1 Основные понятия и определения

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Определение 1. *n-мерное семейство распределений $p(x,\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^d$, называется* ***экспоненциальным*** *с естественным параметром θ, если существуют функции $Z(\theta), h_0(x), h(x) = (h_1(x), \ldots, h_d(x))$, такие что,*

$$p(x,\theta) = \frac{1}{Z(\theta)} \exp\left(h_0(x) + \theta' h(x)\right).$$

Одномерное экспоненциальное семейство $r(x,\alpha)$, содержащее два распределения $p(x)$ и $q(x)$, $x \in X, |X| < \infty$, может быть задано в виде

$$r(x,\alpha) = \frac{1}{\sum_{x\in X} p^{\alpha}(x) q^{1-\alpha}(x)} p^{\alpha}(x) q^{1-\alpha}(x). \tag{1}$$

Определение 2. *Последовательность случайных величин $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, принимающих значения в $\mathcal{S}$, называется* ***цепью Маркова*** *с пространством состояний $\mathcal{S}$, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и борелевского множества B*

$$\mathrm{P}(\xi_{n+1} \in B | \sigma(\xi_m, m \leqslant n)) = \mathrm{P}(\xi_{n+1} \in B | \sigma(\xi_n)),$$

если при этом переходные вероятности $\mathrm{P}(\xi_{n+w} = a | \xi_n = b)$ не зависят от n, то цепь Маркова называется ***однородной****.*

Определение 3. ***Двоичной*** *называется цепь Маркова с пространством состояний $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.*

Матрицу переходных вероятностей однородной цепи Маркова обозначим $P = (P_{ij} = \mathrm{P}(\xi_{n+1} = i | \xi_n = j), i, j \in \mathcal{S})$, вероятности $\pi(x_1) = \mathrm{P}(\xi_1 = x_1)$ будем называть вероятностями начальных состояний.

Утверждение 1. *Конечномерные распределения однородной цепи Маркова имеют вид*

$$p(x) = \pi(x_1) \prod_{s=1}^{n-1} P_{x_s x_{s+1}}, \; x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}^n, \tag{2}$$

а тогда однородная цепь Маркова однозначно задается матрицей переходных вероятностей, вероятностями начальных состояний и пространством состояний.

Обозначим $\mathrm{MC}_{\mathcal{S}}(\pi, P)$ цепь Маркова с пространством состояний $\mathcal{S}$, начальным распределением $\pi(x)$ и матрицей переходных вероятностей P. Множество всех цепей Маркова с пространством состояний $\mathcal{S}$ обозначим $\mathrm{MC}_{\mathcal{S}}$.

Определение 4. *Последовательность $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, называется* ***цепью Маркова порядка r*** *, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и борелевского B.*

$$\mathrm{P}(\xi_{n+1} \in B | \sigma(\xi_m, m \leqslant n)) = \mathrm{P}(\xi_{n+1} \in B | \sigma(\xi_m, n - r + 1 \leqslant m \leqslant n))$$

Утверждение 2. *Пусть $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – цепь Маркова порядка r. Тогда последовательность случайных величин $(\eta_n = (\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+r-1}))_{n\in\mathbb{N}}$ со значениями из $\mathcal{S}^n$ является цепью Маркова в обычном смысле.*

Введем теперь несколько понятий из теории неотрицательных матриц.

Определение 5. *Квадратная неотрицательная матрица* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ *называется* ***стохастической****, если*

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = 1,\ \ i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Утверждение 3. *Матрица переходных вероятностей цепи Маркова является стохастической.*

Определение 6. *Квадратная матрица* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ *называется* ***разложимой****, если существует разбиение множества индексов* $\mathcal{I} = \{1,2,...,n\}$ *на два не пересекающихся подмножества* $\mathcal{I}_1$ *и* $\mathcal{I}_2$ $(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \mathcal{I},\ \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \varnothing)$, *такое, что* $A_{ij} = 0,\ i \in \mathcal{I}_1,\ j \in \mathcal{I}_2$; *в противном случае она называется* ***неразложимой****.*

Определение 7. λ_* *называется собственным значением Перрона-Фробениуса матрицы* A*, если*
1. $\lambda_* > 0$*,*
2. λ_* *простой корень характеристического полинома* $\varphi(\lambda)$ *матрицы* A*,*
3. любое другое собственное значение λ_0 *матрицы* A *удовлетворяет* $|\lambda_0| \leqslant \lambda_*$*;*
соответствующий λ_* *собственный вектор* $\mathbf{v}_*$ *называется собственным вектором Перрона-Фробениуса матрицы* A*.*

Теорема 1 (Перрона-Фробениуса)**.** *Неотрицательная неразложимая матрица* A *всегда имеет собственное значение Перрона-Фробениуса* λ_**; собственный вектор Перрона-Фробениуса* $\mathbf{v}_*$ *имеет положительные координаты.*

Следствие 1. *Неотрицательная* $n \times n$ *матрица* A *с* λ_* *и* $\mathbf{v}_*$ *подобна произведению* λ_* *и некоторой стохастической матрицы* S *, т. е.* $A = \lambda_* V S V^{-1}$*, где* $V = \mathrm{diag}(\mathbf{v}_{*1}, \ldots, \mathbf{v}_{*n})$*.*

2 Одномерные экспоненциальные семейства однородных двоичных цепей Маркова первого и второго порядков

Рассмотрим две цепи Маркова $\mathrm{MC}_{\mathcal{S}}(\pi, P)$ и $\mathrm{MC}_{\mathcal{S}}(\phi, Q)$ с конечномерными распределениями $p_n(x)$ и $q_n(x)$, $x \in \mathcal{S}^n$.

Попытаемся построить одномерное экспоненциальное семейство, содержащее $p_n(x)$ и $q_n(x)$ при фиксированном n.

Пусть $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{S}^n$, т. ч. $\pi(x_1), \phi(x_1) \neq 0$, $P_{x_s x_{s+1}}, Q_{x_s x_{s+1}} \neq 0, s = \overline{1, n-1}$. Используя формулы (1) и (2) получим:

$$r(x,\alpha) = C_1 \pi^{\alpha}(x_1)\phi^{1-\alpha}(x_1) \prod_{s=1}^{n-1} P^{\alpha}_{x_s x_{s+1}} Q^{1-\alpha}_{x_s x_{s+1}} = C_2 \rho(x_1,\alpha) \prod_{s=1}^{n-1} R_{x_s x_{s+1}}, \text{где} \tag{4}$$

$$R_{x_s x_{s+1}} = P^{\alpha}_{x_s x_{s+1}} Q^{1-\alpha}_{x_s x_{s+1}}, \tag{5}$$

$$\rho(x_1,\alpha) = \frac{\pi^{\alpha}(x_1)\phi^{1-\alpha}(x_1)}{\sum_{x_1 \in \mathcal{S}} \pi^{\alpha}(x_1)\phi^{1-\alpha}(x_1)}, \tag{6}$$

C_1 и C_2 функции от некоторых, пока неизвестных, переменных.

Очевидно, что (6) задает одномерное экспоненциальное семейство вероятностей начальных состояний.

Используя (5), составим матрицу $R = (R_{ij},\ i,j \in \mathcal{S})$. Из-за невозможности деления на нуль, неопределенности, возникающей при попытке возвести нуль в нулевую степень, введем ограничение, P и Q имеют совпадающее множество пар индексов нулевых элементов: $P_{ij} = 0 \Leftrightarrow Q_{ij} = 0$. Тогда:

$$R_{ij} = \begin{cases} 0, & P_{ij} = 0, \\ P_{ij}^{\alpha} Q_{ij}^{1-\alpha}, & P_{ij} \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Матрица R неотрицательная, если она неразложимая, то по утверждению 3 и следствию 1 теоремы Перрона-Фробениуса из нее может быть получена матрица переходных вероятностей:

$$\mathcal{R}(\alpha) = \left(\mathcal{R}_{ij} = \frac{1}{\lambda_*} \frac{\mathbf{v}_{*j}}{\mathbf{v}_{*i}} R_{ij},\ i,j \in \mathcal{S} \right) \tag{8}$$

Тогда конечномерное распределение $\mathrm{MC}_{\mathcal{S}}(\rho(\alpha), \mathcal{R}(\alpha))$ имеет вид:

$$r(x,\alpha) = \rho(x_1,\alpha) \prod_{s=1}^{n-1} \mathcal{R}_{ij} = \frac{1}{\lambda_*^{n-1}} \exp\left(\sum_{s=1}^{n-1} \ln Q_{x_s x_{s+1}} + \alpha \sum_{s=1}^{n-1} \ln \frac{P_{x_s x_{s+1}}}{Q_{x_s x_{s+1}}} + \ln \frac{\rho(x_1,\alpha)\mathbf{v}_{*n}}{\mathbf{v}_{*1}} \right) \tag{9}$$

Устремим в (9) $n \to \infty$, $\ln \frac{\rho(x_1,\alpha)\mathbf{v}_{*n}}{\mathbf{v}_{*1}} = \mathcal{O}(1)$, тогда $r(x,\alpha)$ — это асимптотически экспоненциальное семейство конечномерных распределений $\mathrm{MC}_{\mathcal{S}}(\rho(\alpha), \mathcal{R}(\alpha))$.

Рассматриваемый случай — однородные двоичные цепи Маркова первого и второго порядков.

Однородные двоичные цепи Маркова первого порядка. Матрицы переходных вероятностей $P, Q \in [0,1]^{2\times 2}$. Учитывая условие (3), однозначно задаются параметрами $p = (p_0, p_1)$, $q = (q_0, q_1)$, будем считать, $P_{i0} = p_i$, $P_{i1} = 1 - p_i$, $i = 0,1$; аналогично с Q и q.

Далее рассматриваем $p, q \in (0,1)^2$. По ним построим R по (7), для краткости введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma &= p_0^{\alpha} q_0^{1-\alpha}, & \mu &= (1-p_0)^{\alpha}(1-q_0)^{1-\alpha}, \\ \xi &= p_1^{\alpha} q_1^{1-\alpha}, & \psi &= (1-p_1)^{\alpha}(1-q_1)^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{10}$$

Очевидно, что построенная матрица R неразложима. Тогда к ней применима теорема Перрона-Фробениуса 1 и одномерное экспоненциальное семейство (8) может быть построено.

Однородные двоичные цепи Маркова второго порядка. Используя утверждение 2, сведем рассмотрение однородные двоичные цепи Маркова второго порядка к $\mathrm{MC}_{\mathbb{B}^2}$. Аналогично двоичным цепям Маркова первого порядка $P, Q \in$ $\in [0,1]^{4\times 4}$. однозначно задаются параметрами $p = (p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}), q = (q_{00}, q_{01}, q_{10}, q_{11})$, будем считать, $P_{\kappa i i 0} = p_{\kappa i}$, $P_{\kappa i i 1} = 1 - p_{\kappa i}$, $i = 0,1$, очевидно, что $P_{\kappa i j l} = 0, i \neq j$; аналогично с Q и q. $p, q \in (0,1)^4$.

Построим R по (7), введя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma &= p_{00}^{\alpha} q_{00}^{1-\alpha}, & \Delta &= (1-p_{00})^{\alpha}(1-q_{00})^{1-\alpha}, \\ \Phi &= p_{01}^{\alpha} q_{01}^{1-\alpha}, & \Psi &= (1-p_{01})^{\alpha}(1-q_{01})^{1-\alpha}, \\ \Pi &= p_{10}^{\alpha} q_{10}^{1-\alpha}, & \Upsilon &= (1-p_{10})^{\alpha}(1-q_{10})^{1-\alpha}, \\ \Sigma &= p_{11}^{\alpha} q_{11}^{1-\alpha}, & \Theta &= (1-p_{11})^{\alpha}(1-q_{11})^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{11}$$

Для наглядности выпишем теперь вид матрицы R в случае $\mathrm{MC}_{\mathbb{B}^2}$ в обозначениях (11):

$$R = \begin{pmatrix} \Gamma & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi & \Psi \\ \Pi & \Upsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & \Theta \end{pmatrix} \tag{12}$$

Утверждение 4. *Матрица* (12) *является неразложимой.*

Утверждение 4 легко проверяется перебором всех разбиений множества индексов матрицы (12) на не пересекающиеся подмножества.

К матрице (12) так же применима теорема Перрона-Фробениуса 1 и одномерное экспоненциальное семейтсво $\mathrm{MC}_{\mathbb{B}^2}$ может быть построено по формуле (8).

3 Поиск «аналитичных» моделей по виду характеристического полинома матрицы R

3.1 Случай $\mathrm{MC}_{\mathbb{B}}$

Характеристический многочлен матрицы R в обозначениях (10)

$$\varphi_1(\lambda) = \lambda^2 - (\gamma + \psi)\lambda + (\gamma\psi - \mu\xi). \tag{13}$$

$\deg \varphi_1(\lambda) = 2$, собственное значение Перрона-Фробениуса λ_* выражается аналитически через дискриминант:

$$\lambda_* = \frac{1}{2}\left[\gamma + \psi + \sqrt{(\gamma+\psi)^2 - 4(\gamma\psi - \mu\xi)}\right] = \frac{1}{2}\left[\gamma + \psi + \sqrt{(\gamma-\psi)^2 + 4\mu\xi}\right] \tag{14}$$

Найдем теперь модели, которые будут упрощать выражение (14).

Лемма 1. *Пусть* $a, b, c, d > 0$. *Тогда*

$$a^\alpha b^{1-\alpha} = c^\alpha d^{1-\alpha}\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Доказательство. Достаточность очевидна.

Необходимость. Т. к. достаточность выполняется, множество решений непустое. Пусть $\alpha = 0$, тогда $b = d$; а при $\alpha = 1$ $a = c$. ■

Лемма 2. *Пусть* $a, b, c, d \in (0, 1)$. *Тогда*

$$a^\alpha b^{1-\alpha} = c^\alpha d^{1-\alpha}\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow (1-a)^\alpha (1-b)^{1-\alpha} = (1-c)^\alpha (1-d)^{1-\alpha}$$

Доказательство. $a^\alpha b^{1-\alpha} = c^\alpha d^{1-\alpha}\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow a = c \wedge b = d \Longleftrightarrow 1 - a = 1 - c \wedge 1 - b = 1 - d \Longleftrightarrow (1-a)^\alpha (1-b)^{1-\alpha} = (1-c)^\alpha (1-d)^{1-\alpha}$ ■

1. Пусть $\gamma\psi - \mu\xi = 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, что эквивалентно

$$p_0^\alpha q_0^{1-\alpha} (1-p_1)^\alpha (1-q_1)^{1-\alpha} = p_1^\alpha q_1^{1-\alpha} (1-p_0)^\alpha (1-q_0)^{1-\alpha}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

По лемме 1, решение (15): $p_0(1-p_1) = p_1(1-p_0) \wedge q_0(1-q_1) = q_1(1-q_0)$.

$p_0 = (1-p_0) \wedge p_1 = (1-p_1)$ является частным случаем $p_0 = p_1$ при $p_0 = 1/2$, аналогично и $q_0 = (1-q_0) \wedge q_1 = (1-q_1)$ является частным случаем $q_0 = q_1$, поэтому далее рассматриваем решение $p_0 = p_1 \wedge q_0 = q_1$. Упрощения дают $\lambda_* = \gamma + \psi$.

$$\lambda_* = p_0^{\alpha} q_0^{1-\alpha} + (1-p_0)^{\alpha}(1-q_0)^{1-\alpha}, \textit{если } p_0 = p_1 \wedge q_0 = q_1. \tag{16}$$

2. Пусть теперь $\gamma - \psi = 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$p_0^{\alpha} q_0^{1-\alpha} = (1-p_1)^{\alpha}(1-q_1)^{1-\alpha}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Решение (17) $p_0 = 1-p_1 \wedge q_0 = 1-q_1$. По лемме 2 $\mu = \xi\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, а тогда $\lambda_* = \gamma + \mu$.

$$\lambda_* = p_0^{\alpha} q_0^{1-\alpha} + (1-p_0)^{\alpha}(1-q_0)^{1-\alpha}, \textit{если } p_0 = 1-p_1 \wedge q_0 = 1-q_1. \tag{18}$$

3.2 Случай $\mathrm{MC}_{\mathbb{B}^2}$

Характеристический многочлен матрицы (12):

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Gamma + \Theta)\lambda^3 + (\Gamma\Theta - \Phi\Upsilon)\lambda^2 + (\Gamma\Phi\Upsilon + \Theta\Phi\Upsilon - \Delta\Pi\Phi - \Psi\Sigma\Upsilon)\lambda + \\ + (\Theta\Phi - \Psi\Sigma)(\Delta\Pi - \Gamma\Upsilon). \tag{19}$$

Т. к. $\varphi_2(\lambda)$ полином четвертой степени, в общем случае метод Феррари для аналитического нахождения корней очень сложен. Модели, для которых λ_* выражается аналитически проще будем искать из вида (19).

1. Пусть $\Gamma\Theta - \Phi\Upsilon = 0 \iff p_{00}(1-p_{11}) = p_{01}(1-p_{10}) \wedge q_{00}(1-q_{11}) = q_{01}(1-q_{10})$, для простоты сокращения будем рассматривать решения:

a) $\Gamma = \Phi, \Theta = \Upsilon$:

$$p_{00} = p_{01} \wedge p_{11} = p_{10} \wedge q_{00} = q_{01} \wedge q_{11} = q_{10}, \tag{20}$$

по лемме 2 $\Delta = \Psi, \Pi = \Sigma$. Преобразуем $\varphi_2(\lambda)$:

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Gamma + \Theta)\lambda^3 + (\Gamma\Theta - \Delta\Pi)(\Gamma + \Theta)\lambda - (\Gamma\Theta - \Delta\Pi)^2 = \\ = (\lambda^2 + \Delta\Pi - \Gamma\Theta)(\lambda^2 - (\Gamma + \Theta)\lambda + \Gamma\Theta - \Delta\Pi).$$

$$\lambda_* = \frac{1}{2}\left[\Gamma + \Theta + \sqrt{(\Gamma - \Theta)^2 + 4\Delta\Pi}\right], \quad \text{если (20)} \tag{21}$$

b) $\Gamma = \Upsilon, \Theta = \Phi$ не дает простого «аналитичного» решения.

2. Пусть $\Gamma\Phi\Upsilon + \Theta\Phi\Upsilon - \Delta\Pi\Phi - \Psi\Sigma\Upsilon = 0$, рассмотрим:

2.1. $\Theta\Phi = \Sigma\Psi \wedge \Gamma\Upsilon = \Delta\Pi$

a) $\Theta = \Sigma \wedge \Phi = \Psi \wedge \Gamma = \Delta \wedge \Upsilon = \Pi$

Вырожденный случай при $p_{ij} = q_{ij} = 1/2, i, j \in 0, 1$. Все семейство – одна цепь Маркова. $\lambda_* = 1$.

b) $\Theta = \Sigma \wedge \Phi = \Psi \wedge \Gamma = \Pi \wedge \Upsilon = \Delta$.

$$p_{00} = p_{10} \wedge q_{00} = q_{10} \wedge p_{01} = p_{11} = q_{11} = q_{01} = 1/2. \tag{22}$$

Тогда $\Theta = \Sigma = \Phi = \Psi = 1/2$.

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Gamma + \frac{1}{2})\lambda^3 + \frac{1}{2}(\Gamma - \Delta)\lambda^2.$$

Является частным случаем модели **a)**.

c) $\Theta = \Psi \wedge \Phi = \Sigma \wedge \Gamma = \Pi \wedge \Upsilon = \Delta$.

$$p_{01} = p_{11} \wedge q_{01} = q_{11} \wedge p_{00} = p_{10} \wedge q_{00} = q_{10} \tag{23}$$

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Gamma + \Theta)\lambda^3 + (\Gamma\Theta - \Phi\Delta)\lambda^2.$$

$$\lambda_* = \frac{1}{2}\left[\Gamma + \Theta + \sqrt{(\Theta - \Gamma)^2 + 4\Phi\Delta}\right], \textit{если } (23). \tag{24}$$

d) $\Theta = \Psi \wedge \Phi = \Sigma \wedge \Gamma = \Delta \wedge \Upsilon = \Pi.$

$$p_{01} = p_{11} \wedge q_{01} = q_{11} \wedge p_{00} = p_{01} = q_{00} = q_{10} = 1/2. \tag{25}$$

Тогда $\Gamma = \Delta = \Pi = \Upsilon = 1/2$.

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Theta + \frac{1}{2})\lambda^3 + \frac{1}{2}(\Theta - \Phi)\lambda^2.$$

Является частным случаем модели **c)**.

2.2. $\Theta\Upsilon = \Delta\Pi \wedge \Gamma\Phi = \Psi\Sigma$

a) $\Theta = \Delta \wedge \Upsilon = \Pi \wedge \Gamma = \Psi \wedge \Phi = \Sigma$

b) $\Theta = \Pi \wedge \Upsilon = \Delta \wedge \Gamma = \Sigma \wedge \Phi = \Psi$

c) $\Theta = \Delta \wedge \Upsilon = \Pi \wedge \Gamma = \Sigma \wedge \Phi = \Psi$

d) $\Theta = \Pi \wedge \Upsilon = \Delta \wedge \Gamma = \Psi \wedge \Phi = \Sigma$

Модели со свойствами a) и c) не дают «аналитичных» сз. Модель со свойствами b) вырожденная и была описана в 2.1.a)

Рассмотрим модель со свойствами d):

$$p_{00} = 1 - p_{01} = p_{10} = p_{11}, \text{аналогично } q_{ij} \tag{26}$$

Тогда $\Gamma = \Psi = \Pi = \Sigma \wedge \Delta = \Phi = \Upsilon = \Theta$.

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Gamma + \Delta)\lambda^3 + (\Gamma\Delta - \Delta^2)\lambda^2 + (\Delta^3 - \Gamma^2\Delta) = \lambda(\lambda - \Gamma - \Delta)(\lambda^2 + \Gamma\Delta - \Delta^2).$$

$$\lambda_* = \Gamma + \Delta, \text{если } (26). \tag{27}$$

Другие модели будем искать как похожие по структуре ограничений на p_{ij} и q_{ij}. Все найденные «аналитичные» модели с ограничениями на p_{ij} и q_{ij} выписаны в пункте 4.2.

4 Найденные «аналитичные» модели

4.1 Одномерные экспоненциальные семейства переходных вероятностей $\mathrm{MC}_{\mathbb{B}}$

Для случая двоичных цепей Маркова первого порядка $p_{i0} = p_i, p_{i1} = 1 - p_i$, аналогично с q_{ij}; λ_* и $\mathbf{v}_*$ записаны в таблице 1 в обозначениях (10).

4.2 Некоторые одномерные экспоненциальные семейства переходных вероятностей $\mathrm{MC}_{\mathbb{B}^2}$

В случае двоичных цепей Маркова второго порядка, сведенного к первому, $p_{ik\ k0} = p_{ik}, p_{ik\ k1} = 1 - p_{ik}, k = 0 \vee 1$, аналогично с q_{ikkj}. $\mathbf{v}_* = (\mathbf{v}_{*00}, \mathbf{v}_{*01}, \mathbf{v}_{*10}, \mathbf{v}_{*11})$. $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Theta, \Psi, \Phi$ в обозначениях (11).

Таблица 1:

Ограничение на модель	λ_*	$\mathbf{v}_{*0}$	$\mathbf{v}_{*1}$
нет	$\frac{1}{2}\left[\gamma+\psi+\sqrt{(\gamma-\psi)^2+4\mu\xi}\right]$	$\frac{\lambda_*-\psi}{\xi}$	1
$p_0=p_1$, $q_0=q_1$	$\gamma+\mu$	1	1
$p_0=1-p_1$, $q_0=1-q_1$	$\gamma+\mu$	1	1

1. $p_{00}=p_{01}, p_{10}=p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_*=\frac{1}{2}\left[\Gamma+\Theta+\sqrt{(\Gamma-\Theta)^2+4\Delta\Sigma}\right],$$
$$\mathbf{v}_*=\left(\frac{(\lambda_*-\Theta)(\Gamma(\lambda_*-\Theta)+\Delta\Sigma)}{\Sigma^2\lambda_*},\frac{\Gamma(\lambda_*-\Theta)+\Delta\Sigma}{\Sigma\lambda_*},\frac{\lambda_*-\Theta}{\Sigma},1\right)$$

2. $p_{00}=p_{10}, p_{01}=p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_*=\frac{1}{2}\left[\Gamma+\Theta+\sqrt{(\Gamma-\Theta)^2+4\Delta\Sigma}\right],\quad \mathbf{v}_*=\left(\frac{\lambda_*-\Theta}{\Sigma},1,\frac{\lambda_*-\Theta}{\Sigma},1\right)$$

3. $p_{00}=1-p_{11}, p_{01}=1-p_{10}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_*=\frac{1}{2}\left[\Gamma+\Phi+\sqrt{(\Gamma-\Phi)^2+4\Delta\Psi}\right],\quad \mathbf{v}_*=(1,\frac{\Phi(\lambda_*-\Gamma)+\Delta\Psi}{\Delta\lambda_*},\frac{\lambda_*-\Gamma}{\Delta},1)$$

4. $p_{00}=p_{01}=p_{10}=p_{11}$, аналогично q_{ij}
5. $p_{00}=1-p_{01}=p_{10}=p_{11}$, аналогично q_{ij}
6. $p_{00}=p_{01}=1-p_{10}=p_{11}$, аналогично q_{ij}
7. $p_{00}=p_{01}=p_{10}=1-p_{11}$, аналогично q_{ij}
8. $p_{00}=1-p_{01}=1-p_{10}=p_{11}$, аналогично q_{ij}
9. $p_{00}=1-p_{01}=p_{10}=1-p_{11}$, аналогично q_{ij}
10. $p_{00}=p_{01}=1-p_{10}=1-p_{11}$, аналогично q_{ij}
11. $p_{00}=1-p_{01}=1-p_{10}=1-p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_*=\Gamma+\Delta,\quad \mathbf{v}_*=(1,1,1,1)$$