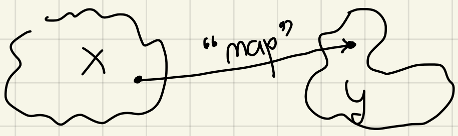
Linear algebra - Matrix transformation

↳ Function and linear tranformations

↳ a more formal understand of function

ฟังก์ชั่นเป็นความสัมพันธ์ของ set ตัวเลข 2 set



$f: X \to y$

↳ เชื่อมให้ค่า x แก่ y

↳ y จะหาอันที่มีความสัมพันธ์กับมันได้

↳ $f: R \to R$

domain, co domain

↳ แล้ว range ล่ะ =

↳ subset ของ co domain that the fuction actually map to

เช่นนี้ $g: R^2 \to R$

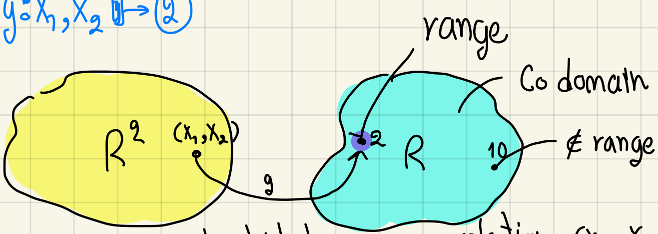
$g(x_1, x_2) = 2$

↳ มีความหมาย $g: x_1, x_2 \mapsto 2$

Domain = R^2

Co domain = R

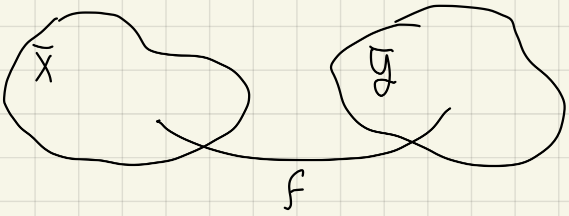
range = 2



anypoint which have same relation $(x_1, x_2) \to 2$

รูปนี้คือ vector value function

↳ vector transformation

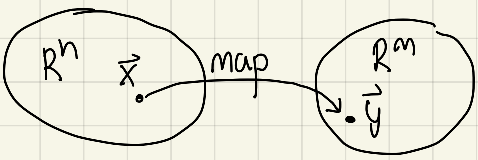


$\vec{x} \in R^{n}$ — มีสมาชิกของ vector ทั้งหมดกี่ตัว

$R^n = \{ \text{n-tuple } (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots x_n \in R \}$

เขียนใหม่ได้แบบ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$

ลองเปลี่ยนรูปกัน

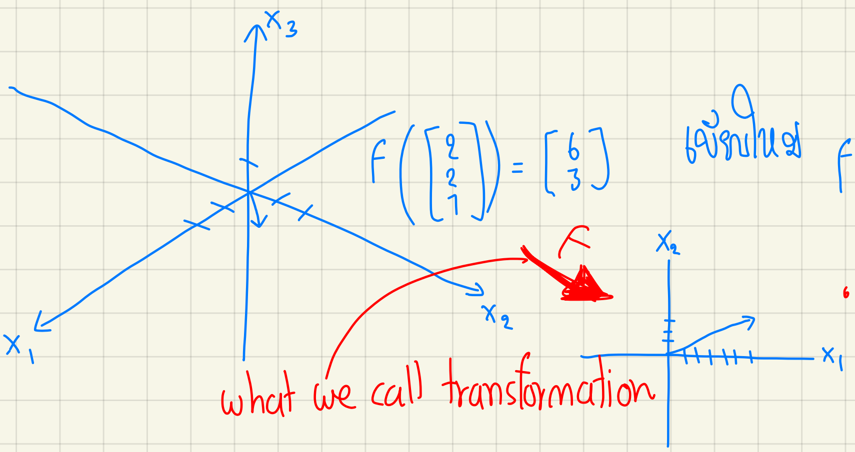


แสดงว่าฟังก์ชันนั้นเปลี่ยนจาก $R^n \to R^m$

$f: R^n \to R^m$

เช่น $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 3x_3)$

$f: R^3 \to R^2$



เขียนใหม่ $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_3 \end{bmatrix}$; $f: R^3 \to R^2$

" vector transformation "

↳ function operating on vector

Linear transformation

- transformation คือการเปลี่ยนรูป หรือก็คือฟังก์ชันนี่เอง
  - ต้องมีคุณสมบัติตามนี้
    - $L(x+y) = L(x)+L(y)$ โดย $x, y \in R^n$
    - $L(\alpha x) = \alpha L(x)$
- tip เวลาเห็น vector transformation ที่มีการยกกำลังหรือที่เป็นไป → หรือ xy คูณกันแบบนี้แตก

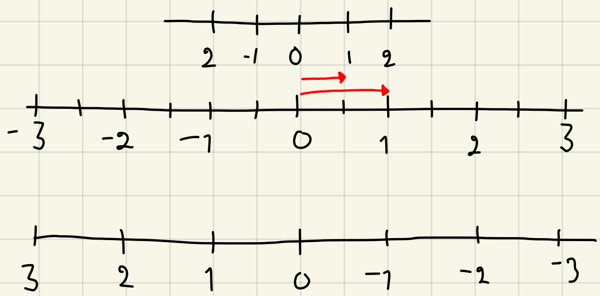
  $L(x+y) \neq L(x)+L(y)$
  $L(\alpha x) \neq \alpha L(x)$
- ลองดู $\alpha L(x) = L(\alpha x)$ แต่ $L(x+y) \neq L(x)+L(y)$

สมบัติที่น่าสนใจ $L(0)$ always $= 0$
$L(0x) = 0L(x)$

Visualizing linear transformation

Multiplication as a transformation

- The idea of transformation can seem more complicated than it really at first. before diving into how 2x2 (3x3) matrix transform 2 (3) dimensional space.
  - เราต้องมาเรียน 1x1 matrix can be considered transformations of one-dimensional space
    - เป็นเส้นจำนวนนี่เอง
    - เกิดอะไรขึ้นเมื่อเราทำการคูณเส้นจำนวนเดิมด้วย 2 ?



อันใหม่ x2 เท่ากับอันเดิม

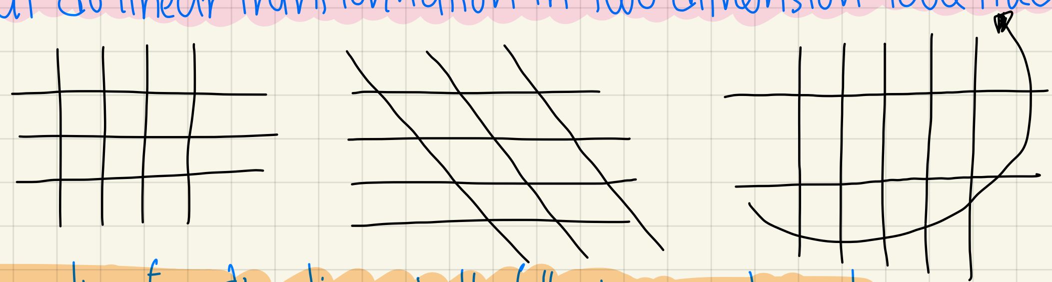
ถ้าคูณด้วย -2 หล่ะ

เส้นจำนวนใหม่แปรรูปหมุน 180°

"linear transformation of one-dimensional space"

people tend to use the word transformation to indicate that you should instead visualize some object moving, stretching, squishing

What do linear transformation in two dimension look like

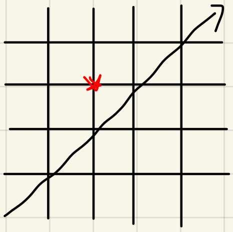


แต่ transform ไม่ได้

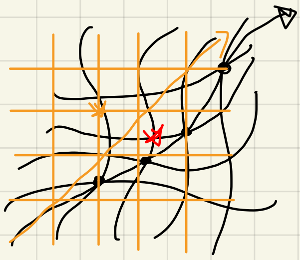
what make a transformation linear is the following geometric rule:
The origin must remain fixed and all lines must remain lines

$f(v+w) = f(v) + f(w)$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

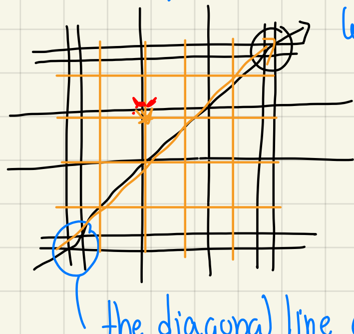
↳ ถ้าเป็น nonlinear transformation



จะทำไม่ได้



there might look like the line keep straight

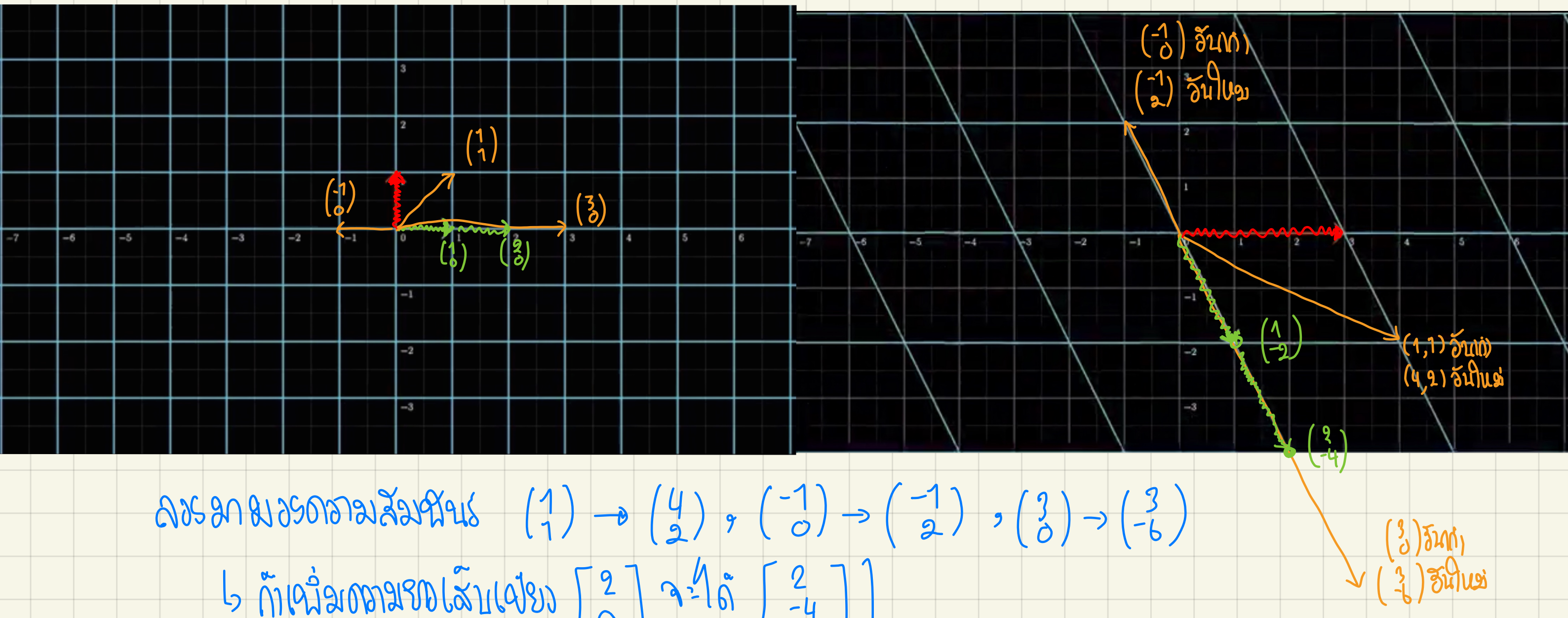


the diagonal line get curved

nonlinear transformation
lines does not remain straight,
the origin does not remain fix

↳ Following the specific vector during the transformation

↳ ไม่ว่าจะไปรูปร่างยืด, หด, หมุน ยังไง → เราก็ลองวาด vector เพิ่มไปสิ



ลองมาดูความสัมพันธ์ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$

↳ ถ้าเพิ่มความยาวเส้นเพียง $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ จะได้ $\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}$

เป็น 2 เท่าของ

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \to 2\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}$

ยาวเป็นกี่เท่าของอันเก่า

มาเขียนแบบสูตร $\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} \to x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to x\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}xa\\xb\end{bmatrix}$

ยาวเป็นเท่าของอันใหม่ด้วย

↳ ลองดูความสัมพันธ์ของ $\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}$ บ้าง

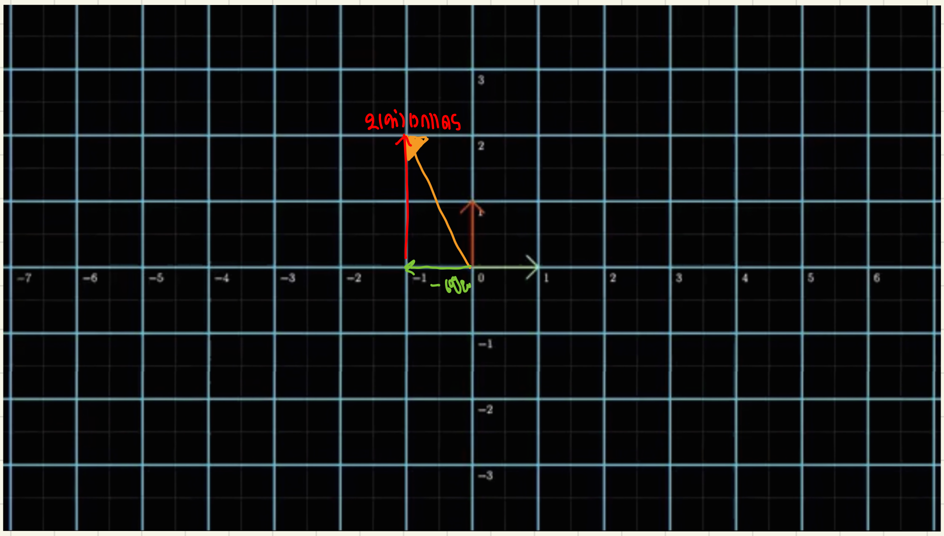
เวกเตอร์ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$

$y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to y\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}3y\\0\end{bmatrix}$ ยืดออก y เท่าไร

↳ ในความเป็นจริงเมื่อเรารู้ว่า $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ land อยู่ที่ไหนหลัง transformation เราก็สามารถหาจุดที่ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ไปตกอยู่ได้ทุกจุดหลังจากการ transformation ได้

โจทย์ ถ้าอันเดิมเป็น $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ หลังจาก linear transformation จะมีค่าเป็นเท่าไหร่



$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ แดง

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ เขียว

เวกเตอร์ส้มเกิดจาก 2 เท่าของเวกเตอร์แดง บวกด้วย −ของเวกเตอร์เขียว

$-1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ แบบเก่า

$-1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ หลังผ่าน linear tran

$= \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

กล่าวโดยสรุป เวกเตอร์ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ หลังจาก transformation จะมีการเปลี่ยนแปลงเป็น $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ แต่ยังคงอยู่บนแกนเดิม ตามกฎ geometric rule.

ถ้า $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ จะอยู่ที่ไหนเอ่ย → เกิดจาก $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + -1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + -1\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

↳ Represent two dimensional linear transformation as matrix

↳ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ สามารถแยกออกมาอยู่ในรูป $= x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

สมมติ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ อยู่บน $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ อยู่บน $\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$ หลังจาก transformation

เขียนได้ในรูปแบบ $x \cdot \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}xa + yc\\xb + yd\end{bmatrix}$

หลังจากการเกิด transformation ของ unit basic vector นั้น

↳ a really nice way to describe all this is to represent a given linear transformation with the matrix below.

Column ที่ 2 คือที่ๆ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ line on

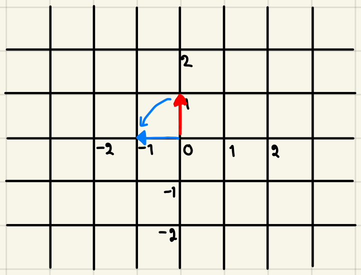
$A = \begin{bmatrix}a & c\\b & d\end{bmatrix}$

Column แรกคือที่ๆ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ line on

กำหนด v คือ $\bar{v}$ ที่มีค่าเป็น $v = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$Av = \begin{bmatrix}a & c\\b & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax+cy\\bx+dy\end{bmatrix}$

↳ Matrix from visual representation of transformation



■ ก่อนทำ transformation

■ หลัง transformation

↳ มีการหมุน 90°

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ นำไปเขียนใน $A = \begin{bmatrix}0 & ?\\1 & ?\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$,, —— ,, $= \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$

↳ Matrix vector product as linear transformation

↳ ลองเขียนในรูป lt

$L : R^n \to R^m$

$$Ax = [v_1\, v_2\, v_3 \dots v_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{bmatrix} = (a_1+b_1)v_1 + (a_2+b_2)v_2 + \dots + (a_n+b_n)v_n$$

$$= a_1v_1 + b_1v_1 + a_2v_2 + b_2v_2 + \dots + a_nv_n + b_nv_n$$

$$= (a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n) + (b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n)$$

$$= A\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix} + A\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

$$A(c\bar{a}) = [\bar{v}_1\bar{v}_2\bar{v}_3 \dots \bar{v}_n]\begin{bmatrix}ca_1\\ca_2\\\vdots\\ca_n\end{bmatrix}$$

$$= ca_1\bar{v}_1 + ca_2\bar{v}_2 + \dots + ca_n\bar{v}_n$$

$$= c(a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n)$$

$$= cA(a)$$

Matrix product with vector is alway linear transformation.

↳ linear transformation as matrix vector products

$$I_n = \begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & \dots & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & \vdots\\\vdots & 0 & 1 & \vdots & \vdots\\\vdots & 0 & \dots & \ddots & 0\\0 & \dots & \dots & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

e_0 e_1

standard basic for R^n

ลองเอา vector มาคูณ

↳ เราสามารถแตก linear transformation เป็นเวกเตอร์ย่อยๆได้

$$X = \begin{bmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$y = L(X)$$

$$L(X) = L(x_0e_0 + x_1e_1 + \dots + x_ne_n)$$

$$= L(x_0e_0) + L(x_1e_1) + \dots + L(x_ne_n)$$

$$= x_0L(e_0) + x_1L(e_1) + \dots\ x_nL(e_n)$$

$$L(X) = \begin{bmatrix}L(e_0) & L(e_1) & \dots & L(e_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

เหมือนบรรทัดบนเป๊ะ

// all linear transformation can be matrix vector product

โจทย์ กำหนด $L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 5x_2 - x_1 \\ 4x_1 + x_2 \end{bmatrix}$ เขียนสมการเพื่อใช้ในโปรแกรม $L(X) = \begin{bmatrix} L(e_0) & L(e_1) & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \vdots \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} L(e_0) & L(e_1) & \cdots \end{bmatrix}$

หรือ $L(X) = AX$

$a_j = Ae_j$

ดึงแต่ละหลักใน A ออกมา

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(X) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

เหมือนแยกออกจากสมการเดิมอะ

ถ้าเป็น linear ค่าจะเท่ากัน

↳ ลองกลับไปใช้สมการตามข้างบนแทน

$$Av = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$L(e_0)$

$L(e_1)$

pass ค่า

$$L\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$L(3e_0) = 3\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$L(e_0) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

โจทย์ ให้ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ linear transformation that correspond to the matrix

$$y = Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{4\times2} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}_{2\times1} = 4\times1 \text{ แบบสมการ}$$