1. Основные понятия и определения

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и заданную на нем последовательность случайных величин $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, принимающих значения в $\mathcal{D}$.

Пусть $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_m, m \leqslant n)$ и $\mathcal{G}_n = \sigma(\xi_n)$.

Определение 1. *Последовательность $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, называется **цепью Маркова**, если для любого $n \in \mathbb{N}$ σ-алгебры $\mathcal{F}_n$ и $\mathcal{G}_n$ условно независимы отностительно ξ_n, т.е. для любых борелевских $A \in \mathcal{F}_n, B \in \mathcal{G}_n$*

$$\mathrm{P}(A \cap B|\xi_n) = \mathrm{P}(A|\xi_n)\mathrm{P}(B|\xi_n) \text{ п. н.}$$

Определение 2. *Последовательность $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, называется **цепью Маркова порядка r**, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и борелевского B.*

$$\mathrm{P}(\xi_{n+1} \in B|\sigma(\xi_m, m \leqslant n)) = (\xi_{n+1} \in B|\sigma(\xi_m, n-r+1 \leqslant m \leqslant n))$$

Лемма 1. *Пусть $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – цепь Маркова порядка r. Тогда последовательность случайных величин $(\Xi_n = (\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+r-1}))_{n\in\mathbb{N}}$, со значениями из $\mathcal{D}^n$ является цепью Маркова в обычном смысле.*

$\mathrm{MC}_{\mathcal{D}}(\pi, P)$ – цепь Маркова с множеством состояний $\mathcal{D}$, начальным распределением $\pi(i)$, $i \in \mathcal{D}$ и матрицей переходных вероятностей $P = (p_{ij},\ i, j \in \mathcal{D})$.

В случае одномерного экспоненциального семейства цепей Маркова по двум стохастическим матрицам $P = (P_{ij})_{i,j=1}^n$ и $Q = (Q_{ij})_{i,j=1}^n$, с совпадающим множеством пар индексов нулевых элементов: $P_{ij} = 0 \Longleftrightarrow Q_{ij} = 0$, строится матрица $R(\alpha) = (R_{ij}(\alpha))_{i,j=1}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ по формуле (1).

$$R_{ij}(\alpha) = \begin{cases} 0, & P_{ij} = 0, \\ P_{ij}^{\alpha} Q_{ij}^{1-\alpha}, & P_{ij} \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Теоремы и определения из теории неотрицательных матриц

Определение 3. *Квадратная неотрицательная матрица $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ называется **стохастической**, если $\sum_{j=1}^n A_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n}$.*

Определение 4. *Квадратная матрица $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ называется **разложимой**, если существует разбиение множества индексов $\mathcal{I} = \{1, 2, ..., n\}$ на два непересекающихся подмножества $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ ($\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \mathcal{I},\ \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \varnothing$), такое, что $A_{ij} = 0,\ i \in \in \mathcal{I}_1,\ j \in \mathcal{I}_2$; в противном случае она называется **неразложимой**.*

Определение 5. *λ_* называется собсвенным значением Перрона-Фробениуса матрицы A, если*
1. $\lambda_* > 0$,
2. λ_* простой корень характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ матрицы A,
3. любое другое собственное значение λ_0 матрицы A удовлетворяет $|\lambda_0| \leqslant \lambda_*$,
а соответствующий λ_* собтвенный вектор $\mathbf{v}_*$ называется собственным вектором Перрона-Фробениуса матрицы A.

Теорема 1 (Перрона-Фробениуса)**.** *Неотрицательная неразложимая матрица A всегда имеет собсвенное значение Перрона-Фробениуса λ_*; собственный вектор Перрона-Фробениуса $\mathbf{v}_*$ имеет положительные координаты.*

Следствие 1. *Неотрицательная $n \times n$ матрица A с λ_* и $\mathbf{v}_*$ подобна произведению λ_* и некоторой стохастической матрицы S, т. е. $A = \lambda_* V S V^{-1}$, где $V = \mathrm{diag}(\mathbf{v}_{*1}, \ldots, \mathbf{v}_{*n})$.*