4.2.1 指数函数的概念

一、教学内容分析

本节课是人民教育出版社出版的《普通高中教科书 数学 必修第一册》（2019 年 A 版）第四章“指数函数与对数函数”第二节“指数函数”的第一课时，主要内容是指数函数的概念.

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》中明确提出：**“通过具体实例，了解指数函数的实际意义，理解指数函数的概念.”**

函数是现代数学中的核心概念，它不仅是描述现实世界中变量之间关系的数学语言，也是解决问题的基本工具.**指数函数是一种基础而广泛应用的函数类型**，与我们的日常生活紧密相连，可以描述自然界和社会现象中增长和衰减过程的基本工具.通过研究指数函数，能够更准确地预测和模拟这些现象的发展趋势.

在指数函数的教学过程中可以采用**启发式**和**探究式**的教学策略，学习指数函数的过程有助于培养学生的**数学抽象、逻辑推理、数学运算、数学建模**等数学学科核心素养.

二、学生学情分析

学生的知识储备：本节课面向的是高一学生.在前面的学习中，他们已经掌握了函数的基本概念和性质，并且对幂函数有了一定的了解.在上一节课程中，他们已经将幂运算的概念从有理数指数扩展到了实数指数，并熟练掌握了幂的运算法则.通过类比和自主探索的学习方式，他们已经具备了理解指数函数概念的基础，并能够运用这些

知识解决实际问题.

学生可能面临的挑战：由于幂函数中自变量是底数，而指数函数中自变量是指数，学生在理解上可能会遇到思维转换的困难，容易将两者混淆.此外，学生需要对幂和指数的基础知识有深入的掌握，而这些概念具有一定的复杂性.

三、教学目标设置

1.经历从实际情景抽象出具体函数，从具体函数抽象出一般的一类函数的过程，借助与幂函数概念的对比分析，形成指数函数的概念.

2.理解指数函数在实际问题中的意义，认识数学与现实生活及其他学科的联系，发展逻辑推理和数学抽象的核心素养.

3.应用指数函数的概念解决简单问题，初步体会指数函数的实际应用价值.

四、教学重难点

教学重点：掌握指数函数的概念与意义.

教学难点：从实际问题中抽象出具体的函数.

五、教学策略分析

本节课是概念课的教学典范，采用问题驱动、引导发现的启发式教学方法来教，引导学生通过观察发现、自主探究、合作交流的探究式学习方法来学，并结合多媒体辅助教学.

六、教学过程设计

引言：

对于指数幂$a^x(a>0)$，指数x的范围已经拓展到了R.

上一章学习了函数的概念和基本性质，通过对幂函数的研究，进一步了解了研究一类函数概念的过程与方法.

函数的概念	背景 $\xrightarrow{\text{抽象}}$ 具体的函数 $\xrightarrow{\text{抽象}}$ 一般的函数
幂函数的概念	背景 $\xrightarrow{\text{抽象}}$ 具体的幂函数 $\xrightarrow{\text{抽象}}$ 一般的幂函数

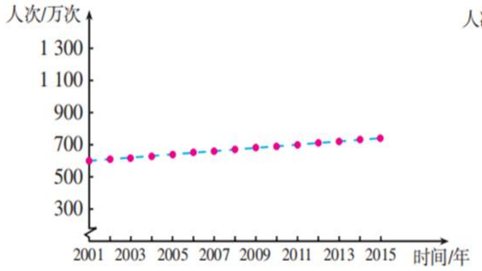
设计意图：回顾已经学习过的内容，建立新旧知识之间的联系，为学习新内容打下基础.

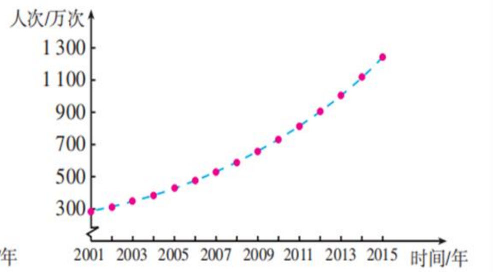
（一）创设情境，引入新知

情境 1：随着中国经济高速增长，人民生活水平不断提高，旅游成了越来越多家庭的重要生活方式．由于旅游人数不断增加，A、B 两地景区自 2001 年起采取了不同的应对措施，A 地提高了景区门票价格，而 B 地则取消了景区门票.表格给出了 A、B 两地景区 2001 年至 2015 年的游客人次以及逐年增加量.

时间/年	A地景区		B地景区	
	人次/万次	年增加量/万次	人次/万次	年增加量/万次
2001	600		278	
2002	609	9	309	31
2003	620	11	344	35
2004	631	11	383	39
2005	641	10	427	44
2006	650	9	475	48
2007	661	11	528	53
2008	671	10	588	60
2009	681	10	655	67
2010	691	10	729	74
2011	702	11	811	82
2012	711	9	903	92
2013	721	10	1 005	102
2014	732	11	1 118	113
2015	743	11	1 244	126

景区游客人次与时间的散点图下表所示：





问题 1：结合表格中的数据及散点图发现怎样的变化规律？

A 景区的游客人次是线性增长的，年增加量基本保持不变.A 图像中的数据点在一条直线上.

B 景区的游客人次是非线性增长的，年增加量越来越大.B 图像中的数据点不在一条直线上.

设计意图： 通过生活中的实际情境，引导学生发现不同的增长方式，激发学生的好奇心.

问题 2：从图象和年增加量我们都难以看出 B 地景区年游客人次变化规律.那么能否通过对 B 地景区每年的游客人次做其他运算发现游客人次的变化规律呢？

通过计算发现：

$$\frac{2002\text{ 年游客人次}}{2001\text{ 年游客人次}}=\frac{309}{278}\approx 1.11$$

$$\frac{2003\text{ 年游客人次}}{2002\text{ 年游客人次}}=\frac{344}{309}\approx 1.11$$

……

$$\frac{2015\text{ 年游客人次}}{2014\text{ 年游客人次}}=\frac{1380}{1244}\approx 1.11$$

结果表明，从 2001 年开始，景区游客人次的变化规律为：

时间	1 年后	2 年后	3 年后	……	x年后

倍数	1.11^1	1.11^2	1.11^3	……	1.11^x

设经过x年后的游客人次为 2001 年的y倍，则 $y=1.11^x(x\in N)$，这是一个函数，其中x是自变量.

设计意图：从实际情境抽象出一个具体的函数，为后续生成指数函数概念作铺垫，体会数学在解决现实问题中的应用.

情境 2：在考古界，通过碳 14 来测定一件生物样本的年代已经是一种成熟的技术手段.碳 14 的衰变极有规律，其精确性可以称为自然界的“标准时钟”.当生物死亡后，它机体内原有的碳 14 含量会按确定的比率衰减（称为衰减率）.

问题 3：若年衰减率为p，生物体内碳 14 含量与死亡年数之间有怎样的关系呢？

如果把刚刚死亡的生物体内碳 14 的含量看成“1”个单位，则死亡n年后，生物体内的碳 14 含量为$y=(1-p)^n$.

问题 4：科学家发现，大约每经过 5730 年，死亡的生物体内碳 14 含量会衰减为原来的一半，这个时间称为“半衰期”，根据半衰期的时间，能确定出p吗？如果能确定出p，那么请计算一下生物体死亡 1.5 年后，生物体内的碳 14 含量是多少？

由$y=(1-p)^{5730}=\frac{1}{2}$,可以求得$1-p=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$, $p=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$.设生物死亡年数为$x$，死亡生物体内碳 14 含量为$y$，那么$y=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}\right)^x$，当$x=1.5$时，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{17190}}$.即死亡 1.5 年后，生物体内的碳 14 含量为$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8595}}$.

设计意图：将考古测量与数学结合，通过计算得到具体函数，为形成概念作铺垫，发展数学运算的核心素养

问题 5：$y=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}\right)^{x}$这个等式中x的范围是什么？

这里x 的范围是$[0,+\infty)$.

在生物体碳 14 含量衰减这个情境中，碳 14 的含量是随着时间按确定比例衰减的，能够通过等式来确定任意时刻x对应的碳 14 含量y.

在上述情境中，可以发现幂指数的拓展不仅是代数推理的结果，还是实际问题的需要.

设计意图：帮助学生理解函数在实际情境中的应用，与回顾旧知相呼应.

（二）引导探究，概念生成

问题 6：上面出现的两个函数有什么相同点，与幂函数又有什么不同呢？

相同点：底数是不变量、指数是自变量.

不同点：幂函数的自变量为底数，它表示的是自变量的幂的形式.

参考幂函数定义：函数$y=x^{a}$叫做幂函数，其中x是自变量，a是常数.定义指数函数：函数$y=a^{x}(a>0,且a\neq 1)$叫做指数函数，其中x为自变量，定义域为R.

设计意图：通过探究两个具体函数的特征，与幂函数进行比较，帮助学生形成指数函数的概念.

追问 1：为什么a要大于0且不等于1？

$a\leq 0$时，a的指数幂不一定有意义.

$a=1$时，$y=1$为常值函数，已经研究过.

追问 2：为什么指数函数定义域是R？

对$\forall x \in R$，a^x均有意义，故指数函数定义域是R.

设计意图：探讨指数函数中参数a的限制条件和定义域，帮助学生理解指数函数的定义.

（三）回归情境，加深理解

问题 7：情境 1 和情境 2 中出现的函数是指数函数吗？

$y=1.11^x(x \in N)$与$y=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}\right)^x(x \in R)$都不是指数函数，它们的对应关系符合指数函数的要求，但是不满足定义域为R.

问题 8：情境 1 中 B 图像中的数据点不在一条直线上，那么它们的数据点在什么图像上呢？

B 图像中的数据点一个指数图象上.

设计意图：回归实际情境，加深对指数函数概念的理解，初步体会指数函数的实际应用价值.

（四）巩固练习，应用概念

例 1：判别下列函数哪些是指数函数？

(1)$y=3\times 2^x$　　(2)$y=2^{x+1}$　　(3) $y=e^x$

只有（3）是指数函数.

例 2：已知指数函数$f(x)=a^x(a>0$ 且$a \neq 1)$，且$f(3)=\pi$，求$f(0), f(1), f(-3)$的值.

$f(x)=a^x$，且$f(3)=\pi$，则$a^3=\pi$，解得$a=\pi^{\frac{1}{3}}$, 于是$f(x)=\pi^{\frac{x}{3}}$,

代入求得$f(0)=1$，$f(1)=\pi^{\frac{1}{3}}$，$f(-3)=\pi^{-1}$.

设计意图：利用指数函数解决简单问题，发展学生数学运算的核心素养.

（五）课堂小结 布置作业

小结：

指数函数概念形成	
背景	情境1：景区游客 情境2：碳14测量
具体函数	$y=1.11^x(x\in N)$ $y=((\frac{1}{2})^{\frac{1}{5730}})^x(x\in[0,+\infty))$
指数函数概念	函数$y=a^x(a>0$，且$a\neq 1)$ 叫做指数函数， 其中x是自变量，函数定义域R.

作业：教科书第 115 页练习第 1-3 题.

设计意图：通过习题练习，检测学生对指数函数概念的掌握情况.

七、板书设计