Príklady riešení na prednáške (Dif. rovnice s počiatočnou podm.)

Pr1

$y' = y\,, \quad y(2) = -4$ ← počiatočná podmienka

$y = k \cdot e^{x}$

$-4 = k \cdot e^{2}$

$k = -4e^{-2}$

→ $y = -4e^{-2} \cdot e^{x}$

Pr2

$y' = \frac{y}{x}\,, \quad y(2) = -4$

$y = k \cdot x$ ← obecné riešenie

$-4 = k \cdot 2$

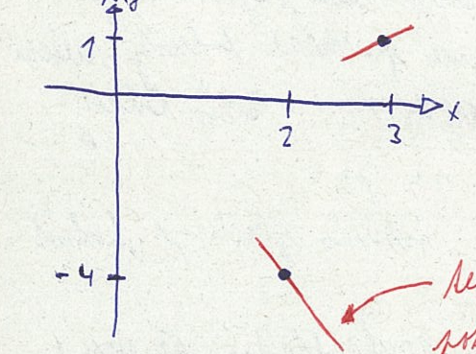
$k = -2$

→ $y = -2x$ ← jediné riešenie počiatočnej úlohy

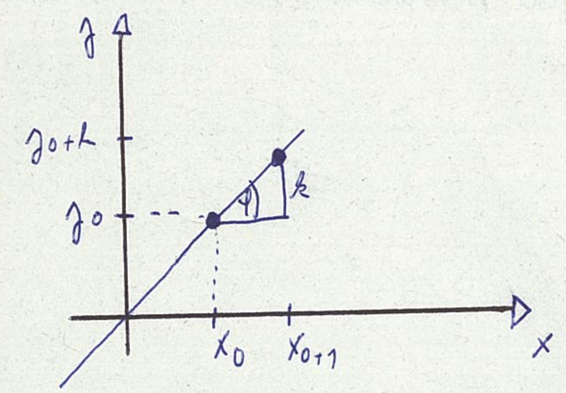
Pr3

$y' = \frac{y}{x}\,, \quad y(2) = -4$

$$\left.\begin{aligned} y'(2) &= \frac{y(2)}{2} = \frac{-4}{2} = \underline{\underline{-2}} \\ y'(3) &= \frac{y(3)}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \end{aligned}\right\} \text{smernica priamky}$$



dotyčnica k riešeniu v danom bode (môže byť aj vektor) ale potom sa to volá smerové pole



smernica k

Eulerova metóda

→ hľadáme približné hodnoty riešení počiatočnej úlohy $y' = f(x, y)\,, \quad y(x_0) = y_0$

→ hodnotu riešenia v x_0 t.j. y_0 poznáme z počiatočnej podmienky.

→ hodnoty riešenia v ďalších bodoch počítame podľa vzťahu

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, 2$$

Jednokrokové a viackrokové metódy

→ u jednokrokových metód hodnotu riešenia v bode x_{i+1} t.j. y_{i+1} počítame iba na základe hodnoty riešenia v predošlom uzle, u viackrokových metód sa využívajú hodnoty riešení vo viacerých predošlých uzloch

Rád jednokrokových metód - veľmi zjednodušene

→ jednokroková metóda je rádu p (p je prirodzené číslo), ak je rozdiel v približnej a presnej hodnote riešenia v každom uzle rádovo h^{p}.

Eulerova metóda je rádu $\underline{\underline{1}}$

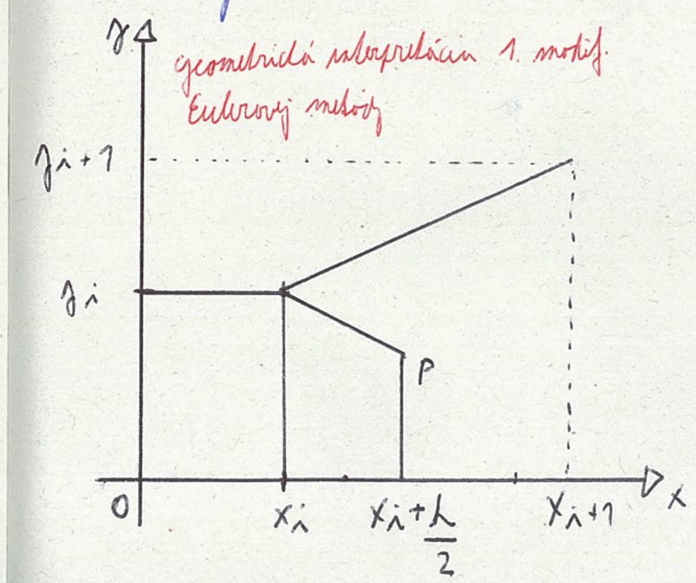
1. modifikovaná Eulerova metóda

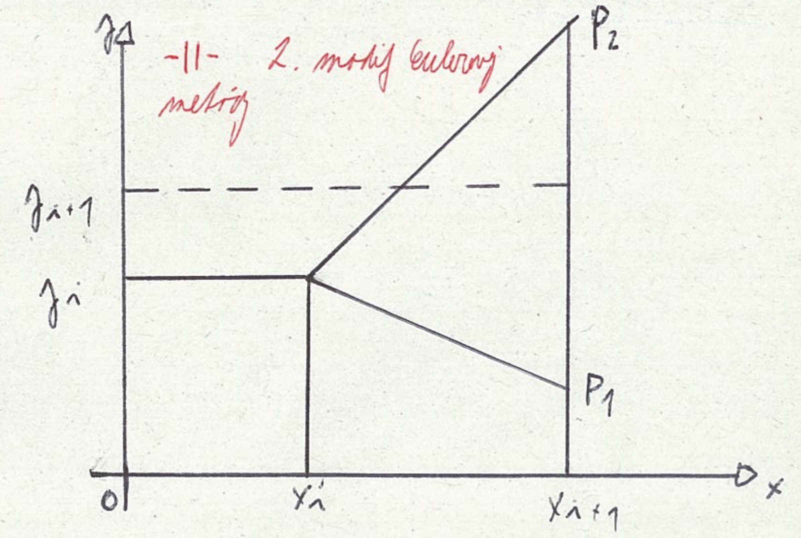
$y_{i+1} = y_i + h \cdot k_2$ kde $k_1 = f(x_i, y_i)$ a $k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1)$

2. modifikovaná Eulerova metóda

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (k_1 + k_2)$ kde $k_1 = f(x_i, y_i)$ a $k_2 = f(x_i + h, y_i + h k_1)$

→ obe metódy sú rádu $\underline{\underline{2}}$





Príklady zo skrípt

Pr 10.2 str 145

-> Eulerovou metódou s krokom $h = 0,1$ riešte počiatočnú úlohu

$y' = x^2 - y$, $y(0) = 1$ na intervale $\langle 0; 0,5 \rangle$

Riešenie: v našom prípade je $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ a $f(x,y) = x^2 - y$. Približné hodnoty riešenia v ďalších bodoch budeme počítať podľa vzorca:

$$y_{i+1} = y_i + 0,1 \cdot (x_i^2 - y_i), \quad i = 0, \dots, 4$$

Vypočítané hodnoty zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	0,9	0,811	0,7339	0,6695	0,6186
$y(x_i)$	1	0,9052	0,8213	0,749	0,6689	0,6435

Príklady z prednášky

Pr1

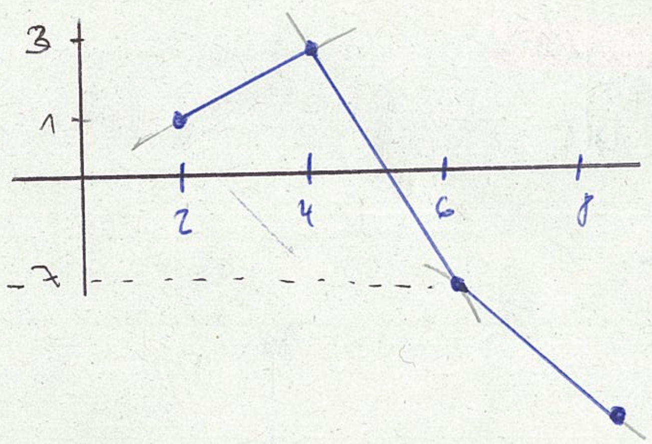
$y' = x - y^2$, $y(2) = 1$, $h = 2$ ← krok

$\Delta h = 2$

DÔLEŽITÉ

$$\boxed{\begin{aligned} k &= x - y^2 \leftarrow \text{smernica } k \\ \Delta y &= k \cdot \Delta x \end{aligned}}$$

X	y	k
2	1	1
4	3	-5
6	-7	-43
8	-93	8657



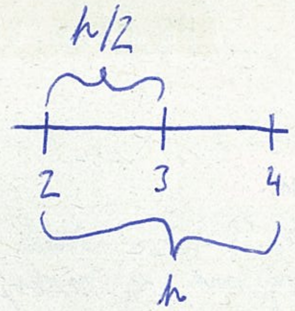
Pr2 1. Eulerova modifikácia

X	y	k_1	x_p	y_p	k_2
2	1	1	3	2	-1
4	-1	3	5	2	1
6	1	...	...	...	...
8					

$\underbrace{x_p \ y_p}_{}$ pomocný bod

$h = 2$

$\frac{h}{2} = 1$



$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1)$

Pr3 2. Eulerova modifikácia

X	y	k_1	x_p	y_p	k_2	$\frac{k_1 + k_2}{2}$
2	1	1	4	3	-5	-2
4	-3	-5	6	-13	-163	-84
6	-171					
8						

$\Delta y = k \cdot h \rightarrow h = 4 - 2 = 2$

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + h, y_i + h k_1)$

22.10.2018 **PRAVDEPODOBNOSŤ**

1. Klasická pravdepodobnosť:

Základný priestor

-> Prevádzame pokus, ktorý má n možných výsledkov, pričom všetky tieto výsledky sú rovnako pravdepodobné.

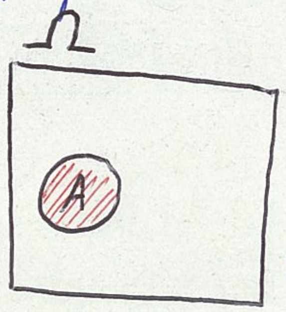
-> Ω = množina všetkých možných výsledkov tohto pokusu. Potom $|\Omega| = n$ -> počet prvkov množiny.

-> jednotlivé prvky množiny Ω budeme označovať $w_1, w_2, \ldots, w_n$

Náhodný jav a jeho pravdepodobnosť

-> náhodným javom nazveme akúkoľvek podmnožinu množiny Ω.

-> náhodné javy sa budú značiť veľkými písmenami $(A, B, \ldots)$



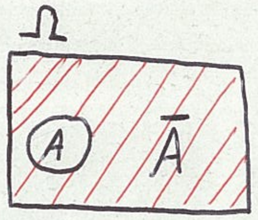
-> Pravdepodobnosť javu A označíme $P(A)$ a definujeme ju ako:

$$P(A) = \frac{\text{počet možností priaznivých javu A}}{\text{počet všetkých možností}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Operácia s javmi -> Jav opačný

-> Jav opačný k javu A označíme $\bar{A}$.

-> $\bar{A}$ nastane práve vtedy, ak nenastane jav A.

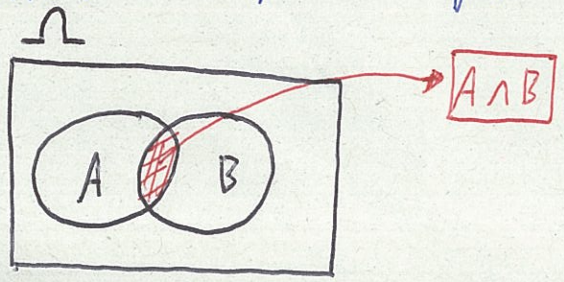


$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

Operácia s javmi -> Prienik

-> Prienik javov A, B označíme $A \cap B$

-> $A \cap B$ nastane práve vtedy, ak nastanú oba javy A, B



Závislosť a nezávislosť náhodných javov

Intuitívny pojem nezávislosti

-> javy A, B sú navzájom nezávislé, ak to, že nastal jav A nijako neovplyvní pravdepodobnosť toho, že nastane jav B

Príklad (nezávislý ~~javov~~ jav)

-> hodíme dvoma kockami: A... na prvej kocke padla šestka, B... na druhej padla 1

-> V športke: A... vyhráme v 1. ťahu, B... vyhráme v druhom ťahu

Príklad (závislý jav)

-> hodíme dvoma kockami: A... na prvej kocke padne šestka, B: padol súčet 12

-> Z balíčka 52 kariet (dvojka až eso, všetky 4 farby) vytiahneme dve karty: A... prvá karta je eso, B... druhá karta je eso

Pravdepodobnosť prieniku dvoch nezávislých javov

-> Pre javy A, B, ktoré sú navzájom nezávislé, platí

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

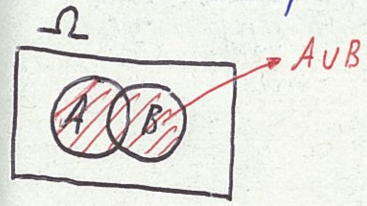
javy sú nezávislé

PZ: pre závislé javy tento vzťah neplatí

Operácia s javmi -> Zjednotenie

-> Zjednotenie javov A, B označíme $A \cup B$

-> $A \cup B$ nastane práve vtedy, ak nastane aspoň jeden z javov A, B

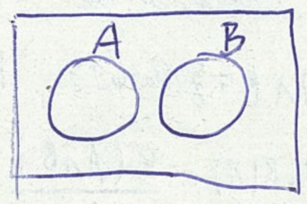


Pravdepodobnosť zjednotenia javov

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Javy nezlučiteľné

-> javy A, B nemôžu nastať súčasne (t.j. $A \cap B = \emptyset$) = nezlučiteľné



-> Pre nezlučiteľné javy platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Podmienená pravdepodobnosť

→ vieme, že jav nastal. Zaujíma nás pravdepodobnosť, že za tejto podmienky nastal jav B

→ túto pravdepodobnosť označíme $P(B|A)$ … pravdepodobnosť javu B za podmienky, že nastal jav A

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)}} \; \dots \text{ z čoho plynie } \boxed{P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

Nezávislosť - matematická definícia

→ povieme si, že náhodné javy A, B sú nezávislé ak platí $P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$

Pr → z prednášky → Klasická pravdepodobnosť

- Máme 2 hracie kocky → a) aká je pravdepodobnosť že na dvoch kockách padne súčet 4;
  b) že padne aspoň 1 × číslo 6

$\Omega = \{(a,b) : a, b \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ $(a,b) = ab$

$\Omega = \{11, 12, 13, \dots, 65, 66\}$ → poradie je podstatné

$|\Omega| = 36$ → prvkov v základnom priestore

a) $A = \underbrace{\{13, 31, 22\}}_{\text{3 elementárne javy}}$ $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

b) $B = \underbrace{\{16, 26, 36, 46, 56, 66, 65, 64, 63, 62, 61\}}_{\text{11 elem. javov}}$ $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}$

Pr → z prednášky → Podmienená prav.

→ 2 hracie kocky, $\Omega = \{11, 12, 21, 13, 31, \dots, 66\}$ $|\Omega| = 6^2 = 36$ prvkov

A… padne aspoň jeden krát 6, $A = \{16, 61, 26, 62, 36, 63, \dots, 66\}$, $P(A) = \frac{11}{36}$

B… padol súčet 7, $B = \{16, 61, 25, 52, 34, 43\}$, $P(B) = \frac{6}{36}$

$A \wedge B = \{16, 61\}$, $P(A \wedge B) = \frac{2}{36}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11} \checkmark$$

opačne:

$$P(A|B) = \frac{P(B \wedge A)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{6} \checkmark$$

2. Diskrétna pravdepodobnosť

→ množina $\Omega = \{w_1, w_2 \dots\}$ je konečná alebo spočítateľná (jej prvky sa dajú usporiadať do postupnosti), $|\Omega| = n$, n môže byť aj ∞.

→ jednotlivé elementárne javy $\{w_i\}$ nemusia nutne nastávať s rovnakou pravdepodobnosťou ale platí $\sum_{i=1}^{n} P(\{w_i\}) = 1$, potom pravdepod. javu A počítame ako: $P(A) = \sum_{w \in A} P(\{w\})$.

Pr → z prednášky

- Máme mincu, jej strany sa nazývajú L - líc, R - rub

→ aká je pravdepodobnosť že najneskôr 4. hodom padne L

$\Omega = \{L, RL, RRL, RRRL, \dots\}$

$$\boxed{\text{všeobecne: } P(\underbrace{R\dots R}_{k}L) = \frac{1}{2^{k+1}}}$$

$P(L) = \frac{1}{2}$

$P(RL) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(RRL) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$P(RRRL) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

$A = \{L, RL, RRL, RRRL\}$

$P(A) = P(L) + P(RL) + P(RRL) + P(RRRL)$

$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \checkmark$

Všeobecná definícia pravdepodobnosti

Ω … základný priestor → pravdepodobnostný priestor

S … systém podmnožín Ω (niektoré), náhodné javy

σ-algebra:
1. $\emptyset, \Omega \in S$ (nemožný jav)
2. $A \in S \Rightarrow \bar{A} = \Omega - A \in S$ ($\bar{A}$) opačný jav
3. $A_1, A_2, A_3 \in S \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \in S$; $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \in S$

$P: S \to \mathbb{R}$
1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(A) = \langle 0, 1 \rangle$
2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3. $A_1, A_2, A_3, \dots$ po dvoch disjunkt.
   $(A_i \wedge A_j = \emptyset) \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$