Propositional Logic
and
Logic Inference

Propositional Logic

- Proposition (ประพจน์) เป็นส่วนที่ใช้พิสูจน์ เพื่อบ่งชี้ความจริงตามหลักเหตุผล มี 2 ชนิด คือ
  - ประพจน์เชิงเดี่ยว (Single Proposition)
  - ประพจน์เชิงซ้อน (Compound Proposition)

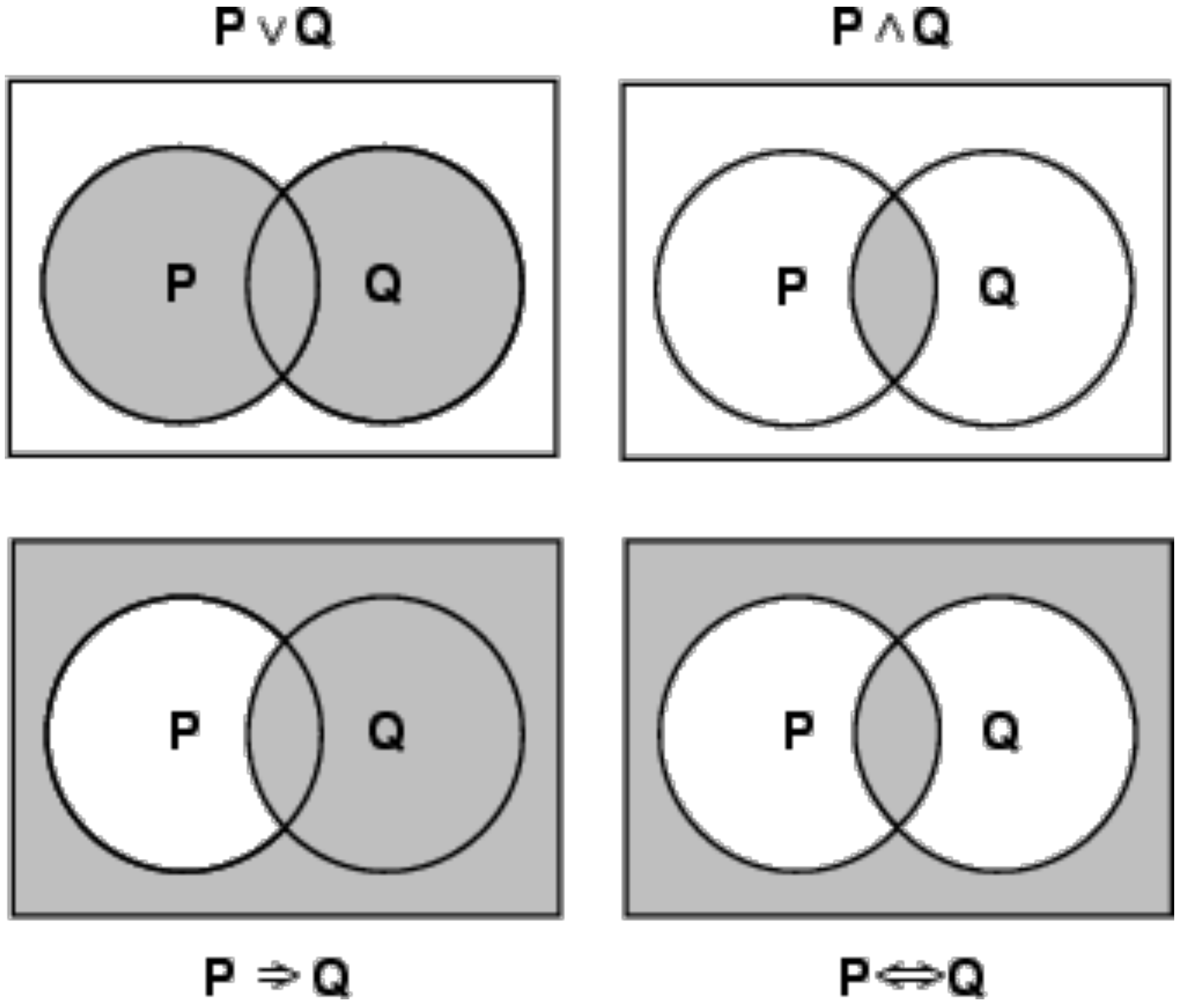
Propositional Logic

- **ประพจน์เชิงเดี่ยว :** ประโยคหรือเนื้อหาทางตรรกะที่มีเพียงใจความเดียว
  - A : นักเรียน**ทุกๆคน** อยากเรียนจบ
  - B : **ไม่มี**นักเรียนคนไหนอยากสอบตก
  - C : นักเรียน**ส่วนใหญ่**เรียน 4 ปีก็จบการศึกษา
  - D : คนไทย**ส่วนใหญ่ไม่**ยากจน

Propositional Logic

- **ประพจน์เชิงซ้อน** คือการนำเอาประพจน์เชิงเดี่ยวหลายประโยคมารวมกันด้วยคำเชื่อมประโยค
- **ประโยคความรวม** เป็นประโยคตรรกะที่เกิดจากคำเชื่อม “และ”, “แต่”, “แม้”, “เมื่อ” ในตรรกะศาสตร์จะใช้ตัว AND ($\wedge$)
    - ฉันชอบกินข้าวสวย**แต่**เธอชอบกินข้าวเหนียว
- **ประโยคความเลือก** คือ ประโยคตรรกะที่เกิดจากคำเชื่อม “หรือ” ($\vee$)
    - พรุ่งนี้เป็นวันพุธ**หรือ**วันพฤหัสบดี
- **ประโยคมีเงื่อนไข** เป็นประโยคตรรกะที่เกิดจากคำเชื่อม “ถ้า...แล้ว” โดยประพจน์หนึ่งจะเป็นเงื่อนไข อีกตัวจะเป็นผลสรุป ($\Longrightarrow$)
    - **ถ้า**นักศึกษาทำข้อสอบได้คะแนนเต็ม**แล้ว**จะได้เกรด A
- **ประโยคสมภาค** คือ ประโยคตรรกะที่เกิดจากคำเชื่อม “..ก็ต่อเมื่อ..” ($\Longleftrightarrow$)
    - สมชายเป็นคนดี**ก็ต่อเมื่อ**สมชายไม่ทำชั่ว

Models of complex sentences



ขั้นตอนการสร้างประพจน์

- เลือกสัญลักษณ์ : ตัวพิมพ์ใหญ่ (P,Q,R) คำ (Rain,Hot) หรือกลุ่มคำ (isEven,การประสมคำ
- กำหนดประโยคให้กับสัญลักษณ์ เป็นประพจน์เชิงเดี่ยว
    - P : อากาศร้อน
    - Rain : มีฝนตก
    - isEven : ตัวแปรมีค่าเป็นเลขคู่
- ใช้คำเชื่อม $(S \vee T)$, $(S \wedge T)$, $(S \rightarrow T)$, $(S \Leftrightarrow T)$ เพื่อสร้างประพจน์เชิงซ้อน

Example : Propositional Logic

- P means "It is hot."
- Q means "It is humid."
- R means "It is raining."
- $(P \land Q) \rightarrow R$

  "If it is hot and humid, then it is raining"
- $Q \rightarrow P$

  "If it is humid, then it is hot"

- A better way:
  - Hot = "It is hot"
  - Humid = "It is humid"
  - Raining = "It is raining"

Practice

p: You learn the simple things well. เรียนง่ายเก่ง

q: The difficult things become easy. ยากเป็นง่าย

- You do not learn the simple things well. $\sim p$
- If you learn the simple things well then the difficult things become easy. $p \to q$
- If you do not learn the simple things well, then the difficult things will not become easy. $\sim p \to \sim q$

  $q \to p$
- The difficult things become easy but you did not learn the simple things well. $q \wedge \sim p$
- You learn the simple things well but the difficult things did not become easy. $p \wedge \sim q$

Truth Tables

- ใช้อธิบายค่าความจริงทั้งหมดของประพจน์ต่างๆ
- ใช้เป็นเครื่องมือในการเทียบว่าประพจน์มีคุณสมบัติอย่างไร
    - **Tautology :** เป็นประโยคที่ให้ความเป็น**จริง**ในทุกกรณี
    - **Self-contradiction :** เป็นประโยคที่ให้ความเป็น**เท็จ**ในทุกกรณี
    - **Contingent :** เป็นประโยคที่สามารถมีทั้งค่าจริงและเท็จ
    - **Consistent** : ประโยคเหล่านั้นมีโอกาสที่จะเป็นจริงในกรณีเดียวกันได้
    - **Inconsistent** : ประโยคเหล่านั้นไม่มีโอกาสที่จะเป็นจริงในกรณีเดียวกัน
- ใช้ในการพิสูจน์ความเหมือนของประพจน์ (Logically equivalent)

P	Q	P and Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	Q	P or Q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

P	not P
T	F
F	T

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Tautology : $R \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \lor \neg(R \Rightarrow Q))$

ทำเป็นก้อนๆก็ได้ เขียนตามง่าย แต่เยอะ

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$R \Rightarrow Q$	$\neg(R \Rightarrow Q)$	$(P \Rightarrow Q) \lor \neg(R \Rightarrow Q)$	$R \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \lor \neg(R \Rightarrow Q))$
T	T	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T

Self-contradiction : $\neg(P \Rightarrow Q) \wedge \neg(Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$Q \Rightarrow P$	$\neg(Q \Rightarrow P)$	$\neg(P \Rightarrow Q) \wedge \neg(Q \Rightarrow P)$
T	T	T	F	T	F	**F**
T	F	F	T	T	F	**F**
F	T	T	F	F	T	**F**
F	F	T	F	T	F	**F**

Contingent : เป็นประโยคที่สามารถมีทั้งค่าจริงและเท็จ

- ยกตัวอย่าง....

ประยุทธ์รักแผ่นดิน

Consistent

- ประโยคมากกว่า 1 ประโยค ที่มีโอกาสที่มีค่า จริง ในกรณีเดียวกัน
- ตัวอย่าง : $(P \lor Q)$ และ $\neg(P \Leftrightarrow \neg Q)$

P	Q	$P \lor Q$	$\neg Q$	$P \Leftrightarrow \neg Q$	$\neg(P \Leftrightarrow \neg Q)$
T	T	**T**	F	F	**T**
T	F	**T**	T	T	**F**
F	T	**T**	F	T	**F**
F	F	**F**	T	F	**T**

Inconsistent

- ประโยคมากกว่า 1 ประโยค ที่ไม่มีโอกาสที่มีค่า จริง ในกรณีเดียวกัน
- ตัวอย่าง : $(P \Rightarrow Q) \wedge P$ และ $\neg(Q \vee \neg P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge P$	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$\neg(Q \vee \neg P)$
T	T	T	**T**	F	T	**F**
T	F	F	**F**	F	F	**T**
F	T	T	**F**	T	T	**F**
F	F	T	**F**	T	T	**F**

Logically equivalent

- ค่าความเป็นจริงของทั้ง 2 ประโยคเหมือนกันในทุกกรณี
- ตัวอย่าง : $\neg P \Rightarrow \neg Q$ และ $\neg(Q \wedge \neg P)$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \Rightarrow \neg Q$	$Q \wedge \neg P$	$\neg(Q \wedge \neg P)$
T	T	F	F	**T**	F	**T**
T	F	F	T	**T**	F	**T**
F	T	T	F	**F**	T	**F**
F	F	T	T	**T**	F	**T**

Rules of Replacement

ประโยคใน propositional logic สามารถแทนที่กันได้ ถ้าประโยคทั้ง 2 นั้น logically equivalent

ชื่อกฎ	Logically equivalent
Double negation (DN)	$\neg\neg P \equiv P$
Commutativity (Com)	$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Associativity (Assoc)	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Tautology (Taut)	$P \vee P \equiv P$, $P \wedge P \equiv P$
Demorgan's Law (DM)	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
Transposition (Trans)	$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$
Material Implication (Impl)	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
Exportation (Exp)	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R$
Distribution (Dist)	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Material Equivalent (Equiv)	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ $\equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

ตัวอย่างการพิสูจน์ด้วยตารางความเป็นจริง

เยอะเนี้ยๆ

จงพิสูจน์การเท่ากันของสมการต่อไปนี้ $\neg(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \equiv \neg[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)]$

P	Q	R	$(Q \wedge R)$	$P \Rightarrow (Q \wedge R)$	$\neg(P \Rightarrow (Q \wedge R))$	$(P \Rightarrow Q)$	$(P \Rightarrow R)$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$	$\neg[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)]$
T	T	T	T	T	**F**	T	T	T	**F**
T	T	F	F	F	**T**	T	F	F	**T**
T	F	T	F	F	**T**	F	T	F	**T**
T	F	F	F	F	**T**	F	F	F	**T**
F	T	T	T	T	**F**	T	T	T	**F**
F	T	F	F	T	**F**	T	T	T	**F**
F	F	T	F	T	**F**	T	T	T	**F**
F	F	F	F	T	**F**	T	T	T	**F**

Deduction: Rules of Inference and Replacement

- การแก้ไขปัญหาของ Propositional Logic โดยใช้ตารางความเป็นจริง (truth table) ตามทฤษฎีสามารถแก้ไขได้ทุกปัญหา
- แต่ขนาดของตารางความเป็นจริงจะใหญ่ขึ้นมาก ตามจำนวนของตัวแปรของประโยคนั้นๆ
- **ตัวอย่าง** ถ้ามีประโยค Propositional Logic มีตัวแปร 10 ตัว ตารางความเป็นจริงจะต้องมีทั้งหมด $2^{10} = 1024$ แถว
- ดังนั้นจึงมีวิธีแก้ปัญหาโดยเอาทฤษฎีต่างๆ แทนการใช้ตารางความเป็นจริง
  - Natural Deduction
  - Direct Deduction
  - Indirect Deduction

Natural Deduction (การนิรนัย)

- วิธี natural deduction พยายามที่จะลดการคิดค่าความเป็นจริงของแต่กรณี โดยหาค่าความเป็นจริงทำตามขั้นตอนทีละขั้นตอนไปเรื่อยๆ ตามความรู้ที่มี
- **ตัวอย่าง :** ข้อกล่าวอ้างทั่วไป

ในสถานที่เกิดเหตุมีขนแมวหรือขนสุนัขตกอยู่ ถ้ามีขนสุนัขตกอยู่ในที่เกิดเหตุเจ้าหน้าที่สมชายจะเป็นโรคภูมิแพ้ ถ้าเป็นขนแมวที่ตกอยู่ในที่เกิดเหตุ แล้วสมปองเป็นฆาตกร แต่เนื่องด้วยเจ้าหน้าที่สมชายไม่ได้เป็นโรคภูมิแพ้ดังนั้นสมปองคือฆาตกร

อนุมานแบบวิเคราะห์จากข้อมูลที่มี

Natural Deduction (การนิรนัย)

1) มีขนแมวตกอยู่ในที่เกิดเหตุ หรือ มีขนสุนัขตกอยู่ในที่เกิดเหตุ (สมมุติฐาน)
2) ถ้ามีขนสุนัขตกในที่เกิดเหตุ แล้ว เจ้าหน้าที่สมขายจะเป็นโรคภูมิแพ้ (สมมุติฐาน)
3) ถ้ามีขนแมวตกอยู่ในที่เกิดหตุ แล้ว สมปองเป็นฆาตกร (สมมุติฐาน)
4) เจ้าหน้าที่สมชาย ไม่ได้เป็นโรคภูมิแพ้ (สมมุติฐาน)
5) ไม่มีขนสุนัขตกอยู่ในที่เกิดเหตุ (จากข้อ 2 และ ข้อ 4)
6) มีขนแมวตกอยู่ในที่เกิดเหตุ (จากข้อ 1 และ ข้อ 5)
7) สมปองคือฆาตกร (จากข้อ 3 และข้อ 6)

from what we know.

Rules of Inference (กฎของการอนุมาน)

- การอนุมานด้วยวิธีการให้เหตุผลจะต้องมีการตรวจสอบความสมเหตุสมผล กฎของการอนุมานเชิงตรรกศาสตร์ ได้แก่
  - Modus Ponens (MP)
  - Modus Tollens (MT)
  - Disjunctive Syllogism (DS)
  - Addition (Add)
  - Simplification (Simp)
  - Conjunction (Conj)
  - Hypothetical Syllogism (HS)
  - Constructive dilemma (CD)
  - Absorption (Abs)

Modus Ponens (MP)

- Modus Ponens ($\Rightarrow$-elimination)

$$\frac{\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \end{array}}{Q}$$

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**T**
F	F	**T**

Modus Tollens (MT)

- Modus Tollens ($\Rightarrow$-elimination)

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \underline{\neg Q} \\ \neg P \end{array}$$

$p \to q$

$\sim Q$ 662= $\sim p$

P	Q	P $\Rightarrow$ Q	$\neg$Q	$\neg$P
T	T	**T**	**F**	**F**
T	F	**F**	**T**	**F**
F	T	**T**	**F**	**T**
F	F	**T**	**T**	**T**

Disjunctive syllogism (DS)

- Disjunctive Syllogism (∨-elimination)

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \underline{\neg P} \\ Q \end{array}$$

หรือ

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \underline{\neg Q} \\ P \end{array}$$

P	Q	P ∨ Q	¬P
T	T	**T**	**F**
T	F	**T**	**F**
F	T	**T**	**T**
F	F	**F**	**T**

P	Q	P ∨ Q	¬Q
T	T	**T**	**F**
T	F	**T**	**T**
F	T	**T**	**F**
F	F	**F**	**T**

Addition (Add)

- Addition ($\vee$-introduction)

$$\frac{P}{P \vee Q}$$

หรือ

$$\frac{Q}{P \vee Q}$$

P	Q	P ∨ Q
T	T	**T**
T	F	**T**
F	T	**T**
F	F	**F**

P	Q	P ∨ Q
T	T	**T**
T	F	**T**
F	T	**T**
F	F	**F**

Simplification (Simp)

ได้ P, Q

- Simplification ($\wedge$-elimination)

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$

หรือ

$$\frac{P \wedge Q}{Q}$$

P	Q	P ∧ Q
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**F**
F	F	**F**

P	Q	P ∧ Q
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**F**
F	F	**F**

Conjunction (Conj)

- Conjunction ($\wedge$-introduction)

$$\frac{\begin{array}{c}P\\Q\end{array}}{P \wedge Q}$$

P	Q	P ∧ Q
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**F**
F	F	**F**

Hypothetical syllogism (HS)

- Hypothetical syllogism (chain reasoning, chain deduction)

$$\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ \underline{Q \Rightarrow R} \\ P \Rightarrow R \end{array}$$

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$
T	T	T	**T**	**T**	**T**
T	T	F	**T**	**F**	**F**
T	F	T	**F**	**T**	**T**
T	F	F	**F**	**T**	**F**
F	T	T	**T**	**T**	**T**
F	T	F	**T**	**F**	**T**
F	F	T	**T**	**T**	**T**
F	F	F	**T**	**T**	**T**

Constructive Dilemma (CD)

$(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S)$

$P \vee R$

$Q \vee S$

P	Q	R	S	$P \Rightarrow Q$	$R \Rightarrow S$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S)$	$P \vee R$	$Q \vee S$
T	T	T	T	T	T	**T**	**T**	**T**
T	T	T	F	T	F	**F**	**T**	**T**
T	T	F	T	T	T	**T**	**T**	**T**
T	T	F	F	T	T	**T**	**T**	**T**
T	F	T	T	F	T	**F**	**T**	**T**
T	F	T	F	F	F	**F**	**T**	**F**
T	F	F	T	F	T	**F**	**T**	**T**
T	F	F	F	F	T	**F**	**T**	**F**
F	T	T	T	T	T	**T**	**T**	**T**
F	T	T	F	T	F	**F**	**T**	**T**
F	T	F	T	T	T	**T**	**F**	**T**
F	T	F	F	T	T	**T**	**F**	**T**
F	F	T	T	T	T	**T**	**T**	**T**
F	F	T	F	T	F	**F**	**T**	**F**
F	F	F	T	T	T	**T**	**F**	**T**
F	F	F	F	T	T	**T**	**F**	**F**

Absorption (Abs)

- Absorption

$$\frac{(P \Rightarrow Q)}{P \Rightarrow (P \wedge Q)}$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow (P \wedge Q)$
T	T	**T**	T	**T**
T	F	**F**	F	**F**
F	T	**T**	F	**T**
F	F	**T**	F	**T**

Direct Deduction

- Direct deduction ของข้อสรุปจากเซ็ตของสมมุติฐานประกอบไปด้วยลำดับของประโยค
  - สมมุติฐาน (premise)
  - ประโยคที่มาจากกฎของการอนุมาน (rules of inference)
  - ประโยคที่มาจากกฎของการแทนที่ (rules of replacement)
- ตัวอย่างมี สมมุติฐานคือ $C \vee D$, $C \Rightarrow O$, $D \Rightarrow M$, และ $\neg O$ มีข้อสรุป M จะพิสูจน์ว่าถูกต้อง

1.	$C \vee D$	premise
2.	$C \Rightarrow O$	premise
3.	$D \Rightarrow M$	premise
4.	$\neg O$	premise
5.	$\neg C$	2,4 MT
6.	D	1,5 DS
7.	M	3,6 MP

1.	$C \vee D$	premise
2.	$C \Rightarrow O$	premise
3.	$D \Rightarrow M$	premise
4.	$\neg O$	premise
5.	$(C \Rightarrow O) \wedge (D \Rightarrow M)$	2,3 Conj
6.	$O \vee M$	1,5 CD
7.	M	4,6 DS

Example : Direct Deduction

- พิสูจน์ $T \Rightarrow U$ จากสมมุติฐาน $P \Leftrightarrow Q$, $(S \vee T) \Rightarrow Q$, และ $\neg P \vee (\neg T \wedge R)$

1. $P \Leftrightarrow Q$ premise
2. $(S \vee T) \Rightarrow Q$ premise
3. $\neg P \vee (\neg T \wedge R)$ premise
4. $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ 1 Equiv
5. $(Q \Rightarrow P)$ 4 Simp
6. $(S \vee T) \Rightarrow P$ 2,4 HS
7. $P \Rightarrow (\neg T \wedge R)$ 3 Impl
8. $(S \vee T) \Rightarrow (\neg T \wedge R)$ 6,7 HS
9. $\neg(S \vee T) \vee (\neg T \wedge R)$ 8 Impl
10. $(\neg S \wedge \neg T) \vee (\neg T \wedge R)$ 9 DM
11. $[(\neg S \wedge \neg T) \vee \neg T] \wedge [(\neg S \wedge \neg T) \vee R)$ 10 Dist
12. $(\neg S \wedge \neg T) \vee \neg T$ 11 Simp
13. $(\neg S \vee \neg T) \wedge (\neg T \vee \neg T)$ 12 Dist
14. $\neg T \vee \neg T$ 13 Simp
15. $\neg T$ 14 Taut
16. $\neg T \vee U$ 15 Add
17. $T \Rightarrow U$ 16 Impl

Indirect Deduction

- Indirect deduction มี 2 วิธี
  - Conditional proof : สมมุติค่าความเป็นจริงให้ 1 ตัวแปรเพื่อแก้ปัญหา
  - Indirect proof : กำหนดข้อสรุปเป็นเท็จ แล้วถ้ามีพิสูจน์หักล้างได้ จะทำให้ข้อสรุปนั้นเป็นจริง
- **ตัวอย่าง :** มีสมมุติฐานคือ $P \Rightarrow Q$ และ $P \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg P)$ มีข้อสรุปคือ $\neg P$ จงพิสูจน์ว่าเป็นจริงหรือไม่ (ใช้วิธี Indirect proof)

1.	$P \Rightarrow Q$	premise
2.	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg P)$	premise
3.	P	assumption
4.	Q	1,3 MP
5.	$(Q \Rightarrow \neg P)$	2,3 MP
6.	$\neg P$	5,4 MP
7.	$P \wedge \neg P$	3,6 Conj
8.	False	7 IP

ขัดกับ assumption
เพราะฉะนั้น $\neg P$ เป็นจริง

Example

- จงพิสูจน์ว่าคำกล่าวต่อไปนี้ถูกต้อง

  ถ้าอุณหภูมิและความดันคงที่ฝนจะไม่ตก ขณะนี้อุณหภูมิคงที่ ดังนั้นถ้าฝนตกแล้วหมายความว่าความดันไม่คงที่
- **วิธีพิสูจน์** กำหนด
  - A แทน อุณหภูมิคงที่
  - B แทน ความดันคงที่
  - C แทน ฝนตก
  - แทนประโยคด้วย propositional logic
    - Premise : ถ้าอุณหภูมิและความดันคงที่ฝนจะไม่ตก $(A \land B) \Rightarrow \neg C$
    - Premise : ขณะนี้อุณหภูมิคงที่ A
    - Conclusion : ถ้าฝนตกแล้วหมายความว่าความดันไม่คงที่ $C \Rightarrow \neg B$

Example

ข้อสรุปคือ $C \Rightarrow \neg B$

1.	$(A \land B) \Rightarrow \neg C$	Premise
2.	A	Premise
3.	$\neg(C \Rightarrow \neg B)$	Assumption
4.	$\neg(A \land B) \lor \neg C$	1 Impl
5.	$\neg A \lor \neg B \lor \neg C$	4 DM
6.	$\neg B \lor \neg C$	2,5 DS
7.	$\neg C \lor \neg B$	6 Comm
8.	$C \Rightarrow \neg B$	7 Impl
9.	$\neg(C \Rightarrow \neg B) \land C \Rightarrow \neg B$	3,8 Conj
10.	False	9 IP

Exportation $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ พิสูจน์หา $(p \wedge q) \rightarrow r$

$\sim p \vee (q \rightarrow r)$

$\sim p \vee (\sim q \vee r)$

$\sim (p \wedge q) \vee r$

$(p \wedge q) \rightarrow r$

$\sim(r \vee s)$, $\sim p \rightarrow s$, $p \rightarrow q$ prove q

direct prove

$\sim r \wedge \sim s$ $\sim s \rightarrow p$

$\sim r \equiv T$ $\sim s \rightarrow q$

$\sim s \equiv T$

$r \equiv F$ $s \vee \boxed{q}$

$s \equiv F$

up to q

$\sim(r \vee s)$, $\sim p \to s$, $p \to q$ พิสูจน์ $q \equiv T$

$\sim r \wedge \sim s$ $\quad$ $\sim s \to p$ $\quad$ $\sim p \wedge \sim q$

$s \vee \sim p$

$\sim p$ $\quad$ $\sim q \equiv F$

$q \equiv T$

$s \equiv T$ $\quad$ $\sim p$

$\therefore$

$p \to (q \wedge r)$, $s \to r$, $r \to p$ พิสูจน์ $s \to q$

$s \to p$

$s \to (q \wedge r)$

$\sim s \vee (q \wedge r)$

$(\sim s \vee q) \wedge (\sim s \vee r)$

$(s \to q) \wedge \underbrace{(s \to r)}_{T}$

$p \wedge q,\ p \to r,\ (q \wedge r) \to s$ พิสูจน์ s เป็นจริง

p $\sim p \vee r$ $q \to s$

q r $\sim q \vee s$

s

$\sim(\sim s \vee p)$

$(s \wedge \sim p)$

indirect [illegible]

$x \to y$

$x \to \sim y \equiv F$

$\boxed{\sim(s \to q)}$

$p \to (q \wedge r),\ s \to r,\ r \to p$ พิสูจน์ $s \to q$

dr

$s \to p$

$s \to (q \wedge r)$

$\sim s \vee (q \wedge r)$

$(\sim s \vee q) \wedge (\sim s \vee r)$

$\sim s \vee q$ $\sim s \vee r$

$(s \to q)$

indi

ไม่ต้องมี $\sim y$ ด้วย

$s \to (q \wedge r)$ # q, r

$(s \to q)$ $s \to r$