Set , Relation, Function

ดร.ธนัญชัย ตรีภาค

Set = An unordered collection of objects.

ไม่ระบุชนิดของแต่ละ กำหนดเงื่อนไข #อะไรอยู่ใน set ก็ได้

The objects that comprises of the set are called **elements** .

$$\{ \dots , \dots , \dots , \dots , \dots \}$$

Number of objects in a set can be finite or infinite.

The number of elements in a set is called the **cardinality** of the set.
(If S is a set the **cardinality is denoted by |S|**)

$n(A) = |A|$

$\{\emptyset\} = |0|$

$\{1, 2, 3\} = |3|$

Set Notations

- $\varnothing = \{\ \}$, the empty set.
- $N = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$, the non-negative integers
- $N+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, the positive integers
- $Z = \{\ldots , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , \ldots\}$, the integers

สามารถเขียนในรูปเศษส่วนได้ $\frac{A}{B}$

- $Q = \{ q \mid q = a/b , a , b \in Z , b \neq 0 \}$, the rational numbers
- $Q+ = \{ q \mid q \in Q , q > 0\}$, the positive rationals
- R, the real numbers
- R+, the positive reals

Set Builder Notation

$x \in S$: x is an element of the set S we write as

All the elements of set T is contained in the set S then T is called a **subset** of the set S

สมาชิก T ทุกตัวเป็นสมาชิกของ S

and is denoted as $T \subseteq S$ or $T \subset S$ (depending on whether the containment is strict of not).

Conversely, in this case S is called a **super-set** of T.

$P(S)$ is the set of all subsets of S

คือ set ของ subset ของ set ๆ หนึ่ง $P(A) = 2^{n(A)}$

ลองเขียน Set ต่อไปนี้

- P({1,2,3}) $= \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
- Set ของเลขคี่ที่อยู่ในช่วง 1-100 $= \{1, 3, 5, 7, \ldots, 99\}$
- P(∅) $= \{\{\emptyset\}\}$
- P({∅}) $= \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$
- |P(P(P(P(∅))))|

เขียนยาว แต่ที่แน่ๆ มี $2^{2^{2^{2^{n(S)}}}} = 2^{2^{2^{2^{0}}}} = 16$

- In some context we may have to allow repetitions. We call them **multisets** . Thus in the multiset {1, 1, 2} is different from {1, 2} is different from {1, 1, 1, 2}.

- Sometimes we care about the ordering of the elements in the set. We call them **ordered sets** . They are sometime referred as lists or strings or vectors. For example: the ordered set {1, 2, 3} is different from {2, 1, 3}.

- We can also have **ordered multi-sets**.

set → เรื่องลำดับ

เรื่องซ้ำสมาชิก

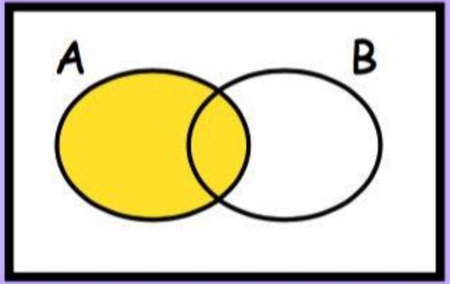
แล้วแต่เรากำหนด

Set Operations

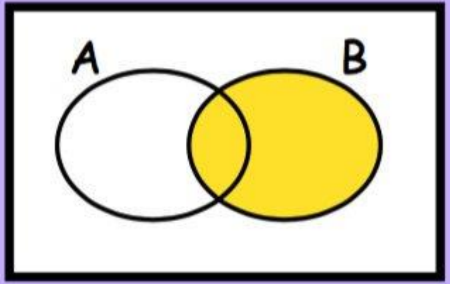
- Union, $\cup$.   รวม
  - $A \cup B$ is the set of all elements that are in A OR B.
  - $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$
- Intersection, $\cap$ ที่ทับ
  - $A \cap B$ is the set of all elements that are in A AND B.
  - $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$
- Complement, A^c or $\bar{A}$ ด้านนอก
  - A^c or $\bar{A}$ are the set of elements NOT in A.
  - $\bar{A} = \{ x \in U \mid x \notin A \}$
- Difference , A-B   ไม่เอา
  - $A-B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Corbettmαths

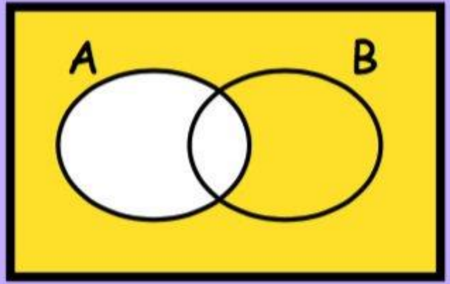
Venn Diagrams



A

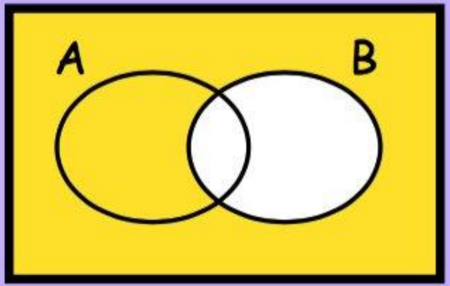


B



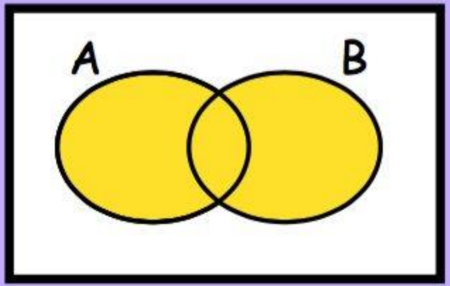
A'

Complement of A



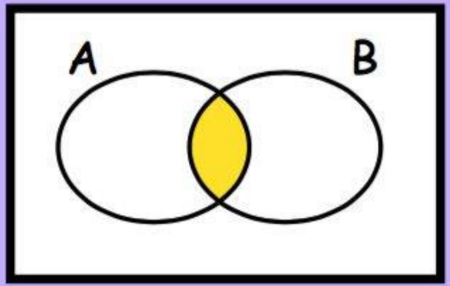
B'

Complement of B



$A \cup B$

A union B

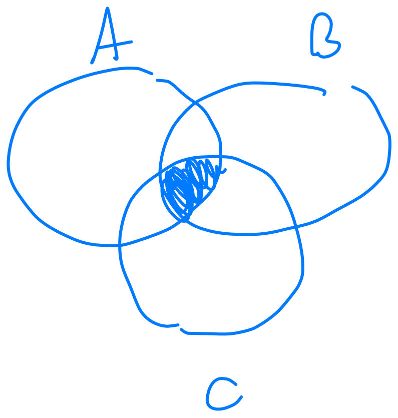


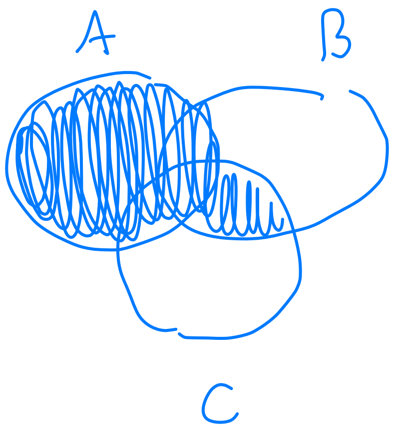
$A \cap B$

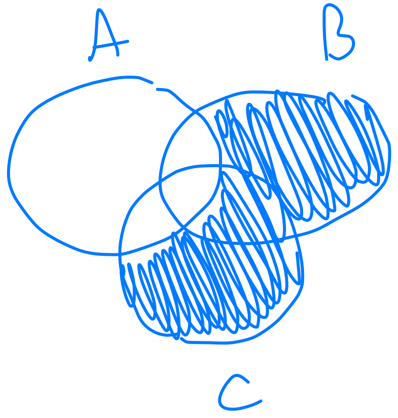
A intersect B

Activity : Venn Diagram

- เขียน Venn Diagram โดยระบุพื้นที่ของ Set Operation ดังต่อไปนี้
    - $A \cap B \cap C$
    - $A \cup (B \cap C)$
    - $A^c \cap (B \cup C)$







Rules of Set Theory

$p \to q \equiv \sim p \vee q$

$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

Let p, q and r be sets.

- Commutative law: สลับที่
  - $(p \cup q) = (q \cup p)$ and $(p \cap q) = (q \cap p)$
- Associative law: เปลี่ยนกลุ่ม
  - $(p \cup (q \cup r)) = ((p \cup q) \cup r)$ and $(p \cap (q \cap r)) = ((p \cap q) \cap r)$
- Distributive law: การแจกแจง
  - $(p \cup (q \cap r)) = (p \cup q) \cap (p \cup r)$ and
  - $(p \cap (q \cup r)) = (p \cap q) \cup (p \cap r)$
- De Morgan's Law: [illegible]
  - $(p \cup q)^c = (p^c \cap q^c)$ and $(p \cap q)^c = (p^c \cup q^c)$

Activity : จงพิสูจน์ว่า

- $A \cap (A \cap B')' = A \cap B$
- $A \cup (B' \cup A)' = A \cup B$
- $A \cap (B \cup A') = A \cap B$

Activity : จงหาค่าต่อไปนี้

- $(P \cap Q')' = ?$
- $(C \cap (B \cup A'))' = ?$
- $A \cup (B \cap A)' = ???$

- $A \cap (A' \cup B)$
  $(A \cap A') \cup (A \cap B)$
  $\emptyset \cup (A \cap B)$
  $A \cap B$

- $A \cup (B \cap A')$
  $(A \cup B) \cap (A \cup A')$
  $(A \cup B) \cap (U)$
  $A \cup B$

- $(A \cap B) \cup (A \cap A')$
  $(A \cap B) \cup (\emptyset)$
  $A \cap B$

Activity : จงเขียน code ภาษา C ที่ให้ผลลัพธ์เหมือนกับตัวอย่าง

If ((!(y>=U)) and (!(y<=L))) then call_func(y);

กำหนด $y>=U$ เป็น A และ $y<=L$ เป็น B

if $(\sim A \cap \sim B)$ → ทำงาน 3 รอบ

if $(\sim(A \cup B))$ → ทำให้เกิดทำงานเร็วขึ้น

ทำงาน 2 รอบ

Cartesian Product

→ คู่อันดับ

- Let A be a set. A x A is a the set of ordered pairs (x, y) where x, y $\in$ A.

- Similarly, A x A x … x A (n times) (also denoted as A^n) is the set of all ordered subsets (with repetitions) of A of size n

- For example: $\{0, 1\}^n$ the set of all “strings” of 0 and 1 of length n.

Activity : Cartesian Product

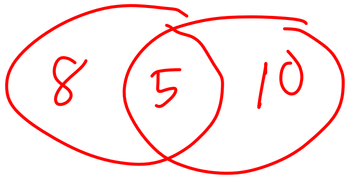
$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$ $B \times A = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

- A={a,b} , B={1,2} จงหาค่าของ A x B และ B x A

$\underline{2}\ \underline{2}\ \underline{3} = 12$ ตัว

- A={1,2} , B={3,4} , C={5,6,7} จงหาค่าของ A x B x C และ |A x B x C|
- ถ้า|A| = 5 , |B| = 8 และ |A ∪ B| = 11 จงหา |A ∩ B| = 2
- ถ้า $|A^c \cap B| = 10$, $|A \cap B^c| = 8$ และ $|A \cap B| = 5$ จงหาค่า $|A \cup B|$
- จงหา $|\{0, 1\}^n|$

2^n



$n(A \cup B) = 23$

Relation

คือ เซตของคู่อันดับที่มีความสัมพันธ์ตามที่กำหนดไว้

Type of relations

Three main types of relations:

- [Reflexive] "x related to x", that is, the relation R on the set S is reflexive is for all $x \in S$, $(x, x) \in R$.
- [Symmetric] "x related to y implies y related to x", that is, the relation R on the set S is symmetric is for all $x, y \in S$, $(x, y) \in R$ implies $(y, x) \in R$.
- [Transitive] "x related to y and y related to z implies x is related to z", that is, the relation R on the set S is symmetric is for all $x,y,z \in S$, $(x, y) \in R$ and $(y, z) \in R$ implies $(x, z) \in R$.

If a relation is reflexive, symmetric and transitive then it is called an equivalence relation. An equivalence relation is often denoted by $\equiv$

↳ ต้องมีคุณสมบัติครบ 3 อย่างข้างบน

reflexive $1 = 1$

symmetric $1^{\circ} = 1^{\triangle}$ แล้ว $1^{\triangle} = 1^{\circ}$

transitive $1^{\circ} = 1^{\triangle}$, $1^{\triangle} = 1^{\square}$ แล้ว $1^{\circ} = 1^{\square}$

Activity :

- จงพิสูจน์ว่า “=“ เป็น equivalence relation.
- “≤“ มีคุณสมบัติใดบ้าง (reflexive, symmetric หรือ transitive)
- “>“ มีคุณสมบัติใดบ้าง (reflexive, symmetric หรือ transitive)

$2 \leq 3 \nrightarrow 3 \leq 2$ เหมือนกันทั้ง ≤ , >

Functions

เมื่อแทน x 1 ค่าจะเกิด y เพียง 1 ค่าเท่านั้น

ข้อใดไม่ใช่ฟังก์ชั่น ?

- {(0,1), (1,2), (2,3), (3,4)}
- {(0,2), (1,3), (4,3), (1,2)}
- {(1,3), (4,2), (2,0), (3,4)}
- {(1,2), (2,2), (3,2), (4,2)}
- {(2, 3), (0.5, 0), (2, 7), (– 4, 6)}
- {(x, |x|) | x is a real number}

ตัวอย่างฟังก์ชัน

- f : {0; 1; 2; 3; 4; 5} $\rightarrow$ R
  - f(0) = 0
  - f(1) = 1
  - f(2) = 4
  - f(3) = 9
  - f(4) = 16
  - f(5) = 25

$f(x) = x^2$ เมื่อ $0 \leq x \leq 5, x \in I$

- How to represent the function f?

Truth-table ตารางค่าความจริง

Functions are represented using truth-table. Let $f : D \rightarrow R$.

- Order the elements in the domain in a mutually agreeable way.

  Say $D = \{x_1, x_2, \ldots , x_d\}$

- For each elements in the particular order write down the function value of the element in the same order.

  $\{f(x_1), f(x_2), \ldots , f(x_d)\}$

Boolean Functions

[illegible]

000
001
010
⋮

- f : $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$
- Sometimes {0, 1} can be viewed as {True; False}

Activity :

- จงหาขนาดของ Truth-Table ของฟังก์ชั่นต่อไปนี้

  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ $2^2 = 4$

- จงหาจำนวนของฟังก์ชั่น $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{a, e, i, o, u\}$

  $6 \times 5 = 30$

- จำนวนฟังก์ชั่นทั้งหมดของ $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

  $2^n = 2^2 = 4$