1. Основные понятия и определения

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Определение 1. *n-мерное семейство распределений $p(x,\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^d$, называется **экспоненциальным** с естественным параметром θ, если существуют функции $Z(\theta), h_0(x), h(x) = (h_1(x), \ldots, h_d(x))$, такие что,*

$$p(x,\theta) = \frac{1}{Z(\theta)} \exp\left(h_0(x) + \theta' h(x)\right).$$

Одномерное экспоненциальное семейство $r(x,\alpha)$, содержащее два распределения $p(x)$ и $q(x)$, $x \in X, |X| < \infty$, может быть задано в виде

$$r(x,\alpha) = \frac{1}{\sum_{x\in X} p^{\alpha}(x) q^{1-\alpha}(x)} p^{\alpha}(x) q^{1-\alpha}(x).$$

Определение 2. *Последовательность случайных величин $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, принимающих значения в $\mathcal{S}$, называется **цепью Маркова** с пространством состояний $\mathcal{S}$, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и борелевского множества B*

$$\mathrm{P}(\xi_{n+1} \in B | \sigma(\xi_m, m \leqslant n)) = \mathrm{P}(\xi_{n+1} \in B | \sigma(\xi_n)),$$

*если при этом переходные вероятности $\mathrm{P}(\xi_{n+w} = a | \xi_n = b)$ не зависят от n, то цепь Маркова называется **однородной**.*

Матрицу переходных вероятностей однородной цепи Маркова обозначим $P = (p_{x_n x_{n+1}} = \mathrm{P}(\xi_{n+1} = x_{n+1} | \xi_n = n_s), x_n, x_{n+1} \in \mathcal{S})$, вероятности $\pi(x_1) = \mathrm{P}(\xi_1 = x_1)$ будем называть вероятностями начальных состояний.

Утверждение 1. *Конечномерные распределения однородной цепи Маркова имеют вид*

$$p(x) = \pi(x_1) \prod_{s=1}^{n-1} p_{x_s x_{s+1}},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}^n, \tag{1}$$

а тогда однородная цепь Маркова однозначно задается матрицей переходных вероятностей, вероятностями начальных состояний и пространством состояний.

Обозначим $\mathrm{MC}_{\mathcal{S}}(\pi, P)$ цепь Маркова с пространством состояний $\mathcal{S}$, начальным распределением $\pi(x)$ и матрицей переходных вероятностей P. Множество всех цепей Маркова с пространством состояний $\mathcal{S}$ обозначим $\mathrm{MC}_{\mathcal{S}}$.

Определение 3. *Последовательность $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, называется **цепью Маркова порядка r** , если для любого $n \in \mathbb{N}$ и борелевского B.*

$$\mathrm{P}(\xi_{n+1} \in B | \sigma(\xi_m, m \leqslant n)) = (\xi_{n+1} \in B | \sigma(\xi_m, n - r + 1 \leqslant m \leqslant n))$$

Утверждение 2. *Пусть $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – цепь Маркова порядка r. Тогда последовательность случайных величин $(\eta_n = (\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+r-1}))_{n\in\mathbb{N}}$ со значениями из $\mathcal{S}^n$ является цепью Маркова в обычном смысле.*

Определение 4. *Квадратная неотрицательная матрица $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ называется **стохастической**, если $\sum_{j=1}^n A_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n}$.*

Определение 5. *Квадратная матрица* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ *называется* ***разложимой****, если существует разбиение множества индексов* $\mathcal{I} = \{1, 2, ..., n\}$ *на два непересекающихся подмножества* $\mathcal{I}_1$ *и* $\mathcal{I}_2$ $(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \mathcal{I},\ \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \varnothing)$, *такое, что* $A_{ij} = 0,\ i \in \mathcal{I}_1,\ j \in \mathcal{I}_2;$ *в противном случае она называется* ***неразложимой****.*

Определение 6. λ_* *называется собсвенным значением Перрона-Фробениуса матрицы* A*, если*
1. $\lambda_* > 0$*,*
2. λ_* *простой корень характеристического полинома* $\varphi(\lambda)$ *матрицы* A*,*
3. любое другое собственное значение λ_0 *матрицы* A *удовлетворяет* $|\lambda_0| \leqslant \lambda_*$*,*
а соответствующий λ_* *собтвенный вектор* $\mathbf{v}_*$ *называется собственным вектором Перрона-Фробениуса матрицы* A*.*

Теорема 1 (Перрона-Фробениуса)**.** *Неотрицательная неразложимая матрица* A *всегда имеет собсвенное значение Перрона-Фробениуса* λ_**; собственный вектор Перрона-Фробениуса* $\mathbf{v}_*$ *имеет положительные координаты.*

Следствие 1. *Неотрицательная* $n \times n$ *матрица* A *с* λ_* *и* $\mathbf{v}_*$ *подобна произведению* λ_* *и некоторой стохастической матрицы* S *, т. е.* $A = \lambda_* V S V^{-1}$*, где* $V = \mathrm{diag}(\mathbf{v}_{*1}, \dots, \mathbf{v}_{*n})$*.*

2. Экспоненциальные семейства переходных вероятностей $\mathrm{MC}_{\mathcal{D}}$

Имеем две цепи Маркова, $\mathrm{MC}_{\mathcal{D}}(\pi, P)$ и $\mathrm{MC}_{\mathcal{D}}(\phi, Q)$, по которым будет строиться одномерное экспоненциальное семейство. В случае двоичных цепей Маркова первого порядка $\mathcal{D} = \mathbb{B}$; второго порядка, сведенного к первому, $\mathcal{D} = \mathbb{B}^2$.

Пусть $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D}^n$, т. ч. $\pi(x_1), \phi(x_1) \neq 0$, $p_{x_s x_{s+1}}, q_{x_s x_{s+1}} \neq 0, s = \overline{1, n-1}$. Конечномерные распределения $\mathrm{MC}_{\mathcal{D}}(\pi, P)$ и $\mathrm{MC}_{\mathcal{D}}(\phi, Q)$ имеют вид

$$p(x) = \pi(x_1) \prod_{s=1}^{n-1} p_{x_s x_{s+1}}, \tag{2}$$

$$q(x) = \phi(x_1) \prod_{s=1}^{n-1} q_{x_s x_{s+1}}. \tag{3}$$

Построив по P, Q R_α (12), найдем сз $\lambda_* = \lambda_*(\alpha)$ и св $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}_*(\alpha)$ Перрона-Фробениуса матрицы $R_\alpha^\top$.

Для получения стохастический матрицы используем лемму 1 и получим

$$\mathcal{R}(\alpha) = \left(r_{ij} = \frac{1}{\lambda_*} \frac{\mathbf{v}_{*j}}{\mathbf{v}_{*i}} p_{ij}^\alpha q_{ij}^{1-\alpha},\ i, j \in \mathcal{D} \right) \tag{4}$$

Конечномерное распределение $\mathrm{MC}_{\mathcal{D}}(Z_{\pi\phi}^{-1} \pi^\alpha \phi^{1-\alpha}, \mathcal{R}(\alpha))$:

$$r(x) = \frac{1}{Z_{\pi\phi}} \pi^{\alpha}_{x_1} \phi^{1-\alpha}_{x_1} \prod_{s=1}^{n-1} r_{x_s x_{s+1}} = \frac{1}{\lambda_*^{n-1}} \frac{\pi^{\alpha}_{x_1} \phi^{1-\alpha}_{x_1} \mathbf{v}_{*x_n}}{Z_{\pi\phi} \mathbf{v}_{*x_1}} \prod_{s=1}^{n-1} p^{\alpha}_{x_s x_{s+1}} q^{1-\alpha}_{x_s x_{s+1}} =$$
$$= \frac{1}{\lambda_*^{n-1}} \exp\left(\sum_{s=1}^{n-1} [\alpha \ln p_{x_s x_{s+1}} + (1-\alpha) \ln q_{x_s x_{s+1}}] + \ln \frac{\pi^{\alpha}_{x_1} \phi^{1-\alpha}_{x_1} \mathbf{v}_{*x_n}}{Z_{\pi\phi} \mathbf{v}_{*x_1}} \right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda_*^{n-1}} \exp\left(\left\{ \sum_{s=1}^{n-1} \ln q_{x_s x_{s+1}} \right\} + \alpha \sum_{s=1}^{n-1} [\ln p_{x_s x_{s+1}} - \ln q_{x_s x_{s+1}}] + \ln \frac{\pi^{\alpha}_{x_1} \phi^{1-\alpha}_{x_1} \mathbf{v}_{*x_n}}{Z_{\pi\phi} \mathbf{v}_{*x_1}} \right). \quad (5)$$

Устремим $n \to \infty$, $\ln \frac{\pi^{\alpha}_{x_1} \phi^{1-\alpha}_{x_1} \mathbf{v}_{*x_n}}{Z_{\pi\phi} \mathbf{v}_{*x_1}} = \mathcal{O}(1)$, а тогда $r(x)$ – это асимптотически экспоненциальное семейство конечномерных распределений $\mathrm{MC}_{\mathcal{D}}(Z_{\pi\phi}^{-1} \pi^{\alpha} \phi^{1-\alpha}, \mathcal{R}(\alpha))$ с естественным параметром $\theta = \alpha \in \mathbb{R}$ и двойственным параметром $\eta = (n-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \ln \lambda_*$.

Одномерное экспоненциальное семейство переходных вероятностей с естественным параметром α тогда будет иметь вид:

$$r_{ij} = \frac{1}{Z(\alpha)} \exp\left(h_0(i,j) + \alpha h_1(i,j) + \ell_1(j,\alpha) - \ell_2(i,\alpha)\right), \text{ где} \quad (6)$$
$$Z(\alpha) = \lambda_* \quad (7)$$
$$h_0(i,j) = \ln q_{ij} \quad (8)$$
$$h_1(i,j) = \ln p_{ij} - \ln q_{ij} \quad (9)$$
$$\ell_1(j,\alpha) = \ln \mathbf{v}_{*j} \quad (10)$$
$$\ell_2(i,\alpha) = \ln \mathbf{v}_{*i} \quad (11)$$

В случае одномерного экспоненциального семейства цепей Маркова по двум стохастическим матрицам $P = (P_{ij})_{i,j=1}^n$ и $Q = (Q_{ij})_{i,j=1}^n$, с совпадающим множеством пар индексов нулевых элементов: $P_{ij} = 0 \iff Q_{ij} = 0$, строится матрица $R(\alpha) = (R_{ij}(\alpha))_{i,j=1}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ по формуле (12).

$$R_{ij}(\alpha) = \begin{cases} 0, & P_{ij} = 0, \\ P_{ij}^{\alpha} Q_{ij}^{1-\alpha}, & P_{ij} \neq 0. \end{cases} \quad (12)$$

3. Поиск «аналитичных» моделей по виду характеристического полинома матриц переходных вероятностей

4. Случай одномерного экспоненциального семейства двоичных цепей Маркова первого порядка $\mathrm{MC}_{\mathbb{B}}$

Стохастические матрицы P и Q в двумерном многообразии двоичных цепей Маркова первого порядка можно однозначно определить параметрами $p = (p_0, p_1), q = (q_0, q_1)$. Будем рассматривать $p, q \in (0,1)^2$.

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & 1-p_0 \\ p_1 & 1-p_1 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} q_0 & 1-q_0 \\ q_1 & 1-q_1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тогда по (12)

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} p_0^\alpha q_0^{1-\alpha} & (1-p_0)^\alpha(1-q_0)^{1-\alpha} \\ p_1^\alpha q_1^{1-\alpha} & (1-p_1)^\alpha(1-q_1)^{1-\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \mu \\ \xi & \psi \end{pmatrix}, \quad \gamma, \mu, \xi, \psi > 0. \tag{14}$$

Характеристический многочлен матрицы (14) $\varphi_1(\lambda) = \lambda^2 - (\gamma+\psi)\lambda + (\gamma\psi - \mu\xi)$.

Очевидно, что R_α неразложима, по теореме 1 λ_* существует, а т.к. $\deg \varphi_1(\lambda) = 2$, то λ_* выражается аналитически через дискриминант:

$$\lambda_* = \frac{1}{2}\left[\gamma + \psi + \sqrt{(\gamma+\psi)^2 - 4(\gamma\psi - \mu\xi)}\right] = \frac{1}{2}\left[\gamma+\psi+\sqrt{(\gamma-\psi)^2 + 4\mu\xi}\right] \tag{15}$$

Тогда в общем случае для матриц R_α, построенных по матрицам (21), сз Перрона-Фробениуса выражается как:

$$\lambda_* = \frac{1}{2}\Big[p_0^\alpha q_0^{1-\alpha} + (1-p_1)^\alpha(1-q_1)^{1-\alpha} + \\ + \left\{(p_0^\alpha q_0^{1-\alpha} - (1-p_1)^\alpha(1-q_1)^{1-\alpha})^2 + 4p_1^\alpha q_1^{1-\alpha}(1-p_0)^\alpha(1-q_0)^{1-\alpha}\right\}^{\frac{1}{2}}\Big] \tag{16}$$

Найдем теперь модели, которые будут упрощать выражение (15).

Лемма 1. *Пусть* $a, b, c, d > 0$. *Тогда*

$$a^\alpha b^{1-\alpha} = c^\alpha d^{1-\alpha} \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Доказательство. Достаточность очевидна.

Необходимость. Т. к. достаточность выполняется, множество решений непустое. Пусть $\alpha = 0$, тогда $b = d$; а при $\alpha = 1$ $a = c$. ■

Лемма 2. *Пусть* $a, b, c, d \in (0, 1)$. *Тогда*

$$a^\alpha b^{1-\alpha} = c^\alpha d^{1-\alpha} \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow (1-a)^\alpha(1-b)^{1-\alpha} = (1-c)^\alpha(1-d)^{1-\alpha}$$

Доказательство. $a^\alpha b^{1-\alpha} = c^\alpha d^{1-\alpha} \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow a = c \wedge b = d \Longleftrightarrow 1-a = 1-c \wedge 1-b = 1-d \Longleftrightarrow (1-a)^\alpha(1-b)^{1-\alpha} = (1-c)^\alpha(1-d)^{1-\alpha}$ ■

1. Пусть $\gamma\psi - \mu\xi = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, что эквивалентно

$$p_0^\alpha q_0^{1-\alpha}(1-p_1)^\alpha(1-q_1)^{1-\alpha} = p_1^\alpha q_1^{1-\alpha}(1-p_0)^\alpha(1-q_0)^{1-\alpha} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

По лемме 1, решение (17): $p_0(1-p_1) = p_1(1-p_0) \wedge q_0(1-q_1) = q_1(1-q_0)$.

$p_0 = (1-p_0) \wedge p_1 = (1-p_1)$ является частным случаем $p_0 = p_1$ при $p_0 = 1/2$, аналогично и $q_0 = (1-q_0) \wedge q_1 = (1-q_1)$ является частным случаем $q_0 = q_1$, поэтому далее рассматриваем решение $p_0 = p_1 \wedge q_0 = q_1$. Упрощения дают $\lambda_* = \gamma + \psi$.

$$\lambda_* = p_0^\alpha q_0^{1-\alpha} + (1-p_0)^\alpha(1-q_0)^{1-\alpha}, \textit{если } p_0 = p_1 \wedge q_0 = q_1. \tag{18}$$

2. Пусть теперь $\gamma - \psi = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$p_0^\alpha q_0^{1-\alpha} = (1-p_1)^\alpha(1-q_1)^{1-\alpha} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Решение (19) $p_0 = 1-p_1 \wedge q_0 = 1-q_1$. По лемме 2 $\mu = \xi \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, а тогда $\lambda_* = \gamma + \mu$.

$$\lambda_* = p_0^\alpha q_0^{1-\alpha} + (1-p_0)^\alpha(1-q_0)^{1-\alpha}, \textit{если } p_0 = 1-p_1 \wedge q_0 = 1-q_1. \tag{20}$$

5. Случай одномерного экспоненциального семейства двоичных цепей Маркова второго порядка $MC_{\mathbb{B}^2}$

Аналогично случаю $\mathrm{MC}_{\mathbb{B}}$, P и Q будем определять параметрами $p = (p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}), q = (q_{00}, q_{01}, q_{10}, q_{11})$. Будем рассматривать $p, q \in (0,1)^4$.

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & 1-p_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{01} & 1-p_{01} \\ p_{10} & 1-p_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{11} & 1-p_{11} \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} q_{00} & 1-q_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{01} & 1-q_{01} \\ q_{10} & 1-q_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{11} & 1-q_{11} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Тогда по (12)

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \Gamma & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi & \Psi \\ \Pi & \Upsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & \Omega \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= p_{00}^\alpha q_{00}^{1-\alpha}, \quad \Delta = (1-p_{00})^\alpha (1-q_{00})^{1-\alpha}, \\ \Phi &= p_{01}^\alpha q_{01}^{1-\alpha}, \quad \Psi = (1-p_{01})^\alpha (1-q_{01})^{1-\alpha}, \\ \Pi &= p_{10}^\alpha q_{10}^{1-\alpha}, \quad \Upsilon = (1-p_{10})^\alpha (1-q_{10})^{1-\alpha}, \\ \Sigma &= p_{11}^\alpha q_{11}^{1-\alpha}, \quad \Omega = (1-p_{11})^\alpha (1-q_{11})^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Характеристический многочлен матрицы (22):

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Gamma+\Omega)\lambda^3 + (\Gamma\Omega - \Phi\Upsilon)\lambda^2 + (\Gamma\Phi\Upsilon + \Omega\Phi\Upsilon - \Delta\Pi\Phi - \Psi\Sigma\Upsilon)\lambda + \\ + (\Omega\Phi - \Psi\Sigma)(\Delta\Pi - \Gamma\Upsilon). \tag{23}$$

Лемма 3. *Матрица* (22) *является неразложимой.*

Доказательство. Доказывается простым перебором. ■

1. Пусть $\Gamma\Omega - \Phi\Upsilon = 0 \Longleftrightarrow p_{00}(1-p_{11}) = p_{01}(1-p_{10}) \wedge q_{00}(1-q_{11}) = q_{01}(1-q_{10})$, для простоты сокращения будем рассматривать решения:

a) $\Gamma = \Phi, \Omega = \Upsilon$:

$$p_{00} = p_{01} \wedge p_{11} = p_{10} \wedge q_{00} = q_{01} \wedge q_{11} = q_{10}, \tag{24}$$

по лемме 2 $\Delta = \Psi, \Pi = \Sigma$. Преобразуем $\varphi_2(\lambda)$:

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Gamma+\Omega)\lambda^3 + (\Gamma\Omega - \Delta\Pi)(\Gamma+\Omega)\lambda - (\Gamma\Omega - \Delta\Pi)^2 = \\ = (\lambda^2 + \Delta\Pi - \Gamma\Omega)(\lambda^2 - (\Gamma+\Omega)\lambda + \Gamma\Omega - \Delta\Pi).$$

$$\lambda_* = \frac{1}{2}\left[\Gamma + \Omega + \sqrt{(\Gamma-\Omega)^2 + 4\Delta\Pi}\right], \quad \textit{если } (24) \tag{25}$$

b) $\Gamma = \Upsilon, \Omega = \Phi$ не дает простого «аналитичного» решения.

2. Пусть $\Gamma\Phi\Upsilon + \Omega\Phi\Upsilon - \Delta\Pi\Phi - \Psi\Sigma\Upsilon = 0$, рассмотрим:

2.1. $\Omega\Phi = \Sigma\Psi \wedge \Gamma\Upsilon = \Delta\Pi$

a) $\Omega = \Sigma \wedge \Phi = \Psi \wedge \Gamma = \Delta \wedge \Upsilon = \Pi$
Вырожденный случай при $p_{ij} = q_{ij} = 1/2, i, j \in 0, 1$. Все семейство – одна цепь Маркова. $\lambda_* = 1$.

b) $\Omega = \Sigma \wedge \Phi = \Psi \wedge \Gamma = \Pi \wedge \Upsilon = \Delta$.

$$p_{00} = p_{10} \wedge q_{00} = q_{10} \wedge p_{01} = p_{11} = q_{11} = q_{01} = 1/2. \tag{26}$$

Тогда $\Omega = \Sigma = \Phi = \Psi = 1/2$.

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Gamma + \frac{1}{2})\lambda^3 + \frac{1}{2}(\Gamma - \Delta)\lambda^2.$$

Является частным случаем модели **a)**.

c) $\Omega = \Psi \wedge \Phi = \Sigma \wedge \Gamma = \Pi \wedge \Upsilon = \Delta$.

$$p_{01} = p_{11} \wedge q_{01} = q_{11} \wedge p_{00} = p_{10} \wedge q_{00} = q_{10} \tag{27}$$

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Gamma + \Omega)\lambda^3 + (\Gamma\Omega - \Phi\Delta)\lambda^2.$$

$$\lambda_* = \frac{1}{2}\left[\Gamma + \Omega + \sqrt{(\Omega - \Gamma)^2 + 4\Phi\Delta}\right], \textit{если } (27). \tag{28}$$

d) $\Omega = \Psi \wedge \Phi = \Sigma \wedge \Gamma = \Delta \wedge \Upsilon = \Pi$.

$$p_{01} = p_{11} \wedge q_{01} = q_{11} \wedge p_{00} = p_{01} = q_{00} = q_{10} = 1/2. \tag{29}$$

Тогда $\Gamma = \Delta = \Pi = \Upsilon = 1/2$.

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Omega + \frac{1}{2})\lambda^3 + \frac{1}{2}(\Omega - \Phi)\lambda^2.$$

Является частным случаем модели **c)**.

2.2. $\Omega\Upsilon = \Delta\Pi \wedge \Gamma\Phi = \Psi\Sigma$
a) $\Omega = \Delta \wedge \Upsilon = \Pi \wedge \Gamma = \Psi \wedge \Phi = \Sigma$
b) $\Omega = \Pi \wedge \Upsilon = \Delta \wedge \Gamma = \Sigma \wedge \Phi = \Psi$
c) $\Omega = \Delta \wedge \Upsilon = \Pi \wedge \Gamma = \Sigma \wedge \Phi = \Psi$
d) $\Omega = \Pi \wedge \Upsilon = \Delta \wedge \Gamma = \Psi \wedge \Phi = \Sigma$

Модели со свойствами a) и c) не дают «аналитичных» сз. Модель со свойствами b) вырожденная и была описана в 2.1.a)

Рассмотрим модель со свойствами d):

$$p_{00} = 1 - p_{01} = p_{10} = p_{11}, \textit{аналогично } q_{ij} \tag{30}$$

Тогда $\Gamma = \Psi = \Pi = \Sigma \wedge \Delta = \Phi = \Upsilon = \Omega$.

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^4 - (\Gamma + \Delta)\lambda^3 + (\Gamma\Delta - \Delta^2)\lambda^2 + (\Delta^3 - \Gamma^2\Delta) = \lambda(\lambda - \Gamma - \Delta)(\lambda^2 + \Gamma\Delta - \Delta^2).$$

$$\lambda_* = \Gamma + \Delta, \textit{если } (30). \tag{31}$$

Другие модели будем искать как похожие по структуре ограничений на p_{ij} и q_{ij}. Все найденные «аналитичные» модели с ограничениями на p_{ij} и q_{ij} выписаны в пункте 6.2.

6. Найденные «аналитичные» модели

6.1. Одномерные экспоненциальные семейства переходных вероятностей $\mathrm{MC}_{\mathbb{B}}$

Для случая двоичных цепей Маркова первого порядка $p_{i0} = p_i, p_{i1} = 1 - p_i$, аналогично с q_{ij}; λ_* и $\mathbf{v}_*$ записаны в таблице 1 в обозначениях (14).

Table 1.

Ограничение на модель	λ_*	$\mathbf{v}_{*0}$	$\mathbf{v}_{*1}$
нет	$\frac{1}{2}\left[\gamma + \psi + \sqrt{(\gamma-\psi)^2 + 4\mu\xi}\right]$	$\frac{\lambda_* - \psi}{\mu}$	1
$p_0 = p_1$, $q_0 = q_1$	$\gamma + \mu$	$\frac{\gamma}{\mu}$	1
$p_0 = 1 - p_1$, $q_0 = 1 - q_1$	$\gamma + \mu$	1	1

6.2. Некоторые одномерные экспоненциальные семейства переходных вероятностей $\mathrm{MC}_{\mathbb{B}^2}$

В случае двоичных цепей Маркова второго порядка, сведенного к первому, $p_{ik\ k0} = p_{ik}, p_{ik\ k1} = 1 - p_{ik}, k = 0 \vee 1$, аналогично с q_{ikkj}. $\mathbf{v}_* = (\mathbf{v}_{*00}, \mathbf{v}_{*01}, \mathbf{v}_{*10}, \mathbf{v}_{*11})$. $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Omega, \Psi, \Phi$ в обозначениях (22).

1. $p_{00} = p_{01}, p_{00} = p_{10}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \frac{1}{2}\left[\Gamma + \Omega + \sqrt{(\Gamma - \Omega)^2 + 4\Delta\Sigma}\right],$$
$$\mathbf{v}_* = \left(\frac{(\lambda_* - \Omega)(\Gamma(\lambda_* - \Omega) + \Delta\Sigma)}{\Delta^2\lambda_*}, \frac{\lambda_* - \Omega}{\Delta}, \frac{\Gamma(\lambda_* - \Omega) + \Delta\Sigma}{\Delta\lambda_*}, 1\right)$$

2. $p_{00} = p_{10}, p_{01} = p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \frac{1}{2}\left[\Gamma + \Omega + \sqrt{(\Gamma - \Omega)^2 + 4\Delta\Sigma}\right], \quad \mathbf{v}_* = \left(\frac{\Gamma(\lambda_* - \Omega)}{\Delta\Omega}, \frac{\lambda_* - \Omega}{\Omega}, \frac{\Sigma}{\Omega}, 1\right)$$

3. $p_{00} = 1 - p_{11}, p_{01} = 1 - p_{10}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \frac{1}{2}\left[\Gamma + \Phi + \sqrt{(\Gamma - \Phi)^2 + 4\Delta\Psi}\right],$$
$$\mathbf{v}_* = \left(\frac{(\lambda_* - \Phi)(\Phi(\lambda_* - \Gamma) + \Delta\Psi)}{\Delta\lambda_*\Psi}, \frac{\lambda_* - \Gamma}{\Psi}, \frac{\Phi(\lambda_* - \Gamma) + \Delta\Psi}{\lambda_*\Psi}, 1\right)$$

4. $p_{00} = p_{01} = p_{10} = p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \Gamma + \Delta, \quad \mathbf{v}_* = \left(\frac{\Gamma^2}{\Delta^2}, \frac{\Gamma}{\Delta}, \frac{\Gamma}{\Delta}, 1\right)$$

5. $p_{00} = 1 - p_{01} = p_{10} = p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \Gamma + \Delta, \quad \mathbf{v}_* = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}, 1, 1, 1\right)$$

6. $p_{00} = p_{01} = 1 - p_{10} = p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \Gamma + \Delta, \quad \mathbf{v}_* = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}, \frac{\Gamma}{\Delta}, \frac{\Gamma}{\Delta}, 1\right)$$

7. $p_{00} = p_{01} = p_{10} = 1 - p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \Gamma + \Delta, \quad \mathbf{v}_* = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}, 1, 1, 1\right)$$

8. $p_{00} = 1 - p_{01} = 1 - p_{10} = p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \Gamma + \Delta, \quad \mathbf{v}_* = (1, 1, 1, 1)$$

9. $p_{00} = 1 - p_{01} = p_{10} = 1 - p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \Gamma + \Delta, \quad \mathbf{v}_* = \left(1, \frac{\Gamma}{\Delta}, \frac{\Gamma}{\Delta}, 1\right)$$

10. $p_{00} = p_{01} = 1 - p_{10} = 1 - p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \Gamma + \Delta, \quad \mathbf{v}_* = (1, 1, 1, 1)$$

11. $p_{00} = 1 - p_{01} = 1 - p_{10} = 1 - p_{11}$, аналогично q_{ij}

$$\lambda_* = \Gamma + \Delta, \quad \mathbf{v}_* = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}, \frac{\Gamma}{\Delta}, \frac{\Gamma}{\Delta}, 1\right)$$