12. 11. 2018

Významné diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti

Pr -> Päťkrát hodíme kockou, náhodná veličina X udáva koľkokrát padla $\boxed{6}$.

Binomické rozdelenie

-> n-krát nezávisle opakujeme pokus, u ktorého úspech nastáva s pravdepodobnosťou p. Náhodná veličina X udáva, koľko krát v týchto n pokusoch nastal úspech, má binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami n a p, píšeme $X \sim Bi(n,p)$

Pravdepodobnostná funkcia:

$$\boxed{p(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n}$$

Stredná hodnota a rozptyl pri binomickom rozdelení:

Jestliže $X \sim Bi(n,p)$, pak

$$\boxed{EX = n \cdot p}$$

$$\boxed{DX = n \cdot p \cdot (1-p)}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Pr -> z prednášky

-> máme 10 kociek

a) Aká je pravdepodobnosť že práve 2x padne $\boxed{6}$.

b) Aká je pravdepodobnosť že ~~najviac~~ najviac 2x padne $\boxed{6}$

X = počet $\boxed{6}$ $\quad X \sim Bi(10, \frac{1}{6}) \leftarrow$ Binomické rozdelenie

$$p(k) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

a)

$$p(2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 0{,}2907$$

b)

$$p(0) + p(1) + p(2) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 =$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 0{,}77522$$

Poissonovo rozdelenie

-> skúma udalosti, ktoré prichádzajú v čase pričom platí:

↳ v jednom okamihu môže nastať najviac jedna udalosť

↳ udalosti prichádzajú nezávisle na sebe

↳ pravdepodobnosť, že udalosť nastane v intervale $(t, t+h)$, závisí na $\underline{h}$ a nie ~~na~~ na t.

Definícia:

Náhodná veličina X, ktorá udáva počet udalostí za jednotku času, keď vieme že priemerne nastáva λ udalostí za jednotku času, má Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom λ, píšeme $\boxed{X \sim Po(\lambda)}$

Pravdepodobnostná funkcia:

$$\boxed{p(k) = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2 \dots}$$

Stredná hodnota a rozptyl Poissonovho rozdelenia je

$\boxed{EX = \lambda}$, $\boxed{DX = \lambda}$

Poissonove rozdelenie popisuje počty „udalostí" v iných ako časových jednotkách, napr. v jednotkách dĺžky, objemu a pod. Používa sa v tzv. teórii front.

Poissonovým rozdelením sa dá aproximovať binomické rozdelenie v prípade, že n je veľké a p je blízko 0.

Pr -> z prednášky

-> máme nemocnicu ... v priemere 1h ... 2 prípady

a) Aká je prav., že za $\boxed{\text{1 hodinu}}$ žiadny prípad

b) Aká je prav. že za $\boxed{\text{2 hodiny}}$ budú 2 prípady

c) Aká je prav., že za $\boxed{\text{10 min}}$ budú 2 prípady

2 príp ... 1h

x ... 1h

x = 2

2 ... 1h

2 ... 1

2 ... 1

x ... $\frac{1}{6} \to \frac{1}{3}$

---

a) $X \sim Po(2)$, $p(k) = \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-2} = \underline{\underline{e^{-2}}} \to p(0)$

b) $X \sim Po(4)$, $p(k) = \frac{4^k}{k!} \cdot e^{-4} = \frac{4^2}{2!} e^{-8} = \underline{\underline{8e^{-4}}}$

c) $X \sim Po(\frac{1}{3})$, $p(k) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{1}{3}}$, $p(2) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2!} \cdot e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{18} \cdot e^{-\frac{1}{3}}$