Iná možnosť zápisu sústavy normálnych rovníc pre priamku:

$$Z^T Z c = Z^T \cdot Y, \text{ kde } Z = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ odtiaľ potom:

$$c = (Z^T Z)^{-1} \cdot Z^T \cdot Y$$

Aproximácia parabolou

- máme body $[x_i, y_i]$, $i = 0, \dots, n$
- hľadáme parabolu $y = P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

Normálna rovnica pre koeficienty paraboly

- koeficienty c_0, c_1 a c_2 nájdeme ako riešenie sústavy rovníc

$$c_0 \overbrace{(n+1)}^{\text{počet bodov}} + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + c_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i$$

$$c_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$$

$$c_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 + c_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i$$

Iná možnosť zápisu sústavy normálnych rovníc pre parabolu

$$Z^T \cdot Z c = Z^T \cdot Y, \text{ kde } Z = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ odtiaľ potom

$$c = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y$$

+ Aproximácia obecne, MNŠ - nelineárny model, Aproximácia exponenciálou -> prednáška 10

Numerické derivovanie

8.10.2018

Pripomenutie definície derivácie

Derivácia funkcie f v bode x_0 sa definuje ako $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ alebo

tiež: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Približnú hodnotu derivácie funkcie f v bode x môžeme počítať tak, že funkciu f nahradíme interpolačným polynómom a len potom zderivujeme:

$$f'(x) \doteq P_n'(x)$$

pre derivácie vyšších rádov

$$f^{(n)}(x) \doteq P^{(n)}(x)$$

Často používané vzorce pre numerické derivovanie I

$$f'(x) \doteq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ -> pre krajné body

$$f'(x) \doteq \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$ -> pre stredné body

Často používané vzorce pre numerické derivovanie II -> presnejšie

-> predpokladáme, že poznáme hodnoty funkcie f v bodoch x_0, $x_1 = x_0 + h$ a $x_2 = x_0 + 2h$ potom

$$f'(x_0) \doteq \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2h}$$

$$f'(x_1) \doteq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h}$$

$$f'(x_2) \doteq \frac{f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)}{2h}$$

Tieto vzorce dostaneme pomocou derivácie interpolačného polynómu 2. stupňa s uzlami x_0, x_1 a x_2

Chyba numerických vzorcov

-pre chybu vzorcov I platí

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{2} h \cdot f''(\xi)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{1}{2} h \cdot f''(\xi_2)$$

$\xi \in \langle x, x+h \rangle$, resp. $\xi_2 \in \langle x-h, x \rangle$

Pre chybu vzorcov II platí

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2h} + \frac{1}{3} h^2 \cdot f'''(\xi_2)$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} - \frac{1}{6} h^2 \cdot f'''(\xi_2)$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)}{2h} + \frac{1}{3} h^2 f'''(\xi_2)$$

$\xi \in \langle x_0, x_2 \rangle$

Vzorec pre výpočet 2. derivácie

-> predpokladáme že poznáme hodnoty funkcie f v bodoch x_0, $x_1 = x_0 + h$ a $x_2 = x_0 + 2h$.

potom:

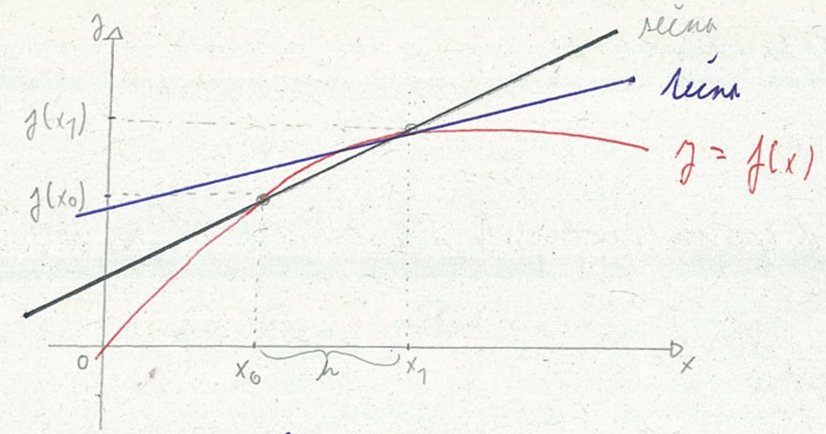
$$f''(x_1) \doteq \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2}$$

-> vzorec dostaneme pomocou druhej derivácie interpolačného polynómu s uzlami x_0, x_1 a x_2. Pre chybu platí

$$f''(x_1) = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2} - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi_2)$$

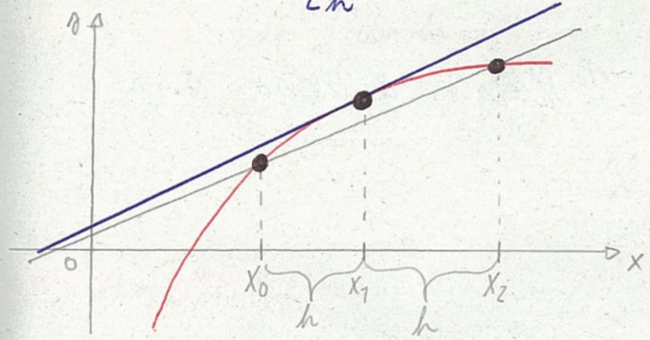
$\xi_2 \in \langle x_0, x_2 \rangle$

Teoreticky: čím menší krok h, tým presnejšia aprox. v praxi to platiť nemusí
Pz: pre príliš malý krok h sa zväčšuje zaokrúhlovacia chyba



Pr

$$f'(x_1) \doteq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h}$$

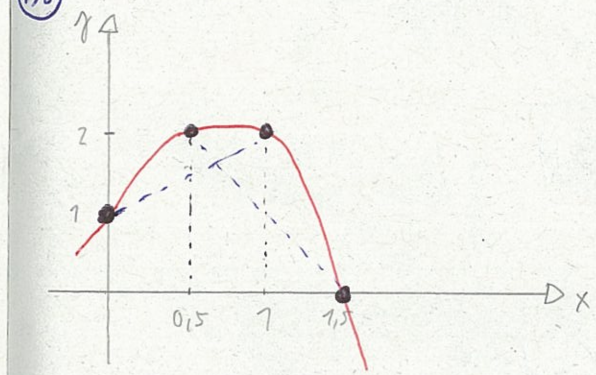


$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} = \frac{(x_1+h)^2 - (x_1-h)^2}{2h} =$$

$$= \frac{2x_1 h - (-2x_1 h)}{2h} = \frac{4x_1 h}{2h} = 2x_1 = f'(x_1) \checkmark$$

Pr



$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(0) \doteq \frac{f(0{,}5) - f(0)}{0{,}5} = \frac{2-1}{0{,}5} = \underline{\underline{2}}$$

$$f'(0{,}5) = \frac{f(1) - f(0{,}5)}{0{,}5} = \underline{\underline{0}}$$

$$f'(1) = \frac{0-2}{0{,}5} = \underline{\underline{-4}}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

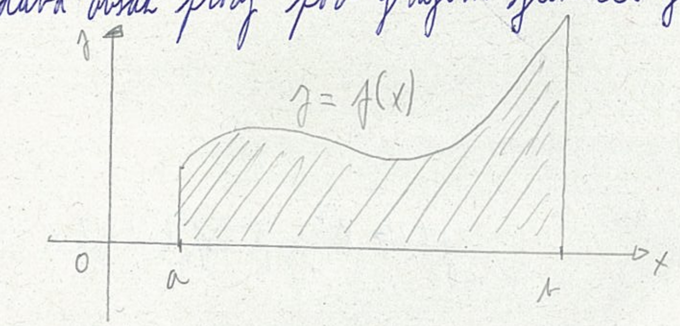
$$f'(0{,}5) \doteq \frac{f(1) - f(0)}{2 \cdot 0{,}5} = \underline{\underline{1}}$$

$$f'(1) \doteq \frac{f(1{,}5) - f(0{,}5)}{2 \cdot 0{,}5} = \underline{\underline{-2}}$$

Numerické integrovanie

Pripomenutie významu určitého integrálu

$\int_a^b f(x)\,dx$ udáva obsah plochy pod grafom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$



Lichobežníková metóda

→ Funkciu f nahradíme interpolačným polynómom 1. stupňa s uzlami a, b — priamkou

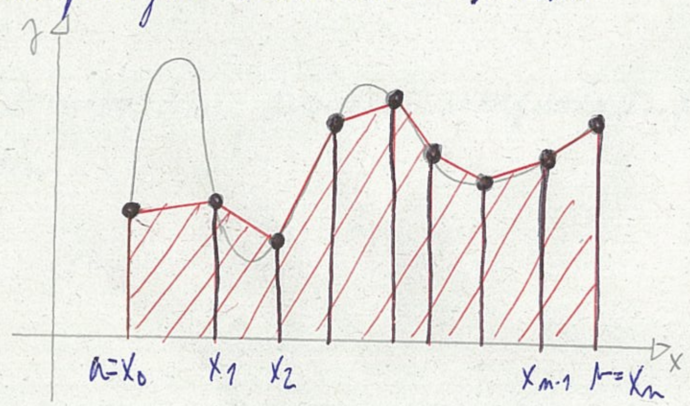
$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

Zložená lichobežníková metóda

→ interval $\langle a, b\rangle$ rozdelíme na n dielikov dĺžky $h = \frac{b-a}{n}$

→ deliace body označíme $x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h, \dots, x_n = b$

→ na každom dieliku použijeme lichobežníkovú metódu



Lichobežníkové pravidlo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \doteq L_n = h\cdot\left(\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right)}$$

Chyba zloženej lichobežníkovej metódy

→ Je-li f'' spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ pak existuje $\xi_c \in \langle a, b\rangle$, pre

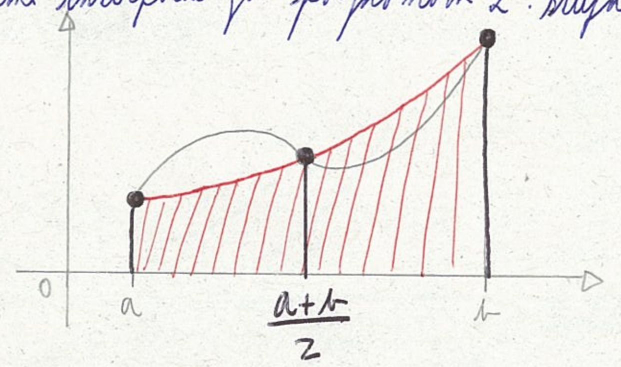
$$\int_a^b f(x)\,dx = L_n - \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot f''(\xi_c)$$

Najväčšia možná hodnota chyby

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - L_n\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot \max_{t\in\langle a,b\rangle}\left|f''(t)\right|$$

Simpsonova metóda

Funkciu f nahradíme interpolačným polynómom 2. stupňa s uzlami: a, $\frac{a+b}{2}$, b — parabolou

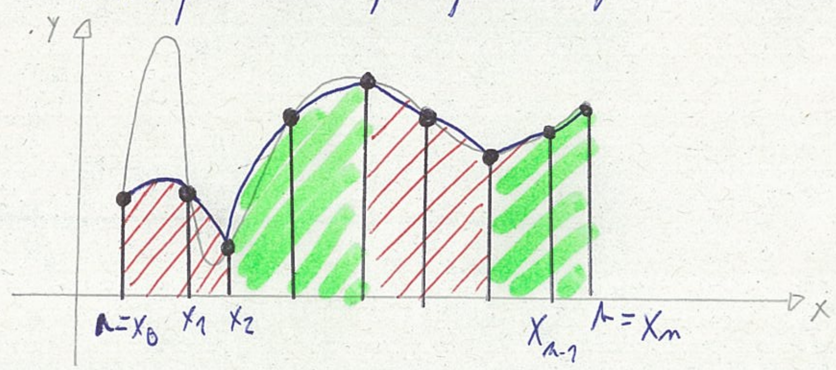


$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

Zložená Simpsonova metóda

→ Interval $\langle a, b\rangle$ rozdelíme na n dielikov dĺžky $h = \frac{b-a}{n}$, pričom n musí byť párne.

→ na dvojiciach susedných dielikov použijeme Simpsonovu metódu



Simpsonovo pravidlo

∇ → PÍS 4

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq S_n = \frac{h}{3}\cdot\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\dots\right.$$

$$\left.\dots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right) = \frac{h}{3}\cdot\Big(f(x_0)+4\cdot\sum_{\substack{0<i<n\\ i \text{ je liché}}} f(x_i)+2\cdot\sum_{\substack{0<i<n\\ i \text{ je sudé}}} f(x_i)+f(x_n)\Big)$$

Chyba složenej Simpsonovej metódy

- ak je $f^{(4)}$ spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$, potom existuje bod $\xi\in\langle a,b\rangle$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_n - \frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot f^{(4)}(\xi)$$

Najväčšia možná hodnota chyby:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot \max_{t\in\langle a,b\rangle}\left|f^{(4)}(t)\right|$$

Numerické riešenie diferenciálnych rovníc

15.10.2018

Základný tvar diferenciálnej rovnice s počiatočnou podmienkou:

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0)=y_0 \quad (1)$$

Riešenie diferenciálnej rovnice:

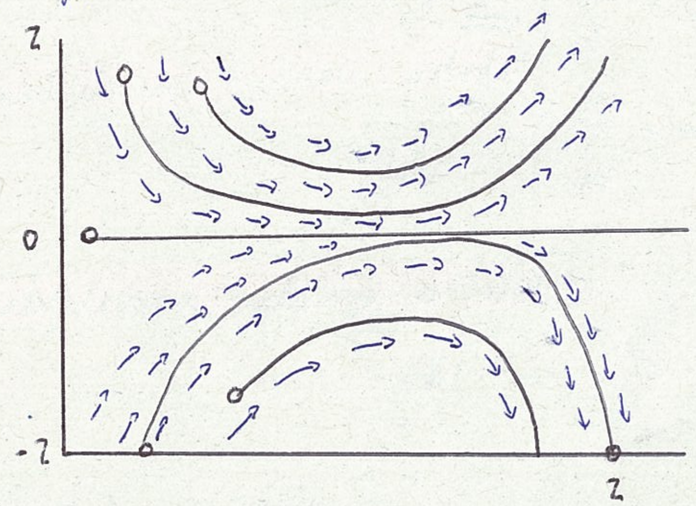
- riešenie diferenciálnej rovnice $y'=f(x,y)$ na intervale I je funkcia $y=y(x)$ taká, že pre každé $x\in I$ platí

$$y'(x)=f(x,y(x))$$

- ak je funkcia f spojitá na oblasti $D=\{(x,y): x_0-a\le x\le x_0+a,\ y_0-b\le y\le y_0+b\}$, potom má počiatočná úloha (1) riešenie. Ak je i $\frac{\partial f}{\partial y}$ na oblasti D spojitá, tak má riešenie jediné.

Smerové pole:

→ do každého bodu (x,y) umiestnime šípku so smernicou $k=f(x,y)$, riešenie rovnice $y'=f(x,y)$ sa riadi týmito šípkami



→ Pri numerickom riešení diferenciálnych rovníc hľadáme približné hodnoty riešení v bodoch $x_1, x_2, x_3, \dots$ Tieto hodnoty označíme y_1, y_2, y_3.
Výsledkom je tabuľka približných hodnôt riešení.
Zatiaľ budeme predpokladať, že uzly sú ekvidistantné s krokom h:

$$x_i = x_0 + i\cdot h, \qquad i=0,1,2,\dots$$