Proofs and Induction

ดร. ธนัญชัย ตรีภาค

Basic Proofs

Given a premise X, how do we show that a conclusion Y holds?

- **Direct Proof**
- **Proof by contrapositive**
- **Proof by contradiction**
- **Proof by cases and examples**
- **Proof by induction**

Direct Proof → การจัดรูปเพื่อนำไปสู่เป้าหมาย

- **Start with premise X, and directly deduce Y through a series of logical steps.**

Let n be an integer , If n is even ,then n^2 is even. If n is odd, then n^2 is odd.

$n = 2k$ คู่

$n = 2k+1$ คี่

Direct proof : if n is even , then n=2k for integer k, and

อย่าลืมเขียนเงื่อนไขว่า k ของเราคือตัว
อะไรด้วยเช่น
$k \in I^+$

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \text{ , which is even}$$

คู่^{2} = คู่

คี่^{2} = คี่

If n is odd , then n=2k+1 for integer k, and

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1 \text{ , which is odd}$$

Activity : Direct proof

$x \to y$

- Give a direct proof that if m and n are both perfect squares, then nm is also a perfect square. (An integer a is a perfect square if there is an integer b such that a = ~~b2~~.) b^2

  $n \cdot m = k_1^2 \cdot k_2^2$

  กำหนด $n = k_1^2$, $m = k_2^2$ เมื่อ $k \in I^+$

  $n \cdot m = (k_1 k_2)^2$

- The sum of two odd numbers is even.

  $n = 2k_1 + 1$, $m = 2k_2 + 1$; $k \in I^+, k > 0$

  $a + b = 2k_1 + 2k_2 + 2$
  $= 2(\underbrace{k_1 + k_2 + 1}_{p})$ $p \in I^+$ เป็นจำนวน, ∴ $a+b$ เป็นคู่

- The product of any two odd integers is odd

  $n = 2k_1 + 1$, $m = 2k_2 + 1$; $k_1, k_2 \in I$

  $(2k_1+1)(2k_2+1) = 2p+1$
  $2(2k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1 = 2p + 1$

- The negative of any even integer is even.

  $n = 2k_1$, $m = 2k_2$; $k \in I$

  $n - m = 2p$
  $2k_1 - 2k_2 = 2p$
  $2(\underbrace{k_1 - k_2}) = 2(\underbrace{p})$

Proof by contrapositive

$\sim(X \rightarrow Y) \longrightarrow \sim Y \rightarrow \sim X$ ต้องมีค่าความจริงเป็นจริง ถึง $X \rightarrow Y$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง

- starts by assuming that the conclusion Y is false, and deduce that the premise X must also be false through a series of logical steps

อย่าลืมอธิบายละเอียดทุกครั้ง

Let n be an integer. If n^2 is even, then n is even.

ลองทำแบบปกติ $n^2 = 2k$ เมื่อ $k \in I$

$n = \sqrt{2}\sqrt{k} \rightarrow$ สรุปไม่ได้ ต้องเปลี่ยนวิธีทำแล้ว

- Suppose that n is not even, then n=2k+1 for integer k, and

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1 \text{, which is odd}$$

- Then , n^2 is not even as well. (The proof ends.)

ถ้า n เป็นคี่ $\rightarrow$ n^2 เป็นคี่

$\sim y \rightarrow \sim x$

$n = 2k + 1 \ , \ k \in I$

$n^2 = (2k+1)^2$

$= 2(2k_1^2 + 2k_1) + 1$

$n^2 = 2(p) + 1$ $\therefore$ เมื่อ n^2 เป็นคู่ แล้ว n เป็นคู่

$3n+2$ เป็นคี่แล้ว n เป็นคี่

Direct prove	contrapositive
$n = 2k+1$, $k \in I^+$	n เป็นคู่ แล้ว $3n+2$ เป็นคู่
$3n+2$	$n = 2k$ เมื่อ $k \in I^+$, $k > 0$
$3(2k+1)+2$	$3(2k)+2$
$6k+3+2$	$6k+2$
$6k+4+1$	$2(3k+1)$
$2(3k+2)+1$	$2(P)$
$2(P)+1$	

$\therefore$ $3n+2$ เป็นคี่แล้ว n เป็นคี่

Activity : Proof by contrapositive

- Give a direct proof that if m and n are both perfect squares, then nm is also a perfect square. (An integer a is a perfect square if there is an integer b such that a = b2.)

- The sum of two odd numbers is even.

- The product of any two odd integers is odd

- The negative of any even integer is even.

Proof by contradiction

$x \rightarrow \sim y$ ต้องมีค่าความจริงเป็น F จะทำให้ $x \rightarrow y$ มีค่าความจริงเป็น T

- assumes both that the premise X is true and the conclusion Y is false, and reach a logical fallacy

Let n be an integer. If n^2 is even, then n is even.

คู่^{2} → คู่ | $x \to y$

คี่^{2} → คี่ | $x \to \sim y$

- Suppose that n^2 is even, but n is odd.

$$n^2 = 2k = 2(2*p*p)$$

$$\boxed{n=2p}$$

เกิดความขัดแย้ง

∴ n^2 เป็นคู่แล้ว n เป็นคู่

- n is not odd

$\sqrt{2}$ is irrational

$\boxed{\sim y}$

- Assume for contradiction that $\sqrt{2}$ is rational เป็นจำนวนตรรกยะ
- Then there exists integers p and q, with no common divisors, such that $\sqrt{2} = p/q$

ไม่มีตัวหารร่วมแล้ว

$2 = p^2/q^2 \rightarrow 2q^2=p^2$ → p^2 เป็นเลขคู่ → p ก็เป็นเลขคู่

- So, p^2 is even -> p is even -> p=2k

$q^2=2k^2$ → q^2 เป็นเลขคู่ → q เป็นเลขคู่

- So, q^2 is even -> q is even

p และ q เป็นเลขคู่ ∴ มันต้องมีตัว common factor คือ 2 แน่ๆ

p and q now shares a common factor of 2.

Activity : Proof by contradiction

- Let x and y be non-negative reals. Then, $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

$$\frac{x+y}{2} < \sqrt{xy}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4} < xy$$

$$x^2 + 2xy + y^2 < 4xy$$

$$x^2 + 2xy + y^2 < 0$$

$$(x+y)^2 < 0 \equiv F \quad \therefore X \to y \equiv T$$

Proof by cases and examples

กรณีตัวอย่าง แค่ 1 จุด ถ้ามี F ข้อเดียวก็ถือว่า F

- Split into several cases , make sure that all cases are covered.

- For all real x , $|x^2| = |x|^2$

$$\text{If } x \geq 0 \text{ then } |x^2| = x^2 = |x|^2$$

$$\text{If } x < 0 \text{ then } |x^2| = x^2 = (-x)^2 = |x|^2$$

Activity : Proof by cases and examples

- $(n + 1)^2 \geq 2^n$ for all integers n satisfying $0 \leq n \leq 5$.

เช่น $n=5$ $(6)^2 \geq 2^5$

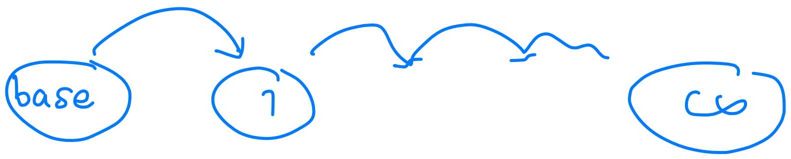
$36 \geq 32$

- Show that there exists some n such that $(n + 1)^2 \geq 2^n$.

เช่น $n=10$ $(11)^2 \geq 2^{10}$

$121 \geq 1024$

- There exists irrational numbers x and y such that x^y is rational.



Proof by induction

↳ เมื่อก้าวแรกถูกต้อง ก้าวต่อๆไปก็จะถูกต้องด้วย

- Formulate the inductive hypothesis
- Prove base case is true.
- Prove inductive step is also true.

หลักการ ① p(base) เป็นจริง

② สมมุติว่า p(n) เป็นจริง

③ ถ้า p(n+1) เป็นจริงสมการนี้เป็นจริง

ให้ n เป็นจำนวนใดๆที่เรา = prove

ดังนั้นแสดงว่าจำนวนที่ $n+1$ ก็จะต้องเป็นจริงด้วย

for all n, $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$.

- Formulate the inductive hypothesis

$$P(n) = 1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$$

- P(base) is true:

$$1=1(1+2)/2$$

- P(n) is true -> P(n+1) is also true

$$\left.\begin{aligned} P(n+1) &= 1+2+3+\ldots+n + n+1 \\ &= n(n+1)/2 + (n+1) \\ &= [n(n+1)+2(n+1)]/2 \\ &= [(n+1)(n+2)]/2 \end{aligned}\right\}$$

การลองจัดรูปเรื่อยๆ

Activity : Prove by induction

- Sum of the first n positive odd integers is n^2
- For all of negative integer n,

$$1+2+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1} - 1$$

- For all of positive integer n,

$$n < 2^n$$

- For every integer n that $n \geq 4$

$$2^n < n!$$

1) $P(1) = 1$ ✓
2) $p(n) = 1+3+5+\ldots+n = n^2$
3) $p(n+1) = \underbrace{\boxed{1+3+5+\ldots+n}}_{P(n)} + n+1 = (n+1)^2$

$p(n) + (n+1) = (n+1)^2$ ✓

1) $p(1) \Rightarrow 1 < 2$ ✓
2) $p(n) = n < 2^n$ เป็นจริง
3) $p(n+1) \equiv (n+1) < 2^{n+1}$

$n+1 < 2 \cdot 2^n$ เป็นจริง

จริงเท่า จริงเหมือนกัน

1) $p(4) = 16 < 24$ ✓
2) $p(n) \Rightarrow 2^n < n!$ เป็นจริง
3) $2^n < n \cdot n!$ อยู่แล้วตามธรรมชาติ

$\therefore \quad 2^n + 2^n < n! + n\,n!$ อยู่แล้ว

$$2(2^n) < n!(n+1)$$

$$2^{n+1} < (n+1)n!$$

ตาม $P(n+1)$ เป๊ะ คือ $2^{n+1} < (n+1)!$

$$2^{n+1} < (n+1)(n!)$$