Лекция 3

Повторные независимые испытания

1. Вероятность возникновения независимых повторных событий

- Если вероятность наступления события A в каждом испытании не меняется в зависимости от исходов других, то такие испытания называются независимыми относительно события A.
- Если независимые повторные испытания проводятся при одном и том же комплексе условий, то вероятность наступления события A в каждом испытании одна и та же. Описанная последовательность независимых испытаний получила название **схемы Бернулли**.

- ***Априорная вероятность*** – это вероятность, присвоенная событию при отсутствии знания, поддерживающего его наступление.
- ***Апостериорная вероятность*** – это условная вероятность события при некотором условии, рассматриваемая в противоположность его априорной вероятности.

1. Вероятность возникновения независимых повторных событий. Формула Бернулли

- ***Теорема.*** Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие А наступит m раз в n независимых испытаниях, равна

Формула Бернулли

$$\boxed{P_{m,n} = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}} \qquad (3.1)$$

где $q = 1 - p$.

Доказательство. Пусть A_i и $\bar{A}_i$ - соответственно появление и непоявление события A в i-м испытании ($i = 1, 2, ..., n$), а B_m - событие, состоящее в том, что в n независимых испытаниях событие A появилось m раз.

Представим событие B_m через элементарные события A_i.

Например, при $n = 3$, $m = 2$ событие $B_2 = A_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1\bar{A}_2A_3$, т.е. событие А произойдет два раза в трех испытаниях, если оно произойдет в 1-м и 2-м испытаниях (и не произойдет в 3-м); в 1-м и 3-м (и не произойдет во 2-м), или произойдет во 2-м и в 3-м (и не произойдет в 1-м).

1. Вероятность возникновения независимых повторных событий. Формула Бернулли

В общем виде

$$B_m = A_1 A_2 \ldots A_m \overline{A}_{m+1} \ldots \overline{A}_n + A_1 \overline{A}_2 A_3 \ldots \overline{A}_{n-1} A_n + \ldots + \overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{n-m} A_{n-m+1} \ldots A_n, \qquad (3.2)$$

т.е. каждый вариант появления события B_m состоит из m появлений события А и $n-m$ непоявлений, т.е. из m событий А и из $n-m$ событий не А с различными индексами.

Число всех комбинаций (слагаемых суммы (3.2)) равно числу способов выбора из n испытаний m, в которых событие А произошло, т.е. числу сочетаний C_n^m.

- Вероятность каждой такой комбинации (каждого варианта появления события B_m) по теореме умножения для независимых событий равна $p^m q^{n-m}$, так как

$$p(A_i) = p, \quad p(\overline{A}_i) = q, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В связи с тем, что комбинации между собой несовместны, по теореме сложения вероятностей получим

$$P_{m,n} = P(B_m) = \underbrace{p^m q^{n-m} + \ldots + p^m q^{n-m}}_{C_n^m \text{ раз}} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

1. Вероятность возникновения независимых повторных событий. Формула Бернулли

Пример. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных.

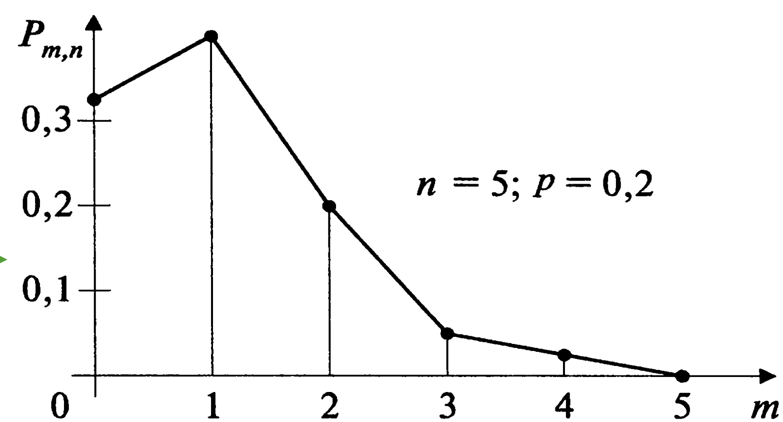
Решение. Вероятность изготовления бракованной детали Р = 1 – 0,8 = 0,2. Искомые вероятности находим по формуле Бернулли (4.1):

$$P_{0,5} = C_5^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}32768; \qquad P_{1,5} = C_5^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096;$$

$$P_{2,5} = C_5^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}2048; \qquad P_{3,5} = C_5^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512;$$

$$P_{4,5} = C_5^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^1 = 0{,}0064; \qquad P_{5,5} = C_5^5 \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^0 = 0{,}00032.$$

Полученные вероятности изобразим графически точками с координатами (m, $P_{m,n}$). Соединяя эти точки, получим многоугольник, или полигон, распределения вероятностей



1. Вероятность возникновения независимых повторных событий. Формула Бернулли

- Число m_0 наступления события А в n независимых испытаниях называется наивероятнейшим, если вероятность осуществления этого события $P_{m0,n}$ по крайней мере не меньше вероятностей других событий $P_{m,n}$ при любом m.
- Для нахождения m_0 запишем систему неравенств:

$$\begin{cases} P_{m_0,n} \geq P_{m_0+1,n}, \\ P_{m_0,n} \geq P_{m_0-1,n}. \end{cases} \qquad (3.3)$$

- Решим первое неравенство системы (3.3).
- Используя формулы Бернулли и числа сочетаний, запишем

$$\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0} q^{n-m_0} \geq \frac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)!} p^{m_0+1} q^{n-m_0-1}.$$

- Так как $(m_0+1)! = m_0!(m_0+1)$, $(n-m_0)! = (n-m_0-1)!(n-m_0)$, то получим после упрощений неравенство

$$\frac{1}{n-m_0} q \geq \frac{1}{m_0+1} p,$$ откуда $$(m_0+1)\, q \geq (n-m_0)\, p.$$

Теперь $m_0 (p+q) \geq np - q$ или $m_0 \geq np - q$

1. Вероятность возникновения независимых повторных событий. Формула Бернулли

Решая второе неравенство системы (3.3), получим аналогично: $m_0 \leq np + p.$

Объединяя полученные решения двух неравенств, придем к двойному неравенству:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p \qquad (3.4)$$

Так как $np + p - (np - q) = p + q = 1$, то всегда существует целое число m_0, удовлетворяющее неравенству (3.4).

При этом, если $np + p$ – целое число, то наивероятнейших чисел два:

$$m_0 = np + p \quad \text{и} \quad m_0' = np - q.$$

- ***Пример.*** Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?

Решение. В данном случае p = 1/6. Согласно неравенству (3.4) $n \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \leq 10 \leq n \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

$n - 5 \leq 60 \leq n + 1$ => $59 \leq n \leq 65$, т.е. необходимо подбросить кость от 59 до 65 раз (включительно).

1. Переменные условия опыта. Производящая функция

- Пусть производится n независимых испытаний, причём в первом испытании вероятность появления события A равна p_1, во втором – p_2, …, в n-м испытании – p_n; вероятности непоявления события A соответственно равны q_1, q_2, …, q_n; $P_n(k)$ – вероятность появления события А в n испытаниях ровно k раз.
- *Производящей функцией* вероятностей $P_n(k)$ называют функцию, определяемую равенством

$$\varphi_n(z) = (p_1 + q_1)(p_2 z + q_2)\ldots(p_n z + q_n).$$

- Вероятность $P_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях, в первом из которых вероятность появления события A равна p_1, во втором – p_2, …, в n-м испытании – p_n; $P_n(k)$ – вероятность появления события A в n испытаниях ровно k раз, равна коэффициенту z^k в разложении производящей функции по степеням z.

$$\varphi_2(z) = (p_1 + q_1)(p_2 z + q_2) = \overbrace{p_1 p_2}^{\boxed{P_2(2)}} z^2 + \overbrace{(p_1 q_2 + p_2 q_1)}^{\boxed{P_2(1)}} z + \overbrace{q_1 q_2}^{\boxed{P_2(0)}}$$

1. Переменные условия опыта. Производящая функция

- ***Пример.*** *Устройство состоит из трех независимо работающих элементов (за время t) соответственно равны $p_1=0,7$; $p_2=0,8$; $p_3=0,9$. Найти вероятности того, что за время t будут работать безотказно: а) все элементы, б) два элемента, в) один элемент, д) ни один из элементов.*

Решение. Так как вероятности безотказной работы элементов соответственно равны $p_1=0,7$; $p_2=0,8$; $p_3=0,9$., то вероятности того, что элементы откажут, равны $q_1=0,3$; $q_2=0,2$; $q_3=0,1$.

Составим производящую функцию

$$\varphi_3(z)=(p_1+q_1)(p_2z+q_2)(p_3z+q_3)=0{,}504z^3+0{,}398z^2+0{,}092z+0{,}006.$$

Вероятность того, что три элемента будут работать безотказно, равна коэффициенту при z^3

Вероятность того, что два элемента будут работать безотказно, равна коэффициенту при z^2

Вероятность того, что один элемент будет работать безотказно, равна коэффициенту при z^1

Вероятность того, что ни один элемент не будет работать безотказно, равна коэффициенту при z^0

Контроль: 0,504+0,398+0,092+0,006=1.

1. Вероятность возникновения независимых повторных событий. Алгоритм решения задач

1. Проверить, выполняются ли условия схемы повторных независимых испытаний.
2. Если опыт, описываемый в задаче, приводит к схеме повторных независимых испытаний, то из условий определить: $P(A)= p$ - вероятность успеха, и $P(\bar{A})= 1 - p = q$

- вероятность неудачи в каждом опыте.

3. При заданных числе опытов, количестве успехов (и (или) неудач) воспользоваться формулами (3.1)-(3.4)

Часто применяемые формулы в схеме Бернулли

Вероятность наступления события *A:*

а) менее k раз: $P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k-1)$

б) более k раз: $P_n(k+1)+P_n(k+2)+\ldots+P_n(n)$

в) не менее k раз: $P_n(k)+P_n(k+1)+\ldots+P_n(n)$

г) не более k раз: $P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k)$

д) хотя бы один раз: $1-P_n(0)$

1. Вероятность возникновения независимых повторных событий. Алгоритм решения задач

- ***Пример.*** В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене: 1) не будут проданы 5 пакетов; 2) будет продано: а) менее 2 пакетов; б) не более 2; в) хотя бы 2 пакета; г) наивероятнейшее число пакетов.

Решение. 1) Вероятность того, что пакет акций не будет продан по первоначально заявленной цене, p =1 – 0,2=0,8.

По формуле Бернулли $P_{5,9} = C_9^5 \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}066.$

2.а) По условию p = 0,2.

$$P_9(m < 2) = P_{0,9} + P_{1,9} = C_9^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^9 + C_9^1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^8 = 0{,}436.$$

2.б) $P_9(m \le 2) = P_{0,9} + P_{1,9} + P_{2,9} = C_9^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^9 + C_9^1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^8 +$

$+ C_9^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^7 = 0{,}738.$

2.в) $P_9(m \ge 2) = P_{2,9} + P_{3,9} + \ldots + P_{9,9}.$

2.в) Проще, если перейти к противоположному событию, т.е.

$P_9(m \ge 2) = 1 - P_9(m < 2) = 1 - (P_{0,9} + P_{1,9}) = 1 - 0{,}436 = 0{,}564$

Пример. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене: 1) не будут проданы 5 пакетов; 2) будет продано: а) менее 2 пакетов; б) не более 2; в) хотя бы 2 пакета; г) наивероятнейшее число пакетов.

- 2.г) Наивероятнейшее число проданных акций по первоначально заявленной цене определится из условия (4.4), т.е.

$$9 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 \le m_0 \le 9 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \quad \text{или} \quad 1 \le m_0 \le 2,$$

т.е. наивероятнейших чисел два: $m_0=1$ и $m'_0 = 2$.
Поэтому вероятность

$$P_{\text{наивер}} = P_{1,9} + P_{2,9} = C_9^1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^8 + C_9^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^7 = 0{,}604.$$

2. Упрощения формулы Бернулли. Формула Пуассона

- ***Задача***: вычислить вероятность $P_{m,n}$ появления события A при большом числе испытаний n, например, $P_{300,500}$.
- По формуле Бернулли $$P_{300,500} = C_{500}^{300} p^{300} q^{200} = \frac{500!}{300!\,200!} p^{300} q^{200}$$

Непосредственное вычисление технически сложно (p и q - числа дробные)!

- Существуют <u>более простые приближенные формулы</u> для вычисления $P_{m,n}$ при больших n – так называемые асимптотические формулы, – определяются *теоремой Пуассона*, *локальной* и *интегральной теоремами Муавра-Лапласа*.

Теорема Пуассона

Теорема. Если вероятность р наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p \to 0$) при неограниченном увеличении числа n испытаний ($n \to \infty$), причем произведение np стремится к постоянному числу λ ($np \to \lambda$), то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A появится т раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,n} = P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \qquad (3.5)$$

2. Упрощения формулы Бернулли. Формула Пуассона

Теорема Пуассона

Доказательство: По формуле Бернулли

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} p^m (1-p)^n (1-p)^{-m}$$

или, учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} np = \lambda$ (при достаточно больших n):

$$p \approx \frac{\lambda}{n} \text{ и } P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m}{m!}\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right) = \ldots = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m-1}{n}\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}}\right)^{-\lambda} = e^{-\lambda} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = 1,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,n} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

2. Упрощения формулы Бернулли. Формула Пуассона

Замечание

- Строго говоря, условие теоремы Пуассона $p \to 0$ при $n \to \infty$, так что $np \to \lambda$, противоречит исходной предпосылке схемы испытаний Бернулли, согласно которой вероятность наступления события в каждом испытании $p = const$.
- Однако, если вероятность p – постоянна и мала, число испытаний n – велико и число $\lambda = np$ – незначительно (будем полагать, что $\lambda = np < 10$), то из предельного равенства (3.5) вытекает приближенная формула Пуассона:

$$\boxed{P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda).} \qquad (3.6)$$

Формула Пуассона

Значения функции Пуассона $P_m(\lambda)$ табулированы.

2. Упрощения формулы Бернулли. Формула Пуассона

- ***Пример 1.*** На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета?
- *Решение*. Вероятность того, что день рождения студента 1 сентября, равна $p = 1/365$. Так как $p = 1/365$ – мала, $n = 1825$ – велико и

$\lambda = np = 1825(1/365) = 5 < 10$, то применяем формулу Пуассона

$$P_{4,1825} = P_4(5) = 0,1755$$

2. Упрощения формулы Бернулли. Локальная теорема Муавра – Лапласа.

- ***Теорема.*** Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A произойдет m раз в n независимых испытаниях при достаточно большом числе n, приближенно равна

$$P_{m,n} \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}, \quad (3.7)$$

локальная формула Муавра – Лапласа

где $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (3.8)$$

функция Гаусса

и $$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \quad (3.9)$$

Приближенные значения вероятности $P_{m,n}$, даваемые локальной формулой *Муавра – Лапласа* на практике используются как точные при npq порядка двух и более десятков, т.е. при условии $npq > 20$.

Для упрощения расчетов, связанных с применением формулы (3.7), составлена таблица значений функции *f(x)*)

2. Упрощения формулы Бернулли. Локальная теорема Муавра – Лапласа.

Свойства функции Гаусса f(x) (3.8)

1. Функция $f(x)$ является четной, т.е. $f(-x) = f(x)$.
2. Функция $f(x)$ – монотонно убывающая при положительных значениях x, причем при $x \to \infty$ $f(x) \to 0$.
   (Практически можно считать, что уже при $x > 4$ $f(x) \approx 0$.)

Пример. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют холодильники.

Решение. Вероятность того, что семья имеет холодильник, равна p = 80/100 = 0,8. Так как n = 100 достаточно велико (условие npq = 100 - 0,8(1 - 0,8)=64 $\geq$ 20 выполнено), то применяем локальную формулу Муавра – Лапласа.

Вначале определим по (3.9) $x = \dfrac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -2{,}50.$

Тогда по формуле (3.7) $P_{300,400} \approx \dfrac{f(-2{,}50)}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \dfrac{f(2{,}50)}{\sqrt{64}} = \dfrac{0{,}0175}{8} \approx 0{,}0022$