similaridade é dada por $\boldsymbol{S}_{rs}$ e obedece às seguintes condições:

1. $0 \leq s_{rs} \leq 1$
2. $s_{rs} = 1$ if and only if $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_s$
3. $s_{rs} = s_{sr}$

Similaridade:

- A medida de Similaridade pode ser dada por:

$$s_{rs} = 1 - \frac{d_{rs}}{d_{\max}}$$

Onde, d_{max} é a Máxima Distância na Matriz de Distâncias D.

- Uma outra maneira de medir a Similaridade é através da Correlação de Momentos do Produto de Pearson

$$q_{rs} = \frac{\sum_{j=1}^{p}(x_{rj} - \overline{x}_{r.})(x_{sj} - \overline{x}_{s.})}{\left[\sum_{j=1}^{p}(x_{rj} - \overline{x}_{r.})^2 \sum_{j=1}^{p}(x_{sj} - \overline{x}_{s.})^2\right]}$$

Agrupamento Hierárquico

• Agrupamento Hierárquico (Hierarchical clustering) é uma maneira de investigar o agrupamento dos dados, simultâneamente em várias escalas, através da geração de uma Árvore de Grupos (Cluster Tree).

• A Árvore de Grupos não é apenas um simples conjunto de grupos, mas uma Hierarquia em multi-nível onde grupos em um nível são unidos a grupos em um próximo nível mais alto.

• Isto permite decidir qual nível ou escala de agrupamento é mais apropriada para cada aplicação.

Agrupamento Hierárquico

• O número de Agrupamentos (“clusters”) e quais são eles é desconhecido.

• Usa a Matriz de Distâncias para construir um gráfico de Árvore de Grupo chamado de Dendrograma.

• Algoritmo:

1. Considerar inicialmente todos os elementos (Vetores/Objetos) individuais como um cluster formado por ele mesmo.
2. Combinar em um cluster dois objetos com a menor distância.
3. Computar as distâncias entre os objetos e o novo cluster formado.
4. Repetir o processo até que o número de clusters seja reduzido a 1.
5. Decidir o número de grupos para solucionar o problema.

Exemplo de Análise através de Agrupamento Hierárquico:

• Comportamento do tempo em uma cidade Norte-americana no mês de Fevereiro entre os anos de 1982 e 1990

Year	x_1, Mean temp.	x_2, Max. temp.	x_3, Min. temp.	x_4, Soil temp. (@ 10 cm)	x_5, Monthly rainfall (mm)	x_6, Max. rain in a day	x_7, Days with snow
1982	4.2	13.3	–5.3	4.0	23	6	0
1983	1.0	7.8	–5.3	3.0	34	11	8
1984	2.9	11.4	–5.1	3.2	65	17	0
1985	1.6	10.2	–6.0	2.9	7	2	5
1986	–1.1	2.7	–9.0	1.5	22	5	24
1987	3.3	13.4	–7.3	2.7	46	15	2
1988	4.5	13.0	–2.9	3.7	89	22	4
1989	5.7	13.5	–2.7	5.2	92	16	0
1990	6.6	14.9	–0.6	5.5	131	29	0

7 Características (p)

9 Vetores de Características ou Objetos (k)

Passo 0 : Normalizar a matriz

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}$$

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_{kj}}{N}$$

$$s_j = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N} (x_{kj} - \bar{x}_j)^2}{N-1}}$$

Exemplo de Análise através de Agrupamento Hierárquico:

- Comportamento do tempo em uma cidade Norte-americana no mês de Fevereiro entre os anos de 1982 e 1990

Year	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
1982	4.2	13.3	-5.3	4.0	23.0	6.0	0.0
1983	1.0	7.8	-5.3	3.0	34.0	11.0	8.0
1984	2.9	11.4	-5.1	3.2	65.0	17.0	0.0
1985	1.6	10.2	-6.0	2.9	7.0	2.0	5.0
1986	-1.1	2.7	-9.0	1.5	22.0	5.0	24.0
1987	3.3	13.4	-7.3	2.7	46.0	15.0	2.0
1988	4.5	12.0	-2.9	3.7	89.0	22.0	4.0
1989	5.7	12.5	-2.7	5.2	92.0	16.0	0.0
1990	6.6	14.9	-0.6	5.5	131.0	29.0	0.0
Média	3.2	10.9	-4.9	3.5	56.6	13.7	4.8
SD	2.4	3.7	2.5	1.3	40.8	8.7	7.7

7 Características →

↓

9 Vetores de Características ou Objetos

Passo 0 : Normalizar a matriz

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}$$

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_{kj}}{N}$$

$$s_j = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N} (x_{kj} - \bar{x}_j)^2}{N-1}}$$

Exemplo de Análise através de Agrupamento Hierárquico:

- Comportamento do tempo em uma cidade Norte-americana no mês de Fevereiro entre os anos de 1982 e 1990

Year	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
1982	0.4	0.6	-0.2	0.4	-0.8	-0.9	-0.6
1983	-0.9	-0.8	-0.2	-0.4	-0.6	-0.3	0.4
1984	-0.1	0.1	-0.1	-0.3	0.2	0.4	-0.6
1985	-0.7	-0.2	-0.4	-0.5	-1.2	-1.3	0.0
1986	-1.8	-2.2	-1.6	-1.6	-0.8	-1.0	2.5
1987	0.0	0.7	-0.9	-0.7	-0.3	0.2	-0.4
1988	0.5	0.3	0.8	0.1	0.8	1.0	-0.1
1989	1.0	0.4	0.9	1.3	0.9	0.3	-0.6
1990	1.4	1.1	1.7	1.6	1.8	1.8	-0.6

7 Características →

↓

9 Vetores de Características ou Objetos

Passo 1 : Cálculo da Matriz de Distâncias

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.00 & 2.44 & 1.90 & 1.86 & 5.32 & 1.82 & 2.70 & 2.56 & 4.48 \\ 2.44 & 0.00 & 1.92 & 1.49 & 3.31 & 2.16 & 2.98 & 3.69 & 5.23 \\ 1.90 & 1.92 & 0.00 & 2.45 & 4.98 & 1.25 & 1.57 & 2.36 & 3.78 \\ 1.86 & 1.48 & 2.45 & 0.00 & 3.75 & 2.19 & 3.64 & 4.01 & 5.84 \\ 5.32 & 3.31 & 4.98 & 3.75 & 0.00 & 4.73 & 5.90 & 6.71 & 8.13 \\ 1.82 & 2.16 & 1.25 & 2.19 & 4.73 & 0.00 & 2.40 & 3.10 & 4.59 \\ 2.70 & 2.98 & 1.57 & 3.64 & 5.90 & 2.40 & 0.00 & 1.57 & 2.42 \\ 2.56 & 3.69 & 2.36 & 4.01 & 6.71 & 3.10 & 1.57 & 0.00 & 2.05 \\ 4.48 & 5.23 & 3.78 & 5.83 & 8.13 & 4.59 & 2.42 & 2.05 & 0.00 \end{bmatrix}$$

Distância Euclidiana Normalizada

$$d_{ik} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} (z_{ij} - z_{kj})^2}$$

Exemplo de Análise através de Agrupamento Hierárquico:

Passo 2 : Encontrar a menor distância e criar um novo cluster.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.00 & 2.44 & 1.90 & 1.86 & 5.32 & 1.82 & 2.70 & 2.56 & 4.48 \\ 2.44 & 0.00 & 1.92 & 1.49 & 3.31 & 2.16 & 2.98 & 3.69 & 5.23 \\ 1.90 & 1.92 & 0.00 & 2.45 & 4.98 & 1.25 & 1.57 & 2.36 & 3.78 \\ 1.86 & 1.48 & 2.45 & 0.00 & 3.75 & 2.19 & 3.64 & 4.01 & 5.84 \\ 5.32 & 3.31 & 4.98 & 3.75 & 0.00 & 4.73 & 5.90 & 6.71 & 8.13 \\ 1.82 & 2.16 & 1.25 & 2.19 & 4.73 & 0.00 & 2.40 & 3.10 & 4.59 \\ 2.70 & 2.98 & 1.57 & 3.64 & 5.90 & 2.40 & 0.00 & 1.57 & 2.42 \\ 2.56 & 3.69 & 2.36 & 4.01 & 6.71 & 3.10 & 1.57 & 0.00 & 2.05 \\ 4.48 & 5.23 & 3.78 & 5.83 & 8.13 & 4.59 & 2.42 & 2.05 & 0.00 \end{bmatrix}$$

- Menor distância → entre o objeto(Vetor) 3 e o 6

- Combinar o objeto 3 e o 6 em um único cluster.

Passo 3 : Atualizar as distâncias.

$$d_{1,(3,6)} = \min(d_{13}, d_{16}) = \min(1.90, 1.82) = 1.82$$
$$d_{2,(3,6)} = \min(d_{23}, d_{26}) = \min(1.92, 2.16) = 1.92$$
$$d_{4,(3,6)} = \min(d_{43}, d_{46}) = \min(2.45, 2.19) = 2.19$$
$$d_{5,(3,6)} = \min(d_{53}, d_{56}) = \min(4.98, 4.73) = 4.73$$
$$d_{7,(3,6)} = \min(d_{73}, d_{76}) = \min(1.57, 2.40) = 1.57$$
$$d_{8,(3,6)} = \min(d_{83}, d_{86}) = \min(2.36, 3.10) = 2.36$$
$$d_{9,(3,6)} = \min(d_{93}, d_{96}) = \min(3.78, 4.59) = 3.78$$

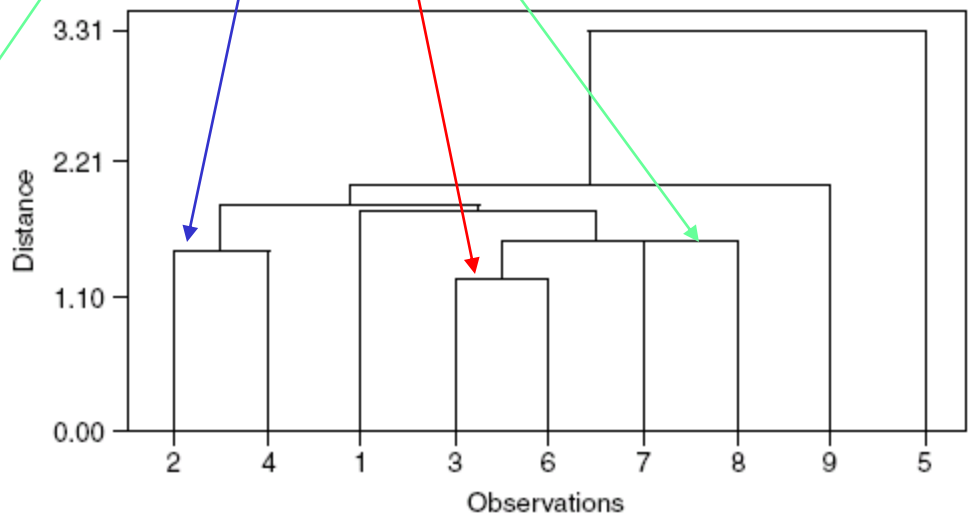
- Foi utilizado o Método de Ligação Simples.

Exemplo de Análise através de Agrupamento Hierárquico:

Passo 4 : Repetir os Passos 2 e 3 estabelecendo um Dendrograma.

Step	Number of clusters	Similarity level	Distance level	Clusters joined		New cluster	Number of obs. in new cluster
1	8	84.67	1.246	3	6	3	2
2	7	81.71	1.486	2	4	2	2
3	6	80.70	1.569	7	8	7	2
4	5	80.64	1.573	3	7	3	4
5	4	77.63	1.818	1	3	1	5
6	3	77.12	1.860	1	2	1	7
7	2	74.83	2.046	1	9	1	8
8	1	59.28	3.309	1	5	1	9

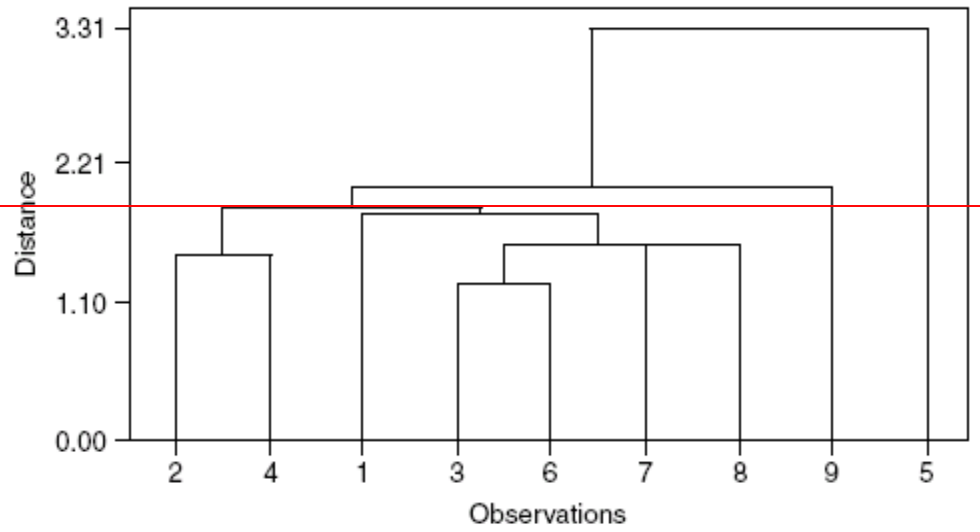
$$D = \begin{bmatrix} 0.00 & 2.44 & 1.90 & 1.86 & 5.32 & 1.82 & 2.70 & 2.56 & 4.48 \\ 2.44 & 0.00 & 1.92 & 1.49 & 3.31 & 2.16 & 2.98 & 3.69 & 5.23 \\ 1.90 & 1.92 & 0.00 & 2.45 & 4.98 & 1.25 & 1.57 & 2.36 & 3.78 \\ 1.86 & 1.48 & 2.45 & 0.00 & 3.75 & 2.19 & 3.64 & 4.01 & 5.84 \\ 5.32 & 3.31 & 4.98 & 3.75 & 0.00 & 4.73 & 5.90 & 6.71 & 8.13 \\ 1.82 & 2.16 & 1.25 & 2.19 & 4.73 & 0.00 & 2.40 & 3.10 & 4.59 \\ 2.70 & 2.98 & 1.57 & 3.64 & 5.90 & 2.40 & 0.00 & 1.57 & 2.42 \\ 2.56 & 3.69 & 2.36 & 4.01 & 6.71 & 3.10 & 1.57 & 0.00 & 2.05 \\ 4.48 & 5.23 & 3.78 & 5.83 & 8.13 & 4.59 & 2.42 & 2.05 & 0.00 \end{bmatrix}$$



Exemplo de Análise através de Agrupamento Hierárquico:

- Observando-se o Dendrograma pode-se decidir que 4 clusters solucionam o problema, ou seja, cortando-se o gráfico na distância 1.818 tem-se os clusters: (2 e 4) (1,3, 6, 7 e 8) (9) (5)

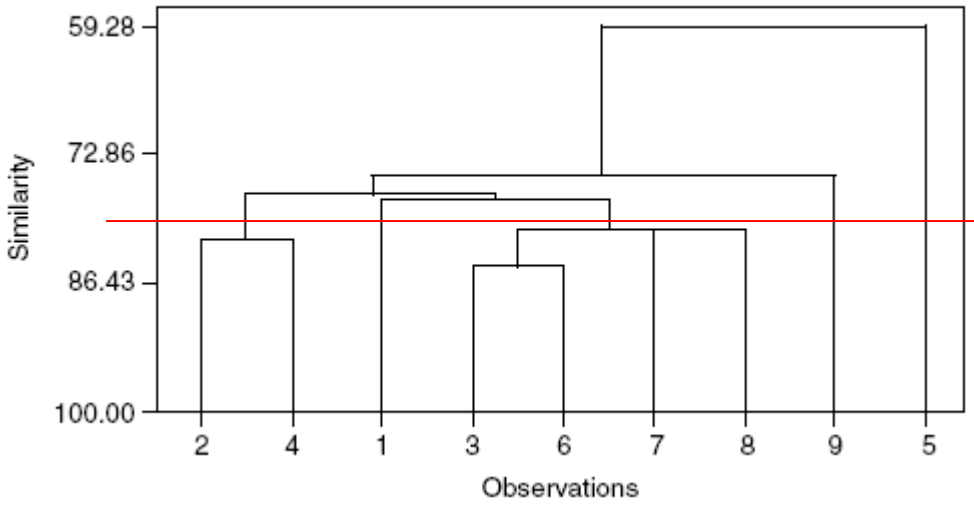
Step	Number of clusters	Similarity level	Distance level	Clusters joined		New cluster	Number of obs. in new cluster
1	8	84.67	1.246	3	6	3	2
2	7	81.71	1.486	2	4	2	2
3	6	80.70	1.569	7	8	7	2
4	5	80.64	1.573	3	7	3	4
5	4	77.63	1.818	1	3	1	5
6	3	77.12	1.860	1	2	1	7
7	2	74.83	2.046	1	9	1	8
8	1	59.28	3.309	1	5	1	9



Exemplo de Análise através de Agrupamento Hierárquico:

- Utilizando a Similaridade ao invés da Distância, pode-se agrupar os vetores através do índice de similaridade entre eles.

Step	Number of clusters	Similarity level	Distance level	Clusters joined		New cluster	Number of obs. in new cluster
1	8	84.67	1.246	3	6	3	2
2	7	81.71	1.486	2	4	2	2
3	6	80.70	1.569	7	8	7	2
4	5	80.64	1.573	3	7	3	4
5	4	77.63	1.818	1	3	1	5
6	3	77.12	1.860	1	2	1	7
7	2	74.83	2.046	1	9	1	8
8	1	59.28	3.309	1	5	1	9



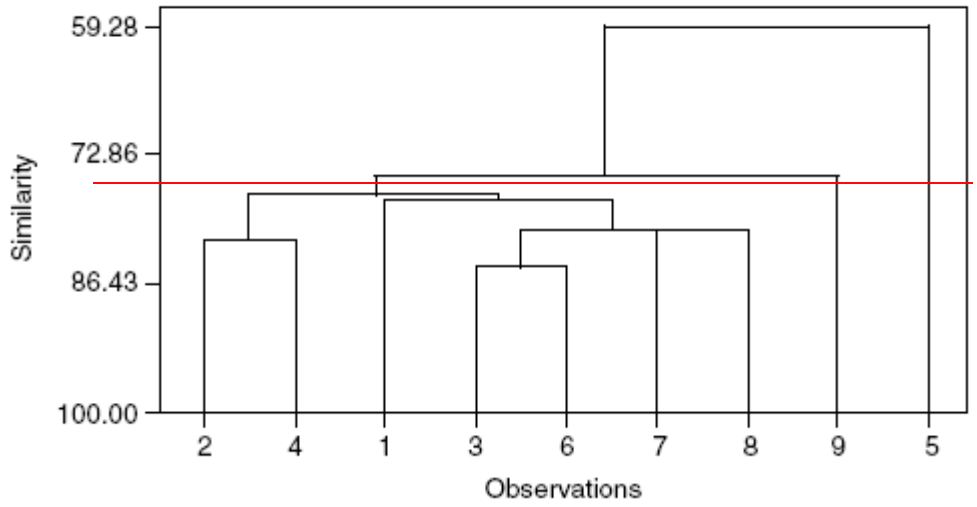
$$s_{rs} = 1 - \frac{d_{rs}}{d_{\max}}$$

- Similaridade de 80% → 5 clusters

Exemplo de Análise através de Agrupamento Hierárquico:

- Interpretação dos resultados: 75% de similaridade (3 grupos)

Year	x_1, Mean temp.	x_2, Max. temp.	x_3, Min. temp.	x_4, Soil temp. (@ 10 cm)	x_5, Monthly rainfall (mm)	x_6, Max. rain in a day	x_7, Days with snow
1982	4.2	13.3	−5.3	4.0	23	6	0
1983	1.0	7.8	−5.3	3.0	34	11	8
1984	2.9	11.4	−5.1	3.2	65	17	0
1985	1.6	10.2	−6.0	2.9	7	2	5
1986	−1.1	2.7	−9.0	1.5	22	5	24
1987	3.3	13.4	−7.3	2.7	46	15	2
1988	4.5	13.0	−2.9	3.7	89	22	4
1989	5.7	13.5	−2.7	5.2	92	16	0
1990	6.6	14.9	−0.6	5.5	131	29	0



- Cluster 1: (2,4,1,3,6,7,8) (1982,1983,1984,1985,1987, 1988,1989) → Fevereiro típico (não muito frio, não muito quente, neve e chuva na média)

- Cluster 2: (5) (1986) → Fevereiro frio e com neve

- Cluster 3: (9) (1990) → Fevereiro quente e chuvoso

Agrupamento Não-Hierárquico.

• No método de Agrupamento Não-hierárquico o analista deve primeiramente especificar o número de “clusters” desejados.

• Método K-Means (K-Médias)

• Passo 1: Especificar inicialmente k sementes cada uma delas como um cluster. Calcular seus centróides.

• Passo 2: Calcular a distância de cada objeto (Vetor) para o centróide de cada cluster. Atribuir o objeto ao cluster mais próximo. Re-atribuir se necessário.

• Passo 3: Recalcular o centróide baseado nas re-atribuições e repetir o Passo 2. Parar se nenhum objeto puder ser re-atribuído a um cluster.

Agrupamento Não-Hierárquico.

- Algumas dificuldades com o K-Means.

1. A composição dos grupos é muito sensível às sementes iniciais. Para diferentes sementes pode-se ter diferentes tipos de clusters. Não há garantia que convirja para uma solução ótima.

2. Algumas vezes é difícil escolher um bom número de grupos antes de analisar os dados.

- Pode-se combinar os métodos hierárquicos e não-hierárquicos para identificar as sementes e o número de grupos. Os resultados podem então ser usados no agrupamento não-hierárquico para refinar a solução.

Exemplo: K-Means (K-Médias)

- K = 2

- Valores Unidimensionais

- V = {3 ,1,2,0,2,10,12,9,8,11}
- Inicio:
  - M1 = 1
  - M2 = 3
- Iteração
  - 1ª Iteração
    - G1 = {1,2,0,2}
    - G2 = {3,10,12,9,8,11)
    - M1 = 1.25
    - M2 = 8.8
  - 2ª Iteração
    - G1 ={3, 1, 2, 0, 2}
    - G2 = {10, 12, 9, 8, 11}
    - M1 = 1.6
    - M2 = 10

- Distâncias entre cada objeto e as Médias (M1 e M2)
- Matriz de Distâncias

1a. iteração

	3	1	2	0	2	10	12	9	8	11
M1=1	2	0	1	1	1	9	11	8	7	10
M2=3	0	2	1	3	1	7	9	6	5	8

$$M1 = (1+2+0+2)/4 = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$M2 = (3+10+12+9+8+11)/6 = \frac{53}{6} = 8.8$$

2a. iteração

	3	1	2	0	2	10	12	9	8	11
M1=1.25	1.75	0.25	0.75	1.25	0.75	8.75	10.75	7.75	6.75	9.75
M2=8.8	5.8	7.8	6.8	8.8	6.8	1.2	3.2	0.2	0.8	2.2

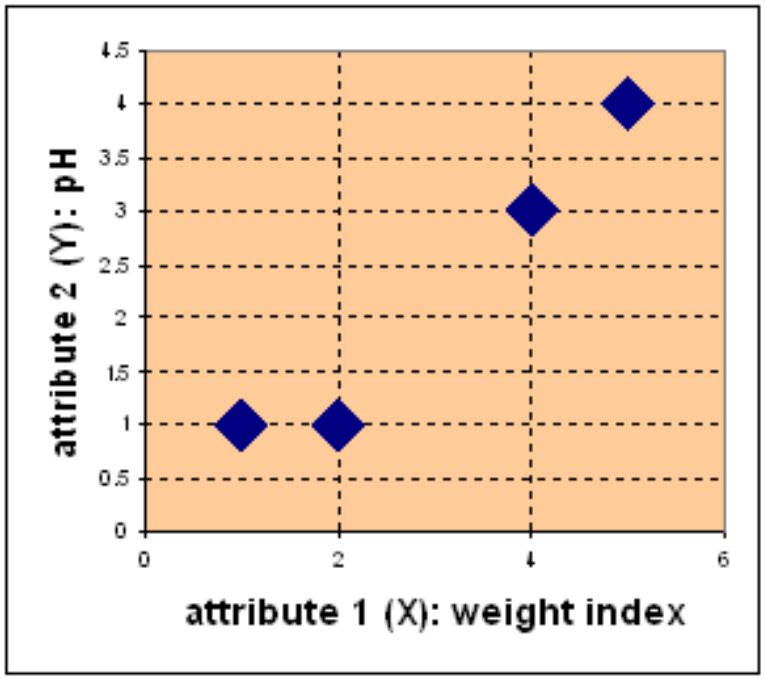
3a. iteração

M1=1.6	1.4	0.6	0.4	1.6	0.4	8.4	10.4	7.4	6.4	9.4
M2=10	7	9	8	10	8	0	2	1	2	1

Exemplo: K-Means (K-Médias)

- Valores Bi-dimensionais

Objeto	Atributo_1(X): Índice de Peso	Atributo_2(Y): pH
Produto_A	1	1
Produto_B	2	1
Produto_C	4	3
Produto_D	5	4



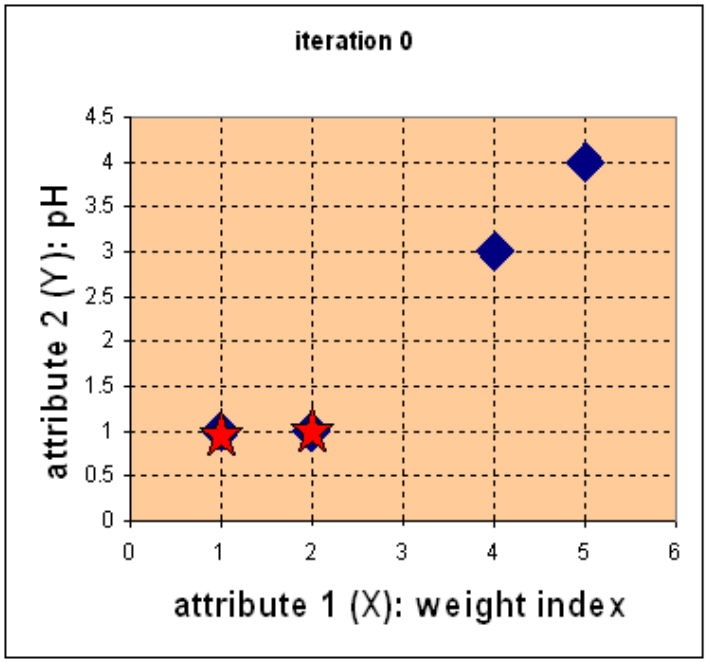
- Vetores de Características (X Y)

$$A = (1 \quad 1)$$
$$B = (2 \quad 1)$$
$$C = (4 \quad 3)$$
$$D = (5 \quad 4)$$

- Centróides Iniciais:

C_1 = (1 1)

C_2 = (2 1)



Exemplo: K-Means (K-Médias)

- D^0 = Matriz de Distâncias na iteração 0.

Coluna → Objeto Linha → Distância ao centróide

$$D^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3.61 & 5 \\ 1 & 0 & 2.83 & 4.24 \end{bmatrix}$$

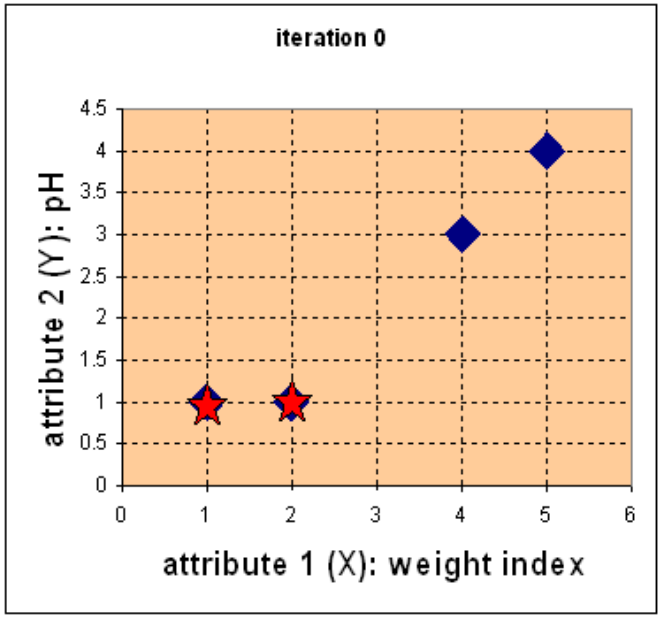
$C_1 = (1,1)$ $grupo\_1$

$C_2 = (2,1)$ $grupo\_2$

- Iteração 0.

- Distâncias Euclidianas

A	B	C	D	
1	2	4	5	X
1	1	3	4	Y



$$D(A,C_1) = \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2} = 0$$

$$D(B,C_1) = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2} = 1$$

$$D(C,C_1) = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} = 3.61$$

$$D(D,C_1) = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$D(A,C_2) = \sqrt{(1-2)^2 + (1-1)^2} = 1$$

$$D(B,C_2) = \sqrt{(2-2)^2 + (1-1)^2} = 0$$

$$D(C,C_2) = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2.83$$

$$D(D,C_2) = \sqrt{(5-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 4.24$$

Exemplo: K-Means (K-Médias)

- G^0 = Matriz de Grupos na iteração 0.

$$D^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3.61 & 5 \\ 1 & 0 & 2.83 & 4.24 \end{bmatrix}$$

$$G^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

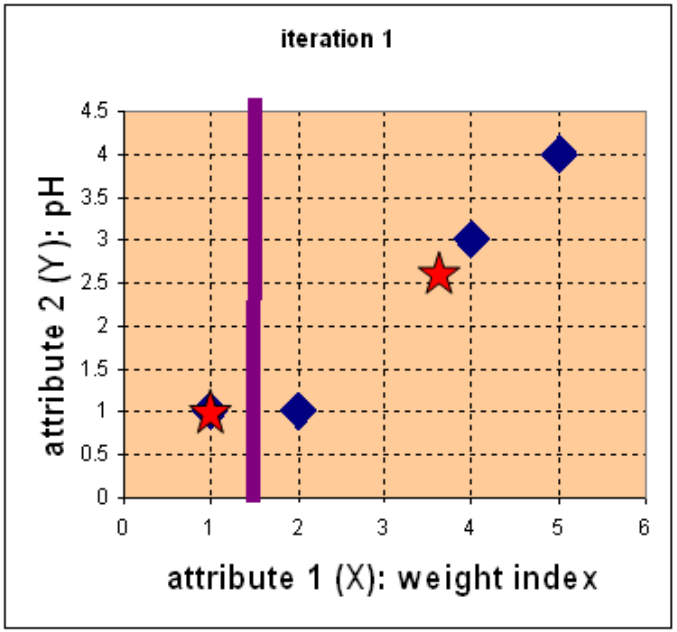
A B C D

Grupo_1 = (A)

Grupo_2 = (B C D)

- Observando-se a Matriz de Distâncias D^0, atribui-se o valor 1 na Matriz de Grupos G^0 à posição de menor distância de cada objeto.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$$



- Iteração 1.

- Novos Centróides

C_1=(1,1)

$$C_2 = \left(\frac{2+4+5}{3}, \frac{1+3+4}{3}\right) = \left(\frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) = (3.67 \quad 2.67)$$

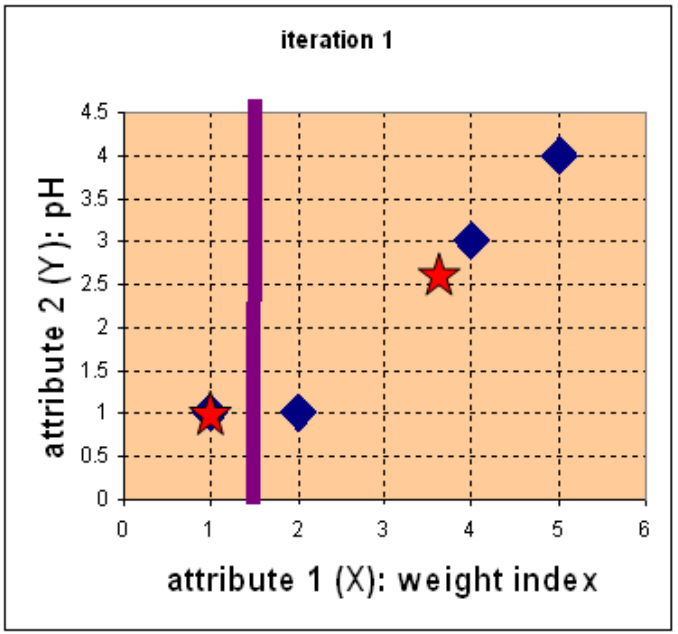
$C1 = (1,1)$ $grupo\_1$

$C2 = (3.67\ ,\ 2.67)$ $grupo\_2$

Exemplo: K-Means (K-Médias)

- Iteração 1.

$$D^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3.61 & 5 \\ 3.14 & 2.36 & 0.47 & 1.89 \end{bmatrix}$$



A B C D

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$$

$C1 = (1,1)$ $grupo\_1$

$C2 = (3.67\ ,\ 2.67)$ $grupo\_2$

$$G^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Grupo_1 = (A B)

Grupo_2 = (C D)

- Novos Centróides

$$C_1 = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (1.5\ \ 1)$$

$$C_2 = \left(\frac{4+5}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = (4.5\ \ 3.5)$$

Exemplo: K-Means (K-Médias)

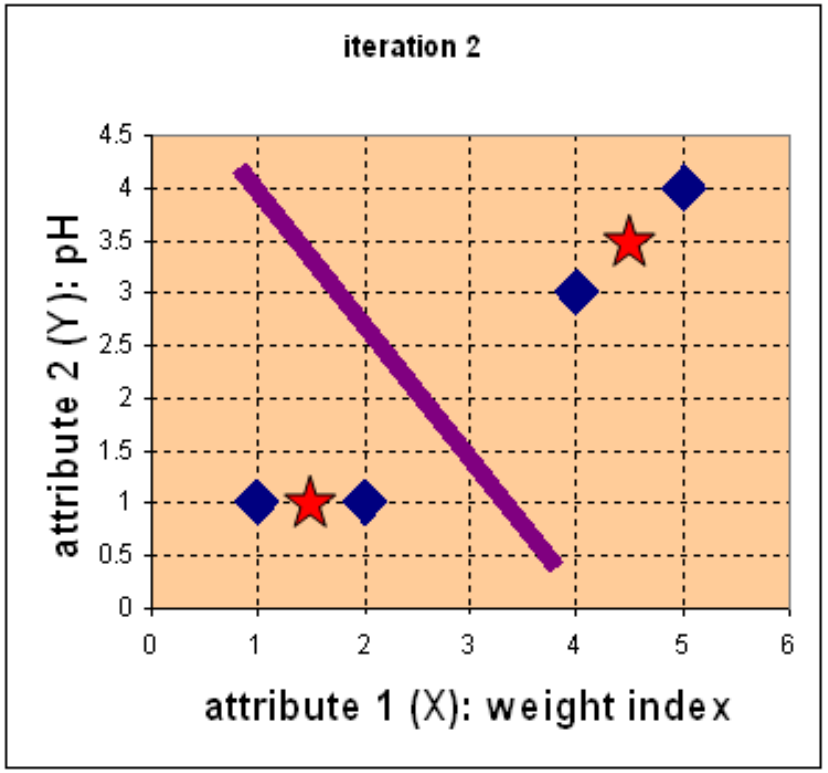
- Iteração 2.

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 3.2 & 4.61 \\ 4.3 & 3.54 & 0.71 & 0.71 \end{bmatrix}$$

A B C D

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$$

$$G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



C_1 = (1.5 1)

C_2 = (4.5 3.5)

- Como $G^2 = G^1$ os objetos não mais se moverão entre os grupos, logo a partição que agrupa os Produtos Similares é:

Grupo_1 = (A B)

Grupo_2 = (C D)