PVL 1 - theoretische Informatik

Sophia Köhler, 530976, Bachelor Informatik

16.10.2020

1

Induktion besteht aus:

1. Induktionsanfang.
2. Induktionsschritt.
   (a) Induktionsbehauptung.
   (b) Induktionsbeweis.

1.1

Induktion von

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)*n}{2}$$

1.1.1 Induktionsanfang

für $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k = \frac{(1+1)*1}{2}$$
$$1 = 1$$

für $n = 2$

$$\sum_{k=1}^{2} k = \frac{(2+1)*2}{2}$$
$$1 + 2 = 3$$

für $n = 3$

$$\sum_{k=1}^{3} k = \frac{(3+1)*3}{2}$$
$$1+2+3 = 6$$

Induktionsanfang stimmt zunächst.

1.1.2 Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung
Vorschrift gilt für: $k = n$ also

$$1+2+3+n = \frac{(n+1)*n}{2}$$

Induktionsbehauptung
Vorschrift gilt auch für: $k = n+1$ also

$$1+2+3+...+(n+1) = \frac{(n+2)*(n+1)}{2}$$

Induktionsbeweis
Aus der Induktionsbehauptung muss nun die Voraussetzung folgen.
es sollte also gelten:

$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)*(n)}{2} + (n+1) = \frac{(n+2)*(n+1)}{2}$$

$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)*(n)}{2} + (n+1)$$

$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n^2+n}{2} + \frac{2*n+2}{2}$$

$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n^2+3*n+2}{2}$$

pq Formel für das Lösen der rechten Seite:

$$n_{1,2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$n_1 = -1$ und $n_2 = -2$
nun folgt Umformung in Nullstellenform:

$$\frac{(n+2)*(n+1)}{2}$$

Somit ist gezeigt, dass Induktionsbehauptung aus der Induktionsvoraussetzung folgt.

1.2

Induktion von

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2*n+1)*(n+1)*n}{6}$$

1.2.1 Induktionsanfang

für $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{(2*1+1)*(1+1)*1}{6}$$

$$1 = 1$$

für $n = 2$

$$\sum_{k=1}^{2} k^2 = \frac{(4*1+1)*(2+1)*2}{6}$$

$$1 + 4 = 5$$

Induktionsanfang stimmt zunächst.

1.2.2 Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung

Vorschrift gilt für: $k = n$ also

$$1 + 2 + 9 + n^2 = \frac{(2*n+1)*(n+1)*n}{6}$$

Induktionsbehauptung

Vorschrift gilt auch für: $k = n + 1$ also

$$1 + 2 + 3 + ... + (n+1)^2 = \frac{(2*(n+1)+1)*((n+1)+1)*(n+1)}{6}$$

bzw.

$$1 + 2 + 3 + ... + (n+1)^2 = \frac{2*n^3 + 9*n^2 + 13*n + 6}{6}$$

Induktionsbeweis

Aus der Induktionsbehauptung muss nun die Voraussetzung folgen.

es sollte also gelten:

$$1{+}2{+}3{+}...{+}(n{+}1)^2 = \frac{(2*n+1)*(n+1)*n}{6} {+}(n{+}1)^2 = \frac{2*n^3+9*n^2+13*n+6}{6}$$

$$1+2+3+...+(n+1)^2 = \frac{(2*n+1)*(n+1)*n}{6} + (n+1)^2$$

Ausmultiplizieren, binomische Formel und Erweitern:

$$1+2+3+...+(n+1)^2 = \frac{2*n^3+3*n^2+n}{6} + \frac{6*n^2+12*n+6}{6}$$

Addieren:

$$1+2+3+...+(n+1)^2 = \frac{2*n^3+9*n^2+13*n+6}{6}$$

Somit ist gezeigt, dass Induktionsbehauptung aus der Induktionsvoraussetzung folgt.

2

2.1

Für welche n gilt:

$$n^2 - 1 \leq \frac{1}{6}*n^3 + \frac{1}{2}*n^2 + \frac{1}{3}*n - 1$$

Zunächst kann man auf beiden Seiten 1 addieren und ein n ausklammern:

$$n*n \leq n*(\frac{1}{6}*n^2 + \frac{1}{2}*n + \frac{1}{3})$$

Somit kennt man die erste Nullstelle, nämlich 0, da ein Term multipliziert mit null auch immer null ergibt. Man rechnet nun weiter mit:

$$n \leq \frac{1}{6}*n^2 + \frac{1}{2}*n + \frac{1}{3}$$

Erweitern mit 6:

$$6*n \leq n^2 + 3*n + 2$$

$$0 \leq n^2 - 3*n + 2$$

p-q Formel für das Lösen der rechten Seite:

$$n_{1,2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$n_1 = 1$ und $n_2 = 2$

Somit kennt man alle Nullstellen mit $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ und $n_3 = 2$

Nun muss gezeigt werden, dass die Gleichung nur für alle $0 \leq n \leq 2$ gilt. Es folgt also Induktion.

2.2

Induktion von

$$6 * n \leq n^2 + 3 * n + 2$$

2.2.1 Induktionsanfang

für $n = 0$

$$0 \leq 0$$

für $n = 1$

$$6 \leq 1 + 3 + 2$$

$$6 \leq 6$$

für $n = 2$

$$12 \leq 4 + 6 + 2$$

$$12 \leq 12$$

Induktionsanfang stimmt zunächst.

2.2.2 Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung

Vorschrift gilt nur für:$n_1 = 0$, $n_2 = 1$ und $n_3 = 2$

Induktionsbehauptung Induktion über Gegenbeweis: Vorschrift darf nicht gelten für: $n + 1$ also Induktion von

$$6 * (n + 1) \leq (n + 1)^2 + 3 * (n + 1) + 2$$

2.3

Für welche n gilt:

$$2 * n * log_2 n - n + 1 \geq 3 * n - 3$$

$$2 * n * log_2 n - n + 4 \geq 3 * n$$

$$2 * n * log_2 n + 4 \geq 4 * n$$

$$log_2 n \geq 2 - \frac{2}{n}$$

Kann nicht weiter nach n aufgelöst werden. Da der Logarithmus nicht kleiner als null werden kann, kennt man bereits eine mögliche untere Grenze. Durch probieren ergibt sich:
für $n = 1$

$$4 \geq 4$$

für $n = 2$

$$1 \geq 1$$

für $n = 3$

$$1.585 \geq 1.\overline{3}$$

für $n = 4$

$$2 \geq 1.5$$

da gilt :

$$\lim_{n \to \infty} (log_2 n) = \infty$$

und :

$$\lim_{n \to \infty} \left(2 - \frac{2}{n}\right) = 2$$

weil $\frac{2}{n}$ eine monotone Nullfolge ist, kann man mit Sicherheit sagen, dass man ab n = 4 bewiesen hat, dass der Logarithmus immer größer ist als die rechte Seite. Da der Grenzwert 2 ist, der Logarithmus aber gegen ∞ konvergiert, ist die Ungleichung also gegeben für

$$0 < n \leq \infty$$

3

$$V(n) = 2 * V\left(\frac{n}{2}\right) + b * n + c$$

mit V(1) = 1 und $n \geq 2$
Lösen der Rekursionsgleichung zunächst durch Ausprobieren. $n = 2^k$:

$$V(2^k) = 2 * V\left(2^{k-1}\right) + 2^k * b + c$$

$$V(2^k) = 2 * \left(2 * V\left(2^{k-2}\right) + 2^{k-1} * b + c_2\right) + 2^k * b + c_1$$

$$V(2^k) = 2^2 * V\left(2^{k-2}\right) + 2 * 2^{k-1} * b + 2 * c_2 + 2^k * b + c_1$$

$$V(2^k) = 2^2 * \left(2 * V\left(2^{k-3}\right) + 2^{k-2} * b + c_3\right) + 2 * 2^{k-1} * b + 2 * c_2 + 2^k * b + c_1$$

$$V(2^k) = 2^3 * V\left(2^{k-3}\right) + 2^2 * 2^{k-2} * b + 2^2 * c_3 + 2 * 2^{k-1} * b + 2 * c_2 + 2^k * b + c_1$$

$$V(2^k) = 2^3 * V\left(2^{k-3}\right) + 2^k * 3 * b + (2^2 * c_3 + 2^1 * c_2 + 2^0 * c_1)$$

c kann ausgeklammert werden, da das c durch die Rekursion immer den gleichen Wert hat.

$$V(2^k) = 2^j * V\left(2^{k-j}\right) + 2^k * j * b + c * \sum_{i=0}^{j-1} 2^i$$

$$V(2^k) = 2^j * V\left(2^{k-j}\right) + 2^k * j * b + c * (2^j - 1)$$

Nun folgt Verifikation durch Induktion. Der Induktionsanfang $j = 1$ entspricht der Rekursionsgleichung

$$V(n) = 2 * V\left(\frac{n}{2}\right) + b * n + c$$

bzw.

$$V(2^k) = 2 * V\left(2^{k-1}\right) + 2^k * b + c$$

Nun folgt Schritt $j \to j + 1$

$$V(2^k) = 2^j * V\left(2^{k-j}\right) + 2^k * j * b + c * (2^j - 1)$$

(Induktionsannahme)

$$V(2^k) = 2^j * \left(2 * V\left(2^{k-1-j}\right) + 2^{k-j} * b + c\right) + 2^k * j * b + c * (2^j - 1)$$

$$V(2^k) = 2^{j+1} * V\left(2^{k-1-j}\right) + 2^k * b + 2^j * c + 2^k * j * b + 2^j * c - c$$

$$V(2^k) = 2^{j+1} * V\left(2^{k-1-j}\right) + (1 + j) * 2^k * b - (2^{j+1} * c + c)$$

für j = k

$$V(2^k) = 2^k * V\left(2^{k-k}\right) + 2^k * k * b + c * (2^k - 1)$$

$$V(2^k) = 2^k * V(1) + 2^k * k * b + c * 2^k - c$$

$$V(2^k) = 2^k + 2^k * (k * b + c) - c$$

da V(1) = 1
mit $n = 2^k$

$$V(n) = n + n * (log_2 n * b + c) - c$$

n	$2 * V\left(\frac{n}{2}\right) + b * n + c$	$n + n * (log_2 n * b + c) - c$
1	1	1
2	$2 + 2 * b + c$	$2 + 2 * b + c$
4	$4 + 8 * b + 3 * c$	$4 + 8 * b + 3 * c$