19.11.2018

Spojité náhodné veličiny - II (pokračovanie)

Distribučná funkcia spojitej náhodnej veličiny:

Opakovanie definície

→ Distribučná funkcia náhodnej veličiny X sa definuje ako: $F(x) = P(X \leq x)$

→ Výpočet $F(x)$ pre spojité náhodné veličiny a vzťah s hustotou f

→ Ak je X spojitá náhodná veličina s hustotou f, potom:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

vďaka tomu platí: $F'(x) = f(x)$ vo všetkých bodoch $x \in \mathbb{R}$ kde má funkcia F deriváciu

Dôležitá vlastnosť distribučnej funkcie spojitej náhodnej veličiny:

↳ Distribučná funkcia spojitej náhodnej veličiny je spojitá

Výpočty rôznych pravdepodobností pomocou F

↳ Ak je X ľubovoľná náhodná veličina (t.j. nie nutne spojitá) s distribučnou funk. F, tak potom:

→ $P(X \leq b) = F(b)$

→ $P(X > a) = 1 - F(a)$

→ $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

PZ: Ak je X spojitá náhodná veličina, potom vďaka vzťahu $P(X=x) = 0$ môžeme všetky nostré nerovnosti nahradiť ostrými a naopak

Stredná hodnota a rozptyl pre spojité náhodné veličiny

1) Stredná hodnota

→ Pre spojitú náhodnú veličinu X s hustotou f je stredná hodnota

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

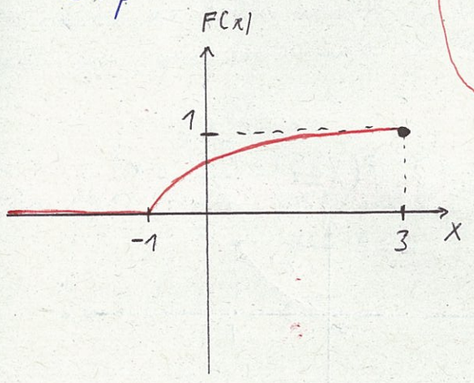
2.) Rozptyl

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - (EX)^2$$

(Pr.) → na hodinách

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x+1} & \text{pre } x \in \langle -1, 3 \rangle \\ 1 & \text{pre } x \geq 3 \end{cases}$$

derivácia $f(x) = F'(x)$

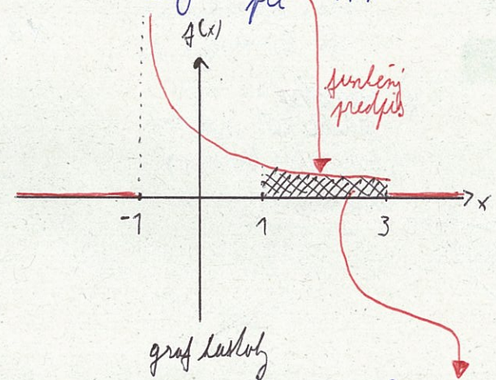


distribučná funkcia

hustota:

$$f(x) = F'(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < -1 \\ \frac{1}{4\sqrt{x+1}} & \text{pre } x \in (-1; 3) \\ 0 & \text{pre } x > 3 \end{cases}$$



graf hustoty

funkčný predpis

musia sa rovnať

$$P(1 \leq X \leq 4) = \int_{1}^{4} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} \frac{1}{4\sqrt{x+1}}\,dx = \dots$$

pr.) $P(1 \leq X \leq 4) = F(4) - F(1) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

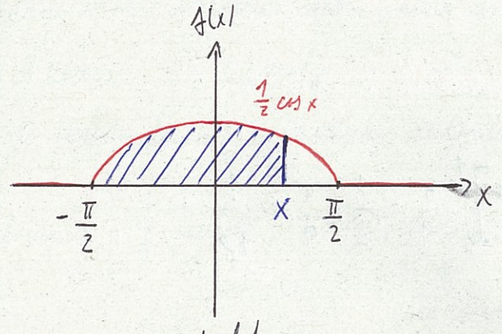
(Pr2) → na predn.

→ ak bude zadaná hustota a chceme distribučnú funkciu

nemusí byť spojitá

nemôže byť nikde rajónová

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\cos x & \text{pre } x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{pre } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

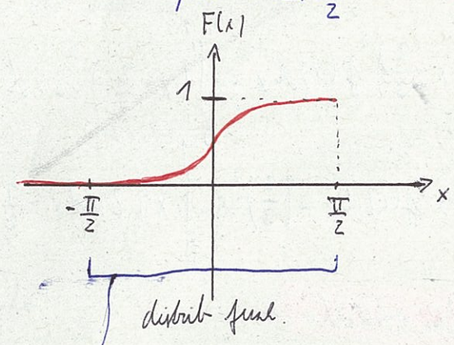


graf hustoty

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ako vyzerá distribučná funkcia?

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2} & \text{pre } x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \\ 1 & \text{pre } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



distrib. fun.

$F'(x) = f(x)$, $F(x) = \int \frac{1}{2}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin x + C$, $C = \frac{1}{2}$

$F(\frac{\pi}{2}) = 1$ musí platiť

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}$$