2. Упрощения формулы Бернулли. Локальная теорема Муавра – Лапласа.

- ***Теорема.*** Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A произойдет m раз в n независимых испытаниях при достаточно большом числе n, приближенно равна

$$P_{m,n} \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}, \quad (3.7)$$

локальная формула Муавра – Лапласа

где $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (3.8)$$

функция Гаусса

и $$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \quad (3.9)$$

Приближенные значения вероятности $P_{m,n}$, даваемые локальной формулой *Муавра – Лапласа* на практике используются как точные при npq порядка двух и более десятков, т.е. при условии $npq > 20$.

Для упрощения расчетов, связанных с применением формулы (3.7), составлена таблица значений функции *f(x)*)

Лекция 4

Упрощения формулы Бернулли. Локальная теорема Муавра – Лапласа.

Свойства функции Гаусса f(x) (3.8)

1. Функция $f(x)$ является четной, т.е. $f(-x) = f(x)$.
2. Функция $f(x)$ **–** монотонно убывающая при положительных значениях x, причем при $x \to \infty$ $f(x) \to 0$.
   (Практически можно считать, что уже при $x > 4$ $f(x) \approx 0$.)

Пример. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют холодильники.

Решение. Вероятность того, что семья имеет холодильник, равна p = 80/100 = 0,8. Так как n = 100 достаточно велико (условие npq = 100 - 0,8(1 - 0,8)=64 $\geq$ 20 выполнено), то применяем локальную формулу Муавра – Лапласа.

Вначале определим по (3.9) $x = \dfrac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -2{,}50.$

Тогда по формуле (3.7) $P_{300,400} \approx \dfrac{f(-2{,}50)}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \dfrac{f(2{,}50)}{\sqrt{64}} = \dfrac{0{,}0175}{8} \approx 0{,}0022$

Упрощения формулы Бернулли. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что число m наступления события A в n независимых испытаниях заключено в пределах от a до b (включительно), при достаточно большом числе n приближенно равна

$$P_n(a \le m \le b) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right], \qquad (4.1)$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ (4.2) - *функция (или интеграл вероятностей) Лапласа*;

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (4.3)$$

Формула (4.1) называется ***интегральной формулой Муавра-Лапласа***

Упрощения формулы Бернулли. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Свойства функции Ф(x)

1. Функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2. Функция $\Phi(x)$ монотонно возрастающая, причем при $x \to \infty \to 1$ (практически можно считать, что уже при $x > 4$ $\Phi(x) \approx 1$).

Следствие *интегральной теоремы Муавра-Лапласа*. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то при достаточно большом числе n независимых испытаний вероятность того, что:

а) число m наступлений события A отличается от произведения np не более, чем на величину $\varepsilon > 0$ (по абсолютной величине), т.е.

$$P_n(|m - np| \le \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right); \qquad (4.4)$$

Упрощения формулы Бернулли. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

***Следствие** интегральной теоремы Муавра-Лапласа*.

б) частость $\frac{m}{n}$ события A заключена в пределах от α до β (включительно), т.е.

$$P_n\left(\alpha \le \frac{m}{n} \le \beta\right) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(z_2) - \Phi(z_1)\right], \qquad (4.5)$$

где $$z_1 = \frac{\alpha - p}{\sqrt{pq/n}}, \qquad z_2 = \frac{\beta - p}{\sqrt{pq/n}}. \qquad (4.6)$$

в) частость $\frac{m}{n}$ события A отличается от его вероятности p не более, чем на величину $\Delta > 0$ (по абсолютной величине), т.е.

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \Delta\right) \approx \Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right). \qquad (4.7)$$

Упрощения формулы Бернулли. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Следствие *интегральной теоремы Муавра-Лапласа*.

Доказательство. а) Неравенство $|m - np| \le \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $np - \varepsilon \le m \le np + \varepsilon$.

Поэтому по интегральной формуле (4.1)

$$P_n(|m-np| \le \varepsilon) = P_n(np - \varepsilon \le m \le np + \varepsilon) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{p+\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{np-\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) + \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)\right] = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

б) Неравенство $\alpha \le \frac{m}{n} \le \beta$ равносильно неравенству $a \le m \le b$ при $a = n\alpha$ и $b=n\beta$.

Заменяя в формулах (4.1), (4.3) величины a и b полученными выражениями, получим доказываемые формулы (4.5) и (4.6).

в) Неравенство $\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \Delta$ равносильно неравенству $|m - np| \le \Delta n$.

Заменяя в формуле (4.4) $\varepsilon = \Delta n$, получим доказываемую формулу (4.7).

Пример. По статистическим данным в среднем 87% новорожденных доживают до 50 лет. Найти вероятность того, что из 1000 новорожденных доля (частость) доживших до 50 лет будет: а) заключена в пределах от 0,9 до 0,95; б) будет отличаться от вероятности этого события не более, чем на 0,04 (по абсолютной величине).

Решение. а) Вероятность p того, что новорожденный доживет до 50 лет, равна 0,87.

Так как $n = 1000$ велико (условие $npq = 1000 \cdot 0,87 \cdot 0,13 = 113,1 \geq 20$ выполнено), то используем следствие интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

Вначале определим по (4.6) $z_1 = \dfrac{0,9-0,87}{\sqrt{0,87 \cdot 0,13/1000}} = 2,82, \quad z_2 = \dfrac{0,95-0,87}{\sqrt{0,87 \cdot 0,13/1000}} = 7,52.$

Теперь по формуле (4.5) $P_{1000}\left(0,9 \leq \dfrac{m}{n} \leq 0,95\right) \approx \dfrac{1}{2}\left[\Phi(7,52)-\Phi(2,82)\right] =$

$$= \frac{1}{2}(1-0,9952) = 0,0024.$$

б) По формуле (4.7) $P_{1000}\left(\left|\ \dfrac{m}{n} - 0,87\ \right| \leq 0,04\right) \approx \Phi\left(\dfrac{0,04 \cdot \sqrt{1000}}{\sqrt{0,87 \cdot 0,13}}\right) = \Phi(3,76) = 0,9998.$

Так как неравенство $\left|\dfrac{m}{n} - 0,87\right| \leq 0,04$ равносильно неравенству $0,83 \leq \dfrac{m}{n} \leq 0,91,$ полученный результат означает, что практически достоверно, что от 0,83 до 0,91 числа новорожденных из 1000 доживут до 50 лет.

Раздел 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Тема: Понятие случайной величины. Числовые характеристики случайных величин

1. Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины

- Под ***случайной величиной*** понимается переменная, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно из возможного множества своих значений (какое именно – заранее не известно).

Примеры случайных величин:

1) число родившихся детей в течение суток в г. Севастополе;
2) количество бракованных изделий в данной партии;
3) число произведенных выстрелов до первого попадания;
4) дальность полета артиллерийского снаряда;
5) расход электроэнергии на предприятии за месяц.

1) – 3) - ДСВ

4) – 5) - НСВ

Случайная величина называется ***дискретной***, если множество ее значений конечное, или бесконечное, но счетное.

Под ***непрерывной*** случайной величиной будем понимать величину, бесконечное несчетное множество значений которой есть некоторый интервал (конечный или бесконечный) числовой оси.

1. Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины

- ***Определение.*** Случайной величиной X называется функция, заданная на множестве элементарных исходов (или в пространстве элементарных событий), т.е.

$$X = f(\omega),$$

где ω – элементарный исход (или элементарное событие, принадлежащее пространству Ω, т.е. $\omega \in \Omega$).

Определение. *Законом распределения случайной величины* называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Про случайную величину говорят, что она «*распределена» по данному закону распределения* или «подчинена» этому закону распределения.

Для дискретной случайной величины закон распределения может быть задан в виде таблицы, аналитически (в виде формулы) и графически.

1. Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины

- Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины X является *таблица* (матрица), в которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины и соответствующие их вероятности, т.е.

X:

x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

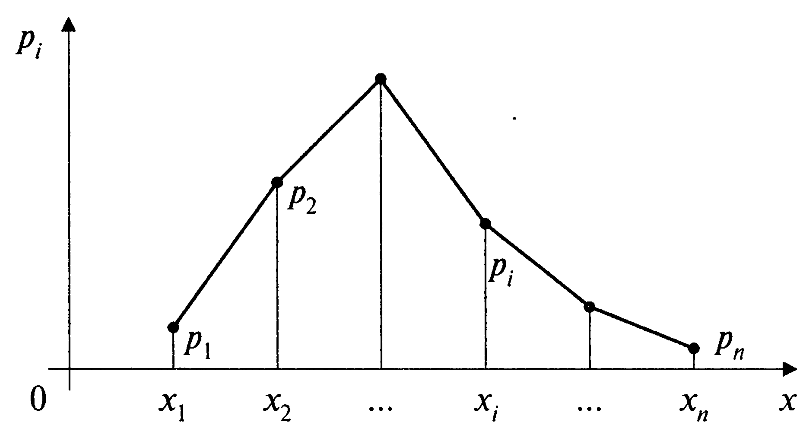
или

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots p_n \end{pmatrix}$$

Такая таблица называется ***рядом распределения дискретной*** случайной величины.

Для любой дискретной случайной величины $$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (4.8)$$

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной величины, а по оси ординат - соответствующие их вероятности.
Соединение полученных точек образует ломаную, называемую ***многоугольником или полигоном распределения вероятностей***



1. Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины

- ***Пример.*** В лотерее разыгрываются: автомобиль стоимостью 5000 ден. ед., 4 телевизора стоимостью 250 ден. ед., 5 видеомагнитофонов стоимостью 200 ден. ед. Всего продается 1000 билетов по 7 ден. ед. Составить закон распределения чистого выигрыша, полученного участником лотереи, купившим один билет.

Решение. Возможные значения случайной величины X - чистого выигрыша на один билет – равны 0 – 7 = – 7 ден. ед. (если билет не выиграл), 200 - 7 = 193, 250 - 7 = 243, 5000 - 7 = 4993 ден. ед.
Учтём, что из 1000 билетов число невыигравших составляет 990, а указанных выигрышей соответственно 5, 4 и 1.

Используя классическое определение вероятности, получим:
$P(X=-7)$=990/1000=0,990; $P(X=193)$=5/1000=0,005;
$P(X=243)$=4/1000=0,004; $P(X=4993)$=1/1000=0,001,
т.е. ряд распределения

X:

x_i	-7	193	243	4993
p_i	0,990	0,005	0,004	0,001

2. Математические операции над случайными величинами

- Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина.

- Так, если дискретная случайная величина X может принимать значения x_i ($i = 1, 2, ..., n$), а случайная величина Y - значения y_j ($j = 1, 2, ..., m$), то независимость дискретных случайных величин X и Y означает независимость событий $X = x_i$; и $Y = y_j$ при любых $i = 1, 2, ..., n$ и $j = 1, 2, ..., m$.

- В противном случае случайные величины называются *зависимыми*.

2. Математические операции над случайными величинами

1. Пусть даны две случайные величины:

X:					
	x_i	x_1	x_2	...	x_n
	p_i	p_1	p_2	...	p_n

,

Y:					
	y_j	y_1	y_2	...	y_m
	p_j	p_1	p_2	...	p_m

- *Произведением* kX случайной величины X на постоянную величину k называется случайная величина, которая принимает значения kx_i с теми же вероятностями p_i ($i = 1, 2, ..., n$).
- m-й степенью случайной величины X, т.е. X^m , называется случайная величина, которая принимает значения x_i^m с теми же вероятностями p_i ($i= 1, 2, ..., n$).

2. Математические операции над случайными величинами

Пример. Дана случайная величина X:

x_i	-2	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти закон распределения случайных величин: а) Y = 3X; б) Z= X^2.

Решение. а) Значения случайной величины Z будут,: 3(- 2) = - 6; 3·1 = 3; 3·2 = 6 с теми же вероятностями 0,5; 0,3; 0,2, т.е.

Y:

y_i	-6	3	6
p_i	0,5	0,3	0,2

б) Значения случайной величины Z будут: (- 2)·2 =4, 1·2 = 1, 2·2 = 4 с теми же вероятностями 0,5; 0-,3; 0,2.

Так как значение Z= 4 может быть получено возведением в квадрат значений (- 2) с вероятностью 0,5 и (+2) с вероятностью 0,2, то по теореме сложения P(Z = 4) = 0,5 + 0,2 = 0,7. Итак, закон распределения случайной величины

Z:

z_i	1	4
p_i	0,3	0,7

2. Математические операции над случайными величинами

2. *Суммой* (*разностью* или *произведением*) случайных величин X и Y называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида x_i+y_j (x_i - y_j или $x_i \cdot y_j$), где i =1,2,...,n; j =1,2,...,m, с вероятностями p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i , а Y – значение y_j:

$$p_{ij} = P\left[(X = x_i)(Y = y_j)\right].$$

- Если случайные величины X и Y независимы, т.е. независимы любые события $X=x_i$ $Y=y_j$ то по теореме умножения вероятностей для независимых событий

$$p_{ij} = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_i \cdot p_j. \qquad (4.9)$$

3. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Определение. *Математическим ожиданием*, или средним значением, *M(X)* дискретной случайной величины *X* называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (4.10)$$

- Если дискретная случайная величина *X* принимает бесконечное, но счетное множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ***математическим ожиданием, или средним значением,*** такой дискретной случайной величины называется сумма ряда (если он абсолютно сходится):

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i. \qquad (4.11)$$

Так как ряд (4.11) может и расходиться, то соответствующая случайная величина может и не иметь математического ожидания.

X:

x_i	2	2^2	2^3	...	2^i	...
p_i	1/2	$1/2^2$	$1/2^3$	...	$1/2^i$	...

3. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C)=C$ (4.12)

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е.

$$M(kX) = kM(X). \qquad (4.13)$$

3. Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно такой же сумме их математических ожиданий, т.е.1

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y). \qquad (4.14)$$

4. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожидании

$$M(XY) = M(X)M(Y) \qquad (4.15)$$

3. Математическое ожидание дискретной случайной величины

5. Если все значения случайной величины увеличить (уменьшить) на постоянную *C*, то на эту же постоянную *C* увеличится (уменьшится) математическое ожидание этой случайной величины:

$$M(X \pm C) = M(X) \pm C. \qquad (4.16)$$

6. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю:

$$M[X - M(X)] = 0. \qquad (4.17)$$

Пример. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 8X - 5Y + 7$, если известно, что $M(X) = 3$, $M(Y) = 2$.

Решение. Используя свойства 1, 2, 3 математического ожидания, найдем $M(Z) = 8M(X) - 5M(Y) + 7 = 8{\cdot}3 - 5{\cdot}2 + 7 = 21$.

4. Дисперсия дискретной случайной величины

Определение. *Дисперсией D(X)* случайной величины *X* называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 \qquad (4.18)$$

или $D(X) = M(X - a)^2$, где $a = M(X)$.

Дисперсия ДСВ X- это мера рассеивания возможных значений *X* относительно центра распределения, и она равняется математическому ожиданию квадрата отклонения ДСВ *X* от её математического ожидания. Обозначают дисперсию *D*(*X*) или *Dx*.

Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины *X* от постоянной величины *C* минимально именно тогда, когда эта постоянная *C* равна математическому ожиданию $M(X) = a$, т.е.

$$\min_C M(X - C)^2 = M(X - a)^2 = D(X).$$

4. Дисперсия дискретной случайной величины

Если случайная величина X – дискретная с конечным числом значений, то

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 p_i. \qquad (4.19)$$

Если случайная величина X — дискретная с бесконечным, но счетным множеством значений, то

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a)^2 p_i. \qquad (4.20)$$

(если ряд в правой части сходится).

Дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно. Поэтому в качестве показателя рассеяния используют также величину $\sqrt{D(X)}$.

Определение. *Средним квадратическим отклонением* {стандартным отклонением или стандартом) от случайной величины X называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}. \qquad (4.21)$$

4. Дисперсия дискретной случайной величины

Основные свойства D(X):

1. $D(X) \geq 0$, для любой ДСВ X.
2. $D(C)=0$, где C = const.
3. $D(CX) = C^2 D(X)$, C=const.
4. $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - \left(\sum_{л=1}^{m} x_л p_k\right)^2$$

5. $D(X_1 \pm X_2 \pm \ldots \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$.