Author: xspcz

Date: 2020-03-31 ~ 2020-04-04

Reply to: xsp-cz@foxmail.com

傅里叶级数——微入门

CONCLUSION PAPER

For Part Ⅰ *and* Ⅱ

Note: 本文在视频草稿基础上整理得到，不是很严谨。同时，这只是一个概要，详细内容见 https://space.bilibili.com/382770991

Contents

1 欧拉公式

1.1 泰勒展开

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)$$

于是，可以得到三个函数的展开式：

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{(2n+1)}$$

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

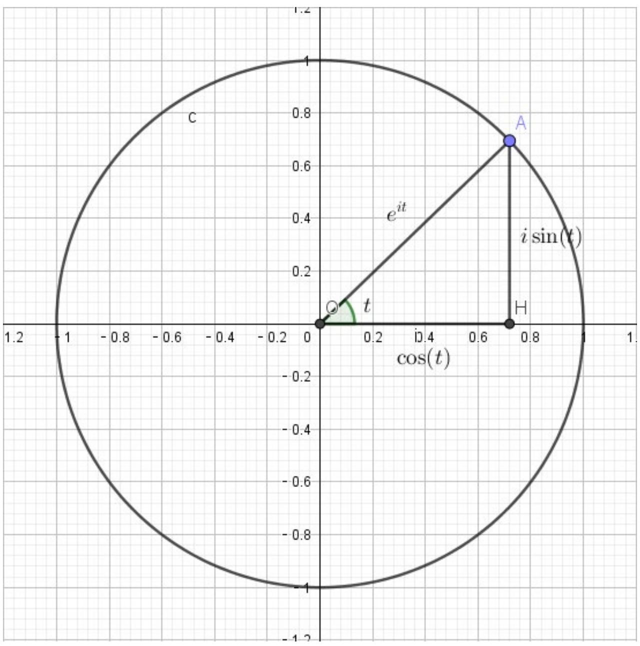
$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

这样，由于$i^2=-1$，一阵化简猛如虎，就可以得到欧拉公式：

$$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$$

1.2 直观体现

如果将欧拉公式中的x理解为一个与实轴的夹角t，那么$\cos(t)+i\sin(t)$输出的就是复平面的单位圆：



也就是说，e^{it}随t的变化而绕单位圆运动，周期为2π。推广到一般的以原点为圆心的圆，就是$ce^{\omega it+\psi}$ $(c,\omega,\psi\in R)$。这里c是该圆的半径；ω是角速度，也就是决定这个数随t的变化旋转的速度（当然也包括方向）；ψ是始相位，即旋转起始的位置角度。我们就将$ce^{\omega it+\psi}$称为一个“旋转量”。

2 复指数形式

2.1 基础

因为$ce^{\omega it+\psi}$是一个复数，根据复数的加法，对于类似$\sum_{k=0}^{100}c_ke^{kit+\psi_k}$的旋转量求和输出，不过是把它们依次首尾相接再让它们按其自身参数旋转，末端输出的值罢了。

先来看个别的。一个旋转量旋转一个周期即2π，就是恰好转过一个圆周。由于这种以原点为圆心的圆有关于原点的中心对称性，一个圆周上所有复数的和恰好为 0，就是说这旋转一周的值之和为 0，即有：

$$\int_0^{2\pi} ce^{\omega it+\psi}\,\mathrm{d}t=0$$

当然，也可以用欧拉公式将$e^{\omega it+\psi}$展开，再分开对正弦和余弦函数积分，同样可以得到这个结果。

2.2 求解

现在，我们假想一个函数可以展开为无数个旋转量的加和，即是：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{kit+\psi_k}$$

为了简化模型，这里就让角速度k都为整数。前面说过，这里$c_k\in R$。

首先，这个ψ_k放在这里就很难看。那么将$e^{kit+\psi_k}$分解为$e^{kit}e^{\psi_k}$，这样e^{ψ_k}就是个常数了，干脆和c_k合并，变成：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ke^{kit}$$

注意到此时$a_k\in C$。于是任务就是求解a_k。

令其为$f(t)$,将右边展开：（为了保留规律效果未进一步化简）

$$f(t)=\cdots+a_{-2}e^{-2it}+a_{-1}e^{-1it}+a_0e^{0it}+a_1e^{1it}+a_2e^{2it}+\cdots$$

以求a_2为例。现给两边都乘上e^{-2it}，以消去a_2这一项的复指数：

$$f(t)e^{-2it}=\cdots+a_{-2}e^{-4it}+a_{-1}e^{-3it}+a_0e^{-2it}+a_1e^{-1it}+a_2+\cdots$$

然后两边同时对 0 到2π积分，应用 2.1 中的小结论，就把右边其它项全部消去为 0：（这里省略了交换积分与加和的合理性证明）

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-2it}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} a_2\mathrm{d}t$$

就是：

$$2\pi a_2 = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-2it}\mathrm{d}t$$

即：

$$a_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-2it}\mathrm{d}t$$

同样，a_k的通式就是：

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-kit}\mathrm{d}t$$

很明显，这里$f(t)$由于是旋转量组成的，其周期也为2π。那么对于一个周期为T的函数$x(t)$，同样也有：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{k(\frac{2\pi}{T})it}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)e^{-k(\frac{2\pi}{T})it}\mathrm{d}t$$

这就是复指数形式的傅里叶级数。

3 实数形式

3.1 尝试

从欧拉公式中想到，既然复指数形式是形如e^{kit}的旋转量构成的，那么实数形式就应该与cos和sin有关。

就先从cos说起。同样，假设一个函数可以展开为：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cos(kt)$$

不过因为余弦函数是偶函数，为了方便，这里把所有角速度为负数的余弦与角速度与其互为相反数的余弦合并：

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt)$$

注意，这里虽然常数依旧表示为a_k，但它的值已经与上个式子中的不同了，因为我们做了合并。

为了求解a_k，从简单出发，令该函数为$f(t)$，可直接展开为$n+1$个余弦之和：

$$f(t) = a_0 \cos(0t) + a_1 \cos(1t) + \cdots + a_n \cos(nt)$$

到这里，可以尝试“采样法”。选取$n+1$个不同的实数，记作$t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$，这样就有一个方程组：

$$\begin{cases} f(t_0) = a_0 \cos(0t_0) + a_1 \cos(1t_0) + \cdots + a_n \cos(nt_0) \\ f(t_1) = a_0 \cos(0t_1) + a_1 \cos(1t_1) + \cdots + a_n \cos(nt_1) \\ \vdots \\ f(t_n) = a_0 \cos(0t_n) + a_1 \cos(1t_n) + \cdots + a_n \cos(nt_n) \end{cases}$$

这就是有$n+1$个方程，求$n+1$个未知数。即：

$$\begin{pmatrix} \cos(0t_0) & \cos(1t_0) & \cdots & \cos(nt_0) \\ \cos(0t_1) & \cos(1t_1) & \cdots & \cos(nt_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(0t_n) & \cos(1t_n) & \cdots & \cos(nt_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{pmatrix}$$

那么设：

$$A = \begin{pmatrix} \cos(0t_0) & \cos(1t_0) & \cdots & \cos(nt_0) \\ \cos(0t_1) & \cos(1t_1) & \cdots & \cos(nt_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(0t_n) & \cos(1t_n) & \cdots & \cos(nt_n) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{pmatrix}$$

就是：

$$AX = B$$

解得：

$$X = A^{-1}B$$

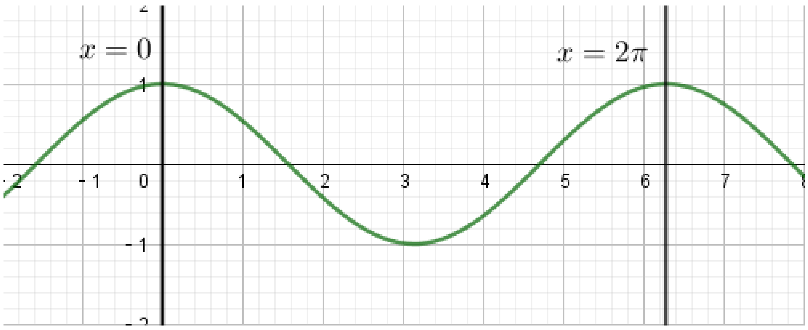
然而，为了精确，n一般会很大，这时求A^{-1}就十分令人窒息了。所以，这个方法可行性不高。

3.2 基础

像$\cos(kt)$ $(k \neq 0)$这样的余弦函数，其最小正周期为：

$$T_0 = \frac{2\pi}{k}$$

以$\cos(t)$这种最简单的形式为例，其有$T_0 = 2\pi$。它的图像：



可以明显观察到$\int_0^{2\pi} \cos(t)\,\mathrm{d}t = 0$，即在$T_0$内积分为 0。那么对于$\cos(kt)$ $(k \neq 0)$也同样成立：

$$\int_0^{T_0} \cos(kt)\,\mathrm{d}t = 0\ (k \neq 0)$$

当然这个规律对于所有的周期T都成立：

$$T = nT_0\ (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

注意到无论T_0为多少，T中一定是有2π的。

现在对这个结论稍作推广。考虑：

$$\int_0^{T'} \cos(k_i t)\cos(k_j t)\,\mathrm{d}t\ \ (k_i, k_j\ \neq 0)$$

其中T'是这两个余弦函数的一个公共周期。

这里需要积化和差：

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

于是：

$$\frac{1}{2}\int_0^{T'} \{\cos[(k_i + k_j)t] + \cos[(k_i - k_j)t]\}\,\mathrm{d}t$$

可以证明，这里能够交换积分和加号：

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{T'} \cos[(k_i + k_j)t]\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{T'} \cos[(k_i - k_j)t]\mathrm{d}t$$

根据之前的结论，这个式子就是：

$$\begin{cases} 0, & |k_i| \neq |k_j| \\ \frac{1}{2}T', & |k_i| = |k_j| \end{cases}$$

毕竟$|k_i| \neq |k_j|$时两项中的一项会变成对$\cos(0)$也就是1这个常数积分。

3.3 求解

令有：

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt)$$

先展开：

$$f(t) = a_0 \cos(0t) + a_1 \cos(1t) + a_2 \cos(2t) \cdots$$

因为$\cos(0) = 1$，进一步化简：

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(t) + a_2 \cos(2t) \cdots$$

那么就先从常数项a_0入手。给两边分别做0到2π的积分，同样这里可以交换积分与加号：

$$\int_{0}^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{2\pi} a_0 \mathrm{d}t + \int_{0}^{2\pi} a_1 \cos(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{2\pi} a_2 \cos(2t)\,\mathrm{d}t + \cdots$$

根据 3.2 中的简单结论，右边其余项就是0：

$$\int_{0}^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 2\pi a_0$$

则：

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t$$

那么对于$a_k(k > 0)$，也基本类似。

以求a_2为例。给两边先乘上$\cos(2t)$：

$$f(t)\cos(2t) = a_0 \cos(2t) + a_1 \cos(t)\cos(2t) + a_2 \cos(2t)\cos(2t) \cdots$$

然后套积分：

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} a_0\cos(2t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} a_1\cos(t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} a_2\cos(2t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t + \cdots$$

首先根据 3.2 简单结论，对a_0项的积分为 0：

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} a_1\cos(t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} a_2\cos(2t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t + \cdots$$

然乎再用 3.2 推广结论，除a_2项的积分也都为 0：

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} a_2\cos(2t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t$$

对a_2项的积分是 3.2 推广结论的第二种情况：

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \pi a_2$$

即：

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t$$

同样，通式就是：

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t\ \ (k > 0)$$

于是余弦展开方法就是：

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\cos(kt)$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t, & k = 0 \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t, & k > 0 \end{cases}$$

不过这个求a_k的分类确实很烦人，所以为了统一，只需对展开式的表达稍作改动：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) \, \mathrm{d}t$$

3.4 整合

既然余弦展开已经基本清楚了，那么正弦展开也同理：

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(kt)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin(kt) \, \mathrm{d}t$$

注意这里不用单独分出b_0是因为$\sin(0) = 0$。不过既然这样，不如直接从$k = 1$开始：

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt)$$

这里，应该发现一个问题：由于余弦函数是偶函数，那么 3.3 中能余弦展开的f也应当是偶函数；同样，这里的g应是奇函数。

我们想要让展开方法普遍适用，所以就干脆把他们加起来就好了：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos[k(\frac{2\pi}{T})t] + b_k \sin[k(\frac{2\pi}{T})t]\}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^{T} x(t) \cos[k\left(\frac{2\pi}{T}\right)t] \, \mathrm{d}t$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^{T} x(t) \sin[k\left(\frac{2\pi}{T}\right)t] \, \mathrm{d}t$$

这里T是x的周期。

以上便是实数形式的傅里叶级数。

4 一点补充

4.1 正交

我们熟悉，若两向量的数量积为0，则称这两个向量正交。

若向量$\boldsymbol{a}\{X_1,Y_1,Z_1\}$与$\boldsymbol{b}\{X_2,Y_2,Z_2\}$正交，容易得出：

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$$

现在我们有两个在$[a,b]$连续的函数f和g，在$[a,b]$中取n个不同的实数，记作x_i且$i=1,2,3,\ldots,n$，则可列：

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)$$

若有：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)=0$$

也可写作：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$$

便可以类比地说，函数f与g在$[a,b]$正交。

4.2 正交函数系

三角函数系是：

$$1,\sin(x)\,,\cos(x)\,,\sin(2x)\,,\cos(2x)\,,\cdots$$

根据 3.2 中观察图像以及利用积化和差的方法，可以发现，三角函数系中任意两个不相同的函数，在$[0,2\pi]$正交。

这样的函数系便叫正交函数系。

同样，复指数形式中使用的：

$$1,e^{ix},e^{2ix},\cdots$$

也是正交函数系。

线性代数中，我们清楚：n维空间中，n个两两都正交且互不相同的n维向量可以线性组合为该空间中的任一向量，这组向量称为一组正交基。

那么根据 4.1，函数可以理解为无穷维向量，而一个三角函数系这类正交函数系又有无穷个函数，则可以类比得到：一个由无数个函数构成的正交函数系，其成员函数可线性组合出在它们正交区间内任一连续的一般函数。

这样，无论是实数还是复数形式的傅里叶级数，理论上可以展开任一连续的周期函数。