MASTER 2 - Semestre 1 - 2008

Fonctionnalité et description de système - Projet

MALEVILLE Nicolas
MESSI Louis
SELLIER Xavier

Enseignant : E. Fleury

1 Question 1

$\exists$ p, q $\in$ P, (G(p) = G(q) $\wedge$ q $\neq$ p)
Montrons que si (G(p) = G(q) $\wedge$ q $\neq$ p) $\Rightarrow$ q $\neg \sim_l$ p par l'absurde.

- On suppose que q $\sim_l$ p :
  - p = $(i_p\ ;\ j_p)$ et q = $(i_q\ ;\ j_q)$
    D'après $\sim_l$ on a :
    - G(p) = G(q)
    - $\underbrace{(i_p;j_p) \sim_l (i_q;j_q) \Rightarrow i_p = i_q}$
      $j_p = j_q$ d'après l'énoncé.
      On en déduit que q = p, ce qui contredit nos hypothèses.
      Donc p ne peut pas etre en relation $\sim_l$ avec q.

Montrons que si (G(p) = G(q) $\wedge$ q $\neq$ p) $\Rightarrow$ q $\neg \sim_c$ p par l'absurde.

- On suppose que q $\sim_c$ p :
  - p = $(i_p\ ;\ j_p)$ et q = $(i_q\ ;\ j_q)$
    D'après $\sim_c$ on a :
    - G(p) = G(q)
    - $\underbrace{(i_p;j_p) \sim_l (i_q;j_q) \Rightarrow j_p = j_q}$
      $i_p = i_q$ d'après l'énoncé.
      On en déduit que q = p, ce qui contredit nos hypothèses.
      Donc p ne peut pas etre en relation $\sim_c$ avec q.

Montrons que si (G(p) = G(q) $\wedge$ q $\neq$ p) $\Rightarrow$ q $\neg \sim_b$ p par l'absurde.
D'après les règles précédentes on a $i_p \neq i_q$ et $j_p \neq j_q$. Mais vu que p et q se trouvent dans le même carré on a :
$0 \leq |\ i_q$ - $i_p\ | <$ d et
$0 \leq |\ j_q$ - $j_p\ | <$ d

$\exists$ r, s $\in$ [0, d-1] tels que :

$$\begin{cases} r \times d \leq i_p, i_q < (r+1) \times d \\ s \times d \leq j_p, j_q < (r+1) \times d \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} r \times d \leq i_p < d^2, 0 \leq i_q < (r+1) \times d \\ s \times d \leq j_p < d^2, 0 \leq j_q < (s+1) \times d \\ 0 \leq |i_q - i_p| < d \\ 0 \leq |j_q - j_p| < d \end{cases}$$

D'apès les règles de mathématiques vues en seconde on obtient :

$$\begin{cases} r \times d \leq i_p < d^2, 0 \leq i_q < (r+1) \times d \\ s \times d \leq j_p < d^2, 0 \leq j_q < (s+1) \times d \\ 0 \leq |i_q - i_p| \leq 0\ (car\ d^2 - (r+1) \times d \leq 0) \\ 0 \leq |j_q - j_p| \leq 0\ (car\ d^2 - (s+1) \times d \leq 0) \end{cases}$$

On en déduit que $i_p = i_q$ et que $j_p = j_q$ ce qui implique que p = q.
Ce qui contredit nos hypothèses. Donc p ne peut pas etre en relation $\sim_b$ avec q.

2 Question 2

Lorsque notre grille est initialisée elle respecte D = (p, q) $\in$ P $\times$ P | p $\neq$ q $\wedge$ ($\sim_l \vee \sim_c \vee \sim_b$)
En regardant de plus près $\mathcal{C}(\pi_I)$ on distingue bien deux cas :

- $X_p \subseteq \pi_0(p)$ pour chaque p $\in$ P
  Cette première proposition va nous servir a raffiner notre grille. Pour chaque position p, si une couleur unique y est associée alors π_G(p) = G(p).
  Dans l'autre cas π_I(p) nous ne sommes pas sur que p ne contiennent qu'une seule couleur.

  Par conséquent on teste voir le nombre de couleur possible pour la position p. Si on affaire a un couple (p, c) alors on attribue le singleton c à la position p. dans le cas contraire nous laissons l'ensemble C pour la position p.

- $X_q \subseteq \mathtt{f}(X_p)$ pour chaque (p, q) $\in$ D
  Dans ce cas on applique $\mathtt{f}(X_p)$ pour p et q qui sont dépendants. Si p a déjà une seule couleur attribuée, alors on la retire pour toutes les autres positions dépendantes de p si elles y existent. Si jamais p, n'a pas une seule couleur, alors on ne modifie pas les possibilités.

  On effectue ce travail sur chacune des positions p, et pour chacune de ces positions on l'effectue en rapport avec des positions q dépendantes de p.
  Donc la valuation π_G satisfait le système de contraintes $\mathcal{C}(\pi_0)$

3 Question 3

Soit p une position dans notre grille ne possédant qu'une seule couleur. Soit q, une position dépendante et différente de p.
Soit C' l'ensemble des couleurs disponibles pour q. Après le passage de la fonction f(X), on associera à q l'ensemble C' $\backslash\{c_p\}$.

En clair ce mode de résolution séquentiel s'applique de manière unique a chaque position q dépendante de chaque position p.
Si maintenant nous obtenons une solution maximale respectant le système de contrainte $\mathcal{C}(\pi_0)$, alors en réappliquant une fois de plus nos contraintes, cela ne changerait rien, donc on aurait un $\mathcal{C}(\pi_{0'})$ identique a $\mathcal{C}(\pi_0)$.
Par conséquent notre solution maximale est unique.

4 Question 4

- Si π(p) = $\emptyset$ cela implique que toutes les positions q dépendantes de p sont aussi $\emptyset$.
  Car d'après nos contraintes, a chaque fois que l'on retire une couleur à l'ensemble de couleur associé à la position p, alors on la retire aussi a chaque ensemble de couleurs des positions q, si elles sont dépendantes de p.
  Et tout cela d'après notre fonction $\mathtt{f}$(X).
  Donc nous aurons les mêmes couleurs pour p et chacune des positions q dépendantes de p.

  On en déduit donc que $\pi(q) = \emptyset$ pour toute position q $\in$ P.

- Si π(p) = $\emptyset$ alors, d'après (1) π(q) = $\emptyset$ pour q $\in$ P.
  Autrement dit notre raffinement $\pi \subseteq \pi'$. Par conséquent Nous obtenons des cases sans aucune couleur et donc impossible a compléter.

  On en déduit facilement que dans ces conditions nous ne pouvons obtenir de grille solution d'un remplissage initial I tel que $\pi_I \subseteq \pi_0$.

5 Question 5

$$X_p \subseteq \{H(p)|H : E \leftrightarrow C \wedge \bigwedge_{q \in E} H(q) \in X_q\}$$

La formule $\mathcal{C}'(\pi_0)$ signifie qu'on applique les contraintes a chacune de nos classes d'équivalences. Autrement dit, lorsque q et p seront dépendants, cela signifiera automatiquement que q et p seront dans la même classe d'équivalence. De plus X_p est inclu dans $\mathcal{C}'(\pi_0)$, donc pour chaque solution de $\mathcal{C}(\pi_0)$ nous aurons les mêmes solutions que pour $\mathcal{C}'(\pi_0)$. Ce qui veut dire que si pour $\mathcal{C}(\pi_0)$ on a π(p) $= \emptyset$ qui implique π(q) $= \emptyset$ pour toute position de q $\in$ P, et qu'aucune grille n'est solution d'un remplissage initial I tel que $\pi_I \subseteq \pi_0$, alors cela est vrai pour $\mathcal{C}'(\pi_0)$.

Avec notre système de contrainte $\mathcal{C}'(\pi_0)$ nous raffinons a chaque fois un peu plus notre grille. Pour une grille correctement initialisée, tout comme avec $\mathcal{C}(\pi_0)$ nous obtiendrons une seule couleur par case ou alors un ensemble de couleur sur une case. La solution trouvé par $\mathcal{C}'(\pi_0)$ implique de n'avoir qu'une seule couleur par case et donc qu'une seule couleur par classe d'équivalence. Ce qui répond parfaitement aux contraintes de $\mathcal{C}(\pi_I)$.