
*Fonctionnalité et description
de système - Projet*

MALEVILLE Nicolas
MESSI Louis
SELLIER Xavier

Enseignant : E. Fleury

1 Question 1

$\exists p, q \in P, (G(p) = G(q) \wedge q \neq p)$

Montrons que si $(G(p) = G(q) \wedge q \neq p) \Rightarrow q \neg \sim_l p$ par l'absurde.

– On suppose que $q \sim_l p$:

– $p = (i_p; j_p)$ et $q = (i_q; j_q)$

D'après \sim_l on a :

– $G(p) = G(q)$

– $(i_p; j_p) \sim_l (i_q; j_q) \Rightarrow i_p = i_q$

$j_p = j_q$ d'après l'énoncé.

On en déduit que $q = p$, ce qui contredit nos hypothèses.

Donc p ne peut pas être en relation \sim_l avec q .

Montrons que si $(G(p) = G(q) \wedge q \neq p) \Rightarrow q \neg \sim_c p$ par l'absurde.

– On suppose que $q \sim_c p$:

– $p = (i_p; j_p)$ et $q = (i_q; j_q)$

D'après \sim_c on a :

– $G(p) = G(q)$

– $(i_p; j_p) \sim_l (i_q; j_q) \Rightarrow j_p = j_q$

$i_p = i_q$ d'après l'énoncé.

On en déduit que $q = p$, ce qui contredit nos hypothèses.

Donc p ne peut pas être en relation \sim_c avec q .

Montrons que si $(G(p) = G(q) \wedge q \neq p) \Rightarrow q \neg \sim_b p$ par l'absurde.

D'après les règles précédentes on a $i_p \neq i_q$ et $j_p \neq j_q$. Mais vu que p et q se trouvent dans le même carré on a :

$$0 \leq |i_q - i_p| < d \text{ et}$$

$$0 \leq |j_q - j_p| < d$$

$\exists r, s \in [0, d-1]$ tels que :

$$\begin{cases} r \times d \leq i_p, i_q < (r+1) \times d \\ s \times d \leq j_p, j_q < (s+1) \times d \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} r \times d \leq i_p < d^2, 0 \leq i_q < (r+1) \times d \\ s \times d \leq j_p < d^2, 0 \leq j_q < (s+1) \times d \\ 0 \leq |i_q - i_p| < d \\ 0 \leq |j_q - j_p| < d \end{cases}$$

D'après les règles de mathématiques vues en seconde on obtient :

$$\begin{cases} r \times d \leq i_p < d^2, 0 \leq i_q < (r+1) \times d \\ s \times d \leq j_p < d^2, 0 \leq j_q < (s+1) \times d \\ 0 \leq |i_q - i_p| \leq 0 \text{ (car } d^2 - (r+1) \times d \leq 0) \\ 0 \leq |j_q - j_p| \leq 0 \text{ (car } d^2 - (s+1) \times d \leq 0) \end{cases}$$

On en déduit que $i_p = i_q$ et que $j_p = j_q$ ce qui implique que $p = q$.

Ce qui contredit nos hypothèses. Donc p ne peut pas être en relation \sim_b avec q .

2 Question 2

Lorsque notre grille est initialisée elle respecte $D = (p, q) \in P \times P \mid p \neq q \wedge (\sim_l \vee \sim_c \vee \sim_b)$
En regardant de plus près $\mathcal{C}(\pi_I)$ on distingue bien deux cas :

- $X_p \subseteq \pi_0(p)$ pour chaque $p \in P$

Cette première proposition va nous servir à raffiner notre grille. Pour chaque position p , si une couleur unique y est associée alors $\pi_G(p) = G(p)$.

Dans l'autre cas $\pi_I(p)$ nous ne sommes pas sûr que p ne contiennent qu'une seule couleur.

Par conséquent on teste voir le nombre de couleur possible pour la position p . Si on affaire à un couple (p, c) alors on attribue le singleton c à la position p . dans le cas contraire nous laissons l'ensemble C pour la position p .

- $X_q \subseteq f(X_p)$ pour chaque $(p, q) \in D$

Dans ce cas on applique $f(X_p)$ pour p et q qui sont dépendants. Si p a déjà une seule couleur attribuée, alors on la retire pour toutes les autres positions dépendantes de p si elles y existent. Si jamais p , n'a pas une seule couleur, alors on ne modifie pas les possibilités.

On effectue ce travail sur chacune des positions p , et pour chacune de ces positions on l'effectue en rapport avec des positions q dépendantes de p .

Donc la valuation π_G satisfait le système de contraintes $\mathcal{C}(\pi_0)$

3 Question 3

Soit p une position dans notre grille ne possédant qu'une seule couleur. Soit q , une position dépendante et différente de p .

Soit C' l'ensemble des couleurs disponibles pour q . Après le passage de la fonction $f(X)$, on associera à q l'ensemble $C' \setminus \{c_p\}$.

En clair ce mode de résolution séquentiel s'applique de manière unique à chaque position q dépendante de chaque position p .

Si maintenant nous obtenons une solution maximale respectant le système de contrainte $\mathcal{C}(\pi_0)$, alors en réappliquant une fois de plus nos contraintes, cela ne changerait rien, donc on aurait un $\mathcal{C}(\pi_{0'})$ identique à $\mathcal{C}(\pi_0)$.

Par conséquent notre solution maximale est unique.

4 Question 4

- Si $\pi(p) = \emptyset$ cela implique que toutes les positions q dépendantes de p sont aussi \emptyset .

Car d'après nos contraintes, à chaque fois que l'on retire une couleur à l'ensemble de couleur associé à la position p , alors on la retire aussi à chaque ensemble de couleurs des positions q , si elles sont dépendantes de p .

Et tout cela d'après notre fonction $f(X)$.

Donc nous aurons les mêmes couleurs pour p et chacune des positions q dépendantes de p .

On en déduit donc que $\pi(q) = \emptyset$ pour toute position $q \in P$.

- Si $\pi(p) = \emptyset$ alors, d'après (1) $\pi(q) = \emptyset$ pour $q \in P$.

Autrement dit notre raffinement $\pi \subseteq \pi'$. Par conséquent Nous obtenons des cases sans aucune couleur et donc impossible à compléter.

On en déduit facilement que dans ces conditions nous ne pouvons obtenir de grille solution d'un remplissage initial I tel que $\pi_I \subseteq \pi_0$.

5 Question 5

$$X_p \subseteq \{H(p) | H : E \leftrightarrow C \wedge \bigwedge_{q \in E} H(q) \in X_q\}$$

La formule $\mathcal{C}'(\pi_0)$ signifie qu'on applique les contraintes a chacune de nos classes d'équivalences. Autrement dit, lorsque q et p seront dépendants, cela signifiera automatiquement que q et p seront dans la même classe d'équivalence. De plus X_p est inclu dans $\mathcal{C}'(\pi_0)$, donc pour chaque solution de $\mathcal{C}(\pi_0)$ nous aurons les mêmes solutions que pour $\mathcal{C}'(\pi_0)$. Ce qui veut dire que si pour $\mathcal{C}(\pi_0)$ on a $\pi(p) = \emptyset$ qui implique $\pi(q) = \emptyset$ pour toute position de $q \in P$, et qu'aucune grille n'est solution d'un remplissage initial I tel que $\pi_I \subseteq \pi_0$, alors cela est vrai pour $\mathcal{C}'(\pi_0)$.

Avec notre système de contrainte $\mathcal{C}'(\pi_0)$ nous raffinons a chaque fois un peu plus notre grille. Pour une grille correctement initialisée, tout comme avec $\mathcal{C}(\pi_0)$ nous obtiendrons une seule couleur par case ou alors un ensemble de couleur sur une case. La solution trouvé par $\mathcal{C}'(\pi_0)$ implique de n'avoir qu'une seule couleur par case et donc qu'une seule couleur par classe d'équivalence. Ce qui répond parfaitement aux contraintes de $\mathcal{C}(\pi_I)$.

D'après nos contraintes $\mathcal{C}'(\pi_0)$, la construction de notre grille solution sera toujours la même, et donc unique, tout comme $\mathcal{C}(\pi_0)$ n'a qu'une seule solution maximale. si on a une grille solution en utilisant $\mathcal{C}'(\pi_0)$, alors elle sera maximale. Car si on réapplique nos contraintes, on ne modifiera pas les positions qui n'ont qu'une seule couleur et qui respectent les règles du sudoku.