PVL 1 - theoretische Informatik

Sophia Köhler, 530976, Bachelor Informatik

16.10.2020

1

Induktion besteht aus:

1. Induktionsanfang.
2. Induktionsschritt.
   (a) Induktionsbehauptung.
   (b) Induktionsbeweis.

1.1

Induktion von

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)*n}{2}$$

1.1.1 Induktionsanfang

für $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k = \frac{(1+1)*1}{2}$$
$$1 = 1$$

für $n = 2$

$$\sum_{k=1}^{2} k = \frac{(2+1)*2}{2}$$
$$1 + 2 = 3$$

für $n = 3$

$$\sum_{k=1}^{3} k = \frac{(3+1)*3}{2}$$
$$1+2+3=6$$

Induktionsanfang stimmt zunächst.

1.1.2 Induktionsschritt

Induktionsvorraussetzung
Vorschrift gilt für: $k = n$ also

$$1+2+3+n = \frac{(n+1)*n}{2}$$

Induktionsbehauptung
Vorschrift gilt auch für: $k = n+1$ also

$$1+2+3+...+(n+1) = \frac{(n+2)*(n+1)}{2}$$

Induktionsbeweis
Aus der Induktionsbehauptung muss nun die Vorraussetzung folgen.
es sollte also gelten:

$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)*(n)}{2} + (n+1) = \frac{(n+2)*(n+1)}{2}$$
$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)*(n)}{2} + (n+1)$$
$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n^2+n}{2} + \frac{2*n+2}{2}$$
$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n^2+3*n+2}{2}$$

pq Formel für das Lösen der rechten Seite:

$$n_{1,2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$n_1 = -1$ und $n_2 = -2$
nun folgt Umformung in Nullstellenform:

$$\frac{(n+2)*(n+1)}{2}$$

Somit ist gezeigt, dass Induktionsbehauptung aus der Induktionsvorraussetzung folgt.

1.2

Induktion von

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2*n+1)*(n+1)*n}{6}$$

1.2.1 Induktionsanfang

für $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{(2*1+1)*(1+1)*1}{6}$$
$$1 = 1$$

für $n = 2$

$$\sum_{k=1}^{2} k^2 = \frac{(4*1+1)*(2+1)*2}{6}$$
$$1 + 4 = 5$$

Induktionsanfang stimmt zunächst.

1.2.2 Induktionsschritt

Induktionsvorraussetzung

Vorschrift gilt für: $k = n$ also

$$1 + 2 + 9 + n^2 = \frac{(2*n+1)*(n+1)*n}{6}$$

Induktionsbehauptung

Vorschrift gilt auch für: $k = n + 1$ also

$$1 + 2 + 3 + ... + (n+1)^2 = \frac{(2*(n+1)+1)*((n+1)+1)*(n+1)}{6}$$

bzw.

$$1 + 2 + 3 + ... + (n+1)^2 = \frac{2*n^3 + 9*n^2 + 13*n + 6}{6}$$

Induktionsbeweis

Aus der Induktionsbehauptung muss nun die Vorraussetzung folgen.

es sollte also gelten:

$$1{+}2{+}3{+}...{+}(n{+}1)^2 = \frac{(2*n+1)*(n+1)*n}{6}{+}(n{+}1)^2 = \frac{2*n^3+9*n^2+13*n+6}{6}$$

$$1+2+3+...+(n+1)^2 = \frac{(2*n+1)*(n+1)*n}{6} + (n+1)^2$$

Ausmultiplizieren, binomische Formel und Erweitern:

$$1+2+3+...+(n+1)^2 = \frac{2*n^3+3*n^2+n}{6} + \frac{6*n^2+12*n+6}{6}$$

Addieren:

$$1+2+3+...+(n+1)^2 = \frac{2*n^3+9*n^2+13*n+6}{6}$$

Somit ist gezeigt, dass Induktionsbehauptung aus der Induktionsvorraussetzung folgt.

2

2.1

Für welche n gilt:

$$n^2-1 \leq \frac{1}{6}*n^3+\frac{1}{2}*n^2+\frac{1}{3}*n-1$$

Zunächst kann man auf beiden Seiten 1 addieren und ein n ausklammern:

$$n*n \leq n*(\frac{1}{6}*n^2+\frac{1}{2}*n+\frac{1}{3})$$

Somit kennt man die erste Nullstelle, nämlich 0, da ein Term multipliziert mit null auch immer null ergibt. Man rechnet nun weiter mit:

$$n \leq \frac{1}{6}*n^2+\frac{1}{2}*n+\frac{1}{3}$$

Erweitern mit 6:

$$6*n \leq n^2+3*n+2$$
$$0 \leq n^2-3*n+2$$

pq Formel für das Lösen der rechten Seite:

$$n_{1,2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$n_1 = 1$ und $n_2 = 2$

Somit kennt man alle Nullstellen mit $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ und $n_3 = 2$

Nun muss gezeigt werden, dass die Gleichung nur für alle $0 \leq n \leq 2$ gilt. Es folgt also Induktion.

2.2

Induktion von

$$6 * n \leq n^2 + 3 * n + 2$$

2.2.1 Induktionsanfang

für $n = 0$

$$0 \leq 0$$

für $n = 1$

$$6 \leq 1 + 3 + 2$$
$$6 \leq 6$$

für $n = 2$

$$12 \leq 4 + 6 + 2$$
$$12 \leq 12$$

Induktionsanfang stimmt zunächst.

2.2.2 Induktionsschritt

Induktionsvorraussetzung
Vorschrift gilt nur für:$n_1 = 0$, $n_2 = 1$ und $n_3 = 2$

Induktionsbehauptung Induktion über Gegenbeweis: Vorschrift darf nicht gelten für: $n + 1$ also Induktion von

$$6 * (n + 1) \leq (n + 1)^2 + 3 * (n + 1) + 2$$