

1. Основные понятия и определения

Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) .

Определение 1. n -мерное семейство распределений $p(x, \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^d$, называется **экспоненциальным** с естественным параметром θ , если существуют функции $Z(\theta)$, $h_0(x)$, $h(x) = (h_1(x), \dots, h_d(x))$, такие что,

$$p(x, \theta) = \frac{1}{Z(\theta)} \exp(h_0(x) + \theta' h(x)).$$

Одномерное экспоненциальное семейство $r(x, \alpha)$, содержащее два распределения $p(x)$ и $q(x)$, $x \in X$, $|X| < \infty$, может быть задано в виде

$$r(x, \alpha) = \frac{1}{\sum_{x \in X} p^\alpha(x) q^{1-\alpha}(x)} p^\alpha(x) q^{1-\alpha}(x). \quad (1)$$

Определение 2. Последовательность случайных величин $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, принимающих значения в \mathcal{S} , называется **цепью Маркова** с пространством состояний \mathcal{S} , если для любого $n \in \mathbb{N}$ и борелевского множества B

$$P(\xi_{n+1} \in B | \sigma(\xi_m, m \leq n)) = P(\xi_{n+1} \in B | \sigma(\xi_n)),$$

если при этом переходные вероятности $P(\xi_{n+w} = a | \xi_n = b)$ не зависят от n , то цепь Маркова называется **однородной**.

Определение 3. Двоичной называется цепь Маркова с пространством состояний $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

Матрицу переходных вероятностей однородной цепи Маркова обозначим $P = (P_{ij} = P(\xi_{n+1} = i | \xi_n = j), i, j \in \mathcal{S})$, вероятности $\pi(x_1) = P(\xi_1 = x_1)$ будем называть вероятностями начальных состояний.

Утверждение 1. Конечномерные распределения однородной цепи Маркова имеют вид

$$p(x) = \pi(x_1) \prod_{s=1}^{n-1} P_{x_s x_{s+1}}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}^n, \quad (2)$$

а тогда однородная цепь Маркова однозначно задается матрицей переходных вероятностей, вероятностями начальных состояний и пространством состояний.

Обозначим $MC_{\mathcal{S}}(\pi, P)$ цепь Маркова с пространством состояний \mathcal{S} , начальным распределением $\pi(x)$ и матрицей переходных вероятностей P . Множество всех цепей Маркова с пространством состояний \mathcal{S} обозначим $MC_{\mathcal{S}}$.

Определение 4. Последовательность $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, называется **цепью Маркова порядка r** , если для любого $n \in \mathbb{N}$ и борелевского B .

$$P(\xi_{n+1} \in B | \sigma(\xi_m, m \leq n)) = P(\xi_{n+1} \in B | \sigma(\xi_m, n-r+1 \leq m \leq n))$$

Утверждение 2. Пусть $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – цепь Маркова порядка r . Тогда последовательность случайных величин $(\eta_n = (\xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+r-1}))_{n \in \mathbb{N}}$ со значениями из \mathcal{S}^r является цепью Маркова в обычном смысле.

Введем теперь несколько понятий из теории неотрицательных матриц.

Определение 5. Квадратная неотрицательная матрица $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ называется **стохастической**, если

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Утверждение 3. Матрица переходных вероятностей цепи Маркова является стохастической.

Определение 6. Квадратная матрица $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ называется **разложимой**, если существует разбиение множества индексов $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ на два не пересекающихся подмножества \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 ($\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}$, $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \emptyset$), такое, что $A_{ij} = 0$, $i \in \mathcal{I}_1$, $j \in \mathcal{I}_2$; в противном случае она называется **неразложимой**.

Определение 7. λ_* называется собственным значением Перрона-Фробениуса матрицы A , если

1. $\lambda_* > 0$,
 2. λ_* простой корень характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ матрицы A ,
 3. любое другое собственное значение λ_0 матрицы A удовлетворяет $|\lambda_0| \leq \lambda_*$;
- соответствующий λ_* собственный вектор \mathbf{v}_* называется собственным вектором Перрона-Фробениуса матрицы A .

Теорема 1 (Перрона-Фробениуса). Неотрицательная неразложимая матрица A всегда имеет собственное значение Перрона-Фробениуса λ_* ; собственный вектор Перрона-Фробениуса \mathbf{v}_* имеет положительные координаты.

Следствие 1. Неотрицательная $n \times n$ матрица A с λ_* и \mathbf{v}_* подобна произведению λ_* и некоторой стохастической матрицы S , т. е. $A = \lambda_* V S V^{-1}$, где $V = \text{diag}(\mathbf{v}_{*1}, \dots, \mathbf{v}_{*n})$.

2. Одномерные экспоненциальные семейства однородных двоичных цепей Маркова первого и второго порядков

Рассмотрим две цепи Маркова $MC_S(\pi, P)$ и $MC_S(\phi, Q)$ с конечномерными распределениями $p_n(x)$ и $q_n(x)$, $x \in S^n$.

Попытаемся построить одномерное экспоненциальное семейство, содержащее $p_n(x)$ и $q_n(x)$ при фиксированном n .

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in S^n$, т. ч. $\pi(x_1), \phi(x_1) \neq 0$, $P_{x_s x_{s+1}}, Q_{x_s x_{s+1}} \neq 0$, $s = \overline{1, n-1}$. Используя формулы (1) и (2) получим:

$$r(x, \alpha) = C_1 \pi^\alpha(x_1) \phi^{1-\alpha}(x_1) \prod_{s=1}^{n-1} P_{x_s x_{s+1}}^\alpha Q_{x_s x_{s+1}}^{1-\alpha} = C_2 \rho(x_1, \alpha) \prod_{s=1}^{n-1} R_{x_s x_{s+1}}, \text{ где} \quad (4)$$

$$R_{x_s x_{s+1}} = P_{x_s x_{s+1}}^\alpha Q_{x_s x_{s+1}}^{1-\alpha}, \quad (5)$$

$$\rho(x_1, \alpha) = \frac{\pi^\alpha(x_1) \phi^{1-\alpha}(x_1)}{\sum_{x_1 \in S} \pi^\alpha(x_1) \phi^{1-\alpha}(x_1)}, \quad (6)$$

C_1 и C_2 функции от некоторых, пока неизвестных, переменных.

Очевидно, что (6) задает одномерное экспоненциальное семейство вероятностей начальных состояний.

Используя (5), составим матрицу $R = (R_{ij}, i, j \in S)$. Из-за невозможности деления на нуль, неопределенности, возникающей при попытке возвести нуль в нулевую степень, введем ограничение, P и Q имеют совпадающее множество пар индексов нулевых элементов: $P_{ij} = 0 \Leftrightarrow Q_{ij} = 0$. Тогда:

$$R_{ij} = \begin{cases} 0, & P_{ij} = 0, \\ P_{ij}^\alpha Q_{ij}^{1-\alpha}, & P_{ij} \neq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Матрица R неотрицательная, если она неразложимая, то по утверждению 3 и следствию 1 теоремы Перрона-Фробениуса из нее может быть получена матрица переходных вероятностей:

$$\mathcal{R}(\alpha) = \left(\mathcal{R}_{ij} = \frac{1}{\lambda_*} \frac{\mathbf{v}_{*j}}{\mathbf{v}_{*i}} R_{ij}, i, j \in S \right) \quad (8)$$

Тогда конечномерное распределение $MC_S(\rho(\alpha), \mathcal{R}(\alpha))$ имеет вид:

$$r(x, \alpha) = \rho(x_1, \alpha) \prod_{s=1}^{n-1} \mathcal{R}_{ij} = \frac{1}{\lambda_*^{n-1}} \exp \left(\sum_{s=1}^{n-1} \ln Q_{x_s x_{s+1}} + \alpha \sum_{s=1}^{n-1} \ln \frac{P_{x_s x_{s+1}}}{Q_{x_s x_{s+1}}} + \ln \frac{\rho(x_1, \alpha) \mathbf{v}_{*n}}{\mathbf{v}_{*1}} \right) \quad (9)$$

Устремим в (9) $n \rightarrow \infty$, $\ln \frac{\rho(x_1, \alpha) \mathbf{v}_{*n}}{\mathbf{v}_{*1}} = \mathcal{O}(1)$, тогда $r(x, \alpha)$ — это асимптотически экспоненциальное семейство конечномерных распределений $MC_S(\rho(\alpha), \mathcal{R}(\alpha))$.

Рассматриваемый случай — однородные двоичные цепи Маркова первого и второго порядков.

Однородные двоичные цепи Маркова первого порядка. Матрицы переходных вероятностей $P, Q \in [0, 1]^{2 \times 2}$. Учитывая условие (3), однозначно задаются параметрами $p = (p_0, p_1)$, $q = (q_0, q_1)$, будем считать, $P_{i0} = p_i$, $P_{i1} = 1 - p_i$, $i = 0, 1$; аналогично с Q и q .

Далее рассматриваем $p, q \in (0, 1)^2$. По ним построим R по (7), для краткости введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\gamma &= p_0^\alpha q_0^{1-\alpha}, & \mu &= (1 - p_0)^\alpha (1 - q_0)^{1-\alpha}, \\ \xi &= p_1^\alpha q_1^{1-\alpha}, & \psi &= (1 - p_1)^\alpha (1 - q_1)^{1-\alpha}.\end{aligned}\tag{10}$$

Очевидно, что построенная матрица R неразложима. Тогда к ней применима теорема Перрона-Фробениуса 1 и одномерное экспоненциальное семейство (8) может быть построено.

Однородные двоичные цепи Маркова второго порядка. Используя утверждение 2, сведем рассмотрение однородные двоичные цепи Маркова второго порядка к $\text{МС}_{\mathbb{B}^2}$. Аналогично двоичным цепям Маркова первого порядка $P, Q \in [0, 1]^{4 \times 4}$, однозначно задаются параметрами $p = (p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11})$, $q = (q_{00}, q_{01}, q_{10}, q_{11})$, будем считать, $P_{kii0} = p_{ki}$, $P_{kii1} = 1 - p_{ki}$, $i = 0, 1$, очевидно, что $P_{kijl} = 0, i \neq j$; аналогично с Q и q . $p, q \in (0, 1)^4$.

Построим R по (7), введя следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Gamma &= p_{00}^\alpha q_{00}^{1-\alpha}, & \Delta &= (1 - p_{00})^\alpha (1 - q_{00})^{1-\alpha}, \\ \Phi &= p_{01}^\alpha q_{01}^{1-\alpha}, & \Psi &= (1 - p_{01})^\alpha (1 - q_{01})^{1-\alpha}, \\ \Pi &= p_{10}^\alpha q_{10}^{1-\alpha}, & \Upsilon &= (1 - p_{10})^\alpha (1 - q_{10})^{1-\alpha}, \\ \Sigma &= p_{11}^\alpha q_{11}^{1-\alpha}, & \Theta &= (1 - p_{11})^\alpha (1 - q_{11})^{1-\alpha}.\end{aligned}\tag{11}$$

Для наглядности выпишем теперь вид матрицы R в случае $\text{МС}_{\mathbb{B}^2}$ в обозначениях (11):

$$R = \begin{pmatrix} \Gamma & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi & \Psi \\ \Pi & \Upsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & \Theta \end{pmatrix}\tag{12}$$

Утверждение 4. Матрица (12) является неразложимой.

Утверждение 4 легко проверяется перебором всех разбиений множества индексов матрицы (12) на непересекающиеся подмножества.

К матрице (12) так же применима теорема Перрона-Фробениуса 1 и одномерное экспоненциальное семейство $\text{МС}_{\mathbb{B}^2}$ может быть построено по формуле (8).

3. Поиск «аналитичных» моделей по виду характеристического полинома матрицы R

3.1. Случай $MC_{\mathbb{B}}$

Характеристический многочлен матрицы R в обозначениях (10)

$$\varphi_1(\lambda) = \lambda^2 - (\gamma + \psi)\lambda + (\gamma\psi - \mu\xi). \quad (13)$$

$\deg \varphi_1(\lambda) = 2$, собственное значение Перрона-Фробениуса λ_* выражается аналитически через дискриминант:

$$\lambda_* = \frac{1}{2} \left[\gamma + \psi + \sqrt{(\gamma + \psi)^2 - 4(\gamma\psi - \mu\xi)} \right] = \frac{1}{2} \left[\gamma + \psi + \sqrt{(\gamma - \psi)^2 + 4\mu\xi} \right] \quad (14)$$

Найдем теперь модели, которые будут упрощать выражение (14).

Лемма 1. Пусть $a, b, c, d > 0$. Тогда

$$a^\alpha b^{1-\alpha} = c^\alpha d^{1-\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \iff a = c \wedge b = d$$

Доказательство. Достаточность очевидна.

Необходимость. Т. к. достаточность выполняется, множество решений непустое.

Пусть $\alpha = 0$, тогда $b = d$; а при $\alpha = 1$ $a = c$. ■

Лемма 2. Пусть $a, b, c, d \in (0, 1)$. Тогда

$$a^\alpha b^{1-\alpha} = c^\alpha d^{1-\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \iff (1-a)^\alpha (1-b)^{1-\alpha} = (1-c)^\alpha (1-d)^{1-\alpha}$$

Доказательство. $a^\alpha b^{1-\alpha} = c^\alpha d^{1-\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \iff a = c \wedge b = d \iff 1-a = 1-c \wedge 1-b = 1-d \iff (1-a)^\alpha (1-b)^{1-\alpha} = (1-c)^\alpha (1-d)^{1-\alpha}$ ■

1. Пусть $\gamma\psi - \mu\xi = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$, что эквивалентно

$$p_0^\alpha q_0^{1-\alpha} (1-p_1)^\alpha (1-q_1)^{1-\alpha} = p_1^\alpha q_1^{1-\alpha} (1-p_0)^\alpha (1-q_0)^{1-\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

По лемме 1, решение (15): $p_0(1-p_1) = p_1(1-p_0) \wedge q_0(1-q_1) = q_1(1-q_0)$.

$p_0 = (1-p_0) \wedge p_1 = (1-p_1)$ является частным случаем $p_0 = p_1$ при $p_0 = 1/2$, аналогично и $q_0 = (1-q_0) \wedge q_1 = (1-q_1)$ является частным случаем $q_0 = q_1$, поэтому далее рассматриваем решение $p_0 = p_1 \wedge q_0 = q_1$. Упрощения дают $\lambda_* = \gamma + \psi$.

$$\lambda_* = p_0^\alpha q_0^{1-\alpha} + (1-p_0)^\alpha (1-q_0)^{1-\alpha}, \text{ если } p_0 = p_1 \wedge q_0 = q_1. \quad (16)$$

2. Пусть теперь $\gamma - \psi = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$p_0^\alpha q_0^{1-\alpha} = (1-p_1)^\alpha (1-q_1)^{1-\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Решение (17) $p_0 = 1-p_1 \wedge q_0 = 1-q_1$. По лемме 2 $\mu = \xi \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$, а тогда $\lambda_* = \gamma + \mu$.

$$\lambda_* = p_0^\alpha q_0^{1-\alpha} + (1-p_0)^\alpha (1-q_0)^{1-\alpha}, \text{ если } p_0 = 1-p_1 \wedge q_0 = 1-q_1. \quad (18)$$

3.2. Случай $MC_{\mathbb{B}^2}$

Характеристический многочлен матрицы (12):

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Gamma + \Theta)\lambda^3 + (\Gamma\Theta - \Phi\Upsilon)\lambda^2 + (\Gamma\Phi\Upsilon + \Theta\Phi\Upsilon - \Delta\P\Phi - \Psi\Sigma\Upsilon)\lambda + (\Theta\Phi - \Psi\Sigma)(\Delta\P - \Gamma\Upsilon). \quad (19)$$

Т. к. $\varphi_2(\lambda)$ полином четвертой степени, в общем случае метод Феррари для аналитического нахождения корней очень сложен. Модели, для которых λ_* выражается аналитически проще будем искать из вида (19).

1. Пусть $\Gamma\Theta - \Phi\Upsilon = 0 \iff p_{00}(1 - p_{11}) = p_{01}(1 - p_{10}) \wedge q_{00}(1 - q_{11}) = q_{01}(1 - q_{10})$, для простоты сокращения будем рассматривать решения:

a) $\Gamma = \Phi, \Theta = \Upsilon$:

$$p_{00} = p_{01} \wedge p_{11} = p_{10} \wedge q_{00} = q_{01} \wedge q_{11} = q_{10}, \quad (20)$$

по лемме 2 $\Delta = \Psi, \Pi = \Sigma$. Преобразуем $\varphi_2(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \varphi_2(\lambda) &= \lambda^4 - (\Gamma + \Theta)\lambda^3 + (\Gamma\Theta - \Delta\P)(\Gamma + \Theta)\lambda - (\Gamma\Theta - \Delta\P)^2 = \\ &= (\lambda^2 + \Delta\P - \Gamma\Theta)(\lambda^2 - (\Gamma + \Theta)\lambda + \Gamma\Theta - \Delta\P). \end{aligned}$$

$$\lambda_* = \frac{1}{2} \left[\Gamma + \Theta + \sqrt{(\Gamma - \Theta)^2 + 4\Delta\P} \right], \quad \text{если (20)} \quad (21)$$

b) $\Gamma = \Upsilon, \Theta = \Phi$ не дает простого «аналитического» решения.

2. Пусть $\Gamma\Phi\Upsilon + \Theta\Phi\Upsilon - \Delta\P\Phi - \Psi\Sigma\Upsilon = 0$, рассмотрим:

2.1. $\Theta\Phi = \Sigma\P \wedge \Gamma\Upsilon = \Delta\P$

a) $\Theta = \Sigma \wedge \Phi = \Psi \wedge \Gamma = \Delta \wedge \Upsilon = \Pi$

Вырожденный случай при $p_{ij} = q_{ij} = 1/2, i, j \in 0, 1$. Все семейство – одна цепь Маркова. $\lambda_* = 1$.

b) $\Theta = \Sigma \wedge \Phi = \Psi \wedge \Gamma = \Pi \wedge \Upsilon = \Delta$.

$$p_{00} = p_{10} \wedge q_{00} = q_{10} \wedge p_{01} = p_{11} = q_{11} = q_{01} = 1/2. \quad (22)$$

Тогда $\Theta = \Sigma = \Phi = \Psi = 1/2$.

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Gamma + \frac{1}{2})\lambda^3 + \frac{1}{2}(\Gamma - \Delta)\lambda^2.$$

Является частным случаем модели **a)**.

c) $\Theta = \Psi \wedge \Phi = \Sigma \wedge \Gamma = \Pi \wedge \Upsilon = \Delta$.

$$p_{01} = p_{11} \wedge q_{01} = q_{11} \wedge p_{00} = p_{10} \wedge q_{00} = q_{10} \quad (23)$$

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Gamma + \Theta)\lambda^3 + (\Gamma\Theta - \Phi\Delta)\lambda^2.$$

$$\lambda_* = \frac{1}{2} \left[\Gamma + \Theta + \sqrt{(\Theta - \Gamma)^2 + 4\Phi\Delta} \right], \quad \text{если (23)}. \quad (24)$$

d) $\Theta = \Psi \wedge \Phi = \Sigma \wedge \Gamma = \Delta \wedge \Upsilon = \Pi$.

$$p_{01} = p_{11} \wedge q_{01} = q_{11} \wedge p_{00} = p_{01} = q_{00} = q_{10} = 1/2. \quad (25)$$

Тогда $\Gamma = \Delta = \Pi = \Upsilon = 1/2$.

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Theta + \frac{1}{2})\lambda^3 + \frac{1}{2}(\Theta - \Phi)\lambda^2.$$

Является частным случаем модели **с**).

2.2. $\Theta\Upsilon = \Delta\Pi \wedge \Gamma\Phi = \Psi\Sigma$

a) $\Theta = \Delta \wedge \Upsilon = \Pi \wedge \Gamma = \Psi \wedge \Phi = \Sigma$

b) $\Theta = \Pi \wedge \Upsilon = \Delta \wedge \Gamma = \Sigma \wedge \Phi = \Psi$

с) $\Theta = \Delta \wedge \Upsilon = \Pi \wedge \Gamma = \Sigma \wedge \Phi = \Psi$

d) $\Theta = \Pi \wedge \Upsilon = \Delta \wedge \Gamma = \Psi \wedge \Phi = \Sigma$

Модели со свойствами **a)** и **с)** не дают «аналитичных» сз. Модель со свойствами **b)** вырожденная и была описана в 2.1.а)

Рассмотрим модель со свойствами **d)**:

$$p_{00} = 1 - p_{01} = p_{10} = p_{11}, \text{аналогично } q_{ij} \quad (26)$$

Тогда $\Gamma = \Psi = \Pi = \Sigma \wedge \Delta = \Phi = \Upsilon = \Theta$.

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Gamma + \Delta)\lambda^3 + (\Gamma\Delta - \Delta^2)\lambda^2 + (\Delta^3 - \Gamma^2\Delta) = \lambda(\lambda - \Gamma - \Delta)(\lambda^2 + \Gamma\Delta - \Delta^2).$$

$$\lambda_* = \Gamma + \Delta, \text{если (26)}. \quad (27)$$

Другие модели будем искать как похожие по структуре ограничений на p_{ij} и q_{ij} . Все найденные «аналитичные» модели с ограничениями на p_{ij} и q_{ij} выписаны в пункте 4.2.

4. Найденные «аналитичные» модели

4.1. Одномерные экспоненциальные семейства переходных вероятностей $MC_{\mathbb{B}}$

Для случая двоичных цепей Маркова первого порядка $p_{i0} = p_i, p_{i1} = 1 - p_i$, аналогично с q_{ij} ; λ_* и \mathbf{v}_* записаны в таблице 1 в обозначениях (10).

Таблица 1.

Ограничение на модель	λ_*	\mathbf{v}_{*0}	\mathbf{v}_{*1}
<i>нет</i>	$\frac{1}{2} \left[\gamma + \psi + \sqrt{(\gamma - \psi)^2 + 4\mu\xi} \right]$	$\frac{\lambda_* - \psi}{\xi}$	1
$p_0 = p_1,$ $q_0 = q_1$	$\gamma + \mu$	1	1
$p_0 = 1 - p_1,$ $q_0 = 1 - q_1$	$\gamma + \mu$	1	1

4.2. Некоторые одномерные экспоненциальные семейства переходных вероятностей $MC_{\mathbb{B}^2}$

В случае двоичных цепей Маркова второго порядка, сведенного к первому, $p_{ik\ k0} = p_{ik}, p_{ik\ k1} = 1 - p_{ik}, k = 0 \vee 1$, аналогично с q_{ikkj} . $\mathbf{v}_* = (\mathbf{v}_{*00}, \mathbf{v}_{*01}, \mathbf{v}_{*10}, \mathbf{v}_{*11})$. $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Theta, \Psi, \Phi$ в обозначениях (11).

1. $p_{00} = p_{01}, p_{10} = p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \frac{1}{2} \left[\Gamma + \Theta + \sqrt{(\Gamma - \Theta)^2 + 4\Delta\Sigma} \right],$$

$$\mathbf{v}_* = \left(\frac{(\lambda_* - \Theta)(\Gamma(\lambda_* - \Theta) + \Delta\Sigma)}{\Sigma^2\lambda_*}, \frac{\Gamma(\lambda_* - \Theta) + \Delta\Sigma}{\Sigma\lambda_*}, \frac{\lambda_* - \Theta}{\Sigma}, 1 \right)$$

2. $p_{00} = p_{10}, p_{01} = p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \frac{1}{2} \left[\Gamma + \Theta + \sqrt{(\Gamma - \Theta)^2 + 4\Delta\Sigma} \right], \quad \mathbf{v}_* = \left(\frac{\lambda_* - \Theta}{\Sigma}, 1, \frac{\lambda_* - \Theta}{\Sigma}, 1 \right)$$

3. $p_{00} = 1 - p_{11}, p_{01} = 1 - p_{10}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \frac{1}{2} \left[\Gamma + \Phi + \sqrt{(\Gamma - \Phi)^2 + 4\Delta\Psi} \right], \quad \mathbf{v}_* = \left(1, \frac{\Phi(\lambda_* - \Gamma) + \Delta\Psi}{\Delta\lambda_*}, \frac{\lambda_* - \Gamma}{\Delta}, 1 \right)$$

4. $p_{00} = p_{01} = p_{10} = p_{11}$, аналогично q_{ij}

5. $p_{00} = 1 - p_{01} = p_{10} = p_{11}$, аналогично q_{ij}

6. $p_{00} = p_{01} = 1 - p_{10} = p_{11}$, аналогично q_{ij}

7. $p_{00} = p_{01} = p_{10} = 1 - p_{11}$, аналогично q_{ij}

8. $p_{00} = 1 - p_{01} = 1 - p_{10} = p_{11}$, аналогично q_{ij}

9. $p_{00} = 1 - p_{01} = p_{10} = 1 - p_{11}$, аналогично q_{ij}

10. $p_{00} = p_{01} = 1 - p_{10} = 1 - p_{11}$, аналогично q_{ij}

11. $p_{00} = 1 - p_{01} = 1 - p_{10} = 1 - p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \Gamma + \Delta, \quad \mathbf{v}_* = (1, 1, 1, 1)$$