



IEL – protokol k projektu

Kirill Shchetiniuk
xshche05

17. prosince 2022

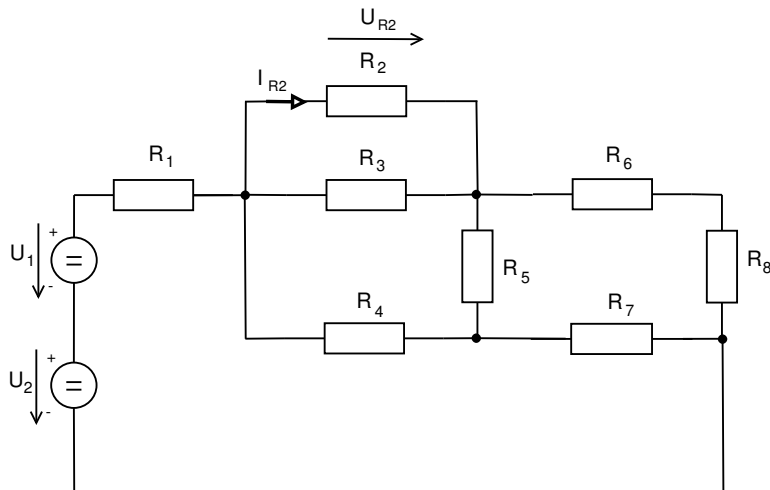
Obsah

1	Příklad 1	2
1.1	Řešení	2
1.2	Výsledky	5
2	Příklad 2	6
2.1	Řešení	6
2.2	Výsledky	7
3	Příklad 3	8
3.1	Řešení	8
3.2	Výsledky	9
4	Příklad 4	10
4.1	Řešení	10
4.2	Výsledky	11
5	Příklad 5	12
5.1	Řešení	12
5.2	Výsledky	13
5.3	Kontrola	13
6	Shrnutí výsledků	14

Příklad 1

Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
A	80	120	350	650	410	130	360	750	310	190

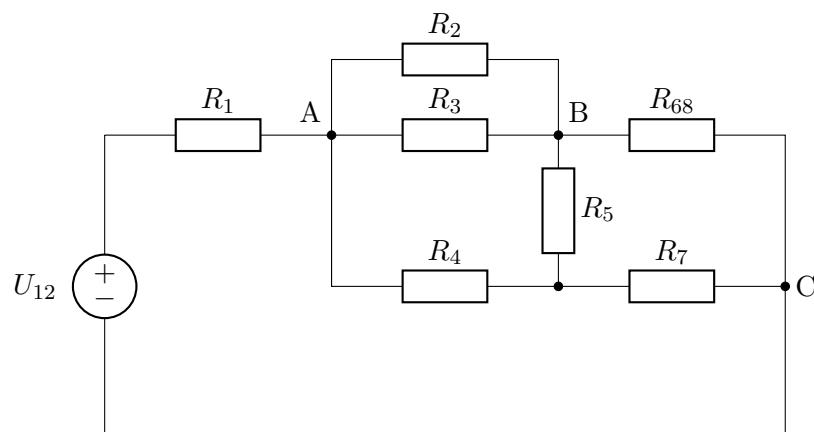


Řešení

Nejprve tedy můžeme zjednodušit rezistory R_6 a R_8 , jsou zapojeny sériově, a zároveň sloučit zdroje napětí U_1 a U_2 . Po zjednodušení bude v obvodu rezistor, který nazveme R_{68} a jediný zdroj napětí U_{12} :

$$R_{68} = R_6 + R_8 = 750 + 190 = 940\Omega$$

$$U_{12} = U_1 + U_2 = 80 + 120 = 200\text{V}$$



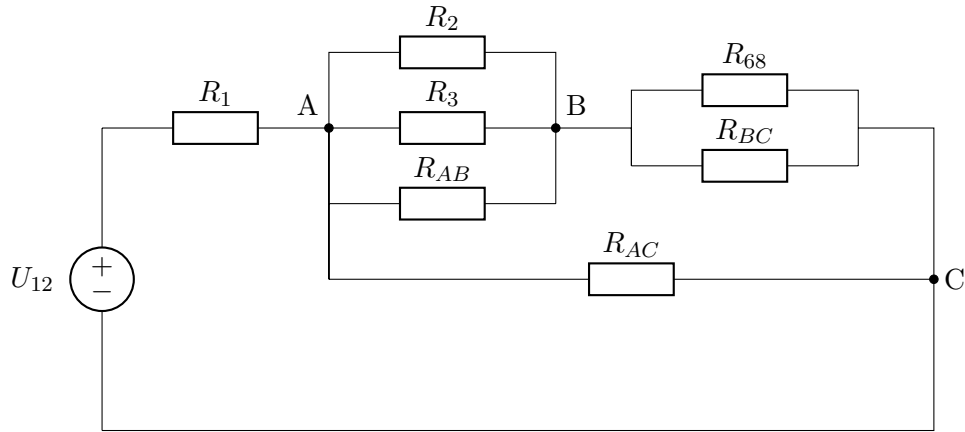
Ted' nemůžeme jednoznačně určit, jak jsou rezistory R_4 , R_5 a R_7 zapojeny. Abychom jsme mohli to jednoznačně určit, musíme provést transformace. Povedeme transformace Hvězda \rightarrow Trojúhelník a

dostaneme nový obvod:

$$R_{AB} = R_4 + R_5 + \frac{R_4 * R_5}{R_7} = 130 + 360 + \frac{130 * 360}{310} \approx 640.9677\Omega$$

$$R_{AC} = R_4 + R_7 + \frac{R_4 * R_7}{R_5} = 130 + 310 + \frac{130 * 310}{360} \approx 551.9444\Omega$$

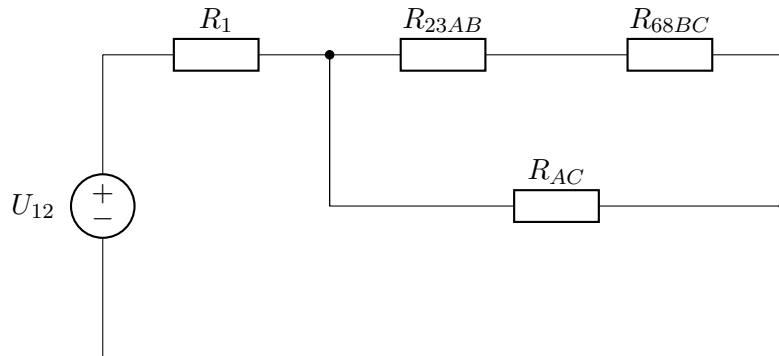
$$R_{BC} = R_5 + R_7 + \frac{R_5 * R_7}{R_4} = 360 + 310 + \frac{360 * 310}{130} \approx 1528.4615\Omega$$



Rezistory R_2 , R_3 a R_{AB} jsou paralelně zapojeny, po zjednodušení bude v obvodu rezistor, který nazveme R_{23AB} . Zároveň R_{68} a R_{BC} jsou paralelně zapojeny, po zjednodušení bude v obvodu rezistor, který nazveme R_{68BC} . Po zjednodušení dostaneme nový obvod:

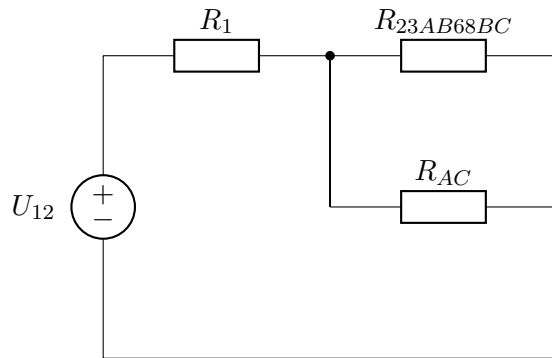
$$R_{23AB} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{AB}}} = \frac{1}{\frac{1}{650} + \frac{1}{410} + \frac{1}{640.9677}} \approx 180.5828\Omega$$

$$R_{68BC} = \frac{1}{\frac{1}{R_{68}} + \frac{1}{R_{BC}}} = \frac{1}{\frac{1}{940} + \frac{1}{1528.4615}} \approx 582.0443\Omega$$



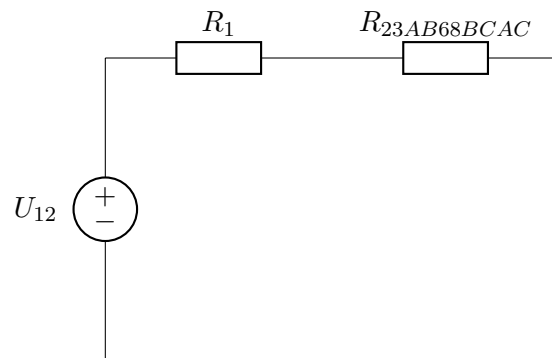
Rezistory R_{23AB} a R_{68BC} jsou zapojeny sériově, po zjednodušení bude v obvodu rezistor, který nazveme $R_{23AB68BC}$. Po zjednodušení dostaneme nový obvod:

$$R_{23AB68BC} = R_{23AB} + R_{68BC} = 180.5828 + 582.0443 = 762.6271\Omega$$



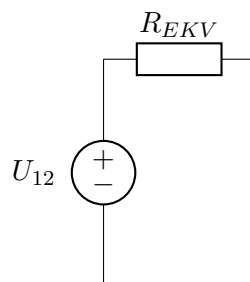
Rezistory $R_{23AB68BC}$ a R_{AC} jsou zapojeny paralelně, po zjednodušení bude v obvodu rezistor, který nazveme $R_{23AB68BCAC}$. Po zjednodušení dostaneme nový obvod:

$$R_{23AB68BCAC} = \frac{1}{\frac{1}{R_{23AB68BC}} + \frac{1}{R_{AC}}} = \frac{1}{\frac{1}{762.6271} + \frac{1}{551.9444}} \approx 320.2015\Omega$$



Rezistory R_1 a $R_{23AB68BCAC}$ jsou zapojeny sériově, po zjednodušení bude v obvodu rezistor, který nazveme R_{EKV} . Po zjednodušení dostaneme nový obvod:

$$R_{EKV} = R_1 + R_{23AB68BCAC} = 350 + 320.2015 = 670.2015\Omega$$



Teď můžeme spočítat celkový proud I :

$$I = \frac{U_i}{R_{EKV}} = \frac{200}{670.2015} \approx 0.2984\text{A}$$

Nyní zpětně spočítáme U_{R_2} a I_{R_2} :

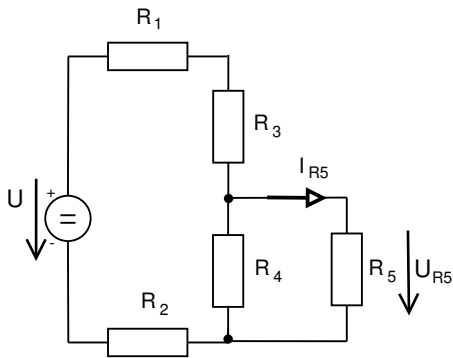
Výsledky

$$\begin{aligned}U_{R_{23AB68BCAC}} &= \frac{R_{23AB68BCAC}}{R_{23AB68BCAC} + R_1} * U_{12} = \frac{320.2015}{320.2015 + 350} * 200 \approx 95.5538V \\U_{R_{23AB68BC}} &= U_{R_{23AB68BCAC}} = 95.5538V \\U_{R_{23AB}} &= \frac{R_{23AB}}{R_{23AB} + R_{68BC}} * U_{R_{23AB68BC}} = \frac{180.5828}{180.5828 + 582.0443} * 95.5538 \approx 22.6262V \\U_{R_2} &= U_{R_{23AB}} = 22.6262V \\I_{R_2} &= \frac{U_{R_2}}{R_2} = \frac{22.6262}{650} \approx 0.0348A\end{aligned}$$

Příklad 2

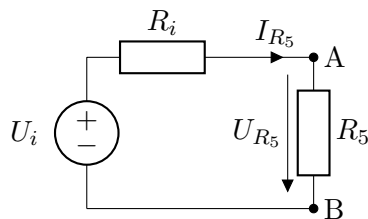
Stanovte napětí U_{R5} a proud I_{R5} . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
E	250	150	335	625	245	600

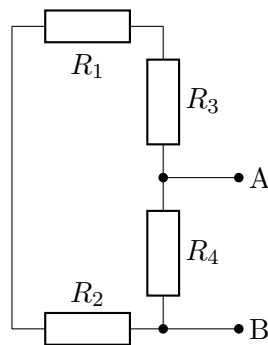


Řešení

Pro řešení příkladů vytvoříme ekvivalentní obvod a zjistíme R_i a U_i :

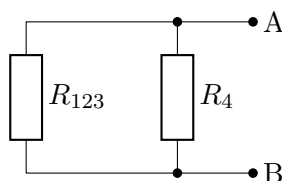


Nejprve v původním obvodu zkratují (odpojím) napěťový zdroj a odpojím R_5 , obvod zjednoduším a zjistím R_i :



Rezistory R_1 , R_2 a R_3 jsou zapojené sériově - zjednoduším na R_{123} :

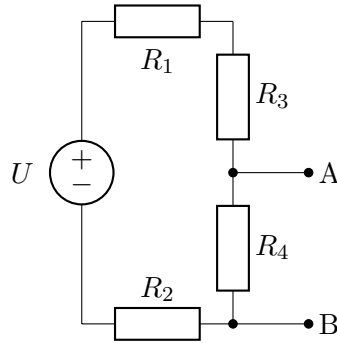
$$R_{123} = R_1 + R_2 + R_3 = 150 + 335 + 625 = 1110\Omega$$



Rezistory R_{123} a R_4 jsou zapojené paralelně - zjednoduším a zjistím R_i :

$$R_i = \frac{1}{\frac{1}{R_{123}} + \frac{1}{R_4}} = \frac{1}{\frac{1}{1110} + \frac{1}{245}} \approx 200.7011\Omega$$

Nyní je třeba zjistit I_x :



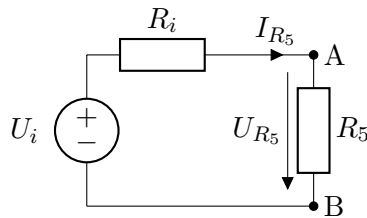
$$R_{1234} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 150 + 335 + 625 + 245 = 1355\Omega$$

$$I_x = \frac{U}{R_{1234}} = \frac{250}{1355} \approx 0.1845\text{A}$$

U_i bude se rovnat U_{R_4} :

$$U_i = U_{R_4} = I_x * R_4 = 0.1845 * 245 \approx 45.203\text{V}$$

Teď třeba zjistit U_{R_5} a I_{R_5} :



Výsledky

R_i a R_5 jsou zapojené sériově, spočítáme U_{R_5} a I_{R_5} :

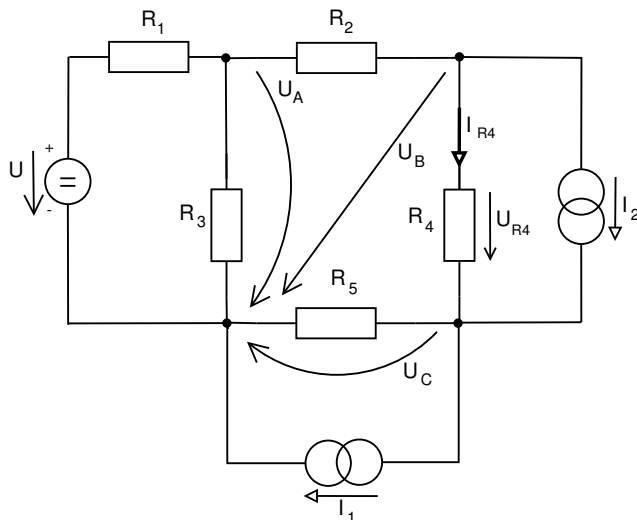
$$U_{R_5} = \frac{R_5}{R_i + R_5} * U_i = \frac{600}{200.7011 + 600} * 45.203 \approx 33.8725\text{V}$$

$$I_{R_5} = \frac{U_{R_5}}{R_5} = \frac{33.8725}{600} = 0.0565\text{A}$$

Příklad 3

Stanovte napětí U_{R4} a proud I_{R4} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
C	110	0.85	0.75	44	31	56	20	30



Řešení

Dle II. Kirchhoffova zákona zapíšeme rovnice pro uzly A (začátek napětí U_A), B (začátek napětí U_B), C (začátek napětí U_C):

$$\begin{aligned} A : \quad I_{R_1} - I_{R_2} - I_{R_3} &= 0 \\ B : \quad I_{R_2} - I_{R_4} - I_2 &= 0 \\ C : \quad I_{R_4} + I_2 - I_1 - I_{R_5} &= 0 \end{aligned}$$

Spočítáme proudy pro každý rezistor s napětími U_A, U_B, U_C :

$$\begin{aligned} I_{R_1} &= \frac{U - U_A}{R_1} \\ I_{R_2} &= \frac{U_A - U_B}{R_2} \\ I_{R_3} &= \frac{U_A}{R_3} \\ I_{R_4} &= \frac{U_B - U_C}{R_4} \\ I_{R_5} &= \frac{U_C}{R_5} \end{aligned}$$

Dostaneme rovnice pro každý uzel, kde proud je vyjádřen napětím a odporem:

$$\begin{aligned} A : \quad \frac{110 - U_A}{44} - \frac{U_A - U_B}{31} - \frac{U_A}{56} &= 0 \\ B : \quad \frac{U_A - U_B}{31} - \frac{U_B - U_C}{20} - 0.75 &= 0 \\ C : \quad \frac{U_B - U_C}{20} + 0.75 - 0.85 - \frac{U_C}{30} &= 0 \end{aligned}$$

Vyneseme koeficienty za závorky:

$$\begin{aligned}A: \quad & -U_A * \frac{92}{1263} + U_B * \frac{1}{31} = -2.5 \\B: \quad & U_A * \frac{1}{31} - U_B * \frac{51}{620} + U_C * \frac{1}{20} = 0.75 \\C: \quad & U_B * \frac{1}{20} - U_C * \frac{1}{12} = 0.1\end{aligned}$$

Zapíšeme soustavu rovnic do matice a spočítáme hodnoty U_A , U_B , U_C :

$$\begin{pmatrix} -\frac{92}{1263} & \frac{1}{31} & 0 \\ \frac{1}{31} & -\frac{51}{620} & \frac{1}{20} \\ 0 & \frac{1}{20} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 0.75 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$U_A = 37.7857\text{V}$$

$$U_B = 7.8245\text{V}$$

$$U_C = 3.4947\text{V}$$

Výsledky

Vypočítáme si U_{R_4} , a pak dopočítáme proud I_{R_4} :

$$U_{R_4} = U_B - U_C = 7.8245 - 3.4947 = 4.3298\text{V}$$

$$I_{R_4} = \frac{U_{R_4}}{R_4} = \frac{4.3298}{20} = 0.2165\text{A}$$

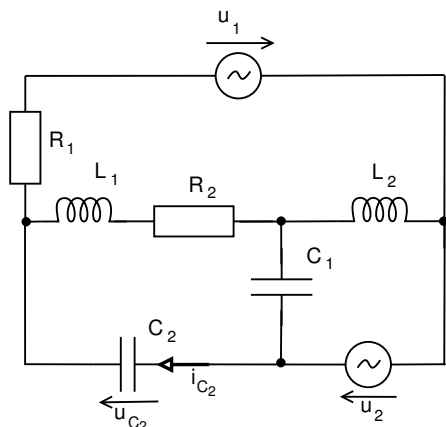
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{C_2} = U_{C_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{C_2})$ určete $|U_{C_2}|$ a φ_{C_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

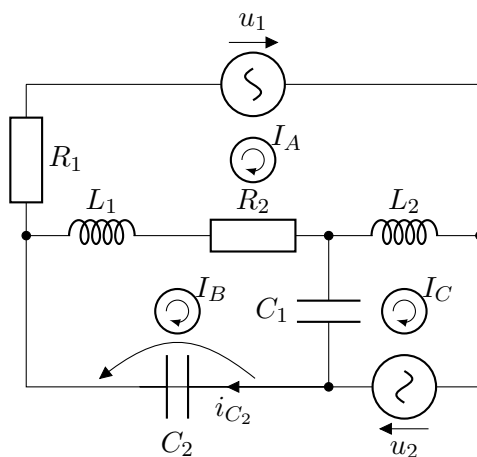
Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
A	3	5	12	14	120	100	200	105	70



Řešení

Určíme směr proudu pro každou smyčku, určíme proudy I_A , I_B , I_C a jích směr:



Spočítáme hodnoty impedance pro cívky a kondenzátory:

$$\omega = 2\pi f = 2 * \pi * 70 = 140\pi = 439.8230 \text{ Rad}$$

$$Z_{C_1} = \frac{-j}{\omega C_1} = \frac{-j}{439.8230 * 200 * 10^{-6}} = -11.3682j\Omega$$

$$Z_{C_2} = \frac{-j}{\omega C_2} = \frac{-j}{439.8230 * 105 * 10^{-6}} = -21.6537j\Omega$$

$$Z_{L_1} = j\omega L_1 = j * 439.8230 * 120 * 10^{-3} = 52.7788j\Omega$$

$$Z_{L_2} = j\omega L_2 = j * 439.8230 * 100 * 10^{-3} = 43.9823j\Omega$$

Spočítáme napětí u_1 a u_2 :

$$u_1 = U_1 * \sin(2\pi ft) = U_1 * \sin\left(2\pi f * \frac{\pi}{4\pi f}\right) = U_1 * \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = U_1 * 1 = 3V$$

$$u_2 = U_2 * \sin(2\pi ft) = U_2 * \sin\left(2\pi f * \frac{\pi}{4\pi f}\right) = U_2 * \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = U_2 * 1 = 5V$$

Dle II. Kirchhoffova zákona zapíšeme pro každou smyčku rovnice pro napětí, dále dostaneme soustavu rovnic pro napětí ve smyčkách:

$$I_A : U_{L_2} + U_{R_2} + U_{L_1} + U_{R_1} + u_1 = 0$$

$$I_B : U_{C_1} + U_{C_2} + U_{L_1} + U_{R_2} = 0$$

$$I_C : u_2 + U_{C_1} + U_{L_2} = 0$$

Určíme napětí přes proud a odpor:

$$I_A : I_A * (Z_{L_2} + R_2 + Z_{L_1} + R_1) - I_B * (Z_{L_1} + R_2) - I_C * (Z_{L_2}) = -u_1$$

$$I_B : -I_A * (Z_{L_1} + R_2) + I_B * (Z_{C_1} + Z_{C_2} + Z_{L_1} + R_2) - I_C * (Z_{C_1}) = 0$$

$$I_C : -I_A * (Z_{L_2}) - I_B * (Z_{C_1}) + I_C * (Z_{L_2} + Z_{C_1}) = -u_2$$

Matice pro výpočet proudů v každou smyčce:

$$\begin{pmatrix} Z_{L_2} + R_2 + Z_{L_1} + R_1 & -Z_{L_1} - R_2 & -Z_{L_2} \\ -Z_{L_1} - R_2 & Z_{C_1} + Z_{C_2} + Z_{L_1} + R_2 & -Z_{C_1} \\ -Z_{L_2} & -Z_{C_1} & Z_{L_2} + Z_{C_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ 0 \\ -u_2 \end{pmatrix}$$

Spočítáme hodnoty proudů v každou smyčce:

$$\begin{pmatrix} 26.0000 + 96.7611j & -14.0000 - 52.7788j & -43.9823 \\ -14.0000 - 52.7788j & 14.0000 + 19.7568j & 11.3682 \\ -43.9823 & 11.3682 & 32.6141 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$I_A = (-0.1025 - 0.1024j)A$$

$$I_B = (-0.0568 - 0.3126j)A$$

$$I_C = (-0.1185 + 0.1242j)A$$

Výsledky

Spočítáme proud i_{C_2} , napětí $|U_{C_2}|$ a fázový posun φ_{C_2} :

$$i_{C_2} = I_B = (-0.0568 - 0.3126j)A$$

$$U_{C_2} = i_{C_2} * Z_{C_2} = (-0.0568 - 0.3126j) * (-21.6537j) = (-6.7697 + 1.2291j)V$$

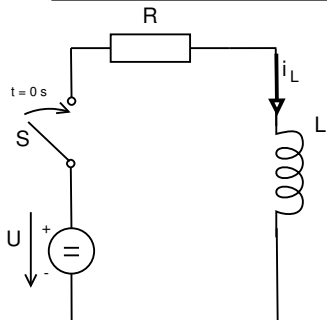
$$|U_{C_2}| = \sqrt{Re(U_{C_2})^2 + Im(U_{C_2})^2} = \sqrt{(-6.7697)^2 + (1.2291)^2} = 6.8804V$$

$$\varphi_{C_2} = \arctan\left(\frac{Im(U_{C_2})}{Re(U_{C_2})}\right) + \pi = \arctan\left(\frac{1.2291}{-6.7697}\right) + \pi = 2.9620Rad = 169.7093^\circ$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	L [H]	R [Ω]	$i_L(0)$ [A]
E	50	30	40	10



Řešení

Sestavíme rovnici pro i_L :

$$i'_L = \frac{U_L}{L}$$

Vyjádříme napětí U_L :

$$U_L = U - U_R$$

Upravíme rovnici:

$$\begin{aligned} i'_L &= \frac{U - U_R}{L} \\ i_R &= i_L \\ U_R &= R * i_L \\ i'_L &= \frac{U - R * i_L}{L} \end{aligned}$$

Sestavíme rovnici napětí v obvodu:

$$\begin{aligned} L * i'_L + R * i_L &= U \\ 30i'_L + 40i_L &= 50 \end{aligned}$$

Obecný tvar pro cívku:

$$i_L(t) = K(t) * e^{\lambda t}$$

Nemáme pro rovnice λ a $K(t)$. Nejprve zjistíme λ :

$$\begin{aligned} L\lambda + R &= 0 \\ \lambda &= -\frac{R}{L} = -\frac{40}{30} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Ted' pomoci λ zjistíme $K(t)$:

$$\begin{aligned}i_L(t) &= K(t) * e^{\lambda t} \\i_L(t) &= K(t) * e^{-\frac{4}{3}t} \\i_L(t)' &= K(t)' * e^{-\frac{4}{3}t} - \frac{4}{3}K(t) * e^{-\frac{4}{3}t}\end{aligned}$$

Spočítáme hodnotu $K(t)'$:

$$\begin{aligned}30 * (K(t)' * e^{-\frac{4}{3}t} - \frac{4}{3}K(t) * e^{-\frac{4}{3}t}) + 40 * (K(t) * e^{-\frac{4}{3}t}) &= 50 \\30K(t)'e^{-\frac{4}{3}t} - 40K(t)e^{-\frac{4}{3}t} + 40K(t)e^{-\frac{4}{3}t} &= 50 \\30K(t)'e^{-\frac{4}{3}t} &= 50 \\K(t)' &= \frac{5}{3}e^{\frac{4}{3}t}\end{aligned}$$

Spočítáme hodnotu $K(t)$:

$$\begin{aligned}K(t) &= \int \frac{5}{3}e^{\frac{4}{3}t}dt \\K(t) &= \frac{5}{4}e^{\frac{4}{3}t} + C\end{aligned}$$

Spočítáme hodnotu C , když máme $t = 0$:

$$\begin{aligned}i_L(t) &= \left(\frac{5}{4}e^{\frac{4}{3}t} + C\right) * e^{-\frac{4}{3}t} \\i_L(t) &= \frac{5}{4} + Ce^{-\frac{4}{3}t} \\i_L(0) &= \frac{5}{4} + C \\10 &= \frac{5}{4} + C \\C &= 10 - \frac{5}{4} = \frac{35}{4} = 8.75\end{aligned}$$

Výsledky

Konečná rovnice má tvar:

$$i_L(t) = 1.25 + 8.75e^{-\frac{4}{3}t}$$

Kontrola

$$\begin{aligned}i_L(t)' &= \frac{5}{3} * e^{\frac{4}{3}t} * e^{-\frac{4}{3}t} - \frac{4}{3} \left(\frac{5}{4}e^{\frac{4}{3}t} + \frac{35}{4} \right) e^{-\frac{4}{3}t} \\i_L &= \frac{5}{4} + \frac{35}{4}e^{-\frac{4}{3}t} \\30i_L' &+ 40i_L = 50 \\30 \left(\frac{5}{3} * e^{\frac{4}{3}t} * e^{-\frac{4}{3}t} - \frac{4}{3} \left(\frac{5}{4}e^{\frac{4}{3}t} + \frac{35}{4} \right) e^{-\frac{4}{3}t} \right) &+ 40 \left(\frac{5}{4} + \frac{35}{4}e^{-\frac{4}{3}t} \right) = 50 \\50 - 50 - 35e^{-\frac{4}{3}t} + 50 + 35e^{-\frac{4}{3}t} &= 50 \\50 &= 50\end{aligned}$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky
1	A	$U_{R2} = 22.6262\text{V}$ $I_{R2} = 0.0348\text{A}$
2	E	$U_{R5} = 33.8725\text{V}$ $I_{R5} = 0.0565\text{A}$
3	C	$U_{R4} = 4.3298\text{V}$ $I_{R4} = 0.2165\text{A}$
4	A	$ U_{C2} = 6.8804\text{V}$ $\varphi_{C2} = 169.7093^\circ$
5	E	$i_L(t) = 1.25 + 8.75e^{-\frac{4}{3}t}$