5.1.2　弧度制

一、教学内容分析

本节课是人民教育出版社出版的《普通高中教科书 数学 必修 第一册》（2019 年 A 版）第五章“三角函数”第一节“任意角和弧度制”的第二课时，主要内容为弧度制的定义、弧度与角度的互化、弧度制下的扇形弧长与面积公式.

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》中明确提出：“了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度的互化，体会引入弧度制的必要性.”

弧度制是三角函数一章的基础内容，由角和圆等几何元素出发、度量角而生成，进而构建以弧度制为核心的相关知识群，为全面建立三角函数体系提供理论准备. **弧度制的本质是用线段长度度量角的大小，由此建立了角的集合与实数集的一一对应关系，简化了扇形的弧长、面积公式的表达形式，并为后续研究三角函数、高等数学及其他学科知识奠定了重要基础.**

弧度制的教学蕴含丰富的数学思想方法，如**类比**、**特殊与一般**、**化归与转化**、**数形结合**等. 学习弧度制的过程有助于培养学生的**数学抽象**、**逻辑推理**、**数学运算**等数学学科核心素养.

二、学生学情分析

学生已有的知识基础：本节课的授课对象是高一学生，他们在本章中已经学习了任意角的相关知识；在小学和初中阶段学生积累了运用不同的单位制，如度量长度、质量、温度等生活经验，掌握角度制下扇形的弧长与面积公式；此外，学生还具备一定的观察、类比、分析、归纳的探究能力.

学生可能遇到的障碍：学生已习惯运用角度制来度量角，难以理解引入弧度制的必要性. 借助单位圆建立角度与对应弧长的关系对学生的逻辑推理能力要求较高，这需要学生具有一定的批判思维和创新能力. 另外，学生在进行弧度制和角度制的互化时，若不能恰当地使用转化的桥梁，就容易混淆换算公式.

三、教学目标设置

1．经历在圆内用线段长度度量角的过程，借助弧长公式分析圆心角和对应

弧长的关系，形成弧度制的概念．

2．掌握弧度制与角度制的内在联系，能进行弧度与角度的互化，发展数学运算核心素养．

3．应用弧度制简化扇形的弧长与面积公式，初步体会引入弧度制的优越性．

四、教学重难点

教学重点：弧度制的概念、弧度与角度的互化．

教学难点：弧度制的产生过程．

五、教学策略分析

本节课是概念课的教学典范，采用问题驱动、引导发现的启发式教学方法来教，引导学生通过观察发现、自主探究、合作交流的探究式学习方法来学，并结合多媒体辅助教学．具体教学策略包括以下几点：

1．以弧度制的合理性为明线

学生先在单位圆中发现用弦长和弧长度量圆心角的可能性，通过计算两个特殊角的弦长和弧长，比较得出用弧长度量圆心角的大小能够保持线性关系．接着，学生回顾初中所学的扇形的弧长公式，验证单位圆中圆心角和对应弧长的关系，建立单位圆中 1 弧度的角的定义，并将其推广到一般情形，从而建立弧度制．最后，掌握角度制和弧度制的互化，既能从不同角度刻画同一数学对象，又能发现其中的内在联系，完成数学研究的基本任务．

2．以弧度制的必要性为暗线

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》围绕引入弧度制的必要性阐述了如下目的："理解弧度制的本质是用线段长度度量角的大小，这样的度量统一了三角函数自变量和函数值的单位；进一步理解高中函数概念中为什么强调函数必须是实数集合与实数集合之间的对应，因为只有这样才能进行基本初等函数的运算（四则运算、复合、求反函数等），使函数具有更广泛的应用性．"

然而，由于学生尚未建立三角函数的概念，对高中阶段用"集合—对应"说研究函数的理解不够深刻，在概念课教学中弧度制的必要性只能有限涉及．

3．以弧度制的优越性为目标

本节课在概念建构部分要求学生借助初中所学的扇形的弧长公式研究弧度制的合理性；而在例题练习部分设置例 2，引导学生在掌握弧度制与角度制的互化的基础上，能够应用弧度制简化扇形的弧长与面积公式．通过角度制与弧度制下同一公式的前后对比，让学生体会弧度制的优越性，理解数学学科追求简洁美的需求．

六、教学过程设计

（一）创设情境 引入课题

情境 1：在日常生活中，因地域、历史等原因，我们知道一个量往往有多个不同的计量标准来度量．例如，度量长度可以用米、英尺等不同的单位制；度量质量可以用千克、磅等不同的单位制；度量温度可以用摄氏度、华氏度等不同的单位制．

古巴比伦人将圆周平均分为 360 份，其中每一份圆弧所对的圆心角的大小叫做 1 度，这种用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制．角的度量是否也有不同的单位制呢？

设计意图：通过类比长度、质量、温度，让学生了解度量可以有多种度量制，引出角的度量是否也有多种方式，激发学生的好奇心．

情境 2：1748 年，数学家欧拉在他的名著《无穷小分析概论》中提出了“用线段长度度量角的大小”的新思想，由此建立了角的弧度制度量标准，进而大大简化了三角公式及运算．

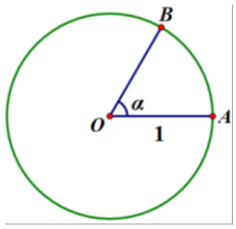
设计意图：追溯数学史，介绍数学家欧拉建立弧度制的思想，为学习弧度制作铺垫．

（二）合作探究 形成概念

探究 1：用弦长或弧长度量单位圆的圆心角．

为简单起见，我们不妨先研究半径为 1 的圆，我们把这样的圆叫做单位圆．

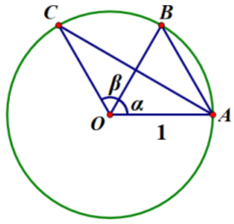
问题 1： A，B分别是单位圆O上的两点，连接OA，OB，记圆心角$\angle AOB$为α．当α的大小变化时，圆中哪些线段的长度会随α的变化而发生变化？



圆心角α所对的弦和圆弧的长度都会发生变化．

问题 2： 那么能不能用弦AB或弧$\overset{\frown}{AB}$的长度来度量圆心角α的大小呢？

设C是单位圆O上不同于A，B的点，连接OC，AB，AC，记圆心角$\angle AOC$为β．若$\alpha = 60°$，$\beta = 120°$．



用弦长度量圆心角的大小时，因为$\alpha = 60°$，$\beta = 120°$，$r = 1$，所以$AB = 1$，$AC = \sqrt{3}$，$\frac{AC}{AB} \neq \frac{\beta}{\alpha}$，弦长与圆心角的角度不成正比，且无法区分优角和劣角，如$120°$和$240°$．

用弧长度量圆心角的大小时，因为$\alpha = 60°$，$\beta = 120°$，$r = 1$，所以$\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi}{3}$，$\overset{\frown}{AC} = \frac{2\pi}{3}$，$\frac{\overset{\frown}{AC}}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\beta}{\alpha}$，弧长与圆心角的角度成正比．

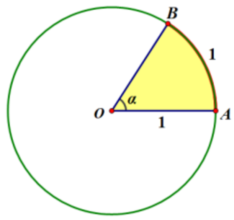
因此，用弧长度量圆心角的大小更合适．

设计意图： 以度量单位圆的圆心角为例，让学生初步探究用弦长或弧长度量圆心角的方式，体会“用线段长度度量角的大小”的思想．

探究 2： 用单位圆建立弧度制的“单位 1”．

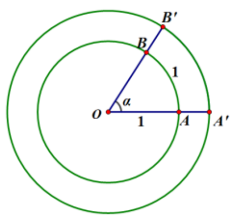
问题 3： 一般地，在单位圆中，弧长与圆心角的大小是否总是成正比？

设$\alpha = n°$，因为$r = 1$，由扇形的弧长公式$l = \frac{n\pi r}{180} = \frac{\pi}{180}n$得，弧长$l$与圆心角$n$成正比，即弧长和圆心角的大小之间建立了一一对应的关系．



由此，我们规定：在单位圆中，长度等于 1 的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角．

问题 4： 为了后续使用的便利性，我们进一步考察上述结论在一般的圆的体现，一般地，在半径为r的圆中，1 弧度的角所对的弧长是多少？



由图形的相似性，在半径为r的圆中，1 弧度的角所对的弧长等于r．

定义：长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，弧度单位用符号rad表示，读作弧度.

弧度制：用弧度为单位度量角的制度.

设计意图：借助单位圆建立角度与对应弧长的关系，用对应弧长刻画角的大小．通过文字语言、符号语言、图形语言的多元表征，帮助学生理解 1 弧度的角的定义.

探究 3：用弧度制度量任意角.

问题 5：在半径为r的圆中，如何用弧度制表示下列弧长所对的圆心角？

（1）$l = 2r$　　（2）$l = \pi r$　　（3）$l = 2\pi r$

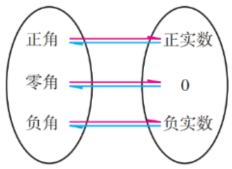
（1）$\alpha = 2\ \mathrm{rad}$　　（2）$\alpha = \pi\ \mathrm{rad}$　　（3）$\alpha = 2\pi\ \mathrm{rad}$

问题 6：在半径为r的圆中，如何用弧度制度量任意角？

在半径为r的圆中，弧长为l的弧所对的圆心角为$\alpha\ \mathrm{rad}$，那么$|\alpha| = \frac{l}{r}$．其中α的正负由α的终边的旋转方向决定，即逆时针旋转为正，顺时针旋转为负.

当角的终边旋转一周后继续旋转，就可以得到弧度数大于2π或小于-2π的角．这样就可以得到弧度为任意大小的角.

角的概念推广后，在弧度制下，角的集合与实数集**R**之间建立起了一一对应的关系：正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是 0.



设计意图：联系任意角的知识，建立角的集合与实数集的一一对应关系，让学生体会弧度制的合理性，为三角函数的学习打下基础．整个探究过程从定性到定量、特殊到一般，使得知识的形成自然而合理.

（三）对比分析 理解概念

探究 4：弧度制与角度制的互化.

问题 7：弧度制、角度制都是角的度量制，如何相互换算呢？你能否找到联系它们的桥梁？

周角：$360° = 2\pi\ \mathrm{rad}$　　　平角：$180° = \pi\ \mathrm{rad}$

追问 1：借助这两个特殊角，如何将弧度制和角度制进行换算？

$1° = \frac{\pi}{180}\ \mathrm{rad} \approx 0.01745\ \mathrm{rad}$　　　$1\mathrm{rad} = (\frac{180}{\pi})° \approx 57.30° = 57°18'$

设计意图：引导学生发现弧度制和角度制之间的桥梁，推导换算公式，深化对度量与单位制的认识.

（四）巩固练习 应用概念

例 1：按照要求完成下列角的互化（精确到 0.001）.

（1）把$67°30'$化为弧度；　　　　（2）把$3.14\ \mathrm{rad}$化为角度.

解：（1）$67°30' = 67.5° = 67.5 \times \frac{\pi}{180}\ \mathrm{rad} = \frac{3\pi}{8}\ \mathrm{rad} \approx 1.178\ \mathrm{rad}$.

（2）$3.14\ \mathrm{rad} = 3.14 \times \frac{180}{\pi}\ \mathrm{rad} \approx 179.909°$.

练习 1：特殊角的角度与弧度的对应表.

度	$0°$	$30°$	$45°$			$120°$	$135°$	$150°$			$360°$
弧度				$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$				π	$\frac{3\pi}{2}$	

设计意图：通过例题加深学生对弧度与角度的互化的理解，总结特殊角的度数与弧度数的对应表，发展学生的数学运算核心素养.

例 2：利用弧度制证明下列关于扇形的公式.

（1）$l = \alpha R$；　　　　（2）$S = \frac{1}{2}\alpha R^2$；　　　　（3）$S = \frac{1}{2}lR$.

R是圆的半径，$\alpha(0 < \alpha < 2\pi)$为圆心角，$l$是扇形的弧长，$S$是扇形的面积.

解：（1）由公式$|\alpha| = \frac{l}{r}$可得，$l = \alpha R$.

（2）半径为R，圆心角为$n°$的扇形的弧长公式和面积公式分别是$l = \frac{n\pi R}{180}$，$S = \frac{n\pi R^2}{360}$. 将$n°$转换为弧度，得$\alpha = \frac{n\pi}{180}$，于是$S = \frac{1}{2}\alpha R^2$.

（3）将$l = \alpha R$代入$S = \frac{1}{2}\alpha R^2$得，$S = \frac{1}{2}lR$.

设计意图：利用弧度制简化扇形的弧长和面积公式，建立新旧认知的关联，让学生体会弧度制的优越性.

（五）课堂小结 布置作业

问题 8：本节课我们是如何研究弧度制的？

背景：用线段长度度量角的大小.

定义：1 弧度的角；弧度制．

联系：弧度制和角度制的互化．

应用：简化扇形的弧长和面积公式．

设计意图：梳理本节课的学习内容，引导学生思考构建单位制的一般过程，加深学生对概念的理解，体会类比、特殊与一般的数学思想．

作业：1．教科书 第 175 页 练习 第 1-6 题．

2．查阅资料了解弧度制的发展史和其他度量角的单位制．

设计意图：通过习题练习，检测学生对弧度制的掌握情况．同时，鼓励学生课后查阅资料了解与弧度制相关的数学文化，激发数学学习兴趣．

七、板书设计