

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH  
TECHNOLOGIÍ



**Kvantová a laserová elektronika**  
2020/2021

3. Náhradné laboratórne cvičenie

# Obsah

<b>1</b>	<b>Zadanie</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Riešenie</b>	<b>1</b>
2.1	Prvá úloha . . . . .	1
2.1.1	Fermiho - Diracovo rozdelenie . . . . .	1
2.1.2	Boseho - Einsteinovo rozdelenie . . . . .	1
2.1.3	Planckovo rozdelenie . . . . .	2
2.1.4	Maxwellovo - Boltzmannovo rozdelenie . . . . .	3
2.1.5	Gaussove rozdelenie . . . . .	3
2.2	Druhá úloha . . . . .	4
2.2.1	Poissonovo rozdelenie . . . . .	4
2.2.2	Cauchy-Lorentzovo rozdelenie . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Záver</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Matlab - zdrojový kód</b>	<b>8</b>

# 1 Zadanie

1. Ve vámi vybraném programu (např. Matlab, Excel, ...) vykreslete průběhy a popište využití (např. pro které částice se používá, co nám určuje výsledné rozložení)
  - a. Fermiho – Diracova rozdělení
  - b. Boseova – Einsteinova rozdělení
  - c. Planckova rozdělení
  - d. Maxwelllova – Boltzmannova rozdělení
  - e. Gaussova rozdělení
2. Matematicky popište Poissonovo a Lorenzovo (Cauchy-Lorentzovo) rozdělení a definujte možné využití těchto rozložení v kvantové a laserové elektronice.

Obr. 1: Zadanie náhradnej laboratórnej úlohy

## 2 Riešenie

V tejto sekcii bude vyriešené náhradné laboratórne cvičenie č. 3.

### 2.1 Prvá úloha

V tejto sekcii budú vykreslené a popísané jednotlivé rozdelenia: Fermiho-Diracovo, Boseho-Einsteinovo, Planckovo, Maxwelllovo-Boltzmannové a Gaussové rozdelenie.

#### 2.1.1 Fermiho - Diracovo rozdelenie

Fermiho-Diracovo rozdelenie je štatistické rozdelenie opisujúce systémy zložené z **fermiónov**. Sledovaný systém je reprezentovaný jedným kvantovým stavom. Predpokladá sa ako tepelný, tak difúzny kontakt sledovaného systému so zásobníkom. Fermióny sú častice s antisymetrickou vlnovou funkciou a  $1/2$  spinom. Pre tieto častice platí **Pauliho vylučovací princíp**, čo sa prejavuje obmedzením rozdeľovacej funkcie u nízkych energií (v jednom stave môže byť najviac jeden fermión). Rozdelenie zaviedol Enrico Fermi a Paul Dirac v roku 1926 [2], [6]. Toto rozdelenie je vyjadrené rovnicou 1. Priebeh rozdelenia je možné vidieť na obrázku 2a.

$$f = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k \cdot T}} + 1} \quad (1)$$

Kde  $E$  predstavuje energetickú hladinu,  $\mu$  predstavuje chemický potenciál,  $k$  predstavuje Boltzmannovu konštantu a  $T$  predstavuje teplotu v kelvinoch.

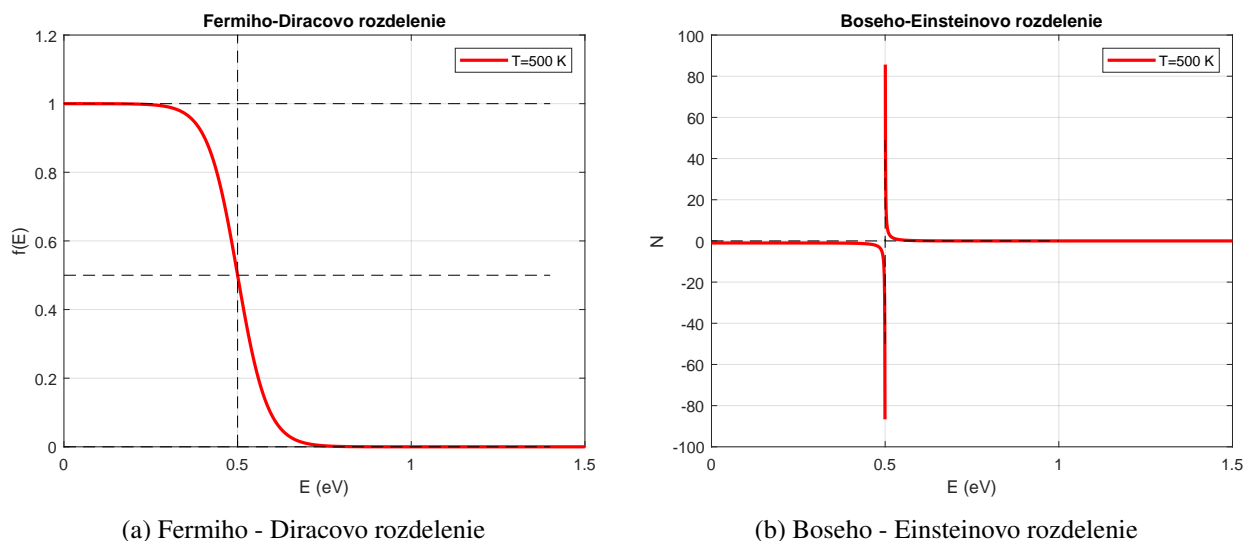
#### 2.1.2 Boseho - Einsteinovo rozdelenie

Boseho - Einsteinovo rozdelenie je štatistika sústavy častíc s celočíselným spinom. Toto štatistické rozdelenie opisuje v štatistickej fyzike systémy zložené z **bozónov**, teda častíc so symetrickou vlnovou funkciou a celočíselným spinom. Sledovaný systém reprezentuje určitá energetická hladina  $E$ . Predpokladá sa tepelný, tak difúzny kontakt sledovaného systému so zásobníkom. Bose-Einsteinove rozdelenie platí napríklad pre **fotóny**, možno z neho teda odvodiť napríklad **Planckov vyžarovací zákon** [2], [4].

Toto rozdelenie je vyjadrené rovnicou 2. Priebeh rozdelenia je možné vidieť na obrázku 2b

$$\langle N \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k \cdot T}} - 1} \quad (2)$$

Kde  $E$  predstavuje energetickú hladinu,  $\mu$  predstavuje chemický potenciál,  $k$  predstavuje Boltzmannovu konštantu a  $T$  predstavuje teplotu v kelvinoch.



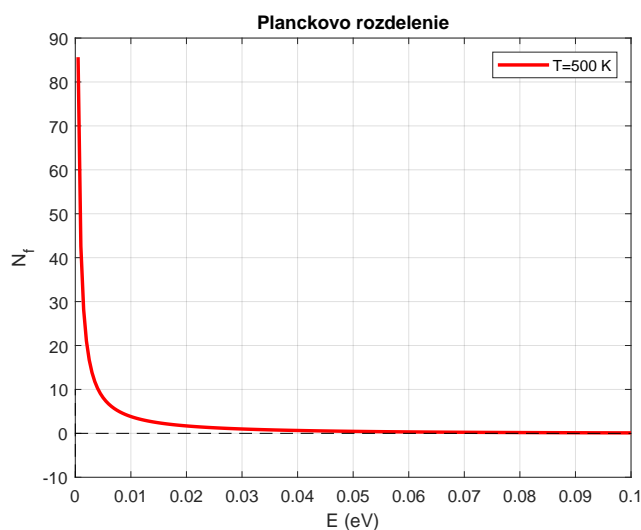
Obr. 2: Fermiho - Diracovo a Boseho - Einsteinovo rozdelenie

### 2.1.3 Planckovo rozdelenie

Jedná sa o určenie závislosti  $\langle N \rangle$  na energii  $E$  v prípade **fotónov**. Sledovaný systém je reprezentovaný módom harmonického oscilátora, ktorý je predstavený frekvenciou fotónu  $\omega$ . Harmonický oscilátor je so zásobníkom v kontakte, ktorý dovoľuje meniť iba vyžarujúcu energiu (chemický potenciál súvisiaci s látkovými časticami je rovný nule  $\mu = 0$ ). Fotóny patria k bosónom, preto sa vychádza z  $B - E$  rozdelenia. Planckovo rozdelenie bolo publikované prvýkrát v roku 1900 [2]. Toto rozdelenie je vyjadrené rovnicou 3. Priebeh rozdelenia je možné vidieť na obrázku 3.

$$\langle N_f \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar \cdot \omega}{k \cdot T}} - 1} \quad (3)$$

Kde:  $\hbar$  predstavuje Planckovu redukovanú konštantu,  $\omega$  predstavuje frekvenciu žiarenia,  $T$  predstavuje teplotu v kelvinoch a  $k$  je Boltzmannova konštanta.



Obr. 3: Planckovo rozdelenie

### 2.1.4 Maxwelllovo - Boltzmannovo rozdelenie

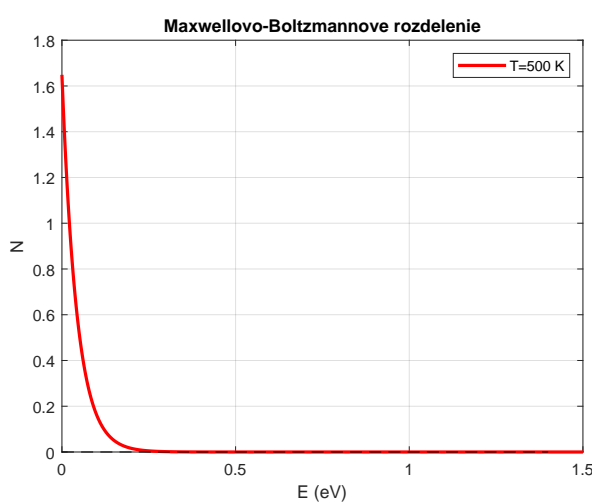
Maxwelllovo-Boltzmanovo rozdelenie popisuje v štatistickej fyzike systémy zložené z **klasických rozlíšiteľných častíc**, teda systémov pri ktorých nie je nutné uvažovať o kvantovaní fázového priestoru a spinovú závislosť štatistiky. Jedná sa o určenie závislosti  $\langle N \rangle$  na energii  $E$  v prípade klasických častíc (napr. ideálneho plynu). Maxwelllovo-Boltzmanovo rozdelenie bolo vypracované v rokoch 1860-1868 [2], [7]. Toto rozdelenie je vyjadrené rovnicou 4, keď sa použijú vyššie odvodené rozdelenia a položia sa podmienke zodpovedajúcej klasickému systému:  $(E - \mu)/k \cdot T \gg 1$  [2]. Priebeh rozdelenia je možné vidieť na obrázku 4.

$$\langle N_f \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k \cdot T}} \pm 1} \approx e^{\frac{\mu-E}{k \cdot T}} \ll 1 \quad (4)$$

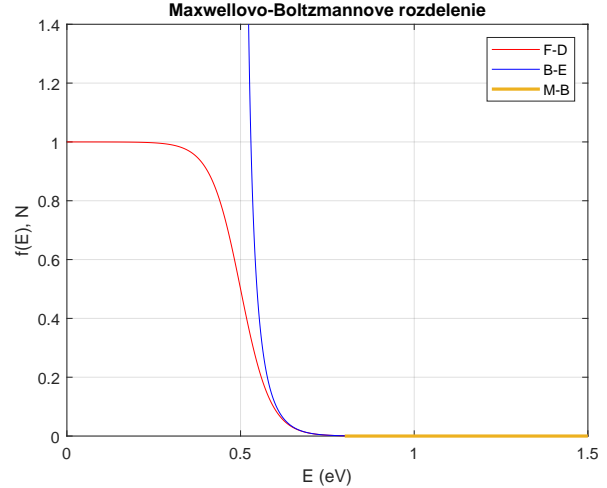
a výraz 5, ktorý bol použitý na vykreslenie obrázka grafu 4a

$$\langle N \rangle = e^{\frac{\mu-E}{k \cdot T}} \quad (5)$$

vyjadruje stredný počet častíc (klasických) na energetickej hladine  $E$ . Opäť platí, že teplota  $T$  a chemický potenciál  $\mu$  sú parametre komplexu a  $k$  je Boltzmannova konštanta.



(a) M-B rozdelenie podľa vzťahu 5



(b) M-B rozdelenie vyjadrené ako splynutie F-D a B-E rozdelenia

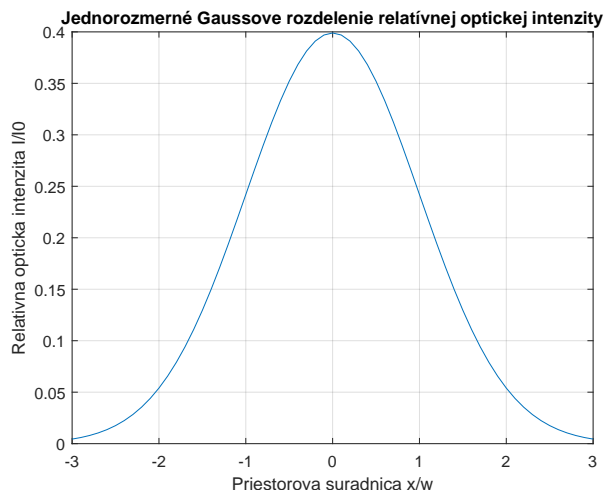
Obr. 4: Maxwelllovo - Boltzmannové rozdelenie

### 2.1.5 Gaussove rozdelenie

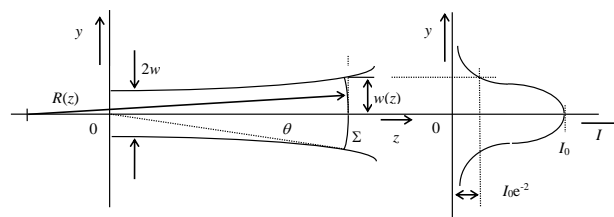
Gaussove rozdelenie (normálne rozdelenie) je jedno z najdôležitejších rozdelení pravdepodobnosti spojitej náhodnej veličiny. Jeho význam spočíva v tom, že za určitých podmienok dobre aproximuje rad iných pravdepodobnostných rozdelení (spojitých aj diskretných) [8]. Priebeh tohto rozdelenia je možné vidieť na obrázku 5a.

Z hľadiska kvantovej a laserovej elektroniky je gaussove rozdelenie využívané pri Gaussových zväzkoch, kde hrajú dôležitú úlohu. Vo väčšine prípadov sa dá vystupujúce žiarenie z laseru popísať práve Gaussovým zväzkom, ktorý je možné vidieť na obrázku 5b. Gaussove rozdelenie je možné vyjadriť pomocou vľahu 6.

$$I(x, y, z) = I_{max}(z) \cdot e^{-2 \cdot \frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}} \quad (6)$$



(a) Gaussove rozdelenie relatívnej optickej intenzity



(b) Profil Gaussovho zväzku ( $I_0$  - intenzita žiarenia v ose zväzku;  $\Sigma$  - vlnoplocha)

Obr. 5: Gaussove rozdelenie a profil Gaussovho zväzku

## 2.2 Druhá úloha

V tejto sekcii bude matematicky popísané Poissonovo 2.2.1 a Lorenzovo (Cauchy-Lorenzovo) 2.2.2 rozdelenie. Budú definované možné využitia týchto rozložení v kvantovej a laserovej elektronike.

### 2.2.1 Poissonovo rozdelenie

V tejto podsekcii boli čerpané informácie najmä zo zdroja [1]. Poissonove rozdelenie skúma výskyt istého typu náhodnej udalosti - touto udalosťou môže byť napr. príchod zákazníka do fronty, príjazd automobilu na parkovisku, prijatie SMS správy, narodenie dieťaťa v istej pôrodnici a podobne. V tejto situácii opakovaného výskytu náhodnej udalosti je možné merať hodnoty dvoch veličín: počet výskytu udalostí za časovú jednotku a dobu medzi dvoma po sebe idúcimi výskytmi udalosti. Prvá z týchto veličín je diskrétného typu a bude patrične rozvedená.

Náhodné udalosti, nemôžu byť úplne ľubovoľné a musia spĺňať nasledujúce predpoklady:

- V jednom okamihu môže nastať najviac jedna udalosť (nemôžu nastať dve udalosti súčasne).
- Udalosti prichádzajú nezávisle na sebe.
- Pravdepodobnosť, že udalosť nastane v intervale  $(t, t + h)$ , závisí na  $h$  (dĺžka intervalu), ale nikdy na  $t$  (umiestnenie intervalu na časovej osi).

Náhodná veličina, ktorá bude udávať počet takýchto udalostí za jednotku času, má Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti.

### Odvedenie pravdepodobnostnej funkcie, strednej hodnoty a rozptylu Poissonovho rozdelenia

Pravdepodobnostnú funkciu Poissonovho rozdelenia je možné odvodiť na základe pravdepodobnosti funkcie *Binomického rozdelenia*. Skúmame náhodnú veličinu  $X$  udávajúcu počet hovorov, ktoré prepojí telefónna ústredňa behom jednej hodiny, pričom vieme, že priemerne prichádza  $\lambda = 20$  hovorov za hodinu. Hovor môže prísť v ktorýkoľvek okamžik. Hodinový interval rozdelíme na jednotlivé úseky po minútach a budeme predpokladať, že v jednom takomto časovom úseku nemôže prísť viac ako jeden hovor a že pravdepodobnosť, že hovor príde, je pre každý úsek rovná  $p$ .

Za uvedených predpokladov má náhodná veličina  $X$  binomické rozdelenie pravdepodobnosti - ak prevádzame

$n = 60$  pokusov (pre každú minútu), v každom tomto pokuse hovor buď príde (čo považujeme za úspech), alebo nepríde. Ak počítame úspechy v týchto 60 pokusoch, potom:

$$X \sim Bi(60, p)$$

Pre  $k$  hovorov za hodinu  $k \in 0, \dots, 60$  platí:

$$P(X = k) = \binom{60}{k} \cdot p^k (1-p)^{60-k} = \frac{60 \dots (60-k+1)}{k!} \cdot p^k (1-p)^{60-k}$$

Stredná hodnota náhodnej veličiny  $X$  je potom:

$$EX = np = 60p$$

Zároveň vieme, že priemerne prichádza  $\lambda = 20$  hovorov. Stredná hodnota je očakávaný priemer, takže  $60p = 20$  a  $p = 1/3$ .

Teraz delenie intervalu zjemníme na sekundové úseky a podobne ako predtým budeme predpokladať, že hovory môžu prichádzať iba v týchto oddelených úsekoch, v každom najviac jeden. Ďalej budeme požadovať, aby stredná hodnota  $EX = \lambda = 20$  zostala zachovaná. V tomto prípade by náhodná veličina  $X$  mala binomické rozdelenie s parametrami  $n = 3600$  (počet sekúnd v hodine) a  $p = \lambda/n = 1/180$  (aby  $np$  bolo stále  $\lambda = 20$ ). Ak budeme ďalej zjemňovať tj.  $n \rightarrow \infty$ , pričom  $p = \lambda/n$  (aby stredná hodnota zostávala stále rovnaká), budeme sa približovať k **ideálnemu stavu**, keď hovor môže prísť v ktorýkoľvek okamih. Potom bude pre pevne zvolené  $k$  platiť:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Zlomky preskupíme:

$$P(X = k) = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Teraz prevedieme limitný prechod pre  $n \rightarrow \infty$ . Limita každého z prvých  $k$  zlomkov je rovná 1 a rovnako tak  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ , pretože výraz vo vnútri zátvorky sa blíži k 1 a  $k$  je pevné číslo. Limita z  $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$  je však typu  $1^\infty$ . Avšak vieme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c,$$

takže dohromady máme  $P(X = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$  a pravdepodobnostná funkcia Poissonovho rozdelení potom bude:

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Stredná hodnota náhodnej veličiny s Poissonovým rozdelením pravdepodobnosti je

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} kp(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 0 \cdot e^{-\lambda} + 1 \cdot \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + 3 \cdot \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} + \dots = \\ &= \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{1!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^3}{2!} e^{-\lambda} + \dots = \lambda e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots\right) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

Rozptyl je možné vypočítať ako:

$$DX = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(k) - (EX)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2$$

Sumu z  $k^2 p(k)$  vypočítame zvlášť. Použijeme k tomu trik:  $k^2$  rozpíšeme ako  $k(k-1) + k$  a sumu potom rozdelíme na dve.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} (k(k-1) + k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Druhou sumou už sme určili pri výpočte  $EX$ : je rovná  $\lambda$ . Ostáva nám už len vypočítať prvú sumu. Jej členy pre  $k=0$  a  $k=1$  sú oba nulové, takže ostane nám

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} &= e^{-\lambda} \left( 2 \cdot 1 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{\lambda^3}{3!} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{\lambda^4}{4!} + \dots \right) = \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots \right) = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 \end{aligned}$$

Celkom teda

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda$$

a rozptyl je

$$DX = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Toto je celkom výnimočný fakt - Poissonove rozdelenie je na rozdiel od väčšiny iných také, že jeho **stredná hodnota** je rovnaká ako jeho **rozptyl**.

Základné údaje o Poissonovom rozdelení je možné zhrnúť nasledovne:

Náhodná veličina  $X$ , ktorá udáva počet udalostí za jednotku času, keď vieme, že priemerne nastane  $\lambda$  udalostí za jednotku času, má Poissonove rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom  $\lambda$ , píšeme

$$X \sim Po(\lambda).$$

Jej pravdepodobnostná funkcia potom je

$$p(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Stredná hodnota a rozptyl Poissonovho rozdelenia je

$$EX = \lambda, \quad DX = \lambda$$

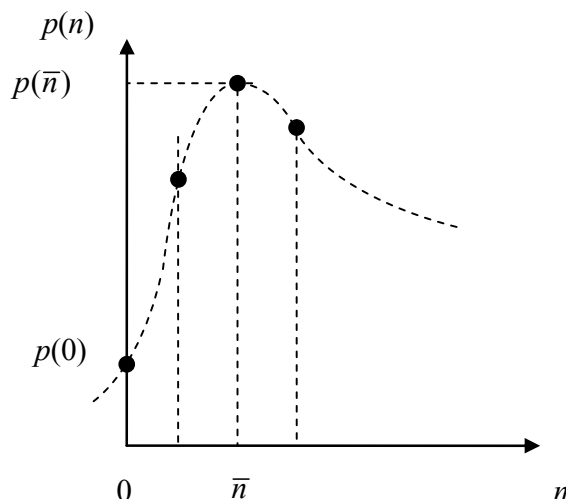
### Využitie Poissonovho rozdelenia v kvantovej a laserovej elektronike

Poissonove rozdelenie je možné využiť pri fotodetekcii fotónového toku so stredným počtom fotónov  $\bar{n}$ , ako je možné vidieť v rovnici 8.

$$p(n) = \frac{(\bar{n})^n \exp(-\bar{n})}{n!} \quad (8)$$

kde  $p(n)$  je pravdepodobnosť detekcie  $n$  nezávislých fotónov vo fotónovom toku, so stredným počtom fotónov  $\bar{n}$  [2]. Graficky je Poissonove rozdelenie znázornené na obrázku 6.





Obr. 6: Grafické znázornenie Poissonovho rozdelenia, obrázok je prevzaný zo zdroja: [2]

Pomocou Poissonovho rozdelenia je potom možné vyjadriť stredný počet fotónov  $\bar{n}$  vzťahom 9.

$$\bar{n} = \sum_n np(n) \quad (9)$$

### 2.2.2 Cauchy-Lorentzovo rozdelenie

Cauchyho rozdelenie, nazývané tiež Cauchyho-Lorentzovo rozdelenie je jedným zo spojitých pravdepodobnostných rozdelení. Má význam vo fyzike, pretože je riešením diferenciálnej rovnice, ktorá popisuje silu rezonácie. V spektroskopii popisuje rozloženie spektrálnych čiar [5].

Náhodná premenná  $X$  má cauchyho rozdelenie s parametrami  $\theta, \lambda$ , ak jej funkcia hustoty má tvar:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda \left[1 + \left(\frac{x-\theta}{\lambda}\right)^2\right]} , pre x \in \mathbb{R} \quad (10)$$

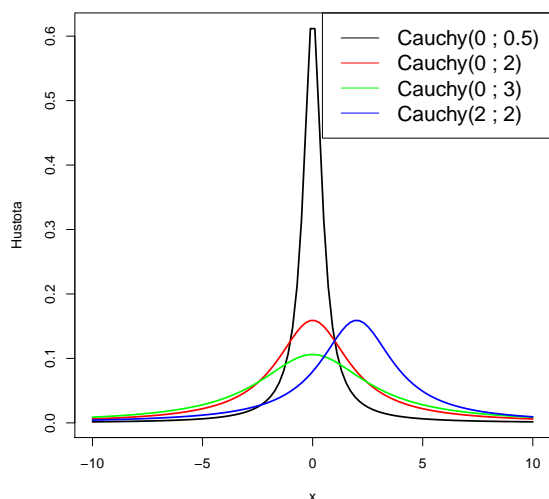
Kde parameter  $\theta$  je parametrom umiestnenia najväčšej hodnoty rozdelenia a parameter  $\lambda$  je parameter škály (určuje rozsah). Zapisuje sa  $X \sim Cauchy(\theta, \lambda)$ . Štandardným cauchyho rozdelením sa rozumie rozdelenie s parametrami  $Cauchy(0, 1)$  a je to prípad studentovho t-rozdelenia s jedným stupňom voľnosti  $t(1)$ . Funkcia hustoty v tomto prípade má tvar:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} , pre x \in \mathbb{R} \quad (11)$$

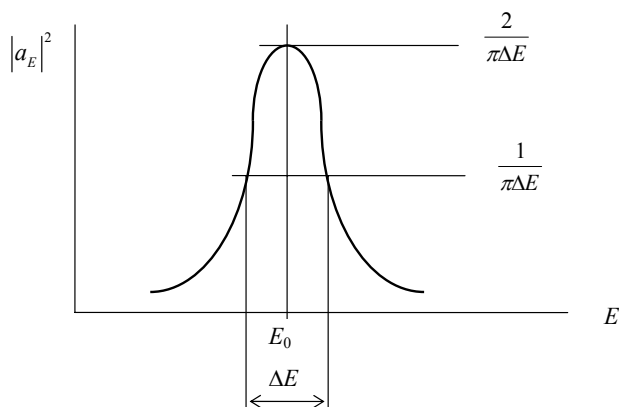
Náhodná premenná  $X$  s Cauchyho rozdelením  $Cauchy(\theta, \lambda)$  nemá konečné momenty čiže stredná hodnota ani disperzia nie sú definované a rovnako nie sú definované ani šikmosť a špicatosť [3].

### Využitie Cauchyho-Lorentzovho rozdelenia v kvantovej a laserovej elektronike

Cauchyho rozdelenie sa využíva pri optickom žiarení, keď popisuje šírku spektrálnej čiary laseru, ktorá má lorentzovský charakter. Rovnako sa používa pri energetickom rozložení  $|a_E|^2$  [2]. Prepokladajme, že energetické rozloženie má Lorentzov charakter, ktorý je možné vidieť na obrázku 7b.



(a) Cauchyho rozdelenie, obrázok je prevzatý zo zdroja [3]



(b) Cauchyho rozdelenie, obrázok je prevzatý zo zdroja [2]

Obr. 7: Cauchy-Lorentzovo rozdelenie

### 3 Záver

Témou tejto laboratórnej úlohy bola aplikácia štatistickej termodynamiky v kvantovej a laserovej elektronike. V úlohe 2.1 bolo vykreslené a popísané Fermiho-Diracovo (pre fermióny), Boseho-Einsteinovo (pre bozóny), Planckovo (pre fotóny), Maxwelllovo-Boltzmannové (pre klasické častice) a Gaussové rozdelenie. V druhej úlohe 2.2 bolo matematicky popísané Poissonovo 2.2.1 a Lorentzovo rozdelenie 2.2.2 a následne bolo popísané ich využitie v kvantovej a laserovej elektronike.

### 4 Matlab - zdrojový kód

```

1 % Zadanie: Nahradna uloha c.3 | aplikacia statistickej termodynamiky v
2 % kvantovej a laserovej elektronike
3 % Autor: Alex Sporni VUT FEKT | MPC-TIT
4 % Datum: 5.11.2020
5
6 clear all; %vymaze vsetky premenne
7 close all; %zavrie vsetky okna
8 clc; %vymaze prikazove okno
9
10 %Konstanty%
11 k_J = 1.38*10^-23;
12 e = 1.602*10^-19;
13 k = k_J / e; % in eV/K
14 u = 0.5; % Fermi level in eV
15 %E = -0.2:0.0005:1.4; % Energy levels
16 E = 0:0.0005:1.5;
17 T = 500; % in K
18
19 %-----> 1 <-----%
20 disp(' <-----Príklad#1-----> ')

```

```

21
22 f_1 = 1 ./ (1 + exp( (E-u)/(k*T) ));
23
24 figure(1);
25 set(gcf,'color','w')
26 plot(E,f_1,'r','LineWidth',2)
27 grid on; hold on
28 plot([u u],[0 1.2],'—k',[0 1.4],[0.5 0.5],'—k',[0 1.4],[1 1],'—k',[0
    1.4],[0 0],'—k')
29 legend('T=500 K','Location','NorthEast')
30 xlabel('E (eV)'); ylabel('f(E)');
31 title('Fermiho-Diracovo rozdelenie')
32
33 %-----> 2 <-----%
34 disp('<-----Priklad#2----->')
35 f_2 = 1 ./ ((exp ((E-u)/(k*T))) -1 );
36
37 figure(2);
38 set(gcf,'color','w')
39 plot(E,f_2,'r','LineWidth',2)
40 grid on; hold on
41 plot([u u],[0 1],'—k',[0.5 0.5],[-50 50],'—k',[0 1],[0 0],'—k')
42 legend('T=500 K','Location','NorthEast')
43 xlabel('E (eV)'); ylabel('N');
44 title('Boseho-Einsteinovo rozdelenie')
45
46 %-----> 3 <-----%
47 disp('<-----Priklad#3----->')
48 E = 0:0.0005:0.1;
49 f_3 = 1 ./ (exp(E/(k*T)) -1 );
50
51 figure(3);
52 set(gcf,'color','w')
53 plot(E,f_3,'r','LineWidth',2)
54 grid on; hold on
55 plot([0 0.1],[0 0],'—k',[0 0],[-10 10],'—k')
56 legend('T=500 K','Location','NorthEast')
57 xlabel('E (eV)'); ylabel('N_f');
58 title('Planckovo rozdelenie')
59
60 %-----> 4 <-----%
61 disp('<-----Priklad#4----->')
62 E = 0:0.0005:1.5;
63 f_4 = exp(u-E/(k*T));
64
65 figure(4);
66 set(gcf,'color','w')
67 plot(E,f_4,'r','LineWidth',2)
68 grid on; hold on
69 plot([0 1.4],[0 0],'—k')

```

```

70 legend('T=500 K', 'Location','NorthEast')
71 xlabel('E (eV)'); ylabel('N');
72 title('Maxwellovo-Boltzmannove rozdelenie')
73
74 %-----> 5 <-----%
75 disp('<-----Priklad#5----->')
76
77
78 figure(5);
79 set(gcf,'color','w')
80 plot(E,f_1,'r',E,f_2,'b')
81 hold on
82 E = E(1601:end);
83 f_4 = f_4(1601:end);
84 plot(E,f_4,'LineWidth',2)
85 grid on
86 legend('F-D', 'B-E', 'M-B')
87 axis([0 1.5 0 1.4])
88 xlabel('E (eV)'); ylabel('f(E), N');
89 title('Maxwellovo-Boltzmannove rozdelenie')
90
91 %-----> 6 <-----%
92 disp('<-----Priklad#6----->')
93 x = [-3:.1:3];
94 y = normpdf(x,0,1);
95
96 figure(6)
97 set(gcf,'color','w')
98 plot(x,y);
99 grid on
100 xlabel('Priestorova suradnica x/w'); ylabel('Relativna opticka intenzita
      I/I0');
101 title('Jednorozmerne Gaussove rozdelenie relativnej optickej intenzity')

```

## Použitá literatura

- [1] Břetislav, F.; Irena, H.; Michal, N.; aj.: Numerická matematika a pravděpodobnost. [online], 2020. Dostupné z: [http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/texty/INM/CZ/INM\\_plna\\_verze\\_CZ.pdf](http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/texty/INM/CZ/INM_plna_verze_CZ.pdf)
- [2] Otakar, W.: *KVANTOVÁ A LASEROVÁ ELEKTRONIKA*. Vysoké učení technické v Brně Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií Ústav radioelektroniky Purkyňova 118, 612 00 Brno: Litera BRNO, Tábor 43a, 612 00 Brno, první vydání, 2012, ISBN 978-80-214-4493-5, 141 s.
- [3] Pojzl, V.: *Rozdelenia s ťažkými chvostami vo financiách*. Diplomová práce, Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Bratislava, 2013, vedúci práce Mgr. Darina GRACZOVÁ.
- [4] Wikipédia: Boseho-Einsteinovo rozdelenie. [online], 2020. Dostupné z: [https://sk.wikipedia.org/wiki/Boseho-Einsteinovo\\_rozdelenie](https://sk.wikipedia.org/wiki/Boseho-Einsteinovo_rozdelenie)
- [5] Wikipédia: Cauchy distribution. [online], 2020. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy\\_distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_distribution)
- [6] Wikipédia: Fermiho-Diracovo rozdelenie. [online], 2020. Dostupné z: [https://sk.wikipedia.org/wiki/Fermiho-Diracovo\\_rozdelenie](https://sk.wikipedia.org/wiki/Fermiho-Diracovo_rozdelenie)
- [7] Wikipédia: Maxwellovo-Boltzmanovo rozdelenie. [online], 2020. Dostupné z: [https://sk.wikipedia.org/wiki/Maxwellovo-Boltzmanovo\\_rozdelenie](https://sk.wikipedia.org/wiki/Maxwellovo-Boltzmanovo_rozdelenie)
- [8] Wikipédia: Normal distribution. [online], 2020. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Normal\\_distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution)