3. Geometrická pravdepodobnosť

→ množina Ω tvorí oblasť v n-rozmernom priestore, $0 < \mu(\Omega) < \infty$
($\mu(\cdot)$ je miera množiny → niečo ako obsah)
→ všetky možné výsledky pokusu sú rovnako pravdepodobné.
→ pravdepodobnosť javu A počítame ako $\boxed{P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}}$

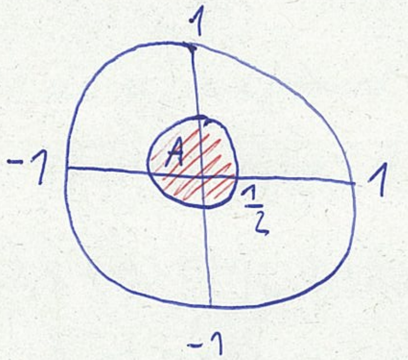
Pr → z prednášky

→ náhodne vyberieme z kruhu bod, aká je pravdepodobnosť, že od stredu má vzdialenosť:

a) $\leq \frac{1}{2}$

b) $= \frac{1}{2}$

c) $= \frac{1}{n}$



Ω ... kruh
$A \subseteq \Omega$!!! → je podmnožinou
$P(A) = \frac{\text{obsah } A}{\text{obsah } (\Omega)}$ => musí byť definovaný

$$P(A) = \frac{\text{obsah } A}{\text{obsah } (\Omega)} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} \checkmark$$

$P(B) = 0$ → vzdialenosť presne daného bodu
$P(C) = 0$ → vzdialenosť pre $\frac{1}{n}$

29.10.2018

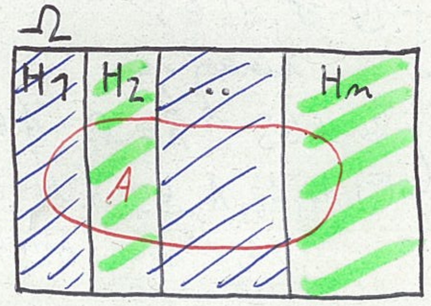
Veta o úplnej pravdepodobnosti - začiatok

- Nech $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sú navzájom disjunktné náhodné javy, také, že:
  $P(H_i) > 0$ pre $i = 1, \ldots, n$ a že $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$.
  (Javy $H_1, \ldots, H_n$ nazývame hypotézy)

Veta o úplnej pravdepodobnosti - dokončenie

Potom pre každý náhodný jav A platí:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A|H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

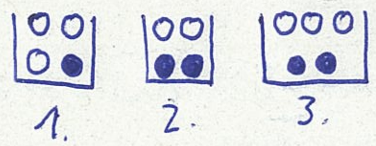


Bayesov vzorec → BÝVA NA SKÚŠKE

→ ak $P(A) > 0$, potom pre každé $j = 1, \ldots, n$ platí

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

Pr → z prednášky



Hypotézy:

H_1 ... guľôčka je v prvej krabici
H_2 ... guľôčka je v druhej krabici
H_3 ... guľôčka je v tretej krabici
$\} \; P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$

Č ... vytiahnutá je čierna guľôčka → $P(Č)$ = nevieme hneď vypočítať, je to ťažké ... rátať
ale vypočítať hypotézy je ľahšie:

$P(Č|H_1) = \frac{1}{4}$

$P(Č|H_2) = \frac{1}{2}$

$P(Č|H_3) = \frac{2}{5}$

a) Aká je pravdepodobnosť, že bude vytiahnutá čierna guľôčka?

$P(A) = P(Č) = ?$

$$P(Č) = P(Č \wedge H_1) + P(Č \wedge H_2) + P(Č \wedge H_3) =$$
$$= P(H_1) \cdot P(Č|H_1) + P(H_2) \cdot P(Č|H_2) + P(H_3) \cdot P(Č|H_3) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{23}{60}}} \checkmark$$

b) Aká je pravdepodobnosť, že vytiahnutá čierna guľôčka je v prvej krabici?

$P(H_1|Č) = ?$

$$P(H_1|Č) = \frac{\underbrace{P(H_1) \cdot P(Č|H_1)}_{P(H_1 \wedge Č)}}{P(Č)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{23}{60}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{23}{60}} = \underline{\underline{\frac{5}{23}}} \checkmark$$

(Pr2) → z prednášky

3 % ľudí majú vrodenú vadu ... V

H_1 ... Človek má vadu V potom je test 100 % pozitívny

H_2 ... Človek, ktorý ale nemá vadu V, tak test je 5 % pozitívny (spoľahlivý 95 %)

Ak má človek pozitívny test, aká je prav. že má vadu V?

Hypotézy

H_1 ... človek má vadu V $\quad P(H_1) = 0{,}03$

H_2 ... človek nemá vadu V $\quad P(H_2) = 0{,}97$

T ... test je pozitívny

$P(T|H_1) = 1$

$P(T|H_2) = 0{,}05$

$$P(H_1|T) = \frac{P(T|H_1)\cdot P(H_1)}{P(T)} = \frac{P(T|H_1)\cdot P(H_1)}{P(T|H_1)\cdot P(H_1) + P(T|H_2)\cdot P(H_2)} = \frac{1\cdot 0{,}03}{1\cdot 0{,}03 + 0{,}05\cdot 0{,}97} =$$

$$= \frac{0{,}03}{0{,}03+0{,}0485} = \frac{0{,}03}{0{,}0785} = \underline{\underline{0{,}382165}} \checkmark$$

Podmienená pravdepodobnosť → vsuvka

$$P(A\wedge B) = P(A)\cdot P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\wedge B)}{P(A)} = P(B) \qquad P(A|B) = \frac{P(A\wedge B)}{P(B)} = P(A)$$

Náhodné veličiny

5.11.2018

Niekedy sa dá výsledok pokusu popísať jediným číslom, ktoré označíme X (alebo iná veľ. pís.)

Definícia náhodnej veličiny: (zjednodušene)

→ náhodná veličina X je funkcia, ktorá prvkom množiny Ω priraďuje reálne čísla

$$X: \Omega \to \mathbb{R}$$

Zápis javov pomocou náhodnej veličiny:

→ Zápisom $[X = x]$ rozumieme náhodný jav zložený zo všetkých $\omega \in \Omega$ pre ktoré je $X(\omega) = x$, podobne napr. $[X < x] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$

Základné typy náhodných veličín:

1). Diskrétne náhodné veličiny

↳ môžu nadobúdať najviac konečne (spočítateľne) mnoho hodnôt)

↳ príklady: počet $\boxed{6}$ pri desiatich hodoch kockou, na koľký pokus sa podarí vyhodiť študenta, ktorý niečo vie, počet percent vadných súčiastok v balíku s 25 kusmi ...

2) Spojité náhodné veličiny

↳ (zjednodušene) môžu nadobúdať všetky hodnoty z určitého intervalu

↳ príklady: nameraná hodnota napätia, dĺžka časového intervalu medzi 2 udalosťami

Diskrétne náhodné veličiny:

→ náhodná veličina X sa nazýva diskrétnou ak jej obor hodnôt je spočítateľná množina

Pravdepodobnostná funkcia

→ pravdepodobnostná funkcia diskrétnej náhodnej veličiny X je funkcia $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná vzťahom $p(x) = P(X=x)$

PZ: malé a veľké písmená sa rozlišujú, niekedy sa používa názov frekvenčná funk. a značí sa f

Vlastnosti pravdepodobnostnej funkcie:

→ $0 \leq p(x) \leq$ pre každé $x \in \mathbb{R}$

→ $\sum p(x_i) = 1$ (sčítame cez všetky hodnoty x_i, ktoré X môže nadobúdať)

Distribučná funkcia:

→ Distribučná funkcia náhodnej veličiny X je funkcia $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná vzťahom $F(x) = P(X \leq x)$, niekedy sa uvádza tiež: $F(x) = P(X < x)$

Výpočet $F(x)$ pre diskrétne náhodné veličiny:

→ Ak je X diskrétna náhodná veličina, ktorá môže nadobúdať hodnoty $x_1, x_2, \dots$, a p jej pravdepodobnostná funkcia je potom $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$

Vlastnosti distribučnej funkcie:

→ $0 \leq F(x) \leq 1$ pre každé $x \in R$

→ F je neklesajúca, t.j. keď $x \leq y$, potom $F(x) \leq F(y)$

→ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

→ $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ pre každé $a, b \in R$

→ F je z prava spojitá t.j. $\lim_{t \to x^+} F(t) = F(x)$

Vlastnosti distribučnej funkcie diskrétnej náhodnej veličiny:

→ Graf funkcie F má schodovitý tvar

→ Výšky schodov sú hodnoty pravdepodobnostnej funkcie p, $p(x) = F(x) - \lim_{t \to x^-} F(t)$ pre každé $x \in R$

Nezávislé náhodné veličiny - zjednodušená verzia

→ Dve diskrétne náhodné veličiny X a Y sú nezávislé práve ~~vtedy~~ vtedy keď pre každé dve hodnoty x a y platí $p((X=x) \cap (Y=y)) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$.

Stredná hodnota diskrétnej náhodnej veličiny

→ značíme ju EX, iné značenia sú $\mu(X)$, μ a definujeme ju vzťahom

$$EX = \sum_{x_i} x_i \cdot p(x_i)$$

→ sčítame cez všetky hodnoty x_i ktoré X môže nadobúdať

Rozptyl diskrétnej náhodnej veličiny:

→ Rozptyl diskrétnej náhodnej veličiny X označíme DX → disperzia, variancia, definujeme ju vzťahom $\boxed{DX = E(X - EX)^2}$

→ pre jeho výpočet používame vzorec: $DX = \sum_{x_i} x_i^2 \cdot p(x_i) - (EX)^2$

Smerodajná odchýlka:

Smerodajnú odchýlku diskrétnej náhodnej veličiny X označíme σ a definujeme ju vzťahom

$$\boxed{\sigma = \sqrt{DX}}$$

Vlastnosti rozptylu:

→ $DX \geq 0$

→ ak a, b sú reálne konštanty potom $D(a + bX) = b^2 DX$

→ ak X, Y sú nezávislé náhodné veličiny potom $D(X \pm Y) = DX + DY$

Pr → z prednášky

Vezmem mincu a 4x po sebe ňou hodím, X = maximálny počet $\underline{R}$ posebe

rub líc

diskrétna náhodná veličina

$\Omega = \{LLLL, LLLR, \dots, RRRR\}$, $|\Omega| = 2^4 = 16$, $X: \Omega \to R$

$X(LLLL) = 0$

$X(LLLR) = 1$
$X(LLRL) = 1$
$X(LRLL) = 1$
$X(RLLL) = 1$

$X(RLRL) = 1$
$X(LRLR) = 1$
$X(RLLR) = 1$

$X(RRLL) = 2$
$X(LLRR) = 2$

$X(LRRL) = 2$
$X(RLRR) = 2$
$X(RRLR) = 2$

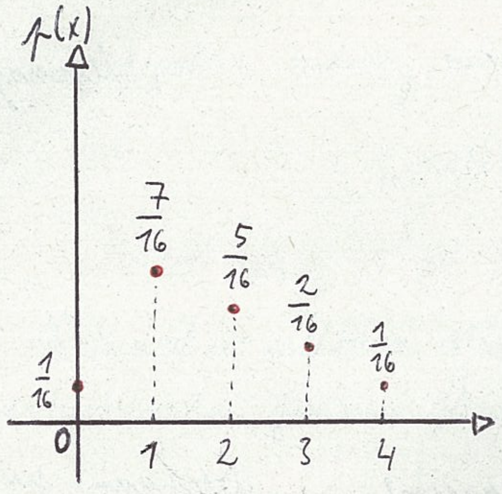
$X(RRRL) = 3$
$X(LRRR) = 3$

$X(RRRR) = 4$

? $P(X=3)$?

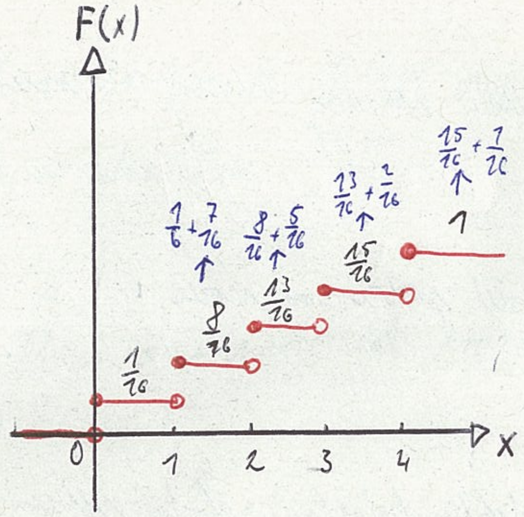
$(X=3) = \{RRRL, LRRR\} \to P(X=3) = \frac{2}{16}$ ✓

$(X \geq 3) = \{RRRL, LRRR, RRRR\} \to P(X \geq 3) = \frac{3}{16}$ ✓



Pravdepodobnostná funkcia

$p(x) = P(X=x)$



Distribučná funkcia

$F(x) = P(X \le x)$

Rozdelenie náhodnej veličiny RNV: $(p(x), F(x))$ $\boxed{X \sim RNV}$

Stredná hodnota distribučnej náhodnej veličiny

$$\mu = EX = \sum x \cdot p(x) = 0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{7}{16} + 2\cdot\frac{5}{16} + 3\cdot\frac{2}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{27}{16} = 1{,}6875$$

Rozptyl diskrétnej náhodnej veličiny

1) $DX = E(X-EX)^2$

pre výpočet

2) $DX = \sum_{x_i} x_i^2 \, p(x_i) - (EX)^2$

prvá varianta:

$DX = E(X-EX)^2 = \sum (x-\mu)^2 \cdot p(x) =$

$$= \left(0-\frac{27}{16}\right)^2\cdot\frac{1}{16} + \left(1-\frac{27}{16}\right)^2\cdot\frac{7}{16} + \left(2-\frac{27}{16}\right)\cdot\frac{5}{16} + \left(3-\frac{27}{16}\right)^2\frac{2}{16} + \left(4-\frac{27}{16}\right)^2\cdot\frac{1}{16}$$

dá sa napísať aj inak

$= E(x^2) - (EX)^2 = (\sum x^2 \cdot p(x)) - \mu^2$ ← jednoduchšia varianta

$= 0^2\cdot\frac{1}{16} + 1^2\cdot\frac{7}{16} + 2^2\frac{5}{16} + 3^2\cdot\frac{2}{16} + 4^2\cdot\frac{1}{16} - \left(\frac{27}{16}\right)^2 = \frac{247}{16^2}$ ← musí to vyjsť kladné

Smerodajná odchýlka

$\sigma = \sqrt{DX} = \frac{\sqrt{247}}{16} \doteq 0{,}9823$

Spojité náhodné veličiny

12.11.2018

Definícia:

→ náhodná veličina X sa nazýva spojitá, ak existuje nezáporná funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká že pre každé $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < b$ platí $P(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx$

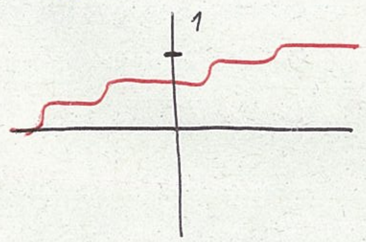
→ funkcia f sa nazýva hustota pravdepodobnosti náhodnej veličiny X

Niektoré vlastnosti hustoty:

→ $f(x) \ge 0$; → je spojitá

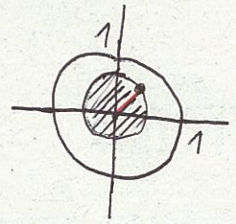
→ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ →

Diablovo schodisko

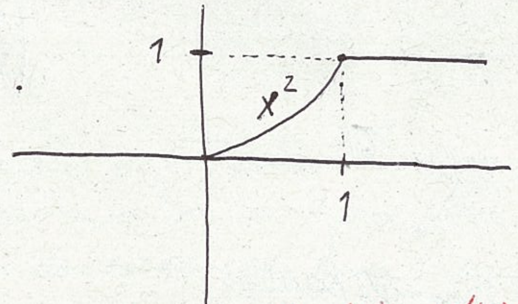


Pr → z prednášky

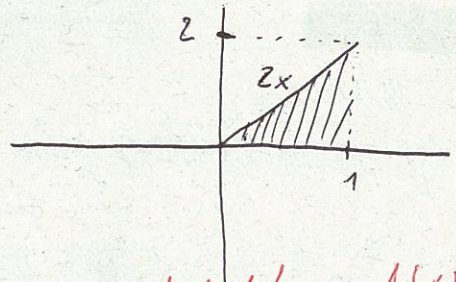
X = vzdialenosť od počiatku



$F(x) = P(X \le x)$



$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$



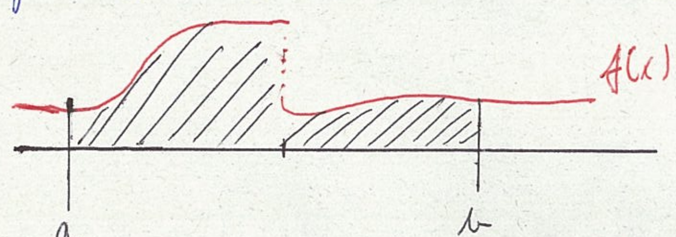
distribučná funkcia → F'(x) = graf hustoty → f(x)

Vlastnosti

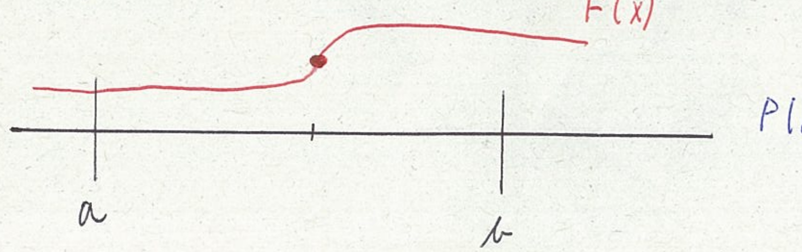
1. F(x) je spojitá, neklesajúca $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$
2. $P(a \le X \le b) = P(a<X<b) = F(b) - F(a)$
3. $P(X=a) = 0$
4. Existuje nezáporná funkcia F(x), taká že $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$\int_{-\infty}^{\infty} F'(x)\,dx = 1$



$P(a \le X \le b) = \int_a^b F(x)\,dx$



$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$