2. Gaussova eliminačná metóda: sústavu pomocou elementárnych úprav (+ - * /) prevedieme na trojuholníkový tvar, z ktorého sa riešenie ľahko spočíta pomocou tzv. spätného chodu

Pr

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 5 \\ -3x + 5y + 2z &= -4 \\ x + 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 1\cdot\frac{3}{2} \quad 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0{,}5 & 3{,}5 & 3{,}5 \\ 0 & 3{,}5 & -1{,}5 & -1{,}5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0{,}5 & 3{,}5 & 3{,}5 \\ 0 & 3{,}5 & -1{,}5 & -1{,}5 \end{array}\right) 1\cdot\left(-\frac{3{,}5}{0{,}5}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0{,}5 & 3{,}5 & 3{,}5 \\ 0 & 0 & -26 & -26 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 5 && \rightarrow \underline{\underline{x = 2}} \\ 0{,}5y + 3{,}5z &= 3{,}5 && \rightarrow \underline{\underline{y = 0}} \\ -26z &= -26 && \Rightarrow \underline{\underline{z = 1}} \end{aligned}$$

nevýhody: výpočet je časovo náročný

Iteračné metódy: - Jacobiho metóda
- Gauss-Seidelova metóda

1. Jacobiho metóda: z 1. rovnice vyjadríme 1. neznámu, z 2. rovnice 2. neznámu atď... zvolíme počiatočnú aproximáciu riešenia $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)})^T$ dosadíme - vypočítame $x^{(1)}$ a opäť dosadíme atď...

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3 - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}\right)$$

Pokračujeme pokiaľ neplatí: $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$ pre všetky $i = 1, \dots, n$.

Konvergencia a divergencia metódy: → riešenie pomocou Jacobiho metódy nemusíme vždy nájsť

Keď pomocou aproximácie sa blížime k riešeniu tak potom metóda konverguje
Keď riešenie nenájdeme tak metóda diverguje

Podmienky konvergencie pre Jacobiho metódu:

1. Diagonálne dominantná matica

Matica A sa nazýva riadkovo ostro diagonálne dominantná keď je v každom riadku absolútna hodnota prvku na diagonále väčšia, než súčet absolut. hodnôt všetkých ostatných prvkov v danom riadku alebo:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad \text{pre } i = 1, \dots, n.$$

Podobne definujeme stĺpcovo ostro diagonálne dominantnú maticu

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| \quad \text{pre } j = 1, \dots, n.$$

je-li matica A ostro riadkovo alebo stĺpcovo diagonálne dominantná potom Jacobiho metóda konverguje pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $X^{(0)}$.
Jestliže matica nie je diagonálne dominantná, Jacobiho metóda konvergovať môže ale nemusí.

Pr (Gauss-Seidelova metóda = počítame podobne ako u Jacobiho metódy)

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\ -x_1 + 20x_2 + x_3 &= 42 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 &= 33 \end{aligned}$$

Riešenie: z prvej rovnice si vyjadríme prvú neznámu, z druhej druhú neznámu a z tretej rovnice poslednú neznámu

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}1(-x_2 + x_3 + 9) \\ x_2 &= 0{,}05(x_1 - x_3 + 42) \\ x_3 &= 0{,}1\cdot(-x_1 - x_2 + 33) \end{aligned}$$

Zvolíme počiat. aproximáciu $x^{(0)} = (0{,}9; 2{,}1; 3{,}3)$ a dosadíme do predošlých vzťahov pre naše neznáme

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0{,}1(-2{,}1 + 3{,}3 + 9) = 1{,}02 \\ x_2^{(1)} &= 0{,}05(0{,}9 - 3{,}3 + 42) = 1{,}98 \\ x_3^{(1)} &= 0{,}1(-0{,}9 - 2{,}1 + 33) = 3{,}00 \end{aligned}$$

Dostali sme ďalšiu aproximáciu, ktorú opäť dosadíme do sústavy rovníc (1)

$x_1^{(2)} = 0,1 \cdot (-1,98 + 3,00 + 9) = 1,002$

$x_2^{(2)} = 0,05\,(1,02 - 3,00 + 42) = 2,001$

$x_3^{(2)} = 0,1 \cdot (-1,02 - 1,98 + 33) = 3,000$

Zostavíme si tabuľku

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0,9	2,1	3,3
1	1,02	1,98	3,00
2	1,002	2,001	3,000
3	0,9999	2,0001	2,9997
4	0,99996	2,00001	3,00000

Sledujeme rozdiel u každej v dvoch po sebe idúcich aproximáciách, metódu ukončíme, keď je rozdiel v absolútnej hodnote (u každej neznámej) menší než požadovaná presnosť.

Gauss-Seidelova metóda: počítame podobne ako u Jacobiho metódy ale v každom kroku použijeme najnovšie hodnoty → veľké sústavy rovníc

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x - \dots - a_{3n}x_n^{(k)}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right)$$

Podmienky konvergencie pre Gauss-Seidelovu metódu:

Pozitívne definitná matica:

Symetrická matica A sa nazýva pozitívne definitná jestliže pre každý nenulový stĺpcový vektor $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ platí

$$x^T A x > 0$$

Jestliže ľubovoľnú regulárnu maticu A vynásobíme maticou k nej transponovanou, dostaneme maticu, ktorá je symetrická a pozitívne definitná

- Ak je matica A ostro riadkovo alebo stĺpcovo diagonálne dominantná, tak Gauss-Seidelova metóda konverguje pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $X^{(0)}$
- Ak je matica A symetrická pozitívne definitná potom Gauss-Seidelova metóda konverguje pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $X^{(0)}$
- Ak matica nemá žiadnu z uvedených vlastností, Gauss-Seidelova metóda konvergovať môže ale nemusí.

Ako zaručiť konvergenciu Gauss-Seidelovej metódy

Vynásobíme pôvodnú sústavu $Ax = b$

maticou k A transponovanou $A^T \cdot Ax = A^T b$

dostaneme sústavu s pozitívne definitnou maticou, pre ktorú je konvergencia zaručená

Pr.

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\ -x_1 + 20x_2 + x_3 &= 42 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 &= 33 \end{aligned}$$

Riešenie:

Začneme s počiatočnou aproximáciou riešenia $X^{(0)} = (0,9;\ 2,1;\ 3,3)$. Pri výpočte $x_1^{(1)}$ pracujeme s počiatočnou aproximáciou, pri výpočte $x_2^{(1)}$ už využívame hodnotu $x_1^{(1)}$ a pri výpočte $x_3^{(1)}$ využijeme aj hodnotu $x_2^{(1)}$.

$x_1^{(1)} = 0,1\,(-x_2^{(0)} + x_3^{(0)} + 9) = 0,1 \cdot (-2,1 + 3,3 + 9) = 1,02$

$x_2^{(1)} = 0,05 \cdot (x_1^{(1)} - x_3^{(0)} + 42) = 0,05 \cdot (1,02 - 3,3 + 42) = 1,986$

$x_3^{(1)} = 0,1 \cdot (-x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 33) = 0,1(-1,986 + 33) = 2,9994$

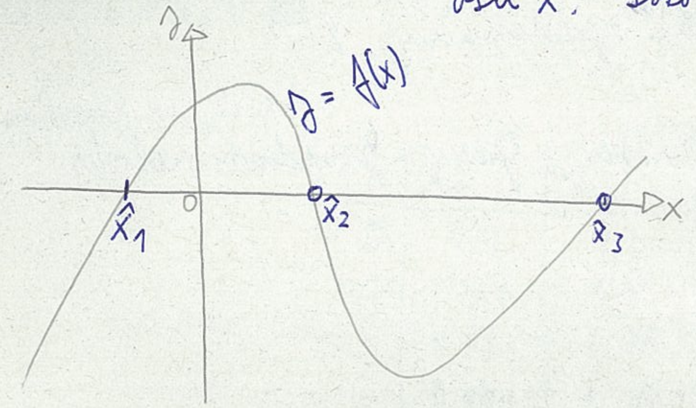
Tabuľka výsledkov do štvrtého rádu

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0,9	2,1	3,3
1	1,02	1,986	2,9994
2	1,00134	2,000 097	2,999
3	⋮	⋮	
4			

24.9.2018

Numerické riešenie nelin. rovníc

Hľadáme riešenie rovnice: $f(x) = 0$, alebo body $\hat{x}$, kde graf funkcie f pretína os x. Toto riešenie tiež nazývame koreň funkcie f



Podmienka zaručujúca existenciu koreňa v intervale:

- ak je f funkcia a je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ a funkčné hodnoty v bodoch a, b majú opač. znamienka, potom v intervale $\langle a, b \rangle$ leží aspoň jeden koreň! rovnice $f(x) = 0$

-> predpoklad spojitosti funkcie f je podstatný

-> koreňov môže byť v intervale $\langle a, b \rangle$ aj viac

- ak $f(a)$ a $f(b)$ nemajú opačné znamienka, existencia koreňov v intervale $\langle a, b \rangle$ ešte nie je vylúčená

1. metóda púlení intervalov (bisekcia):

-> máme interval s koreňom, $\langle a, b \rangle$, znamienka $f(a)$ a $f(b)$ sú opačné

-> interval rozpolíme, jeho stred je: $\boxed{s = \frac{a+b}{2}}$ $\boxed{x_k = \frac{a_k + b_k}{2}}$

-> ak $f(a)$ a $f(s)$ majú opačné znamienka, pokračujeme s intervalom $\langle a, s \rangle$.

-> ak majú opač. znamienka $f(s)$ a $f(b)$, pokračujeme s intervalom $\langle s, b \rangle$

-> tento interval postupne zužujeme, pokiaľ jeho dĺžka nie je menšia než predom daná presnosť

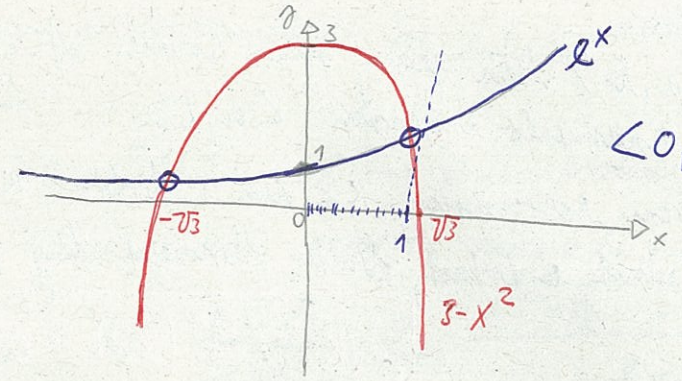
-> približná hodnota koreňa $\hat{x}$ je stred posledného intervalu

-> metóda je spoľahlivá, vždy konverguje (nájde koreň), ale je veľmi pomalá

Pr. pomocou metódy púlení intervalu nájdete koreň rovnice.

$e^x + x^2 - 3 = 0$

$e^x = 3 - x^2 \Rightarrow \begin{matrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{matrix}$



$\langle 0, \sqrt{3} \rangle$

$f(1) = e + 1 - 3$
$= e - 2 > 0$

$f(0) = 1 - 3 < 0$

k	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(x_k)$
0	0	1	0,5	−	+	−
1	0,5	1	0,75	−	+	−
2	0,75	1	0,875	−	+	+
3	0,75	0,875	0,8125	−	+	−
⋮						
6	0,828125	0,84375	0,8359375			

Výpočet ukončíme lebo $b_6 - a_6 < 2 \cdot 0{,}01$, riešenie rovnice $e^x + x^2 - 3 = 0$ s presnosťou 0,01 je $x_6 \doteq 0{,}84$

2. Newtonova metóda (metóda dotyčníc):

- pracuje sa s dotyčnicami ku grafu funkcie f, predpokladáme že funkcia f má na interval deriváciu.

-> zvolíme x_0

-> ďalšiu aproximáciu počítame ako

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2$$

-> skončíme, až je $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, približná hodnota koreňa $\hat{x}$ je x_{k+1}

-> podmienka $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ nezaručuje, že $|x_{k+1} - \hat{x}| < \varepsilon$

-> metóda môže divergovať (postupná aproximácia sa neustáli alebo môže nájsť iný koreň

-> ak metóda konverguje, je často veľmi rýchla

Ako zvoliť x_0, aby bola zaručená konvergencia Newtonovej metódy

Fourierova podmienka:

Nech v intervale $\langle a, b\rangle$ leží jediný koreň rovnice $f(x) = 0$ a nech $f'(x)$ a $f''(x)$ sú spojité a nemenia znamienko intervalu $\langle a, b\rangle$.

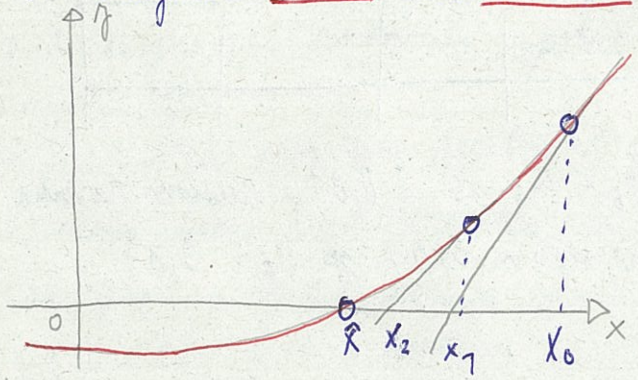
Zvolíme-li za počiatočnú aproximáciu x_0 ten z bodov a, b v ktorom je rovnaké znamienko funkčnej hodnoty a hodnoty druhej derivácie t.j. v ktorom platí:

$$\boxed{f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0}$$

Newtonova metóda bude konvergovať.

-> predpoklad stálosti znamienok f' a f'' na intervale $\langle a, b\rangle$ je podstatný

-> jestliže v bode x_0 Fourierova podmienka splnená nie je, Newtonova metóda konvergovať môže ale nemusí.



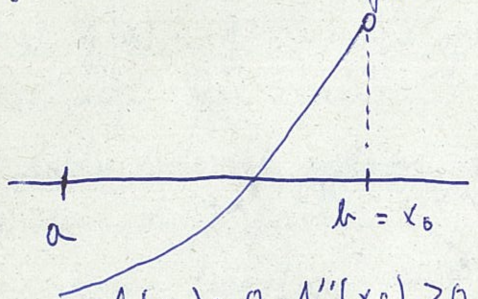
$$t: y - f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

$$0 - f(x_k) = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

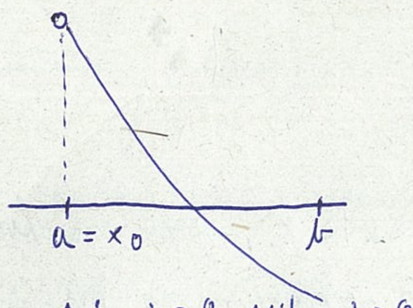
$$x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Pr. $f(x) = e^x + x^2 - 3$

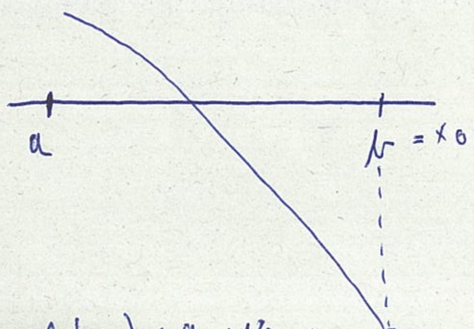
$f'(x) = e^x + 2x$ $\quad f''(x) = e^x + 2$



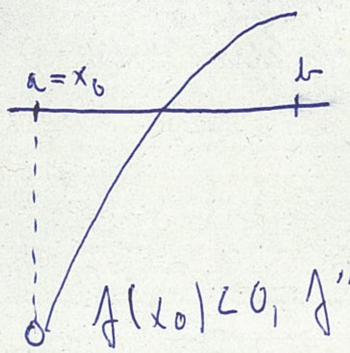
$f(x_0) > 0,\ f''(x_0) > 0$



$f(x_0) > 0,\ f''(x_0) > 0$



$f(x_0) < 0,\ f''(x_0) < 0$



$f(x_0) < 0,\ f''(x_0) < 0$

Na celom intervale $\langle -2, -1\rangle$ je $f'(x) < 0$ a $f''(x) > 0$ (1. derivácia $\neq 0$, 2. der. nemení znam.)

Teraz z intervalu I vyberieme počiatočnú aproximáciu x_0 tak, aby bola splnená podmienka.

pretože $f(-2) = e^{-2} + 1 > 0$ a $f(-1) = e^{-1} - 2 < 0$, zvolíme $x_0 = -2$

Ďalšiu aproximáciu riešenia budeme počítať pomocou iteračného vzťahu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{x_k} + x_k^2 - 3}{e^{x_k} + 2x_k}$$

Dostaneme:

$x_0 = -2$
$x_1 = -1{,}70623$
$x_2 = -1{,}67752$
$x_3 = -1{,}67723$

3. metóda prostej iterácie:

-> rovnicu upravíme na tvar $x = g(x)$

-> zvolíme x_0

-> ďalšiu aproximáciu počítame ako

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, 2$$

-> skončíme ak je $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, približná hodnota koreňa $\hat{x}$ je x_{k+1}

-> podmienka $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ nezaručuje, že $|x_{k+1} - \hat{x}| < \varepsilon$

-> metóda môže divergovať alebo môže nájsť iný koreň.

-> konvergencia alebo divergencia závisí na tvare funkcie g

Podmienka konvergencie metódy prostej iterácie:

-> nech funkcia g zobrazuje interval $\langle a, b\rangle$ do seba, t.j.

$$g(x) \in \langle a, b\rangle \text{ pre } x \in \langle a, b\rangle$$

-> a nech g má na tomto intervale deriváciu pre ktorú platí

$$\max_{x \in \langle a, b\rangle} |g'(x)| < 1$$

-> potom v intervale $\langle a, b\rangle$ existuje riešenie rovnice $x = g(x)$ a postupnosť postupných aproximácií získaná predpisom $x_{k+1} = g(x_k)$ k nemu konverguje pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $x_0 \in \langle a, b\rangle$