6.4.3　正弦定理和余弦定理（第 1 课时）

教学目标：

1．掌握余弦定理的两种表示形式及证明余弦定理的向量方法．

2．会利用余弦定理解决两类基本的解三角形问题．

3．引导学生利用向量的数量积推出余弦定理及其推论，并理解余弦定理是勾股定理的推广．

教学重、难点：

重点：余弦定理的发现和证明过程及其基本应用．

难点：余弦定理及推论在解三角形时的应用．

教学过程：

一、创设情境，揭示课题

问题 1：结合三角形全等的判定方法，思考给定三角形的三个角、三条边这六个元素中的哪些元素，可以确定一个三角形？

问题 2：三角形的其他元素与给定的某些元素有怎样的数量关系？

二、师生互动，探究新知

1．余弦定理的推导：

【探究】在　　　中，三个角　　　所对的边分别是　　，怎样用　和　表示　？

2．余弦定理及其推论：

余弦定理（law of cosines）：**三角形任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍．即**

，

，

．

推论：　　，　　，　　．

【思考】勾股定理与余弦定理的关系？

3．余弦定理的应用：

一般地，把三角形的三个角 A,B,C 和它们的对边 a,b,c 叫做**三角形的元素**．已知三角形的几个元素，求其他元素的过程叫做**解三角形**（solving triangles）．

（1）解三角形：① 已知三角形两边及其夹角；　　② 已知三角形的三条边．

（2）判断三角形的形状：在△ABC 中，若边 c 为最大边：

① 若 $a^2+b^2>c^2$，则△ABC 为锐角三角形；

② 若 $a^2+b^2=c^2$，则△ABC 为直角三角形；

③ 若 $a^2+b^2<c^2$，则△ABC 为钝角三角形．

三、应用示例，巩固思想

例 1　在$\triangle ABC$中，已知$C=45^\circ$，$a=\sqrt{6}\text{cm}$，$b=(\sqrt{3}-1)\text{cm}$，解三角形．

例 2　在$\triangle ABC$中，已知$a=3\text{cm}$，$b=5\text{cm}$，$c=7\text{cm}$，解三角形．

例 3　已知三角形的三边为连续的正整数，试讨论其形状．

四、课堂练习，熟练方法

1．已知钝角$\triangle ABC$中，$a=2$，$b=3$，求边c长的取值范围．

2．是否存在这样一个三角形，三边长为连续的自然数，且最大角是最小角的两倍．

五、课堂小结，升华思想

1．余弦定理及其推论；
2．余弦定理的应用．

六、作业：

教学反思：

6.4.3　正弦定理和余弦定理（第 2 课时）

教学目标：

1．通过对任意三角形边长和角度关系的探索，掌握正弦定理的内容及其证明方法．

2．会利用正弦定理理解斜三角形的两类基本问题．

3．让学生从已有几何知识出发，引导其通过观察、推导、比较，由特殊到一般归纳出正弦定理．

教学重、难点：

重点：正弦定理的证明及其基本运用．

难点：运用正弦定理解三角形．

教学过程：

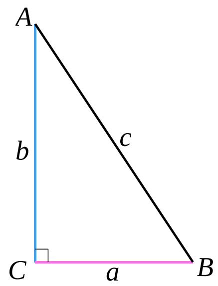
一、创设情境，揭示课题

问题 1：在我国古代就有嫦娥奔月的神话故事，遥不可及的月亮离地球究竟有多远呢？

问题 2：早在 1671 年，两个法国天文学家就运用“三角视差法”测出了地月之间的距离约 385 400km．这里，就要运用到解三角形的知识．

二、师生互动，探究新知

【探究】余弦定理及推论分别给出了已知两边及其夹角、已知三边直接解三角形的公式．如果已知两角和一边，是否也有相应的直接解三角形的公式呢？



1．正弦定理的推导：

（1）特殊情形（直角三角形）：

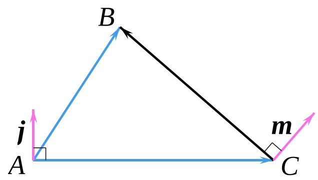
如图，$\angle C=90°$，由于 $\dfrac{a}{c}=\sin A$，$\dfrac{b}{c}=\sin B$，所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=c$，

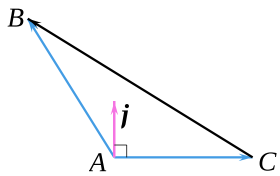
又 $\sin C=1$，故：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$．

【思考】对于锐角三角形和钝角三角形，以上关系是否仍然成立？

（2）向量方法证明：

【思考】向量的数量积运算中出现了角的余弦，而我们需要的是角的正弦．如何实现转化？





2．**正弦定理：在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即：**

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

3．正弦定理解三角形的两类应用：

（1）已知三角形的任意两角与一边，解三角形；

（2）已知三角形的任意两边与其中一边的对角，解三角形．

三、应用示例，巩固思想

例 1　在$\triangle ABC$中，已知$A=45°$，$B=60°$，$a=2\text{cm}$，求b．

例 2　在$\triangle ABC$中，已知$A=45°$，$a=2$，$b=\sqrt{6}$，解三角形．

四、课堂练习，熟练方法

1．在$\triangle ABC$中，已知$A=45°$，$B=105°$，$c=10\text{cm}$，求a的长．

2．在$\triangle ABC$中，已知$A=120°$，$a=\sqrt{6}\text{cm}$，$b=2\text{cm}$，解三角形．

3．用本节课所学的知识，探索法国天文学家运用“**三角视差法**”估算地月距离时所用到的数学计算公式．

4．$\triangle ABC$中，已知$AB=1$，$\angle ACB=30°$，求$AC+BC$的最大值．

五、课堂小结，升华思想

1．正弦定理及其证明；
2．正弦定理的应用．

六、作业：

1．思考**例** 2 中为何会出现两个解．
2．思考并搜集正弦定理的其他证明方法．

教学反思：

6.4.3　正弦定理和余弦定理（第 3 课时）

教学目标：

1．掌握在已知三角形的两边及其中一边的对角解三角形时，判断解的个数．

2．较为熟练地运用正弦定理、余弦定理解三角形．

3．通过正弦、余弦定理的学习，在解三角形的过程中发现三角形的有关性质与三角函数的关系，从本质上认识事物之间的联系．

教学重、难点：

重点：已知三角形的两边及其中一边的对角解三角形．

难点：已知三角形的两边及其中一边的对角解三角形时，判断解的个数．

教学过程：

一、创设情境，揭示课题

问题 1：回忆正弦定理、余弦定理及其解三角形时适用的类型．

正弦定理：① 已知两角与一边；　　② 已知两边与其中一边的对角．

余弦定理：③ 已知两边及其夹角；　　④ 已知三条边．

问题 2：结合初中所学的三角形知识，上述四种类型中，哪些类型所给出的条件可以确定一个三角形？

二、师生互动，探究新知

1．问题的探究

【探究】在△ABC 中，解三角形．

① 已知 $A=45^\circ$， $a=\sqrt{3}$， $b=\sqrt{6}$；

② 已知 $A=45^\circ$， $a=2$， $b=\sqrt{6}$；

③ 已知 $A=45^\circ$， $a=2\sqrt{3}$， $b=\sqrt{6}$；

④ 已知 $A=45^\circ$， $a=\sqrt{2}$， $b=\sqrt{6}$；

⑤ 已知 $A=120^\circ$， $a=\sqrt{6}$， $b=2$．

【思考】（1）①~⑤的情形中解的个数？

①　　　　；②　　　　；③　　　　；④　　　　；⑤　　　　．

（2）为什么在“已知两边与其中一边的对角”解三角形时会遇到如此复杂的情况，谈一谈你的想法？

（3）在探究给定过程中，你有什么新的发现吗？你能证明你的发现吗？

（4）你能归纳总结你的探究结果吗？

2．问题的总结

在△ABC中，已知a,b,A，讨论三角形解的情况：

【小结1】

先由$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$可进一步求出$B$；则$C=\pi-(A+B)$，从而$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$．

（1）当A为钝角或直角时，必须$a>b$才能有且只有一解；否则无解．

（2）当A为锐角时，如果$a\ge b$，那么只有一解；如果$a<b$，那么可以分下面三种情况来讨论：

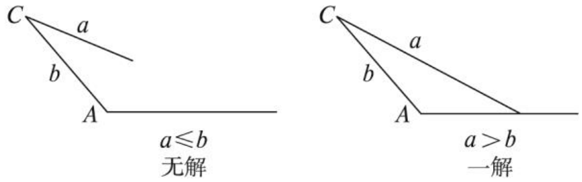
① 若$a>b\sin A$，则有两解；

② 若$a=b\sin A$，则只有一解；

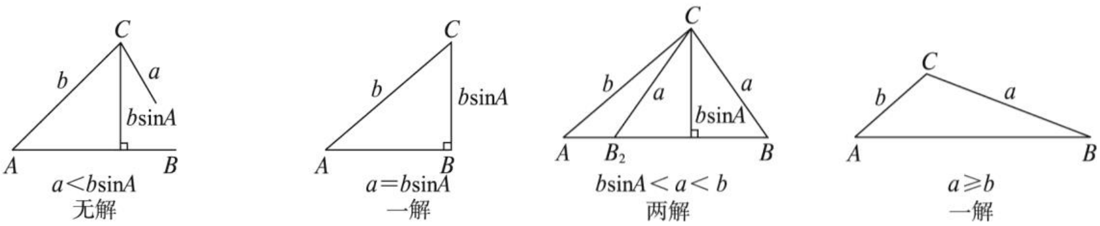
③ 若$a<b\sin A$，则无解．

【小结2】（图示）：

（1）A为直角或钝角：



（2）A为锐角：



三、练习巩固，深化思想

1．根据下列已知条件，判断△ABC解的个数：

（1）$A=45^\circ$，$a=8$，$b=10$；

（2）$A=100^\circ$，$a=4$，$b=5$；

（3）$A=60^\circ$，$a=5$，$b=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$；

（4）$\tan A=\dfrac{1}{2}$，$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{5}$．

2．在非直角三角形ABC中，已知$B=60^\circ$，$b=2$，如果利用正弦定理解三角形时只有一个解，求边a的取值范围．

四、课堂小结，升华思想

已知三角形的两边及其中一边的对角解三角形时，判断解的个数．

五、作业：

教学反思：

6.4.3　正弦定理和余弦定理（第 4、5 课时）

教学目标：

1．了解常用的测量相关术语，如：坡度、俯角、方向角、方位角等．

2．使学生能够运用正弦、余弦定理等知识和方法解决一些有关测量距离、高度、角度的实际问题．

3．通过解斜三角形在实际中的应用，要求学生体会具体问题可以转化为抽象的数学问题，以及数学知识在生产、生活实际中所发挥的重要作用．同时培养学生运用图形、数学符号表达题意和应用转化思想解决数学问题的能力．

教学重、难点：

重点：分析测量问题的实际情景，从而找到测量的方法．

难点：实际问题向数学问题转化思路的确定，即根据题意建立数学模型．

教学过程：

一、创设情境，揭示课题

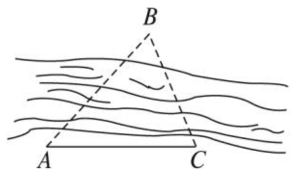
引导语：在实践中，我们经常会遇到测量距离、高度、角度等实际问题．解决这类问题，通常需要借助经纬仪以及卷尺等测量角和距离的工具进行测量．具体测量时，我们常常遇到“不能到达”的困难，这就需要设计恰当的测量方案．下面我们通过几道例题来说明这种情况．

二、师生互动，探究新知

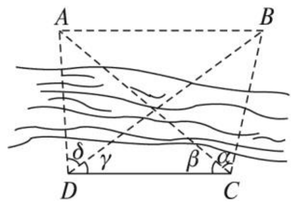
解决实际测量问题的过程一般要充分认真理解题意，正确作出图形，把实际问题里的条件和所求转换成三角形中的已知和未知的边、角，通过建立数学模型来求解．

1．测量距离的问题

【问题 1】如图，如何测量 AB？（测量者 A 与不可到达的一点 B 之间的距离）



【问题 2】如图，如何测量 AB？（不可到达的两点 A,B 之间的距离）

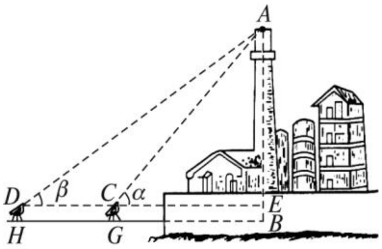


【练习】测得 $CD=\sqrt{3}\text{km}$，$\alpha=45°$，$\beta=30°$，$\gamma=45°$，$\delta=75°$，计算 AB．

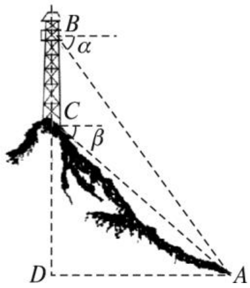
在测量上，我们根据测量需要适当确定的线段叫做**基线**．如问题 1 中的 AC、问题 2 中的 CD．又如测量地月距离时，以柏林、好望角两地的连线为基线．我们可以利用的最长的基线是地球公转椭圆轨道的长轴的长．

2．测量高度的问题

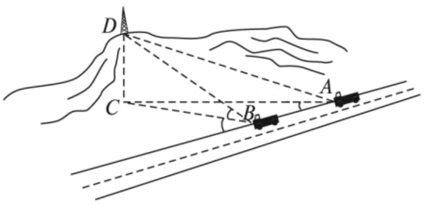
【问题 1】如图，如何测量 AB？



【问题 2】如图，如何测量 CD？

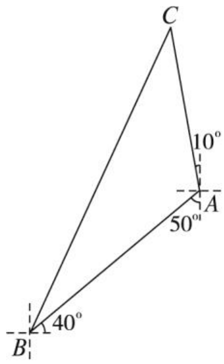


【问题 3】如图，如何测量 CD？



3．测量角度的问题

【问题】我舰在敌岛 A 南偏西 $50°$ 相距 12 海里的 B 处，发现敌舰正由岛沿北偏西 $10°$ 的方向以 10 海里／时的速度航行．问我舰需以多大速度、沿什么方向航行才能用 2 小时追上敌舰？



三、课堂练习，熟练方法

课本 P51-52，练习．

四、课堂小结，升华思想

通过本节学习，我们了解解斜三角形知识在实际中的应用，你能说说看你的收获吗？

五、作业：

教学反思：

6.4.3　正弦定理和余弦定理（第 6、7 课时）

教学目标：

1．掌握三角形的面积公式 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$．

2．深入掌握正弦、余弦定理，进行边角关系互相转化解决问题．

3．让学生从已学的知识出发，体会化归转化的数学思想，深入认识三角形中边、角之间的关系．

教学重、难点：

重点：三角形面积公式的应用，正弦、余弦定理进行边角关系互化．

难点：运用正弦、余弦定理进行边角关系互化，解决相关的问题．

教学过程：

一、创设情境，揭示课题

在$\triangle ABC$中，边BC,CA,AB上的高分别记为h_a,h_b,h_c，那么容易证明：

$$h_a=b\sin C=c\sin B，\quad h_b=c\sin A=a\sin C，\quad h_c=a\sin B=b\sin A.$$

由此我们可以得到三角形的面积公式：

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

二、应用示例，探究新知

1．三角形面积公式的应用：

例 1　在$\triangle ABC$中，根据下列条件，求三角形的面积S：

（1）已知$a=15$，$c=20$，$B=150°$；

（2）已知$B=60°$，$C=75°$，$b=2$；

（3）已知$a=8$，$b=5$，$c=7$．

例 2　已知$\triangle ABC$的面积为$4\sqrt{2}$，$b=3$，$c=4$，求边a．

2．正弦、余弦定理进行边角关系的互化：

例 3　在$\triangle ABC$中，求证：

（1）$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}$；

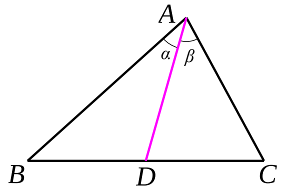
（2）$a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$．

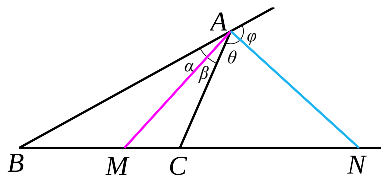
三、课堂练习，熟练方法

1．$\triangle ABC$ 中，利用三角形面积公式证明：

（1）如左图，若 AD 为中线，则 $\sin\alpha:\sin\beta = AC:AB$；

（2）如右图，$\alpha=\beta \Leftrightarrow MB:MC=AB:AC$，$\theta=\varphi \Leftrightarrow NB:NC=AB:AC$．





2．在 $\triangle ABC$ 中，求证：$a=b\cos C+c\cos B$，$b=c\cos A+a\cos C$，$c=a\cos B+b\cos A$．

3．判断 $\triangle ABC$ 的形状：

（1）若 $b\cos A=a\cos B$；

（2）若 $a^2\tan B=b^2\tan A$．

4．在 $\triangle ABC$ 中，求证：$a^2\sin 2B+b^2\sin 2A=2ab\sin C$．

5．设 $\triangle ABC$ 的内切圆,外接圆半径分别为 r,R，半周长 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，求证：

（1）面积 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，$r=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$，$R=\dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$；

（2）BC 边上的中线 $m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$，$BC$ 边上的高 $h_a=\dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$，$\angle A$ 的内角平分线长 $t_a=\dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$；

（3）$Rr=\dfrac{abc}{2(a+b+c)}$，$\dfrac{R}{r}=\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{2\sin A\sin B\sin C}$，$R\ge 2r$（欧拉不等式）;

（4）$\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$，$\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$，$\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{p-a}\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$；

（5）$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{4R}$，$\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{p}{4R}$，$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{p}$；

（6）$\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{p}{R}$，$\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$．

6．（布洛卡点、外森比克不等式*）已知 $\triangle ABC$ 内的点 P 满足 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$，求证：

$$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{\triangle ABC}}\ge\sqrt{3}．$$

四、课堂小结，升华思想

通过这节课，你学到哪些知识？新学的知识有哪些方面的应用？你还有什么新的启发与思考吗？

五、作业：

教学反思：