Теория вероятностей и математическая статистика

РАЗДЕЛ 1
Случайные события

Структура курса

- **РАЗДЕЛ 1. Случайные события**
- Тема 1.1. Основные понятия теории вероятностей.
- Тема 1.2. Основные теоремы теории вероятностей.
- Тема 1.3. Повторные независимые испытания.
- **РАЗДЕЛ 2. Случайные величины**
- Тема 2.1. Понятие случайной величины. Числовые характеристики случайных величин.
- Тема 2.2. Законы распределения.
- Тема 2.3. Системы случайных величин.
- **РАЗДЕЛ 3. Основы математической статистики**
- Тема 3.1. Предельные теоремы теории вероятностей.
- Тема 3.2. Анализ вариационных рядов.
- Тема 3.3. Анализ и построение зависимостей.

Лекции – 17 час.

Практические занятия – 17 час. – проверочные работы

Лабораторные занятия – 17 час. – ЛР 1,2,3,4

Трудоемкость – 4 ЗЕ

Вид контроля - экзамен

Тема 1. Основные понятия теории вероятностей

- *Теорией вероятностей* называется математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.
- *Математическая статистика* – раздел математики, изучающий математические методы сбора, систематизации, обработки и интерпретации результатов наблюдений с целью выявления статистических закономерностей.
- Математическая статистика опирается на теорию вероятностей.

Исторически зарождение и развитие теории вероятностей связано с азартными играми, в которых требовалось обосновать то или иное решение.

- **Классический пример:**
- **Задача.** Двое играют в безобидную игру (шансы выиграть у обо-их одинаковы). Договариваются, что всю ставку забирает игрок, вы-игравший первым 6 партий. Как правильно разделить ставку, если игра остановилась при счете 5:3?
- **Решение**. Для выигрыша первому игроку достаточно выиграть одну партию, второму игроку необходимо подряд выиграть три партии. Всего три партии предполагает $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ исходов (каждая партия имеет два исхода: выиграл, проиграл). В пользу второго игрока только один исход из 8 возможных, а в пользу первого – 7 исходов. Поэтому справедливо разделить ставку пропорционально шансам выиграть, то есть 7:1.

Этапы развития теории вероятностей

1. Предыстория теории вероятностей – зарождение основные понятий теории вероятностей - XVI-XVII вв.

(Д. Кардано, Л. Пачоли, Н. Тарталья и др.) первые попытки создания теории азартных игр с целью дать рекомендации игрокам.

2. Возникновение теории вероятностей как науки - XVII - начало XVIII в.

(Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс)

3. Появление предельных теорем. Формирование приложений теории вероятностей - XVII-XIX вв

(работы А. Муавра, П. Лапласа, К. Гаусса, С. Пуассона и др.)

4. Возникновение и развитие русской школы – XIX - начало XX в.

(работы П.Л. Чебышева, А.М. Ляпунова и А.А. Маркова и других)

5. Современный период развития. Построение аксиоматики. Развитие математической статистики (труды академика А.Н. Колмогорова)

Большой вклад внесли:

Универсальные и специализированные статистические пакеты:
отечественные STADIA, Эвриста, Статистик-консультант, Олимп: СтатЭксперт
американские STATGRAPHICS, SPSS, SYSTAT, STATISTICA и др.

Широкому внедрению математико-статистических методов исследования способствовало появление во второй половине XX в. ЭВМ (ПК), статистических программных пакетов и пр.

Где сейчас в IT применяется теория вероятностей и математическая статистика?

- Data mining, машинное обучение
- Компьютерное зрение
- Нейросети и системы принятия решений
- Биржевые торговые роботы
- Крипто-анализ и алгоритмы шифрования данных
- Системы моделирования физ. и хим. процессов
- Анализ пространственных данных, геомаркетинг
- Системы прогнозирования, системы поддержи принятия решений
- Распределенные вычислительные системы и анализ их производительности для конкретных задач
- Анализ экономических, финансовых или технических рисков
- Обработка сигналов: изображения, радиолокация, звук
- и др.

Случайные события

- Опыт, эксперимент, наблюдение явления называют *испытанием*.
- Результат, исход испытания называется *событием*.
- Два события называются *совместимыми (совместными)*, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.
- Два события называются *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.
- Два события A и B называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит.
- Событие называется *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и невозможным, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.
- Событие А называется *случайным*, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

В теории вероятностей есть неопределяемые понятия: элементарные события (исходы) (ω_i) и пространство элементарных событий ($\Omega=\{\omega_i\}$).

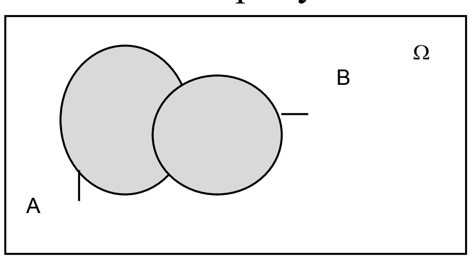
- ***Определение.*** Говорят, что совокупность событий образует *полную группу событий* для данного испытания, если его результатом обязательно становится хотя бы одно из них.
  - Примеры полных групп событий: выпадение герба и выпадение цифры при одном бросании монеты; попадание в цель и промах при одном выстреле; выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков при одном бросании игральной кости.

Рассмотрим полную группу попарно несовместимых событий $U_1, U_2, ..., U_n$, связанную с некоторым испытанием. Предположим, что в этом испытании осуществление каждого из событий U_i ($i= 1, 2, …, n$) равновозможно, т. е. условия испытания не создают преимуществ в появлении какого-либо события перед другими возможными.

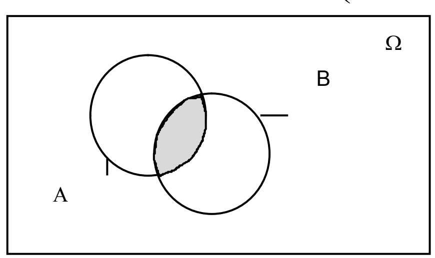
- ***Определение.*** События $U_1, U_2, ..., U_n$, образующие полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий, называют *элементарными* событиями.

Алгебра событий

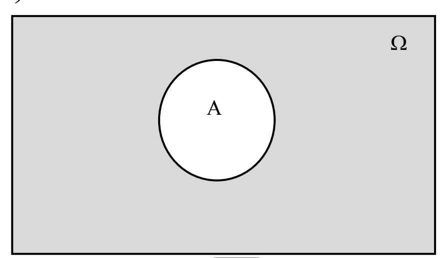
- *Суммой* событий A и B называется событие C = A + B, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий A или B.
- Аналогично *суммой конечного числа событий* A_1 A_2, ..., $A_к$ называется событие $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_к$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_i, i=1, ..., к.
  - Из определения непосредственно следует, что A + B = B + A. Справедливо также и сочетательное свойство. Однако A + A = A (а не 2A, как в алгебре).
- *Произведением* событий A и B называется событие C=AB (или $A \cap B$), состоящее в том, что в результате испытания произошли и событие A, и событие B.
- Аналогично *произведением конечного числа событий* A_1 A_2, ..., $A_к$ называется событие A = A1 A2... Aк, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.
  - Из определения непосредственно следует, что AB=BA. Справедливы также сочетательный и дистрибутивный законы. Однако AA = A (а не A^2).



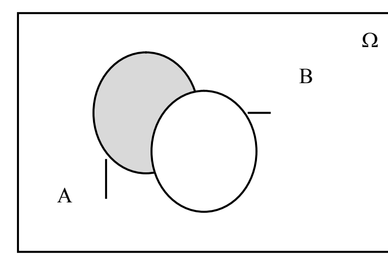
A+B



AB



$\bar{A}$



A-B

Алгебра событий

- *Отрицанием* события А называется событие $\bar{A}$ (не А), заключающееся в ненаступлении события А ($A+\bar{A}=\Omega$, $A\cdot\bar{A}=\varnothing$. Причем, если в результате опыта может произойти событие А, то может произойти и обратное ему событие $\bar{A}$.
- Если наступление события А приводит к наступлению события В *и наоборот (наступление В влечет наступление* А), то события А и В *равны* (А=В).

Пусть S - множество всех подмножеств Ω, для которого выполняются следующие свойства:

- если $A \in S$ и $B \in S$, то $A + B = A \cup B \in S$,
- если $A \in S$ и $B \in S$, то $A \cdot B = A \cap B \in S$,
- если $A \in S$, то $\bar{A} \in S$,

тогда множество S называется *алгеброй событий*.

Классическое определение вероятности

Определение. Событие А называется *благоприятствующим* событию В, если наступление события А влечет за собой наступление события В.

Определение 4 (*классическое определение вероятности*). Вероятность события А равна отношению числа случаев, благоприятствующих появлению события А, к числу всех возможных случаев, т.е.

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n},}$$

способ *непосредственного вычисления вероятности*

где n – число всех возможных случаев, а m – число случаев, способствующих появлению события А.

Непосредственное вычисление вероятности - для симметричных и одинаково возможных последствий испытаний, подразумевает конечное число несовместных, единственно возможных результатов.

Свойства вероятности (вытекают из классического определения вероятности)

1. ***Вероятность достоверного события равна единице.***

Действительно, достоверному событию должны благоприятствовать все n элементарных событий, т.е. $m = n$ и, следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

2. ***Вероятность невозможного события равна нулю***.

В самом деле, невозможному событию не может благоприятствовать ни одно из элементарных событий, т.е. $m = 0$, откуда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

3. ***Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.***

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных событий. Поэтому в этом случае $0 < m < n$ и, значит, $0 < m / n < 1$. Следовательно $0 < P(A) < 1$.

Таким образом, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству $0 \leq P(A) \leq 1$.

Замечание. Из определения вероятности следует, что элементарные события являются равновероятными, т. е. обладают одной и той же вероятностью.

Применение элементов комбинаторики к нахождению вероятностей

- ***Определение.*** *Размещениями* из n различных элементов по m элементов ($m \le n$) называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.
- Или, произвольное упорядоченное подмножество из n элементов данного множества М, содержащего m элементов, где $m \le n$, называется *размещением из n.элементов по m*

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1)) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- ***Определение.*** *Перестановками* из n различных элементов называются размещения из этих n элементов по n.
  - Перестановки можно рассматривать как частный случай размещений при $m = n$
- *Или,* любое произвольное упорядоченное множество, состоящее из n элементов, называется *перестановкой* из n элементов.
- Формула для вычисления числа перестановок из n элементов:

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n = n!$$

Применение элементов комбинаторики к нахождению вероятностей

- ***Определение.*** Сочетаниями из *n* различных элементов по *m* элементов называются комбинации, составленные из данных *n* элементов по *m* элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.
  - Отметим разницу между сочетаниями и размещениями: **в первых не учитывается порядок элементов**.
- Произвольное подмножество из *m* элементов данного множества М, состоящего из *n* элементов, называется *сочетанием из n элементов по m*.
- Рассмотрим все допустимые сочетания элементов $a_{\alpha 1}$, $a_{\alpha 2}$, …, $a_{\alpha m}$. Делая в каждом из них *m*! возможных перестановок их элементов, очевидно, получим общее число размещений из *n* элементов по *m*.
- Таким образом, отсюда

$$C_n^m = A_n^m / m!$$ или $$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

Применение элементов комбинаторики к нахождению вероятностей

Свойства сочетаний:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$

3. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$

2. $C_n^{m+1} = \dfrac{n-m}{m+1} \cdot C_n^m.$

Число всех подмножеств множества А, состоящего из m элементов, равно 2^m

Числа C_n^m являются коэффициентами в формуле бинома Ньютона

При решении задач комбинаторики можно использовать следующие правила:

- *Правило суммы.* Если некоторый элемент A может быть выбран из совокупности элементов m способами, а другой элемент B – n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m + n$ способами.
- *Правило произведения.* Если элемент А можно выбрать из совокупности элементов m способами и после каждого такого выбора элемент В можно выбрать n способами, то пара элементов (А, В) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.
- Эти правила справедливы и для любого конечного числа элементов.

Примеры применения формул комбинаторики к нахождению вероятностей событий

- *Пример 1.* Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

Две последние цифры можно набрать A_{10}^2 способами.

Благоприятствовать событию *M* (цифры набраны правильно) будет только один способ.

$$P(M)=1/A_{10}^2 = \frac{1}{10\cdot 9} = \frac{1}{90} \approx 0{,}011$$

- *Пример 2.* Партия из 10 деталей содержит одну нестандартную. Какова вероятность, что при случайной выборке 5 деталей из этой партии все они будут стандартными (событие *A*)?

Здесь число всех случайных выборок $n = C_{10}^5$, а число выборок, благоприятствующих событию *A*, есть $m = C_9^5$. Таким образом, искомая вероятность

$$P(A) = C_9^5 / C_{10}^5 = \frac{9!}{5!\cdot 4!} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Геометрическая вероятность

- В двумерном случае (на плоскости) может оказаться, что при геометрической интерпретации получится такая картина: имеется фигура площадью s, и на нее наудачу ставится точка. Тогда вероятность попадания точки на часть этой фигуры, имеющую площадь q, оказывается равной q/s.
- В трехмерном случае (в пространстве) здесь берется отношение соответствующих объемов.

- ***Определение***. *Геометрической вероятностью* события А называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события А, к мере всей области.

Относительная частота. Статистическое определение вероятности.

Пусть произведено n испытаний, при этом некоторое событие А наступило m раз.

Определение. Число m называется абсолютной частотой (или просто частотой) события А, а отношение

$$\boxed{P^*(A) = \frac{m}{n},}$$

называется относительной частотой события А.

Определение (*статистическое определение вероятности*). Вероятностью события А в данном испытании называется число Р(А), около которого группируются значения относительной частоты при больших n.

Таким образом, относительная частота события приближенно совпадает с его вероятностью в статистическом смысле, если число испытаний достаточно велико.

С этой точки зрения величина $m = np$ представляет собой среднее значение числа появления события А при n испытаниях.

При широких предположениях доказывается, что **вероятности события в классическом и статистическом смысле совпадают между собой**.

Аксиоматическое определение вероятности

Вероятность события - это численная мера объективной возможности его появления.

Аксиомы вероятности

- Каждому событию A ставится в соответствие неотрицательное число p, которое называется вероятностью события A:

$$P(A) = p \geq 0, \text{ где } A \in S,\ S \subseteq \Omega$$

- Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны, то верно равенство:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n), \text{ где } A_i \in S\ (i = 1,2,\ldots,n),\ S \subseteq Q. .$$

- P(Ω)=1, где Ω - истинное (достоверное) событие.
- Пространство элементарных событий Ω с заданной в нем алгеброй S (или σ-алгеброй) и определенной на S вероятностью - неотрицательной мерой $P(A)$, $A \in S$ называется *вероятностным пространством* и обозначается (Ω, S, P). Вероятностное пространство служит математической моделью любого случайного явления в теории вероятностей.
- Аксиоматический подход не указывает, как конкретно находить вероятность, поэтому для решения задач целесообразно использовать подходы к определению вероятности, которые перечислены ниже.