→ Je-li $|g'(x)| > 1$ v okolí koreňa potom metóda prostej iterácie diverguje (alebo nájde koreň, ktorý nebolí v $\langle a, b \rangle$)

Numerické riešenie sústavy nelineárnych rovníc

Všeobecný tvar sústavy n rovníc s neznámymi $x_1, \dots, x_n$ je

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, \dots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_n(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Pre dve rovnice môžeme neznáme označiť napr. x, y sústava je potom

$$f_1(x, y) = 0$$
$$f_2(x, y) = 0$$

geometrický význam pre dve rovnice: Hľadáme priesečník dvoch kriviek v rovine

Metóda prostej iterácie pre sústavu:

Postup pre 2 rovnice (pre viac rovníc analogicky)

→ Sústavu upravíme na tvar:

$$x = g_1(x, y)$$
$$y = g_2(x, y)$$

→ Zvolíme počiatočnú aproximáciu (x_0, y_0)

→ Ďalšie aproximácie počítame ako:

$$x_{k+1} = g_1(x_k, y_k)$$
$$y_{k+1} = g_2(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2$$

→ skončíme, až je $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ a súčasne $|y_{k+1} - y_k| < \varepsilon$

→ metóda môže divergovať

→ konvergencia či divergencia závisí na tvare funkcií g_1, g_2

Newtonova metóda pre sústavu:

Postup pre 2 rovnice (pre viac analogicky)

→ zvolíme počiatočnú aproximáciu (x_0, y_0)

→ Označíme $\delta_{x,k} = x_{k+1} - x_k$, $\delta_{y,k} = y_{k+1} - y_k$

→ V každom kroku metódy nájdeme $\delta_{x,k}$ a $\delta_{y,k}$ ako riešenie sústavy lineárnych rovníc

$$f'(x_k, y_k) \cdot \begin{pmatrix} \delta_{x,k} \\ \delta_{y,k} \end{pmatrix} = -f(x_k, y_k),$$

kde

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \quad a \quad f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

→ potom $x_{k+1} = x_k + \delta_{x,k}$, $y_{k+1} = y_k + \delta_{y,k}$

→ skončíme až je $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ a súčasne $|y_{k+1} - y_k| < \varepsilon$

→ metóda môže divergovať, ale konvergencia je často rýchla.

1.10.2018

Aproximácia funkcií

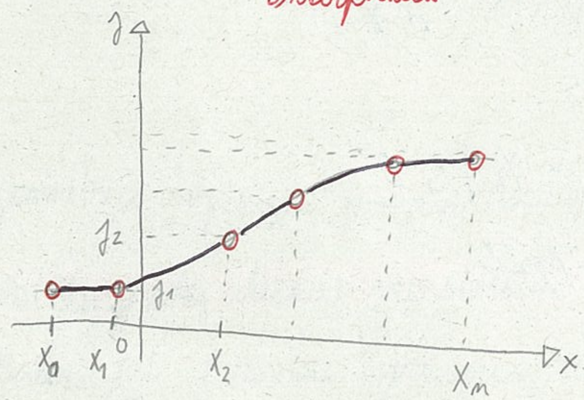
- Poznáme hodnoty určitej funkcie f v bodoch $\underbrace{x_0, x_1, \dots, x_n}_{\text{nazývame uzly}}$
- Predpokladáme, že $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

-> funkčné hodnoty v uzloch označujeme: $f_0, f_1, \dots, f_n$ alebo $y_0, \dots, y_n$

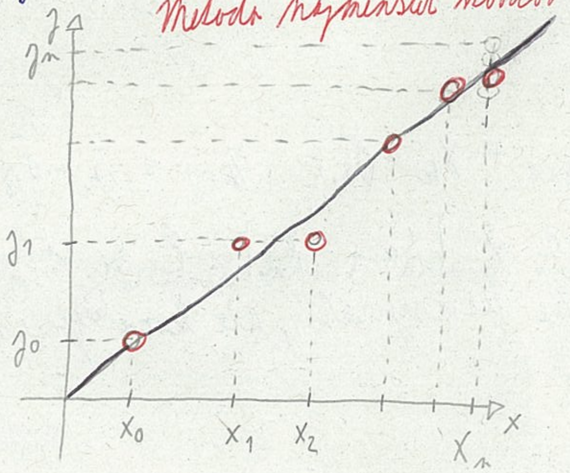
-> Zaujímajú nás funkčné hodnoty v iných než uzlových bodoch, prípadne i hodnoty derivácie alebo určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$.

-> Body preložíme krivkou - grafom funkcie $y = P(x)$.

Interpolácia



Metoda najmenších štvorcov



-> interpolačný polynóm < Newtonov / Lagrangeov

-> Spline = funkcia P je po častiach polynóm

Polynóm:

-> Polynóm stupňa n $(n \geq 0)$ je funkcia

$$\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{kde platí } a_i \in R \text{ pre } i = 0, \dots, n,\ a_n \neq 0}$$

Interpolačný polynóm

- nech sú dané navzájom rôzne body $x_0, \dots, x_n$ a funkčné hodnoty v nich $f_0, \dots, f_n$
- interpolačný polynóm daný týmito bodmi je polynóm P_n stupňa najviac n, pre ktorý platí: $\boxed{P_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n}$
- interpolačný polynóm vždy existuje a je daný jednoznačne. Môžeme ho však hľadať v rôznych tvaroch

Ako hľadať interpolačný polynóm?

-> koeficienty polynómu $a_0, \dots, a_n$ nájdeme ako riešenie odpovedajúcej sústavy rovníc

(Pr) nájdite I.P. daný uzlami

i	0	1	2
x_i	1	2	4
f_i	0	0	3

} používajú sa dva postupy: < Newtonov I.P. / Lagrangeov I.P.

Newtonov interpolačný polynóm

-> polynóm hľadáme v tvare:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Koeficienty a_i vypočítame ako:

$$a_0 = f_0$$
$$a_1 = f[x_0, x_1]$$
$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$
$$\vdots$$
$$a_n = f[x_0, \dots, x_n]$$

$f[x_0, \dots, x_k]$ => sú to tzv. ~~poměrné~~ poměrné diferencie k-teho rádu

Poměrné diferencie 1. rádu: $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, \dots, n-1$

Poměrné diferencie 2. rádu: $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$

Obecné poměrné diferencie k-teho rádu:

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \qquad i = 0, \dots, n-k$$

Pr aproximácia funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ newtonovým interpolačným polynómom v uzloch:

x_i	1	2	2,5	3,2	4

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+3}]$	$f[x_0 \dots x_4]$
0	1	1	$\frac{0,5-1}{2-1}$	$\frac{-0,2-(-0,5)}{2,5-1}$	$\frac{0,0625-0,2}{3,2-1}$	$\frac{-0,015625-(-0,0625)}{4-1}$
1	2	0,5	$\frac{0,4-0,5}{2,5-2}$	$\frac{-0,125-(-0,2)}{3,2-2}$	$\frac{0,03125-0,0625}{4-2}$	
2	2,5	0,4	$\frac{0,3125-0,4}{3,2-2,5}$	$\frac{-0,078125-(-0,125)}{4-2,5}$		
3	3,2	0,3125	$\frac{0,25-0,3125}{4-3,2}$			
4	4	0,25				

$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+3}]$	$f[x_0 \dots x_4]$
1	-0,5	0,2	-0,0625	0,015625
0,5	-0,2	0,0625	-0,015625	
0,4	-0,125	0,03125		
0,3125	-0,078125			
0,25				

Dosadíme do vzorca:

$$P_4(x) = 1 - 0,5\cdot(x-1) + 0,2(x-1)\cdot(x-2) - 0,0625(x-1)(x-2)(x-2,5) + 0,015625\cdot(x-1)(x-2)(x-2,5)(x-3,2)$$

Lagrangeov Interpolačný Polynóm:

$$P_n(x) = f_0\cdot l_0(x) + f_1\cdot l_1(x) + \dots + f_n\cdot l_n(x) =$$

$$= f_0\cdot\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} + f_1\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots$$

$$\dots + f_n\cdot\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

Polynómy l_i, $i=0,\dots,n$ majú vlastnosť že

$$l_i(x_j) = 0 \text{ pre } j \neq i, \quad l_i(x_i) = 1$$

Pr Nájdite interpolačný polynóm v Lagrangeovom tvare daný bodmi

x_i	-1	0	2	3
f_i	5	10	2	1

Riešenie: máme zadané 4 body, interpolačný polynóm bude najvyššieho tretieho stupňa

$$P_3(x) = 5\,\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)} + 10\cdot\frac{(x-(-1))\cdot(x-2)(x-3)}{(0-(-1))(0-2)(0-3)} + 2\cdot\frac{(x-(-1))(x-0)(x-3)}{(2-(-1))(2-0)(2-3)} +$$

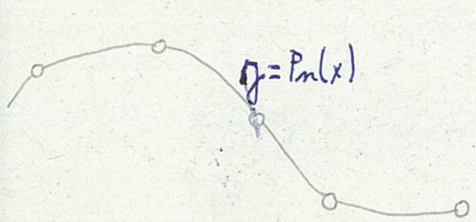
$$1\cdot\frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)}{(3-(-1))(3-0)(3-2)} = \underline{\underline{x^3-4x^2+10}}$$

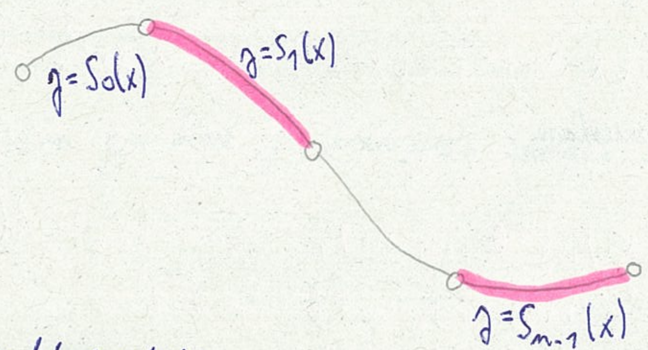
Interpolácia pomocou splajnu

- u interpolácie požadujeme aby graf aproximujúcej funkcie prechádzal všetkými uzlovými bodmi

-> interpolačný polynóm - aproximujúca funkcia je polynóm

-> Splajn (splajn) - aproximujúca funkcia je po častiach polynóm





Splajn k-teho rádu:

- Splajn k-teho rádu je funkcia S pre ktorú platí

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & \text{pre } x \in \langle x_0, x_1 \rangle \\ S_1(x) & \text{pre } x \in \langle x_1, x_2 \rangle \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) & \text{pre } x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle \end{cases}$$

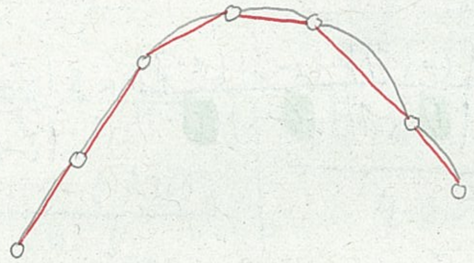
-> na každom intervale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ je S_i polynóm stupňa najviac k

-> S má na intervale $\langle x_0, x_n \rangle$ spojité derivácie až do rádu $k-1$ včetne

Lineárny splajn

-> každé dva susedné body $[x_i, f_i]$, $[x_{i+1}, f_{i+1}]$ prepojíme úsečkou

$$S_i(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i), \quad i = 0, \dots, n-1$$



-> má li f spojitú deriváciu druhého rádu na intervale $\langle x_0, x_n \rangle$ potom existuje konštanta C taká, že pre $x \in \langle x_0, x_n \rangle$ platí: $|f(x) - S(x)| < C \cdot h^2$, kde h je maximálna vzdialenosť medzi susednými uzlami. Chybu sa dá spraviť pre dostatočný počet uzlov ľubovoľne malú.

-> Najpoužívanejší je splajn 3. rádu, tzv. kubický splajn

Kubický splajn

-> kubický splajn je funkcia $S(x)$, ktorá je kubický polynóm na každom subintervale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$$

a vyhovuje podmienkam:

$$S_i(x_i) = f(x_i), \; i = 0, \dots, n-1, \qquad S_{n-1}(x_n) = f(x_n)$$
$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}), \; i = 0, \dots, n-2$$
$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}), \; i = 0, \dots, n-2$$
$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}), \; i = 0, \dots, n-2$$

Aby sa dal kubický splajn jednoznačne určiť, predpisujeme ešte okrajové podmienky:

a) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$

b) $S''(x_0) = f''_0$, $S''(x_n) = f''_n$

c) $S'(x_0) = f'_0$, $S'(x_n) = f'_n$

d) podmienka typu „not-a-knot" (S_1 je rovnaký kubický polynóm ako S_0 a S_{n-2} je rovnaký kubický polynóm ako S_{n-1} tj. $S_0'''(x_1) = S_1'''(x_1)$ a $S'''_{n-2}(x_{n-1}) = S'''_{n-1}(x_{n-1})$)

Postup pre nájdenie kubického splajnu:

1. spôsob -> vhodný pre okrajové podmienky typu a) a b)

prednáška 10 / 8, 9 slajd

Metóda najmenších štvorcov (MNŠ)

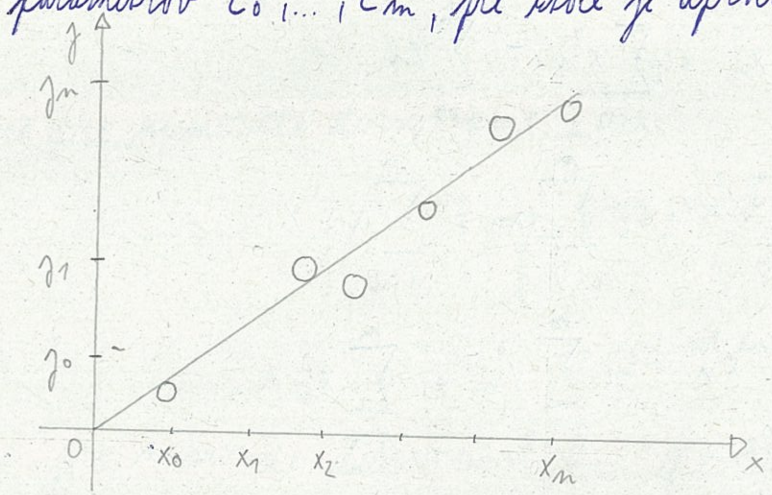
-> máme body $[x_i, y_i]$, $i = 0, \dots, n$, obvykle získané meraním

-> poznáme typ funkčnej závislosti medzi x a y, napr. $y = c_0 + c_1 x$, obecne

$$y = P_m(x) = c_0 \varphi_0(x) + \dots + c_m \varphi_m(x),$$

φ_j, $j = 1, \dots, m$ sú známe funkcie

-> Hľadáme hodnoty parametrov $c_0, \dots, c_m$, pre ktoré je aproximácia najlepšia



Volíme teda hodnoty koeficientov $c_0, \dots, c_m$ pre ktoré je kvadratická odchýlka minimálna

$$\rho^2(c_0, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P_m(x_i))^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - c_0 \varphi_0(x_i) - \dots - c_m \varphi_m(x_i))^2$$

Aproximácia priamkou

- máme body $[x_i, y_i]$, $i = 0, \dots, n$
- hľadáme priamku $y = P_1(x) = c_0 + c_1 x$,
- pre ktorú je $\rho^2(c_0, c_1) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - c_0 - c_1 x_i)^2$ minimálne

normálna rovnica pre koeficienty priamky

Koeficienty c_0 a c_1 nájdeme ako riešenie sústavy rovníc

$$c_0 \overbrace{(n+1)}^{\text{počet bodov}} + c_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i$$

$$c_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$$

Ak sú vektory $(1, 1, \dots, 1)$ a $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ lineárne nezávislé normálna sústava má jediné riešenie