Riešenie sústav lineárnych rovníc

17. 9. 2018

Pr

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 5 \\ -3x + 5y + 2z &= -4 \\ x + 2y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \text{sústava lin. rovníc}$$

Sústava lineárnych rovníc obecne:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned}$$

Maticový tvar: $Ax = b$

Pz: Riedka matica = v každom riadku je niekoľko nulových prvkov

Metódy riešenia sústav lineárnych rovníc:

- → Priame = po konečnom počte matematických operácií dojde priamo k riešeniu
- → Iteračné = zvolí sa počiatočná aproximácia riešenia a postupne ju zlepšujeme = k presnému riešeniu sa dostaneme až v limite

Priame metódy: Cramerovo pravidlo
Gausova eliminačná metóda

1. Cramerovo pravidlo: vhodné pre veľmi malé sústavy

Zadaná sústava rovníc:
$$x_1 - 3x_2 = 7$$
$$8x_1 + x_2 = 3$$

Sústava rovníc upravíme na maticový tvar: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Aby sme mohli využiť Cramerovo pravidlo, tak musí byť determinant matice nenulový: $D = 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 8 = 1 + 24 = 25$ ✓ = ak $D \neq 0$ tak matica je regulárna

Vypočítame determinant D_1, ktorý vznikne nahradením prvého stĺpca matice vektorom pravých strán: $D_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 = 7 + 9 = 16$ ✓

Môžeme vypočítať koreň x_1 sústavy rovníc: $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{16}{25}$ ✓

Rovnakým spôsobom vypočítame aj druhý koreň x_2 sústavy rovníc $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 7 \cdot 8 = 3 - 56 = -53$ ✓ $\quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{53}{25}$

2. Gaussova eliminačná metóda:
sústavu pomocou elementárnych úprav (+ - * /) prevedieme na trojuholníkový tvar, z ktorého sa riešenie ľahko spočíta pomocou tzv. spätného chodu

Pr.
$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 5 \\ -3x + 5y + 2z &= -4 \\ x + 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) I \cdot \frac{3}{2} \quad I \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0{,}5 & 3{,}5 & 3{,}5 \\ 0 & 3{,}5 & -1{,}5 & -1{,}5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0{,}5 & 3{,}5 & 3{,}5 \\ 0 & 3{,}5 & -1{,}5 & -1{,}5 \end{array}\right) II \cdot \left(-\frac{3{,}5}{0{,}5}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0{,}5 & 3{,}5 & 3{,}5 \\ 0 & 0 & -26 & -26 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 5 & &\rightarrow x = 2 \\ 0{,}5y + 3{,}5z &= 3{,}5 & &\rightarrow y = 0 \\ -26z &= -26 & &\Rightarrow z = 1 \end{aligned}$$

nevýhody: výpočet je časovo náročný

Iteračné metódy:
- Jacobiho metóda
- Gauss-Seidelova metóda

1. Jacobiho metóda:
z 1. rovnice vyjadríme 1. neznámu, z 2. rovnice 2. neznámu atď... zvolíme počiatočnú aproximáciu riešenia $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)})^T$ dosadíme - vypočítame $x^{(1)}$ a ~~ge~~ opäť dosadíme atď..

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3 - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}\right)$$

Pokračujeme pokiaľ neplatí: $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < E$ pre všetky $i = 1, \dots, n$.

Konvergencia a divergencia metódy: → riešenie pomocou Jacobiho metódy nemusíme vždy nájsť

Keď pomocou aproximácie sa blížime k riešeniu tak potom metóda konverguje

Keď riešenie nenájdeme tak metóda diverguje

Podmienky konvergencie pre Jacobiho metódu:

1. Diagonálne dominantná matica

Matica A sa nazýva riadkovo ostro diagonálne dominantná keď je v každom riadku absolútna hodnota prvku na diagonále väčšia, než súčet absolút. hodnôt všetkých ostatných prvkov v danom riadku alebo:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad \text{pre } i = 1, \dots, n.$$

Podobne definujeme stĺpcovo ostro diagonálne dominantnú maticu

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| \quad \text{pre } j = 1, \dots, n.$$

! Je-li matica A ostro riadkovo alebo stĺpcovo diagonálne dominantná potom Jacobiho metóda konverguje pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $X^{(0)}$.

Jestliže matica nie je diagonálne dominantná, Jacobiho metóda konvergovať môže ale nemusí.

Pr. (Gauss-Seidelova metóda = počítame podobne ako u Jacobiho metódy)

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\ -x_1 + 20x_2 + x_3 &= 42 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 &= 33 \end{aligned}$$

Riešenie: z prvej rovnice si vyjadríme prvú neznámu, z druhej druhú neznámu a z tretej rovnice poslednú neznámu

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}1(-x_2 + x_3 + 9) \\ x_2 &= 0{,}05(x_1 - x_3 + 42) \\ x_3 &= 0{,}1 \cdot (-x_1 - x_2 + 33) \end{aligned}$$

Zvolíme počiat. aproximáciu $x^{(0)} = (0{,}9; 2{,}1; 3{,}3)$ a dosadíme do predošlých vzťahov pre naše neznáme

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0{,}1(-2{,}1 + 3{,}3 + 9) = 1{,}02 \\ x_2^{(1)} &= 0{,}05(0{,}9 - 3{,}3 + 42) = 1{,}98 \\ x_3^{(1)} &= 0{,}1(-0{,}9 - 2{,}1 + 33) = 3{,}00 \end{aligned}$$

Dostali sme ďalšiu aproximáciu, ktorú opäť dosadíme do sústavy rovníc (1)

$x_1^{(2)} = 0,1 \cdot (-1,98 + 3,00 + 9) = 1,002$

$x_2^{(2)} = 0,05\,(1,02 - 3,00 + 42) = 2,001$

$x_3^{(2)} = 0,1 \cdot (-1,02 - 1,98 + 33) = 3,000$

Zostavíme si tabuľku

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0,9	2,1	3,3
1	1,02	1,98	3,00
2	1,002	2,001	3,000
3	0,9999	2,0001	2,9997
4	0,99996	2,00001	3,00000

Sledujeme rozdiel v každej v dvoch po sebe idúcich aproximáciách, metódu ukončíme, keď sú rozdiely v absolútnej hodnote (u každej neznámej) menšia než požadovaná presnosť.

Gauss-Seidelova metóda: počítame podobne ako u Jacobiho metódy ale v každom kroku použijeme najnovšie hodnoty → veľké sústavy rovníc

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x - \dots - a_{3n}x_n^{(k)}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right)$$

Podmienky konvergencie pre Gauss-Seidelovu metódu:

Pozitívne definitná matica:

Symetrická matica A sa nazýva pozitívne definitná jestliže pre každý nenulový stĺpcový vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ platí

$$x^T A x > 0$$

Jestliže ľubovoľnú regulárnu maticu A vynásobíme maticou k nej transponovanou, dostaneme maticu, ktorá je symetrická a pozitívne definitná

- Ak je matica A ostro riadkovo alebo stĺpcovo diagonálne dominantná, tak Gauss-Seidelova metóda konverguje pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $x^{(0)}$
- Ak je matica A symetrická pozitívne definitná potom Gauss-Seidelova metóda konverguje pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $x^{(0)}$
- Ak matica nemá ani jednu z uvedených vlastností, Gauss-Seidelova metóda konvergovať môže ale nemusí.

Ako zaručiť konvergenciu Gauss-Seidelovej metódy

Vynásobíme pôvodnú sústavu $Ax = b$

maticou k A transponovanou $A^T \cdot Ax = A^T b$

dostaneme sústavu s pozitívne definitnou maticou, pre ktorú je konvergencia zaručená

Pr.

$$10x_1 + x_2 - x_3 = 9$$
$$-x_1 + 20x_2 + x_3 = 42$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 33$$

Riešenie:

Začneme s počiatočnou aproximáciou riešenia $x^{(0)} = (0,9;\ 2,1;\ 3,3)$. Pri výpočte $x_1^{(1)}$ pracujeme s počiatočnou aproximáciou, pri výpočte $x_2^{(1)}$ už využívame hodnotu $x_1^{(1)}$ a pri výpočte $x_3^{(1)}$ využijeme aj hodnotu $x_2^{(1)}$.

$x_1^{(1)} = 0,1\,(-x_2^{(0)} + x_3^{(0)} + 9) = 0,1 \cdot (-2,1 + 3,3 + 9) = 1,02$

$x_2^{(1)} = 0,05 \cdot (x_1^{(1)} - x_3^{(0)} + 42) = 0,05\,(1,02 - 3,3 + 42) = 1,986$

$x_3^{(1)} = 0,1 \cdot (-x_1^{(1)} - x_2^{(1)} + 33) = 0,1\,(-1,986 + 33) = 2,9994$

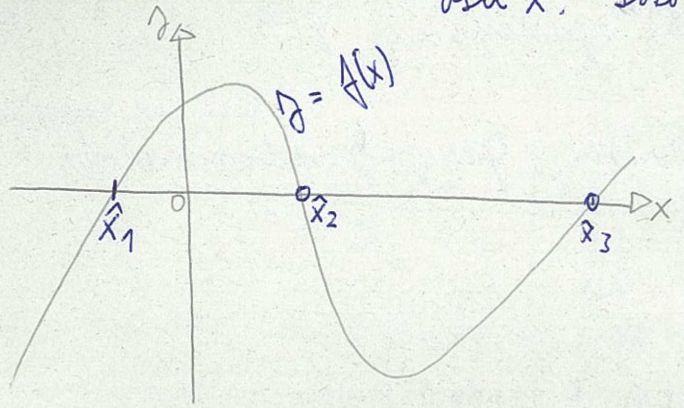
Tabuľka výsledkov do ďalších riadkov

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0,9	2,1	3,3
1	1,02	1,986	2,9994
2	1,00134	2,000097	2,999
3	⋮	⋮	
4			

24.9.2018

Numerické riešenie nelin. rovníc

Hľadáme riešenie rovnice: $f(x) = 0$, alebo body $\hat{x}$, kde graf funkcie f pretína osu x. Toto riešenie tiež nazývame koreň funkcie f



Podmienka zaručujúca existenciu koreňa v intervale:

- ak je f funkcia a je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ a funkčné hodnoty v bodoch a, b majú opač. znamienka, potom v intervale $\langle a, b \rangle$ leží aspoň jeden koreň! rovnice $f(x) = 0$
- → predpoklad spojitosti funkcie f je podstatný
- → koreňov môže byť v intervale $\langle a, b \rangle$ aj viac
- ak $f(a)$ a $f(b)$ nemajú opačné znamienka, existencia koreňov v intervale $\langle a, b \rangle$ tiež nie je vylúčená

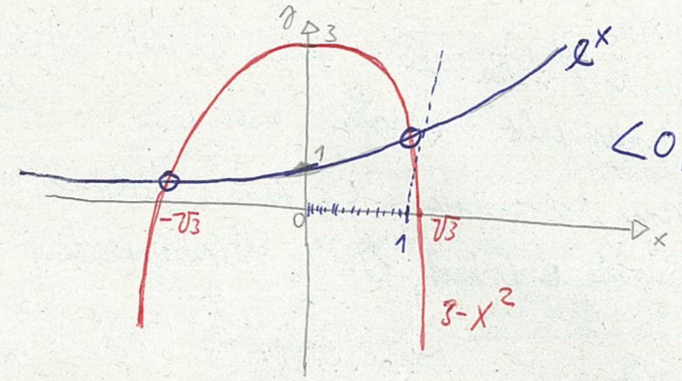
1. metóda pólení intervalov (bisekcia):

- → máme interval s koreňom, $\langle a, b \rangle$, znamienka $f(a)$ a $f(b)$ sú opačné
- → interval rozpolíme, jeho stred je: $\boxed{s = \frac{a+b}{2}}$ $\boxed{x_k = \frac{a_k + b_k}{2}}$
- → ak $f(a)$ a $f(s)$ majú opačné znamienka, pokračujeme s intervalom $\langle a, s \rangle$.
- → ak majú opač. znamienka $f(s)$ a $f(b)$, pokračujeme s intervalom $\langle s, b \rangle$
- → takto interval postupne zužujeme, pokiaľ jeho dĺžka nie je menšia než predom daná presnosť
- → približná hodnota koreňa $\hat{x}$ je stred posledného intervalu
- → metóda je spoľahlivá, vždy konverguje (nájde koreň), ale je veľmi pomalá

Pr. pomocou metódy pólení intervalu nájdete koreň rovnice.

$e^x + x^2 - 3 = 0$

$e^x = 3 - x^2 \Rightarrow \sqrt{3}, -\sqrt{3}$



$\langle 0, \sqrt{3} \rangle$

$f(1) = e + 1 - 3$
$= e - 2 > 0$

$f(0) = 1 - 3 < 0$

k	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(x_k)$
0	0	1	0,5	−	+	−
1	0,5	1	0,75	−	+	−
2	0,75	1	0,875	−	+	+
3	0,75	0,875	0,8125	−	+	−
⋮						
6	0,828125	0,84375	0,8359375			

Výpočet ukončíme lebo $b_6 - a_6 < 2 \cdot 0{,}01$, riešenie rovnice $e^x + x^2 - 3 = 0$ s presnosťou 0,01 je $x_6 \doteq 0{,}84$

2. Newtonova metóda (metóda dotyčníc):

- pracuje sa s dotyčnicami ku grafu funkcie f, predpokladáme že funkcia f má na interval deriváciu.
- → zvolíme x_0
- → ďalšiu aproximáciu počítame ako

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2$$

- → skončíme, až je $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, približná hodnota koreňa $\hat{x}$ je x_{k+1}
- → podmienka $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ nezaručuje, že $|x_{k+1} - \hat{x}| < \varepsilon$
- → metóda môže divergovať (postupná aproximácia sa neustáli alebo môže nájsť iný koreň)
- → ak metóda konverguje, je často veľmi rýchla

Ako zvoliť x_0, aby bola zaručená konvergencia Newtonovej metódy

Fourierova podmienka:

Nech v intervale $\langle a, b \rangle$ leží jediný koreň rovnice $f(x) = 0$ a nech $f'(x)$ a $f''(x)$ sú spojité a nemenia znamienko intervale $\langle a, b \rangle$.

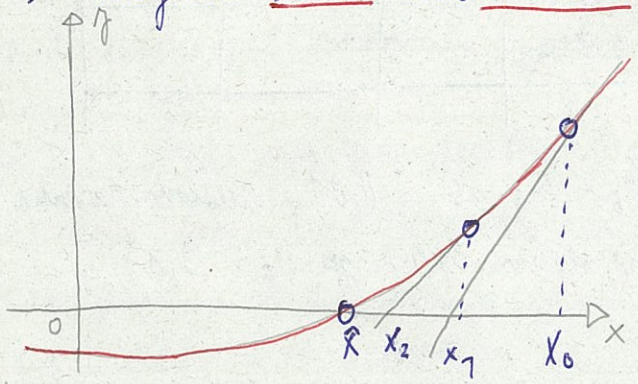
Zvolíme-li za počiatočnú aproximáciu x_0 ten z bodov a, b v ktorom je rovnaké znamienko funkčnej hodnoty a hodnoty druhej derivácie t.j. v ktorom platí:

$$\boxed{f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0}$$

Newtonova metóda bude konvergovať.

-> predpoklad stálosti znamienok f' a f'' na intervale $\langle a, b \rangle$ je podstatný

-> jestliže v bode x_0 Fourierova podmienka splnená nie je, Newtonova metóda konvergovať môže ale nemusí.



$$t: \; y - f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

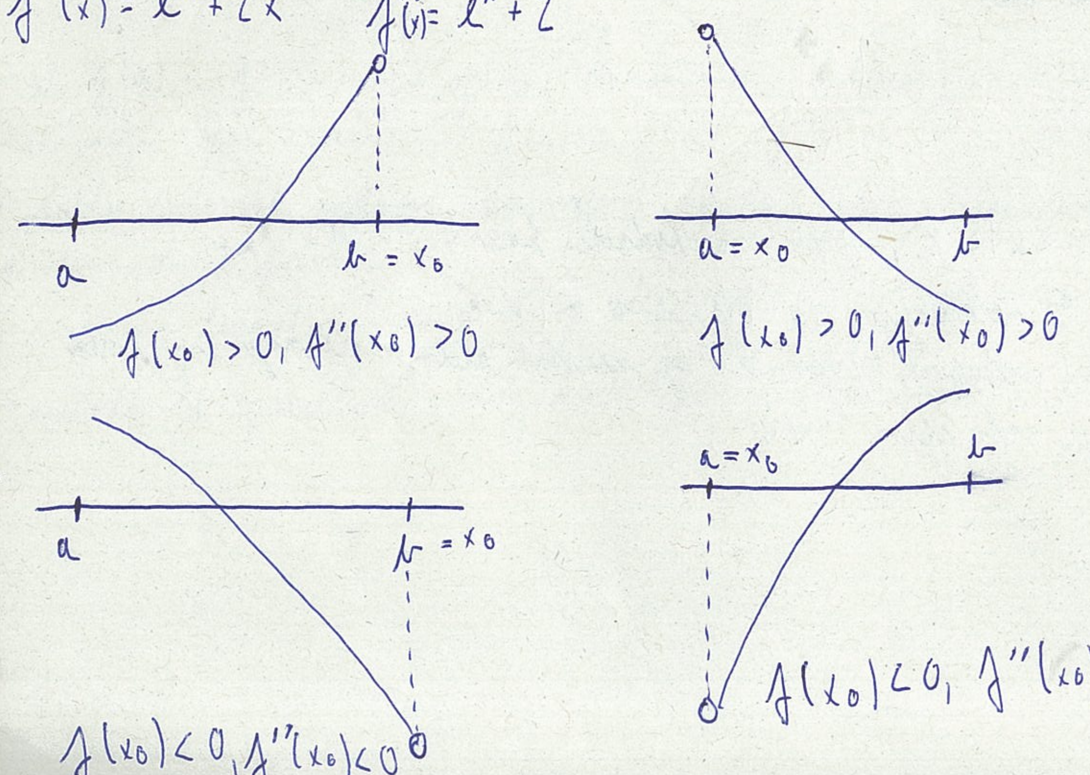
$$0 - f(x_k) = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Pr

$$f(x) = e^x + x^2 - 3$$

$$f'(x) = e^x + 2x \qquad f''(x) = e^x + 2$$



Na celom intervale $\langle -2, -1 \rangle$ je $f'(x) < 0$ a $f''(x) > 0$ (1. derivácia $\neq 0$, 2. der. nemení znam.)

Teraz z intervalu I vyberieme počiatočnú aproximáciu x_0 tak, aby bola splnená podmienka.

pretože $f(-2) = e^{-2} + 1 > 0$ a $f(-1) = e^{-1} - 2 < 0$, zvolíme $x_0 = -2$

Ďalšiu aproximáciu riešenia budeme počítať pomocou iteračného vzťahu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{x_k} + x_k^2 - 3}{e^{x_k} + 2x_k}$$

Dostaneme:

$$x_0 = -2$$
$$x_1 = -1{,}70623$$
$$x_2 = -1{,}67752$$
$$x_3 = -1{,}67723$$

3. metóda prostej iterácie:

-> rovnicu upravíme na tvar $x = g(x)$

-> zvolíme x_0

-> ďalšiu aproximáciu počítame ako

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, 2$$

-> skončíme ak je $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, približná hodnota koreňa $\hat{x}$ je x_{k+1}

-> podmienka $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ nezaručuje, že $|x_{k+1} - \hat{x}| < \varepsilon$

-> metóda môže divergovať alebo môže nájsť iný koreň.

-> konvergencia alebo divergencia závisí na tvare funkcie g

Podmienka konvergencie metódy prostej iterácie:

-> nech funkcia g zobrazuje interval $\langle a, b \rangle$ do seba, t.j.

$$g(x) \in \langle a, b \rangle \text{ pre } x \in \langle a, b \rangle$$

-> a nech g má na tomto intervale deriváciu pre ktorú platí

$$\max_{x \in \langle a, b \rangle} |g'(x)| < 1$$

-> potom v intervale $\langle a, b \rangle$ existuje riešenie rovnice $x = g(x)$ a postupnosť postupných aproximácií získaná predpisom $x_{k+1} = g(x_k)$ k nemu konverguje pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $x_0 \in \langle a, b \rangle$

→ Je-li $g'(x) > 1$ v okolí koreňa potom metóda prostej iterácie diverguje (alebo nájde koreň, ktorý nelebí v $\langle a, b \rangle$).

Numerické riešenie sústavy nelineárnych rovníc

Všeobecný tvar sústavy n rovníc s neznámymi $x_1, \dots, x_n$ je

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, \dots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_n(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Pre dve rovnice môžeme neznáme označiť napr. x, y sústava je potom

$$f_1(x, y) = 0$$
$$f_2(x, y) = 0$$

geometrický význam pre dve rovnice: Hľadáme priesečník dvoch kriviek v rovine

Metóda prostej iterácie pre sústavu:

Postup pre 2 rovnice (pre viac rovníc analogicky)

→ Sústavu upravíme na tvar:

$$x = g_1(x, y)$$
$$y = g_2(x, y)$$

→ Zvolíme počiatočnú aproximáciu (x_0, y_0)

→ Ďalšie aproximácie počítame ako:

$$x_{k+1} = g_1(x_k, y_k)$$
$$y_{k+1} = g_2(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2$$

→ Skončíme, až je $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ a súčasne $|y_{k+1} - y_k| < \varepsilon$

→ metóda môže divergovať

→ konvergencia či divergencia závisí na tvare funkcií g_1, g_2

Newtonova metóda pre sústavu:

Postup pre 2 rovnice (pre viac analogicky)

→ zvolíme počiatočnú aproximáciu (x_0, y_0)

→ Označíme $\delta_{x,k} = x_{k+1} - x_k$, $\delta_{y,k} = y_{k+1} - y_k$

→ V každom kroku metódy nájdeme $\delta_{x,k}$ i $\delta_{y,k}$ ako riešenie sústavy lineárnych rovníc

$$f'(x_k, y_k) \cdot \begin{pmatrix} \delta_{x,k} \\ \delta_{y,k} \end{pmatrix} = -f(x_k, y_k),$$

kde

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \text{ a } f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

→ potom $x_{k+1} = x_k + \delta_{x,k}$, $y_{k+1} = y_k + \delta_{y,k}$

→ skončíme až je $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ a súčasne $|y_{k+1} - y_k| < \varepsilon$

→ metóda môže divergovať, ale konvergencia je často rýchla.

1.10.2018

Aproximácia Funkcií

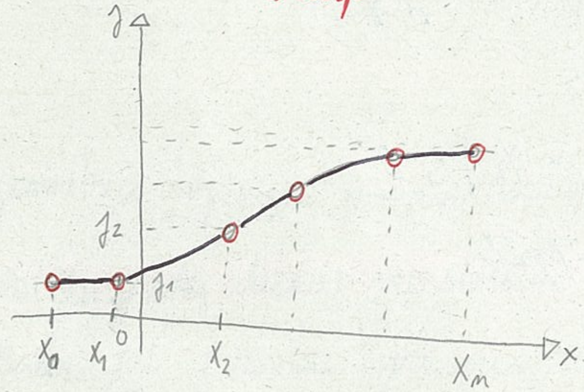
- Poznáme hodnoty určitej funkcie f v bodoch $\underbrace{x_0, x_1, \dots, x_n}_{\text{nazývame uzly}}$
- Predpokladáme že $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

-> funkčné hodnoty v uzloch označujeme: $f_0, f_1, \dots, f_n$ alebo $f_0, \dots, f_n$

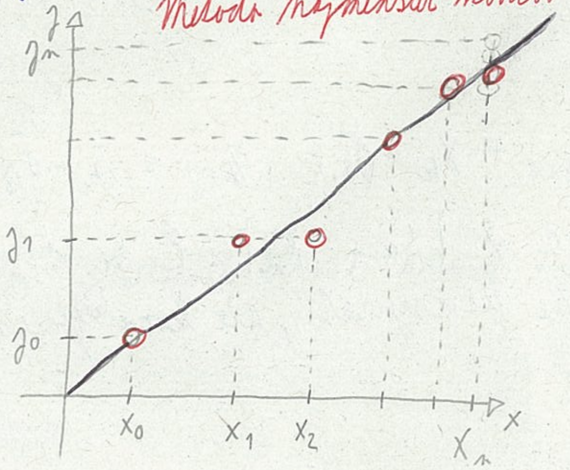
-> Zaujímajú nás funkčné hodnoty v iných než uzlových bodoch, prípadne i hodnoty derivácie alebo určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$

-> Body preložíme krivkou - grafom funkcie $y = P(x)$.

Interpolácia



Metoda najmenších štvorcov



-> interpolačný polynóm < Newtonov / Lagrangeov

-> Spline = funkcia P je po častiach polynóm

Polynóm:

-> Polynóm stupňa n $(n \geq 0)$ je funkcia

$$\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ kde platí } a_i \in R \text{ pre } i = 0, \dots, n,\ a_n \neq 0}$$

Interpolačný polynóm

- nech sú dané navzájom rôzne body $x_0, \dots x_n$ a funkčné hodnoty v nich $f_0, \dots, f_n$
- interpolačný polynóm daný týmito bodmi je polynóm P_n stupňa nanajvýš n, pre ktorý platí: $\boxed{P_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n}$
- interpolačný polynóm vždy existuje a je daný jednoznačne. Môžme ho však hľadať v rôznych tvaroch

Ako hľadať interpolačný polynóm?

-> koeficienty polynómu $a_0, \dots, a_n$ nájdeme ako riešenie odpovedajúcej sústavy rovníc

(Pr) nájdite I.P. daný uzlami

i	0	1	2
x_i	1	2	4
f_i	0	0	3

} používajú sa dva postupy: < Newtonov I.P. / Lagrangeov I.P.

Newtonov Interpolačný polynóm

-> polynóm hľadáme v tvare:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Koeficienty a_i vypočítame ako:

$$a_0 = f_0$$
$$a_1 = f[x_0, x_1]$$
$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$
$$\vdots$$
$$a_n = f[x_0, \dots, x_n]$$

$f[x_0, \dots, x_k]$ => sú to tzv. ~~poměrné~~ pomerné diferencie k-teho rádu

Pomerné diferencie 1. rádu: $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$, $i = 0, \dots, n-1$

Pomerné diferencie 2. rádu: $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$

Všeobecné pomerné diferencie k-teho rádu:

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \qquad i = 0, \dots, n-k$$

(Př) aproximácia funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ newtonovým interpolačným polynómom v uzloch:

x_i || 1 | 2 | 2,5 | 3,2 | 4

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+3}]$	$f[x_0 \ldots x_4]$
0	1	1	$\frac{0,5-1}{2-1}$	$\frac{-0,2-(-0,5)}{2,5-1}$	$\frac{0,0625-0,2}{3,2-1}$	$\frac{-0,015625-(-0,0625)}{4-1}$
1	2	0,5	$\frac{0,4-0,5}{2,5-2}$	$\frac{-0,125-(-0,2)}{3,2-2}$	$\frac{0,03125-0,0625}{4-2}$	
2	2,5	0,4	$\frac{0,3125-0,4}{3,2-2,5}$	$\frac{-0,078125-(-0,125)}{4-2,5}$		
3	3,2	0,3125	$\frac{0,25-0,3125}{4-3,2}$			
4	4	0,25				
		↓	↓	↓	↓	↓
		1	−0,5	0,2	−0,0625	0,015625
		0,5	−0,2	0,0625	−0,015625	
		0,4	−0,125	0,03125		
		0,3125	−0,078125			
		0,25				

Dosadíme do vzorca:

$$P_4(x) = 1 - 0,5\cdot(x-1) + 0,2(x-1)\cdot(x-2) - 0,0625(x-1)(x-2)(x-2,5) +$$
$$+ 0,015625\cdot(x-1)(x-2)(x-2,5)(x-3,2)$$

Lagrangeov Interpolačný Polynóm:

$$P_n(x) = f_0 \cdot l_0(x) + f_1 \cdot l_1(x) + \ldots + f_n \cdot l_n(x) =$$
$$= f_0 \cdot \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} + f_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \cdots$$
$$\ldots + f_n \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

Polynómy l_i, $i=0,\ldots,n$ majú vlastnosť že
$$l_i(x_j) = 0 \text{ pre } j \neq i, \quad l_i(x_i) = 1$$

(Př) Nájdite interpolačný polynóm v Lagrangeovom tvare daný bodmi

x_i || −1 | 0 | 2 | 3
f_i || 5 | 10 | 2 | 1

Riešenie: máme zadané 4 body, interpolačný polynóm bude najvyššieho tretieho stupňa

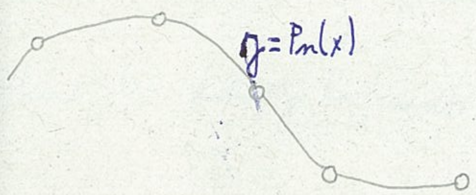
$$P_3(x) = 5\,\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)} + 10\cdot\frac{(x-(-1))\cdot(x-2)(x-3)}{(0-(-1))(0-2)(0-3)} + 2\cdot\frac{(x-(-1))(x-0)(x-3)}{(2-(-1))(2-0)(2-3)} +$$
$$1\cdot\frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)}{(3-(-1))(3-0)(3-2)} = x^3 - 4x^2 + 10$$

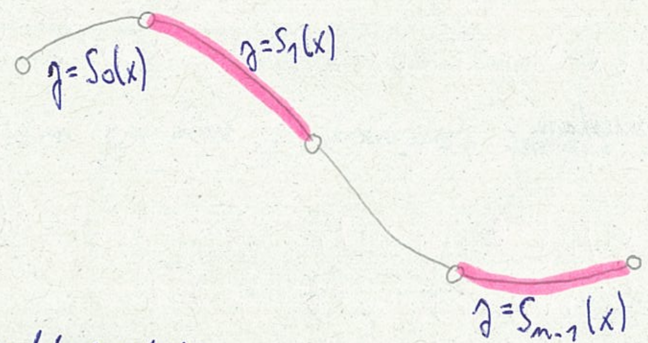
Interpolácia pomocou splajnu

- u interpolácie požadujeme aby graf aproximujúcej funkcie prechádzal všetkými uzlovými bodmi

-> interpolačný polynóm - aproximujúca funkcia je polynóm

-> Spline (splajn) - aproximujúca funkcia je po častiach polynóm





Splajn k-teho rádu:

- Splajn k-teho rádu je funkcia S pre ktorú platí

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & \text{pre } x \in \langle x_0, x_1 \rangle \\ S_1(x) & \text{pre } x \in \langle x_1, x_2 \rangle \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) & \text{pre } x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle \end{cases}$$

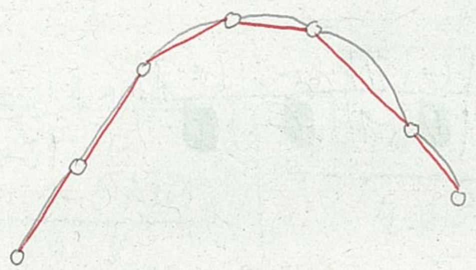
-> na každom intervale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ je S_i polynóm stupňa najviac k

-> S má na intervale $\langle x_0, x_n \rangle$ spojité derivácie až do rádu $k-1$ vrátane

Lineárny splajn

-> každé dva susedné body $[x_i, f_i]$, $[x_{i+1}, f_{i+1}]$ prepojíme úsečkou

$$S_i(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i), \quad i = 0, \dots, n-1$$



-> má-li f spojitú deriváciu druhého rádu na intervale $\langle x_0, x_n \rangle$ potom existuje konštanta C taká, že pre $x \in \langle x_0, x_n \rangle$ platí: $|f(x) - S(x)| < C \cdot h^2$, kde h je maximálna vzdialenosť medzi susednými uzlami. Chyba sa dá spraviť pre dostatočný počet uzlov ľubovoľne malá.

-> Najpoužívanejší je splajn 3. rádu, tzv. kubický splajn

Kubický splajn

-> kubický splajn je funkcia $S(x)$, ktorá je kubický polynóm na každom subintervale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$$

a vyhovuje podmienkam:

$$S_i(x_i) = f(x_i), \ i = 0, \dots, n-1, \qquad S_{n-1}(x_n) = f(x_n)$$
$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}), \ i = 0, \dots, n-2$$
$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}), \ i = 0, \dots, n-2$$
$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}), \ i = 0, \dots, n-2$$

Aby sa dal kubický splajn jednoznačne určiť, predpisujeme ešte okrajové podmienky:

a) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$

b) $S''(x_0) = f''_0$, $S''(x_n) = f''_n$

c) $S'(x_0) = f'_0$, $S'(x_n) = f'_n$

d) podmienka typu „not-a-knot" (S_1 je rovnaký kubický polynóm ako S_0 a S_{n-2} je rovnaký kubický polynóm ako S_{n-1} tj. $S'''_0(x_1) = S'''_1(x_1)$ a $S'''_{n-2}(x_{n-1}) = S'''_{n-1}(x_{n-1})$)

Postup pre nájdenie kubického splajnu:

1. spôsob -> vhodný pre okrajové podmienky typu a) a b)

prednáška 10 / 8, 9 slajd

Metóda najmenších štvorcov (MNŠ)

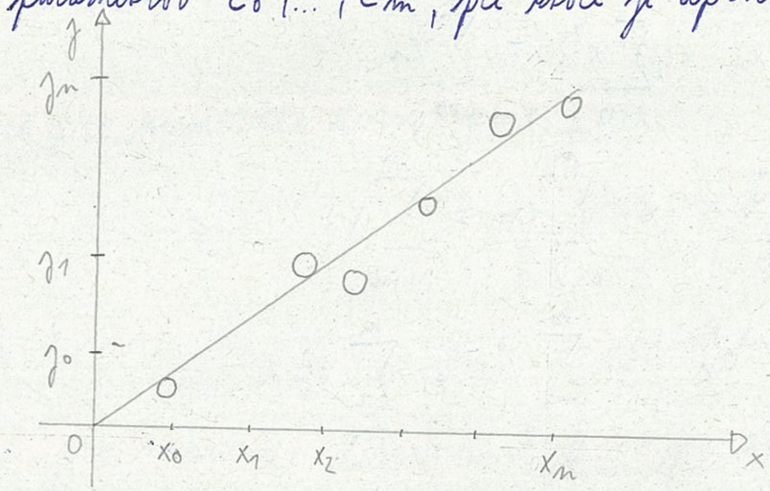
-> máme body $[x_i, y_i]$, $i = 0, \dots, n$, obvykle získané meraním

-> poznáme typ funkčnej závislosti medzi x a y, napr. $y = c_0 + c_1 x$, obecne

$$y = P_m(x) = c_0 \varphi_0(x) + \dots + c_m \varphi_m(x),$$

φ_j, $j = 1, \dots, m$ sú známe funkcie

-> Hľadáme hodnoty parametrov $c_0, \dots, c_m$, pre ktoré je aproximácia najlepšia



Volíme tie hodnoty koeficientov $c_0, \dots, c_m$ pre ktoré je kvadratická odchýlka minimálna

$$\rho^2(c_0, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P_m(x_i))^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - c_0 \varphi_0(x_i) - \dots - c_m \varphi_m(x_i))^2$$

Aproximácia priamkou

- máme body $[x_i, y_i]$, $i = 0, \dots, n$
- hľadáme priamku $y = P_1(x) = c_0 + c_1 x$,
- pre ktorú je $\rho^2(c_0, c_1) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - c_0 - c_1 x_i)^2$ minimálne

normálna rovnica pre koeficienty priamky

Koeficienty c_0 a c_1 nájdeme ako riešenie sústavy rovníc

$$c_0 \overbrace{(n+1)}^{\text{počet bodov}} + c_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i$$

$$c_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$$

Ak sú vektory $(1, 1, \dots, 1)$ a $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ lineárne nezávislé normálna sústava má jediné riešenie

Iná možnosť zápisu sústavy normálnych rovníc pre priamku:

$$Z^T Z c = Z^T \cdot Y, \quad \text{kde } Z = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ odtiaľ potom:

$$c = (Z^T Z)^{-1} \cdot Z^T \cdot Y$$

Aproximácia parabolou

- máme body $[x_i, y_i]$, $i = 0, \dots, n$
- hľadáme parabolu $y = P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

Normálna rovnica pre koeficienty paraboly

- koeficienty c_0, c_1 a c_2 nájdeme ako riešenie sústavy rovníc

$$c_0 \overbrace{(n+1)}^{\text{počet bodov}} + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + c_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i$$

$$c_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$$

$$c_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 + c_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i$$

Iná možnosť zápisu sústavy normálnych rovníc pre parabolu

$$Z^T \cdot Z c = Z^T \cdot Y, \quad \text{kde } Z = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ odtiaľ potom

$$c = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y$$

+ Aproximácia obecne, MNŠ - nelineárny model, Aproximácia exponenciálou -> prednáška 10

Numerické derivovanie

8.10.2018

Pripomenutie definície derivácie

Derivácia funkcie f v bode x_0 sa definuje ako $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ alebo tiež: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Približnú hodnotu derivácie funkcie f v bode x môžeme počítať tak, že funkciu f nahradíme interpolačným polynómom a len potom zderivujeme:

$$f'(x) \doteq P_n'(x)$$

pre deriváciu vyšších rádov

$$f^{(n)}(x) \doteq P^{(n)}(x)$$

Často používané vzorce pre numerické derivovanie I

$$f'(x) \doteq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \underset{O}{\nabla}{}^{2}$$ -> pre krajné body

$$f'(x) \doteq \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$ -> pre stredné body

Často používané vzorce pre numerické derivovanie II -> presnejšie

-> predpokladáme, že poznáme hodnoty funkcie f v bodoch x_0, $x_1 = x_0 + h$ a $x_2 = x_0 + 2h$ potom

$$f'(x_0) \doteq \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2h}$$

$$f'(x_1) \doteq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} \quad \underset{O}{\nabla}{}^{1}$$

$$f'(x_2) \doteq \frac{f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)}{2h}$$

Tieto vzorce dostaneme pomocou derivácie interpolačného polynómu 2. stupňa s uzlami x_0, x_1 a x_2

Chyba uvedených vzorcov

- pre chybu vzorcov I platí

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{2} h \cdot f''(\xi)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{1}{2} h \cdot f''(\xi_2)$$

$\xi \in \langle x, x+h \rangle$, resp. $\xi_2 \in \langle x-h, x \rangle$

Pre chybu vzorcov II platí

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2h} + \frac{1}{3} h^2 \cdot f'''(\xi_2)$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} - \frac{1}{6} h^2 \cdot f'''(\xi_1)$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)}{2h} + \frac{1}{3} h^2 f'''(\xi_2)$$

$\xi \in \langle x_0, x_2 \rangle$

Vzorec pre výpočet 2. derivácie

-> predpokladáme že poznáme hodnoty funkcie f v bodoch x_0, $x_1 = x_0 + h$ a $x_2 = x_0 + 2h$.

potom:

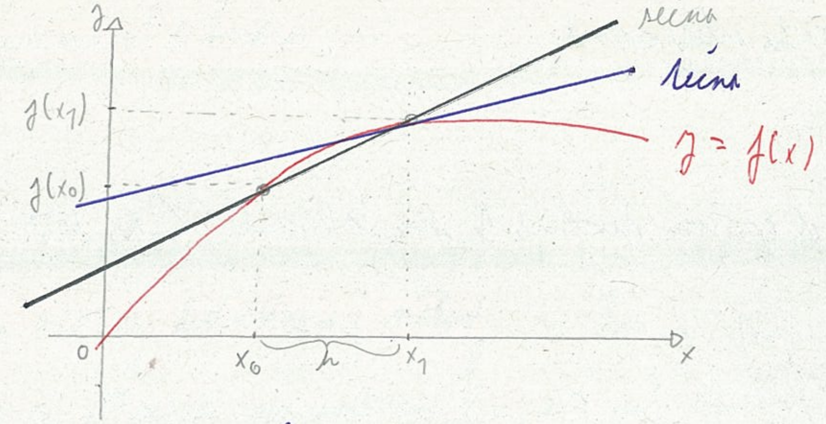
$$f''(x_1) \doteq \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2}$$

-> vzorec dostaneme pomocou druhej derivácie interpolačného polynómu s uzlami x_0, x_1 a x_2. Pre chybu platí

$$f''(x_1) = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2} - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi_2)$$

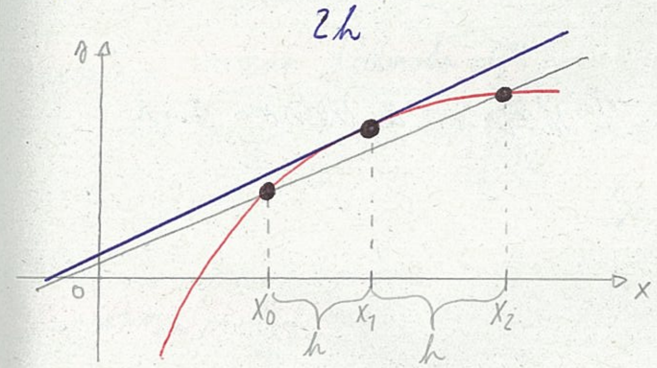
$\xi_2 \in \langle x_0, x_2 \rangle$

Teoreticky: čím menší krok h, tým presnejšia aprox.
v praxi to platiť nemusí
Pz: pre príliš malý krok h sa zväčšuje zaokrúhľovacia chyba



Pr

$$f'(x_1) \doteq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h}$$

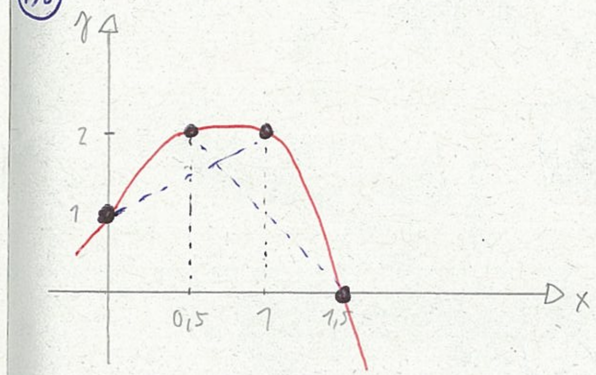


$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} = \frac{(x_1+h)^2 - (x_1-h)^2}{2h} =$$

$$= \frac{2x_1 h - (-2x_1 h)}{2h} = \frac{4x_1 h}{2h} = 2x_1 = f'(x_1)$$ ✓

Pr



$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(0) \doteq \frac{f(0,5) - f(0)}{0,5} = \frac{2-1}{0,5} = \underline{\underline{2}}$$

$$f'(0,5) = \frac{f(1) - f(0,5)}{0,5} = \underline{\underline{0}}$$

$$f'(1) = \frac{0-2}{0,5} = \underline{\underline{-4}}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

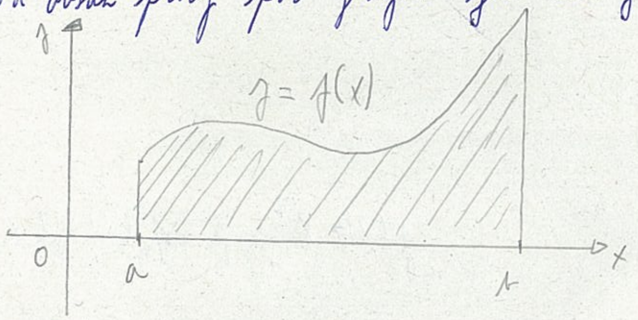
$$f'(0,5) \doteq \frac{f(1) - f(0)}{2 \cdot 0,5} = \underline{\underline{1}}$$

$$f'(1) \doteq \frac{f(1,5) - f(0,5)}{2 \cdot 0,5} = \underline{\underline{-2}}$$

Numerické integrovanie

Pripomenutie významu určitého integrálu

$\int_a^b f(x)\,dx$ udáva obsah plochy pod grafom funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$



Lichobežníková metóda

→ Funkciu f nahradíme interpolačným polynómom 1. stupňa s uzlami a, b
priamkou

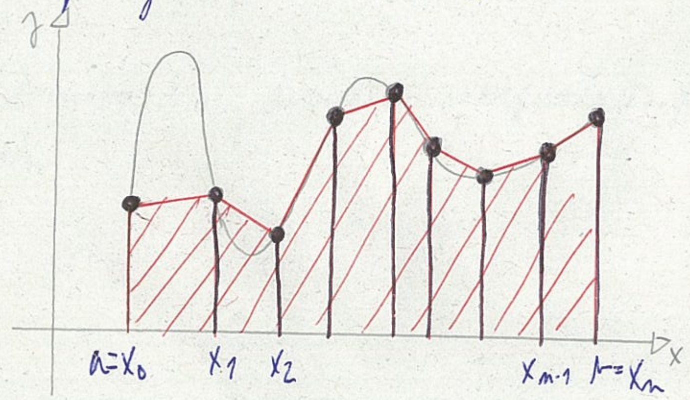
$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

Zložená lichobežníková metóda

→ interval $\langle a, b \rangle$ rozdelíme na n dielikov dĺžky $h = \frac{b-a}{n}$

→ deliace body označíme $x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h, \dots, x_n = b$

→ na každom dieliku použijeme lichobežníkovú metódu



Lichobežníkové pravidlo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \doteq L_n = h\cdot\left(\tfrac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})+\tfrac{1}{2}f(x_n)\right)}$$

Chyba zloženej lichobežníkovej metódy

→ Je-li f'' spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ potom existuje $\xi_0 \in \langle a, b \rangle$, pre

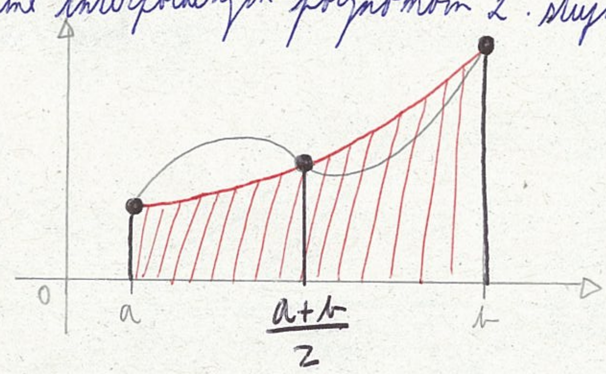
$$\int_a^b f(x)\,dx = L_n - \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot f''(\xi_0)$$

Najväčšia možná hodnota chyby

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - L_n\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot \max_{t\in\langle a,b\rangle}\left|f''(t)\right|$$

Simpsonova metóda

Funkciu f nahradíme interpolačným polynómom 2. stupňa s uzlami: a, $\frac{a+b}{2}$, b - parabolou

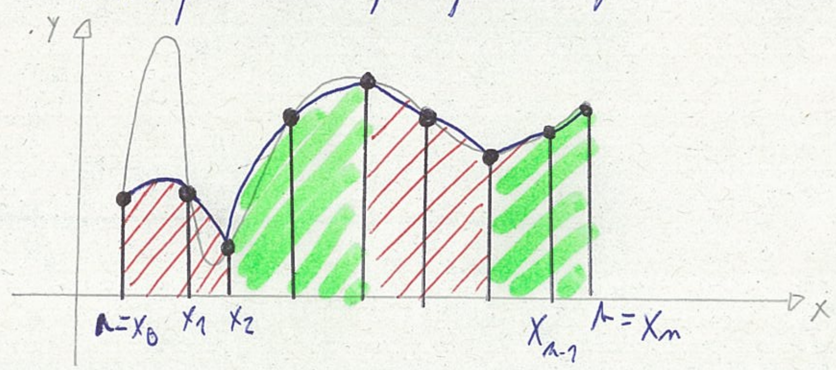


$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

Zložená Simpsonova metóda

→ Interval $\langle a, b \rangle$ rozdelíme na n dielikov dĺžky $h = \frac{b-a}{n}$, pričom n musí byť párne.

→ na dvojiciach susedných dielikov použijeme Simpsonovu metódu



Simpsonovo pravidlo

→ PÍS4

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq S_n = \frac{h}{3}\cdot\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\dots\right.$$

$$\left.\dots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right) = \frac{h}{3}\cdot\left(f(x_0)+4\cdot\sum_{\substack{0<i<n\\ i \text{ je liché}}} f(x_i)+2\cdot\sum_{\substack{0<i<n\\ i \text{ je sudé}}} f(x_i)+f(x_n)\right)$$

Chyba zloženej Simpsonovej metódy

- ak je $f^{(4)}$ spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$, potom existuje bod $\xi\in\langle a,b\rangle$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_n - \frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot f^{(4)}(\xi)$$

Najväčšia možná hodnota chyby:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot\max_{t\in\langle a,b\rangle}\left|f^{(4)}(t)\right|$$

Numerické riešenie diferenciálnych rovníc

15.10.2018

Základný tvar diferenciálnej rovnice s počiatočnou podmienkou:

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0)=y_0 \quad (1)$$

Riešenie diferenciálnej rovnice:

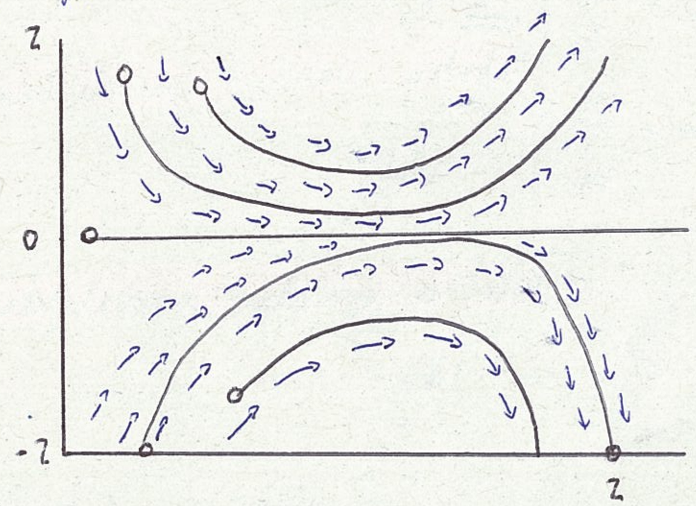
- riešenie diferenciálnej rovnice $y'=f(x,y)$ na intervale I je funkcia $y=y(x)$ taká, že pre každé $x\in I$ platí

$$y'(x)=f(x,y(x))$$

- ak je funkcia f spojitá na oblasti $D=\{(x,y): x_0-a\le x\le x_0+a,\ y_0-b\le y\le y_0+b\}$, potom má počiatočná úloha (1) riešenie. Ak je aj $\frac{\partial f}{\partial y}$ na oblasti D spojitá, tak má riešenie jediné.

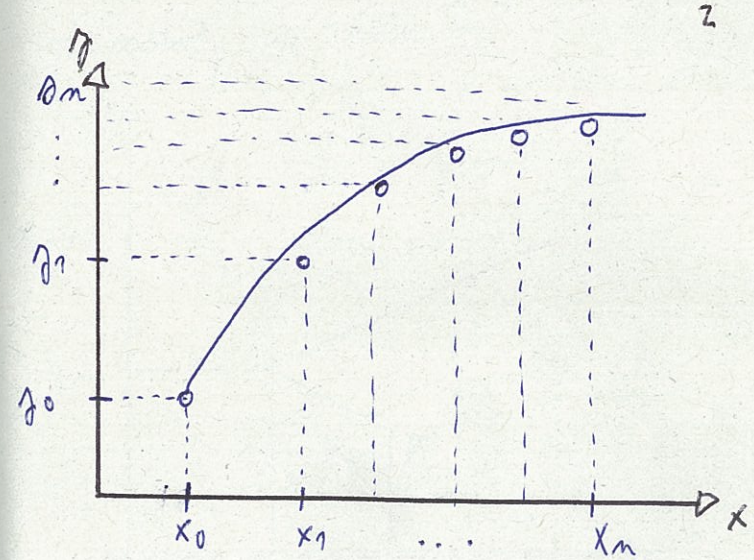
Smerové pole:

→ do každého bodu (x,y) umiestnime šípku so smernicou $k=f(x,y)$, riešenie rovnice $y'=f(x,y)$ sa riadi týmito šípkami



→ Pri numerickom riešení diferenciálnej rovnice hľadáme približné hodnoty riešení v bodoch $x_1, x_2, x_3, \dots$ Tieto hodnoty označíme y_1, y_2, y_3.
Výsledkom je tabuľka približných hodnôt riešení.
Ďalej budeme predpokladať, že uzly sú ekvidištantné s krokom h:

$$x_i = x_0 + i\cdot h, \quad i=0,1,2,\dots$$



Príklady riešení na prednáške (Dif. rovnice s počiatočnou podm.)

Pr1

$y' = y \,,\quad y(2) = -4$ ← počiatočná podmienka

$y = k \cdot e^x$

$-4 = k \cdot e^2$

$k = -4 e^{-2}$ → $y = -4e^{-2} \cdot e^x$

Pr2

$y' = \frac{y}{x} \,,\quad y(2) = -4$

$y = k \cdot x$ ← obecné riešenie

$-4 = k \cdot 2$

$k = -2$ → $y = -2x$ ← jediné riešenie počiatočnej úlohy

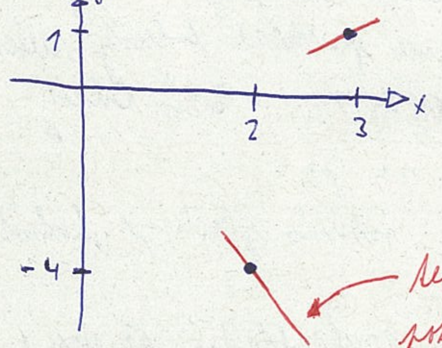
Pr3

$y' = \frac{y}{x} \,,\quad y(2) = -4$

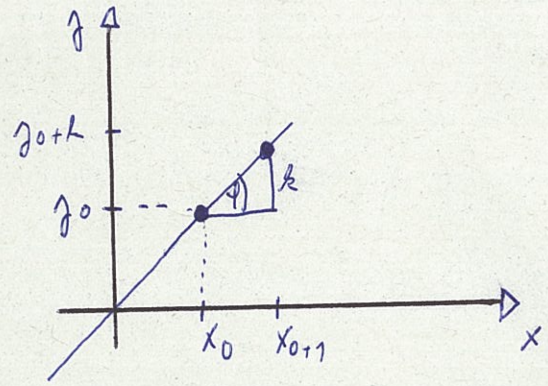
$y'(2) = \frac{y(2)}{2} = \frac{-4}{2} = \underline{\underline{-2}}$

$y'(3) = \frac{y(3)}{3} = \frac{1}{3}$

} smernica priamky



tečna k riešeniu v danom bode (môže byť aj vektor) ale potom sa to volá smerové pole



smernica k

Eulerova metóda

→ hľadáme približné hodnoty riešení počiatočnej úlohy $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

→ hodnotu riešenia v x_0 t.j. y_0 poznáme z počiatočnej podmienky.

→ hodnoty riešenia v ďalších bodoch počítame podľa vzťahu

♥ $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad i = 0,1,2$

Jednokrokové a viackrokové metódy

→ u jednokrokových metód hodnotu riešenia v bode x_{i+1} t.j. y_{i+1} počítame iba na základe hodnoty riešenia v predošlom uzle, u viackrokových metód sa využívajú hodnoty riešení vo viacerých predošlých uzloch

Rád jednokrokových metód - veľmi zjednodušene

→ jednokroková metóda je rádu p (p je prirodzené číslo), ak je rozdiel v približnej a presnej hodnote riešenia v každom uzle rádovo h^p.

Eulerova metóda je rádu $\underline{1}$

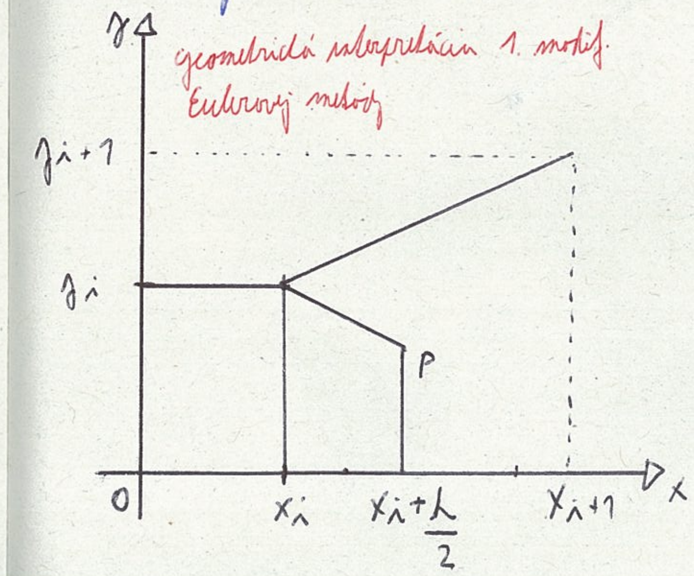
1. modifikovaná Eulerova metóda

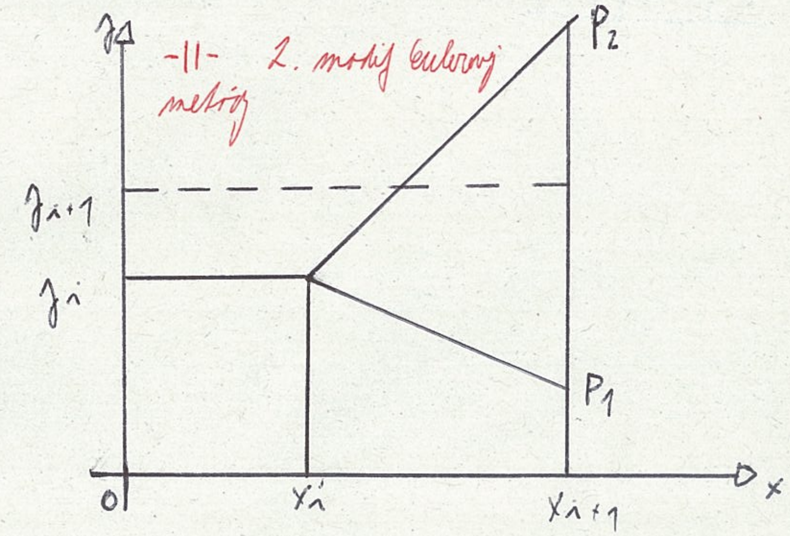
$y_{i+1} = y_i + h \cdot k_2$ kde $k_1 = f(x_i, y_i)$ a $k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1)$

2. modifikovaná Eulerova metóda

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (k_1 + k_2)$ kde $k_1 = f(x_i, y_i)$ a $k_2 = f(x_i + h, y_i + h k_1)$

→ obe metódy sú rádu $\underline{\underline{2}}$





Príklady zo skrípt

Pr 10.2 str 145

-> Eulerovou metódou s krokom $h = 0{,}1$ riešte počiatočnú úlohu

$y' = x^2 - y$, $y(0) = 1$ na intervale $\langle 0; 0{,}5 \rangle$

Riešenie: v našom prípade je $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ a $f(x, y) = x^2 - y$. Približné hodnoty riešenia v ďalších bodoch budeme počítať podľa vzorca:

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}1 \cdot (x_i^2 - y_i), \quad i = 0, \dots, 4$$

Vypočítané hodnoty zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	0,9	0,811	0,7339	0,6695	0,6186
$y(x_i)$	1	0,9052	0,8213	0,749	0,6689	0,6435

Príklady z prednášky

Pr1

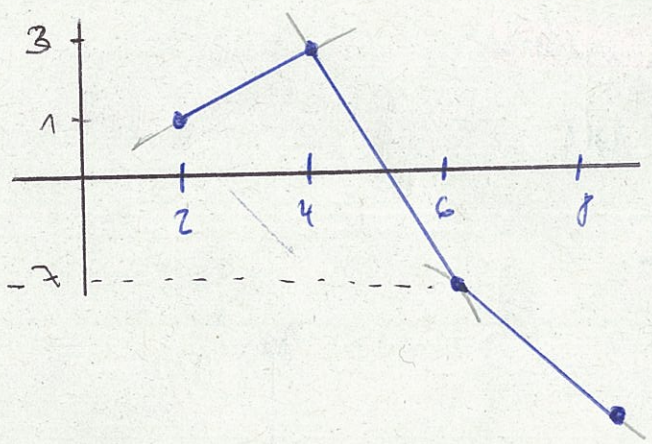
$y' = x - y^2$, $y(2) = 1$, $h = 2$ ← krok

$\Delta h = 2$

DÔLEŽITÉ

$\boxed{\begin{array}{l} k = x - y^2 \leftarrow \text{smernica } k \\ \Delta y = k \cdot \Delta x \end{array}}$

X	y	k
2	1	1
4	3	-5
6	-7	-43
8	-93	8657

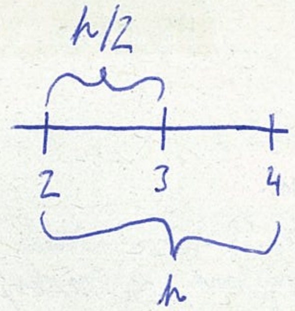


Pr2 1. Eulerova modifikácia

X	y	k_1	$\overbrace{x_p \quad y_p}^{\text{pomocný bod}}$		k_2
			x_p	y_p	
2	1	1	3	2	-1
4	-1	3	5	2	1
6	1	…	…	…	…
8					

$h = 2$

$\frac{h}{2} = 1$



$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1)$

Pr3 2. Eulerova modifikácia

X	y	k_1	x_p	y_p	k_2	$\frac{k_1 + k_2}{2}$
2	1	1	4	3	-5	-2
4	-3	-5	6	-13	-163	-84
6	-171					
8						

$\Delta y = k \cdot h \rightarrow h = 4 - 2 = 2$

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + h, y_i + h k_1)$

22.10.2018

PRAVDEPODOBNOSŤ

1. Klasická pravdepodobnosť:

Základný priestor

-> Prevádzame pokus, ktorý má n možných výsledkov, pričom všetky tieto výsledky sú rovnako pravdepodobné.

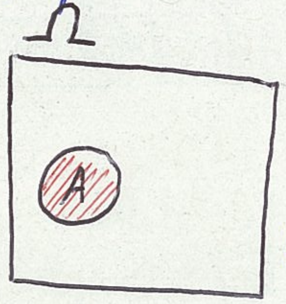
-> Ω = množina všetkých možných výsledkov tohto pokusu. Potom $|\Omega| = n$ -> počet prvkov množiny.

-> jednotlivé prvky množiny Ω budeme označovať $w_1, w_2, \dots, w_n$

Náhodný jav a jeho pravdepodobnosť

-> náhodným javom nazveme akúkoľvek podmnožinu množiny Ω.

-> náhodné javy sa budú značiť veľkými písmenami $(A, B, \dots)$



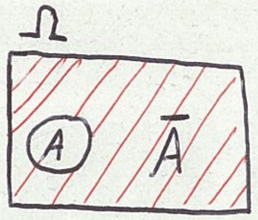
-> Pravdepodobnosť javu A označíme $P(A)$ a definujeme ju ako:

$$P(A) = \frac{\text{počet možností priaznivých javu A}}{\text{počet všetkých možností}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Operácia s javmi -> jav opačný

-> jav opačný k javu A označíme $\bar{A}$.

-> $\bar{A}$ nastane práve vtedy, ak nenastane jav A.

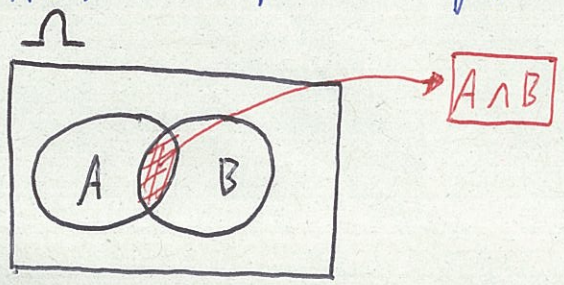


$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

Operácia s javmi -> Prienik

-> Prienik javov A, B označíme $A \cap B$

-> $A \cap B$ nastane práve vtedy, ak nastanú oba javy A, B



Závislosť a nezávislosť náhodných javov

Intuitívny pojem nezávislosti

-> javy A, B sú navzájom nezávislé, ak to že nastal jav A nijako neovplyvní pravdepodobnosť toho, že nastane jav B

Príklad (nezávislý jav)

-> hodíme dvoma kockami: A... na prvej kocke padla šestka, B... na druhej padla 1

-> V športe: A... vyhrajeme v 1. kole, B... vyhrajeme v druhom kole

Príklad (závislý jav)

-> hodíme dvoma kockami: A... na prvej kocke padne šestka, B: padol súčet 12

-> z balíčka 52 kariet (dvojka až eso, všetky 4 farby) vytiahneme dve karty:
A... prvá karta je eso, B... druhá karta je eso

Pravdepodobnosť prieniku dvoch nezávislých javov

-> Pre javy A, B, ktoré sú navzájom nezávislé, platí

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

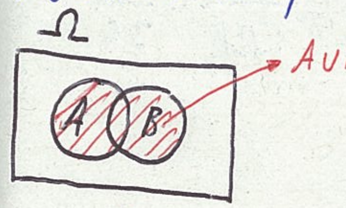
javy sú nezávislé

PZ: pre závislé vzťahy tento vzťah neplatí

Operácia s javmi -> zjednotenie

-> zjednotenie javov A, B označíme $A \cup B$

-> $A \cup B$ nastane práve vtedy, ak nastane aspoň jeden z javov A, B

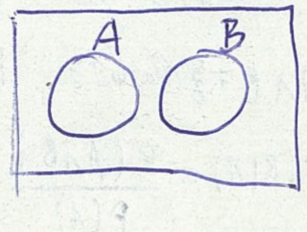


Pravdepodobnosť zjednotenia javov

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Javy nezlučiteľné

-> javy A, B nemôžu nastať súčasne (t.j. $A \cap B = \emptyset$) = nezlučiteľné



-> Pre nezlučiteľné javy platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Podmienená pravdepodobnosť

-> vieme, že jav nastal. Zaujíma nás pravdepodobnosť, že za tejto podmienky nastal jav B

-> túto pravdepodobnosť označíme $P(B|A)$ ... pravdepodobnosť javu B za podmienky, že nastal jav A

$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)}}$ ... z čoho plynie $\boxed{P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B|A)}$

Nezávislosť - matematická definícia

-> povieme si, že náhodné javy A, B sú nezávislé ak platí $P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$

Pr -> z prednášky -> Klasická pravdepodobnosť

- Máme 2 hracie kocky -> a) aká je pravdepodobnosť že na dvoch kockách padne súčet 4;
  b) že padne aspoň 1 × číslo 6

$\Omega = \{(a,b) : a, b \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ $(a,b) = ab$

$\Omega = \{11, 12, 13, \dots, 65, 66\}$ -> poradie je podstatné

$|\Omega| = 36$ -> počet v základnom priestore

a) $A = \underbrace{\{13, 31, 22\}}_{\text{3 elementárne javy}}$ $\quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$

b) $B = \underbrace{\{16, 26, 36, 46, 56, 66, 65, 64, 63, 62, 61\}}_{\text{11 elem. javov}}$ $\quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}$

Pr -> z prednášky -> Podmienená prav.

-> 2 hracie kocky, $\Omega = \{11, 12, 21, 13, 31, \dots, 66\}$ $|\Omega| = 6^2 = 36$ prvkov

A ... padne aspoň jeden krát 6, $A = \{16, 61, 26, 62, 36, 63, \dots, 66\}$, $P(A) = \frac{11}{36}$

B ... padol súčet 7, $B = \{16, 61, 25, 52, 34, 43\}$, $P(B) = \frac{6}{36}$

$A \wedge B = \{16, 61\}$, $P(A \wedge B) = \frac{2}{36}$

$P(B|A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \underline{\underline{\frac{2}{11}}}$ ✓

opačne:

$P(A|B) = \frac{P(B \wedge A)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \underline{\underline{\frac{2}{6}}}$ ✓

2. Diskrétna pravdepodobnosť

-> množina $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \dots\}$ je konečná alebo spočítateľná (jej prvky sa dajú usporiadať do postupnosti), $|\Omega| = n$, n môže byť aj ∞.

-> jednotlivé elementárne javy $\{\omega_i\}$ nemusia nutne nastávať s rovnakou pravdepodobnosťou ale platí $\sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = 1$, potom pravdepod. javu A počítame ako: $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

Pr -> z prednášky

- Máme mincu, jej strany sa označujú L - líc, R - rub

-> Aká je pravdepodobnosť že najneskôr 4. hodom padne L

$\Omega = \{L, RL, RRL, RRRL, \dots\}$

$\boxed{\text{všeobecne: } P(\underbrace{R \dots R}_{k}L) = \frac{1}{2^{k+1}}}$

$P(L) = \frac{1}{2}$

$P(RL) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(RRL) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$P(RRRL) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

$A = \{L, RL, RRL, RRRL\}$

$P(A) = P(L) + P(RL) + P(RRL) + P(RRRL)$

$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \underline{\underline{\frac{15}{16}}}$ ✓

Všeobecná definícia pravdepodobnosti

Ω ... základný priestor -> pravdepodobnostný priestor

S ... systém podmnožín Ω (niektoré), náhodné javy

σ-algebra:
① $\emptyset, \Omega \in S$ (nemožný jav)
② $A \in S \Rightarrow \bar{A} = \Omega - A \in S$ ($\bar{A}$) opačný jav
③ $A_1, A_2, A_3 \in S \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \in S$
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \in S$

$P : S \to \mathbb{R}$

① $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(A) = \langle 0, 1 \rangle$

② $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

③ $A_1, A_2, A_3, \dots$ po dvoch disjunkt.
$(A_i \wedge A_j = \emptyset) \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots) =$
$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$

3. Geometrická pravdepodobnosť

→ množina Ω tvorí oblasť v n-rozmernom priestore, $0 < \mu(\Omega) < \infty$

($\mu(\cdot)$ je miera množiny → niečo ako obsah)

→ všetky možné výsledky pokusu sú rovnako pravdepodobné.

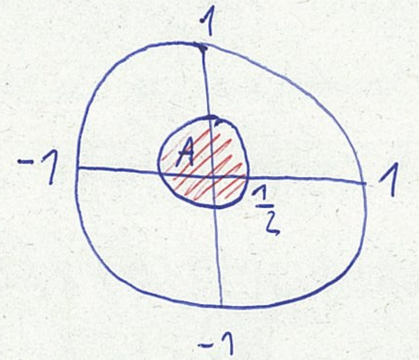
→ pravdepodobnosť javu A píšeme ako $\boxed{P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}}$

Pr → z prednášky

→ náhodne vyberieme z kruhu bod, aká je pravdepodobnosť, že od stredu má vzdialenosť: a) $\leq \frac{1}{2}$

b) $= \frac{1}{2}$

c) $= \frac{1}{n}$



Ω ... kruh

$A \subseteq \Omega$!!! → je podmnožinou

$P(A) = \frac{\text{obsah } A}{\text{obsah } (\Omega)}$ => musí byť definované

$$P(A) = \frac{\text{obsah } A}{\text{obsah } (\Omega)} = \frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} \checkmark$$

$P(B) = 0$ → vzdialenosť presne daného bodu

$P(C) = 0$ → vzdialenosť pre $\frac{1}{n}$

29.10.2018

Veta o úplnej pravdepodobnosti - začiatok

- Nech $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sú navzájom disjunktné náhodné javy, také, že:

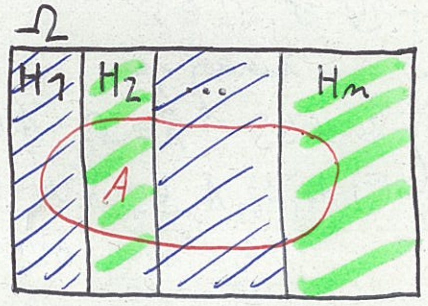
$P(H_i) > 0$ pre $i = 1, \ldots, n$ a že $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$.

(Javy $H_1, \ldots, H_n$ nazývame hypotézy)

Veta o úplnej pravdepodobnosti - dokončenie

Potom pre každý náhodný jav A platí:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A|H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

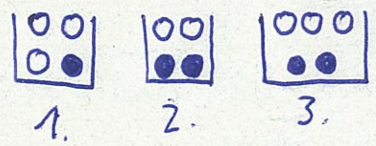


Bayesov vzorec → BÝVA NA SKÚŠKE

→ ak $P(A) > 0$, potom pre každé $j = 1, \ldots, n$ platí

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

Pr → z prednášky



Hypotézy:

H_1 ... gulička je z prvej krabičky
H_2 ... gulička je z druhej krabičky
H_3 ... gulička je z tretej krabičky

$\Big\} \; P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$

Č ... vytiahnutá je čierna gulička → P(Č) = nevieme hneď vypočítať, je to ťažké ... rátať ale vyrátať hypotézy je ľahké:

$P(\check{C}|H_1) = \frac{1}{4}$

$P(\check{C}|H_2) = \frac{1}{2}$

$P(\check{C}|H_3) = \frac{2}{5}$

a) Aká je pravdepodobnosť, že bude vytiahnutá čierna gulička?

$P(A) = P(\check{C}) = ?$

$$P(\check{C}) = P(\check{C} \cap H_1) + P(\check{C} \cap H_2) + P(\check{C} \cap H_3) =$$
$$= P(H_1) \cdot P(\check{C}|H_1) + P(H_2) \cdot P(\check{C}|H_2) + P(H_3) \cdot P(\check{C}|H_3) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{23}{60}}} \checkmark$$

b) Aká je pravdepodobnosť, že vytiahnutá čierna gulička je z prvej krabičky?

$P(H_1|\check{C}) = ?$

$$P(H_1|\check{C}) = \frac{\overbrace{P(H_1) \cdot P(\check{C}|H_1)}}{P(\check{C})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{23}{60}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{23}{60}} = \underline{\underline{\frac{5}{23}}} \checkmark$$

$$\underbrace{\hphantom{P(H_1) \cdot P(\check{C}|H_1)}}_{P(H_1 \cap \check{C})}$$

(Pr2) → z prednášky

3 % ľudí majú vrodenú vadu ... V

H_1... Človek má vadu V potom je test 100 % pozitívny

H_2... Človek, ktorý ale nemá vadu V, tak test je 5 % pozitívny (spoľahlivý 95 %)

Ak má človek pozitívny test, aká je prav. že má vadu V?

Hypotézy

H_1... človek má vadu V $\quad P(H_1) = 0{,}03$

H_2... človek nemá vadu V $\quad P(H_2) = 0{,}97$

T... test je pozitívny

$P(T|H_1) = 1$

$P(T|H_2) = 0{,}05$

$$P(H_1|T) = \frac{P(T|H_1)\cdot P(H_1)}{P(T)} = \frac{P(T|H_1)\cdot P(H_1)}{P(T|H_1)\cdot P(H_1) + P(T|H_2)\cdot P(H_2)} = \frac{1\cdot 0{,}03}{1\cdot 0{,}03 + 0{,}05\cdot 0{,}97} =$$

$$= \frac{0{,}03}{0{,}03+0{,}0485} = \frac{0{,}03}{0{,}0785} = \underline{\underline{0{,}382165}} \checkmark$$

Podmienená pravdepodobnosť → vsuvka

$$P(A\wedge B) = P(A)\cdot P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\wedge B)}{P(A)} = P(B) \qquad P(A|B) = \frac{P(A\wedge B)}{P(B)} = P(A)$$

Náhodné veličiny

5.11.2018

Niekedy sa dá výsledok pokusu popísať jediným číslom, ktoré označíme X (alebo iné veľ. pís.)

Definícia náhodnej veličiny: (zjednodušene)

→ náhodná veličina X je funkcia, ktorá prvkom množiny Ω priraďuje reálne čísla

$$X: \Omega \to \mathbb{R}$$

Zápis javov pomocou náhodnej veličiny:

→ Zápisom $[X = x]$ rozumieme náhodný jav zložený zo všetkých $\omega \in \Omega$ pre ktoré je $X(\omega) = x$, podobne napr. $[X < x] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$

Základné typy náhodných veličín:

1). Diskrétne náhodné veličiny

↳ môžu nadobúdať najviac konečne (spočítateľne) mnoho hodnôt

↳ príklady: počet [6] pri desaťkrát hodení kockou, na koľký pokus sa podarí vyvolať študenta, ktorý niečo vie, počet percent vadných súčiastok v balíku s 25 kusmi ...

2) Spojité náhodné veličiny

↳ (zjednodušene) môžu nadobúdať všetky hodnoty z určitého intervalu

↳ príklady: nameraná hodnota napätia, dĺžka časového intervalu medzi 2 udalosťami

Diskrétne náhodné veličiny:

→ náhodná veličina X sa nazýva diskrétnou ak jej obor hodnôt je spočítateľná množina

Pravdepodobnostná funkcia

→ pravdepodobnostná funkcia diskrétnej náhodnej veličiny X je funkcia $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná vzťahom $p(x) = P(X=x)$

PZ: malé a veľké písmená sa rozlišujú, niekedy sa používa názov frekvenčná funk. a značí sa f

Vlastnosti pravdepodobnostnej funkcie:

→ $0 \le p(x) \le$ pre každé $x \in \mathbb{R}$

→ $\sum p(x_i) = 1$ (sčítame cez všetky hodnoty x_i, ktoré X môže nadobúdať)

Distribučná funkcia:

→ Distribučná funkcia náhodnej veličiny X je funkcia $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná vzťahom $F(x) = P(X \leq x)$, niekedy sa uvádza tiež: $F(x) = P(X < x)$

Výpočet F(x) pre diskrétne náhodné veličiny:

→ Ak je X diskrétna náhodná veličina, ktorá môže nadobúdať hodnoty $x_1, x_2, \dots$, a p je jej pravdepodobnostná funkcia je potom $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$

Vlastnosti distribučnej funkcie:

→ $0 \leq F(x) \leq 1$ pre každé $x \in R$

→ F je neklesajúca, t.j. keď $x \leq y$, potom $F(x) \leq F(y)$

→ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

→ $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ pre každé $a, b \in R$

→ F je z prava spojitá t.j. $\lim_{t \to x^+} F(t) = F(x)$

Vlastnosti distribučnej funkcie diskrétnej náhodnej veličiny:

→ Graf funkcie F má schodovitý tvar

→ Výšky schodov sú hodnoty pravdepodobnostnej funkcie p, $p(x) = F(x) - \lim_{t \to x^-} F(t)$ pre každé $x \in R$

Nezávislé náhodné veličiny - zjednodušená verzia

→ Dve diskrétne náhodné veličiny X a Y sú nezávislé práve ~~vtedy~~ vtedy keď pre každé dve hodnoty x a y platí $p((X=x) \cap (Y=y)) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$.

Stredná hodnota diskrétnej náhodnej veličiny

→ značíme ju EX, iné značenia sú $\mu(X)$, μ a definujeme ju vzťahom

$$EX = \sum_{x_i} x_i \cdot p(x_i)$$

→ sčítame cez všetky hodnoty x_i ktoré X môže nadobúdať

Rozptyl diskrétnej náhodnej veličiny:

→ Rozptyl diskrétnej náhodnej veličiny X označíme DX → disperzia, variancia, definujeme ju vzťahom $\boxed{DX = E(X - EX)^2}$

→ pre jeho výpočet používame vzorec: $DX = \sum_{x_i} x_i^2 \cdot p(x_i) - (EX)^2$

Smerodajná odchýlka:

Smerodajná odchýlka diskrétnej náhodnej veličiny X označíme σ a definujeme ju vzťahom

$$\boxed{\sigma = \sqrt{DX}}$$

Vlastnosti rozptylu:

→ $DX \geq 0$

→ ak a, b sú reálne konštanty potom $D(a + bX) = b^2 DX$

→ ak X, Y sú nezávislé náhodné veličiny potom $D(X \pm Y) = DX + DY$

Pr → z prednášky

Vezmem mincu a 4x po sebe ňou hodím, X = maximálny počet R za sebou

rub lic

diskrétna náhodná veličina

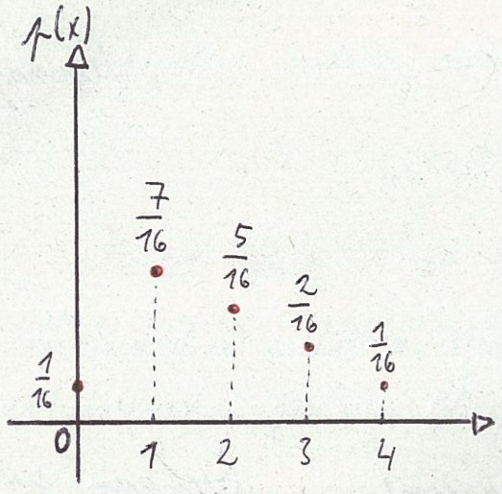
$\Omega = \{LLLL, LLLR, \dots, RRRR\}$, $|\Omega| = 2^4 = 16$, $X: \Omega \to R$

$X(LLLL) = 0$	$X(RLRL) = 1$	$X(LRRL) = 2$	$X(RRRR) = 4$
$X(LLLR) = 1$	$X(LRLR) = 1$	$X(RLRR) = 2$	
$X(LLRL) = 1$	$X(RLLR) = 1$	$X(RRLR) = 2$	
$X(LRLL) = 1$	$X(RRLL) = 2$	$X(RRRL) = 3$	
$X(RLLL) = 1$	$X(LLRR) = 2$	$X(LRRR) = 3$	

? $P(X=3)$?

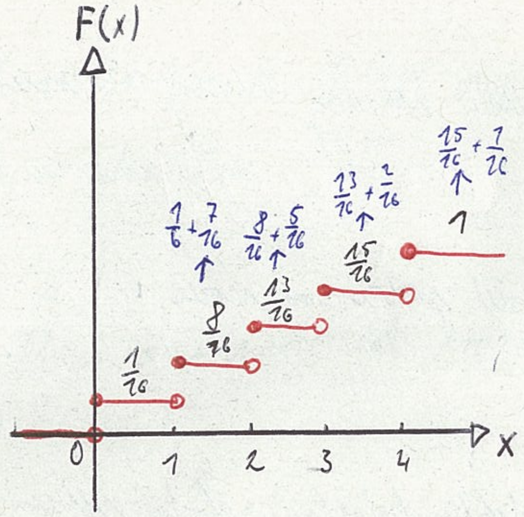
$(X=3) = \{RRRL, LRRR\} \to P(X=3) = \frac{2}{16}$ ✓

$(X \geq 3) = \{RRRL, LRRR, RRRR\} \to P(X \geq 3) = \frac{3}{16}$ ✓



Pravdepodobnostná funkcia

$p(x) = P(X=x)$



Distribučná funkcia

$F(x) = P(X \le x)$

Rozdelenie náhodnej veličiny RNV: $(p(x), F(x))$ $\boxed{X \sim RNV}$

Stredná hodnota diskrétnej náhodnej veličiny

$$\mu = EX = \sum x \cdot p(x) = 0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{7}{16} + 2\cdot\frac{5}{16} + 3\cdot\frac{2}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{27}{16} = 1{,}6875$$

Rozptyl diskrétnej náhodnej veličiny

1) $DX = E(X-EX)^2$
pre výpočet
2) $DX = \sum_{x_i} x_i^2 \, p(x_i) - (EX)^2$

prvá varianta:

$DX = E(X-EX)^2 = \sum (x-\mu)^2 \cdot p(x) =$

$= \left(0-\frac{27}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{16} + \left(1-\frac{27}{16}\right)^2 \cdot \frac{7}{16} + \left(2-\frac{27}{16}\right) \cdot \frac{5}{16} + \left(3-\frac{27}{16}\right)^2 \frac{2}{16} + \left(4-\frac{27}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{16}$

dá sa napísať aj inak

$= E(x^2) - (EX)^2 = (\sum x^2 \cdot p(x) - \mu^2$ ← jednoduchšia varianta

$= 0^2 \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{7}{16} + 2^2 \frac{5}{16} + 3^2 \cdot \frac{2}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} - \left(\frac{27}{16}\right)^2 = \frac{247}{16^2}$ ← musí to vyjsť kladné

Smerodajná odchýlka

$\sigma = \sqrt{DX} = \frac{\sqrt{247}}{16} \doteq 0{,}9823$

Spojité náhodné veličiny

12.11.2018

Definícia:

→ náhodná veličina X sa nazýva spojitá, ak existuje nezáporná funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká že pre každé $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < b$ platí $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

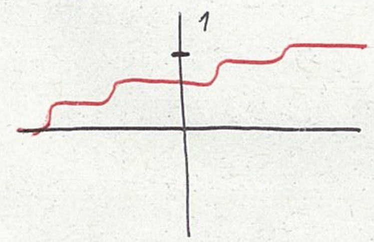
→ funkcia f sa nazýva hustota pravdepodobnosti náhodnej veličiny X

Niektoré vlastnosti hustoty:

→ $f(x) \ge 0$; → je spojitá

→ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ →

Diablovo schodisko

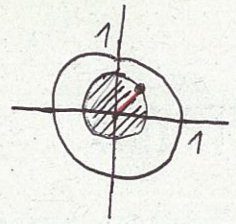


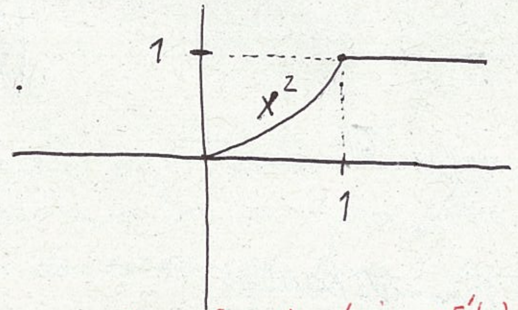
Pr → z prednášky

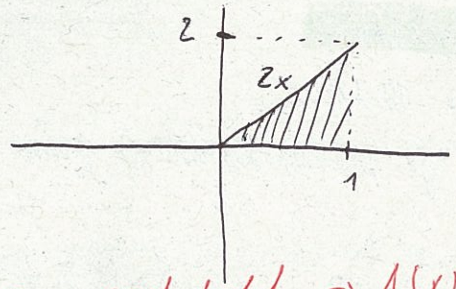
X = vzdialenosť od počiatku

$F(x) = P(X \le x)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$







distribučná funkcia → $F'(x)$ = graf hustoty → $f(x)$

Vlastnosti

1) $F(x)$ je spojitá, neklesajúca $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

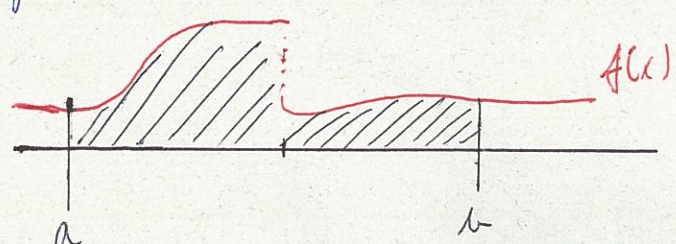
2) $P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

3) $P(X = a) = 0$

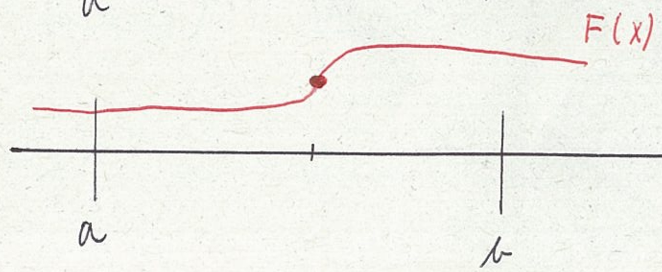
4) Existuje nezáporná funkcia $F(x)$, taká že $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$\int_{-\infty}^{\infty} F'(x)\,dx = 1$



$P(a \le X \le b) = \int_a^b F(x)\,dx$



$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$

12.11.2018

Významné diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti

Pr -> Päťkrát hodíme kockou, náhodná veličina X udáva koľkokrát padla $\boxed{6}$.

Binomické rozdelenie

-> n-krát nezávisle opakujeme pokus, u ktorého úspech nastáva s pravdepodobnosťou p. Náhodná veličina X udáva, koľkokrát v týchto n pokusoch nastal úspech, má binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami n a p, píšeme $X \sim Bi(n,p)$

Pravdepodobnostná funkcia:

$$\boxed{p(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\dots,n}$$

Stredná hodnota a rozptyl pri binomickom rozdelení:

Jestliže $X \sim Bi(n,p)$, pak

$$\boxed{EX = n \cdot p}$$

$$\boxed{DX = n \cdot p \cdot (1-p)}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Pr -> z prednášky

-> máme 10 kociek

a) Aká je pravdepodobnosť že práve 2x padne $\boxed{6}$

b) Aká je pravdepodobnosť že najviac 2x padne $\boxed{6}$

X = počet $\boxed{6}$ $\quad X \sim Bi(10, \frac{1}{6})$ <- Binomické rozdelenie

$$p(k) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

a)

$$p(2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 0,2907$$

b)

$$p(0) + p(1) + p(2) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 =$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 0,77522$$

Poissonovo rozdelenie

-> skúma udalosti, ktoré prichádzajú v čase pričom platí:

↳ v jednom okamihu môže nastať najviac jedna udalosť

↳ udalosti prichádzajú nezávisle na sebe

↳ pravdepodobnosť, že udalosť nastane v intervale $(t, t+h)$, závisí na h a nie na t.

Definícia:

Náhodná veličina X, ktorá udáva počet udalostí za jednotku času, keď vieme že priemerne nastáva λ udalostí za jednotku času, má Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom λ, píšeme $\boxed{X \sim Po(\lambda)}$

Pravdepodobnostná funkcia:

$$\boxed{p(k) = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2\dots}$$

Stredná hodnota a rozptyl Poissonovho rozdelenia je

$\boxed{EX = \lambda}$, $\boxed{DX = \lambda}$

Poissonovo rozdelenie popisuje počet „udalostí" v inej ako časovej jednotke, napr. v jednotkách dĺžky, obsahu a pod. Používa sa v hr. teórii front.

Poissonovým rozdelením sa dá aproximovať binomické rozdelenie v prípade, že n je veľké a p je blízko 0.

Pr -> z prednášky

-> máme nemocnicu ... v priemere 1h ... 2 prípady

a) Aká je prav., že za $\boxed{1 \text{ hodinu}}$ žiadny príjem

b) Aká je prav., že za $\boxed{2 \text{ hodiny}}$ budú 2 príjmy

c) Aká je prav., že za $\boxed{10 \text{ min}}$ budú 2 príjmy

2 príj... 1h
x 1h
x = 2
2 1h
2 1
2 1
x $\frac{1}{6}$ -> $\frac{1}{3}$

a) $X \sim Po(2)$, $p(k) = \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-2} = \underline{\underline{e^{-2}}}$ -> $p(0)$

b) $X \sim Po(4)$, $p(k) = \frac{4^k}{k!} \cdot e^{-4} = \frac{4^2}{2!} e^{-8} = \underline{\underline{8e^{-4}}}$

c) $X \sim Po(\frac{1}{3})$, $p(k) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{1}{3}}$, $p(2) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2!} \cdot e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{18} \cdot e^{-\frac{1}{3}}$

19.11.2018 **Spojité náhodné veličiny - II (pokračovanie)**

Distribučné funkcie spojitých náhodných veličín:

Pripomenutie definície

→ Distribučná funkcia náhodnej veličiny X sa definuje ako: $F(x) = P(X \le x)$

→ Výpočet F(x) pre spojité náhodné veličiny a vzťah s hustotou f

→ Ak je X spojitá náhodná veličina s hustotou f, potom:

$$F(x) = P(X \le x) = P(-\infty < X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

vďaka tomu platí: $F'(x) = f(x)$ vo všetkých bodoch $x \in \mathbb{R}$ kde má funkcia F deriváciu

Dôležitá vlastnosť distribučnej funkcie spojitej náhodnej veličiny:

↳ Distribučná funkcia spojitej náhodnej veličiny je spojitá

Výpočet rôznych pravdepodobností pomocou F

↳ Ak je X ľubovoľná náhodná veličina (t.j. nie nutne spojitá) s distribučnou funk. F, tak potom:

→ $P(X \le b) = F(b)$

→ $P(X > a) = 1 - F(a)$

→ $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

PZ: Ak je X spojitá náhodná veličina, potom vďaka vzťahu $P(X=x)=0$ môžeme všetky ostré nerovnosti nahradiť neostrými a naopak

Stredná hodnota a rozptyl pre spojité náhodné veličiny

1) Stredná hodnota

→ Pre spojitú náhodnú veličinu X s hustotou f je stredná hodnota

$$\boxed{EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx}$$

2.) Rozptyl

$$\boxed{DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - (EX)^2}$$

Pr. → na hodine

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \le -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x+1} & \text{pre } x \in \langle -1, 3\rangle \\ 1 & \text{pre } x \ge 3 \end{cases}$$

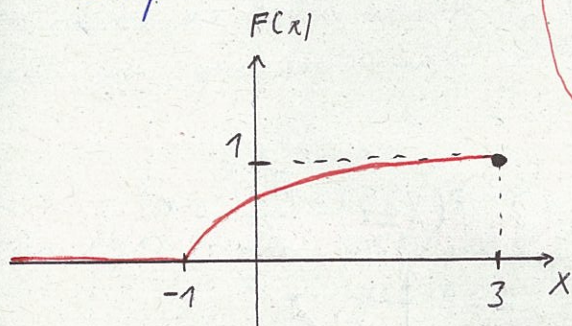
derivácia $f(x) = F'(x)$

pr.) $P(1 \le X \le 4) = F(4) - F(1) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

hustota:

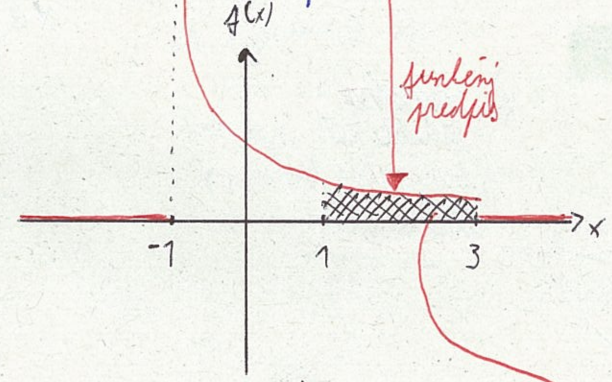
$f(x) = F'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < -1 \\ \frac{1}{4\sqrt{x+1}} & \text{pre } x \in (-1; 3) \\ 0 & \text{pre } x > 3 \end{cases}$$



distribučná funkcia

funkčný predpis



graf hustoty

$$P(1 \le X \le 4) = \int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^3 \frac{1}{4\sqrt{x+1}}\,dx = \dots$$

musí sa rovnať

Pr2 → z prednášky

→ ak bude zadaná hustota a chceme distribučnú funkciu

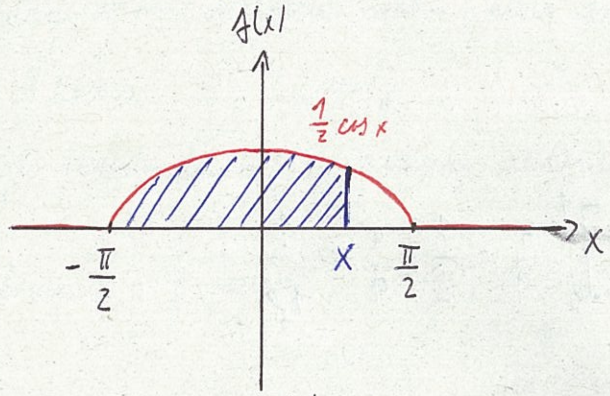
nemusí byť spojitá

nemôže byť nikde záporná

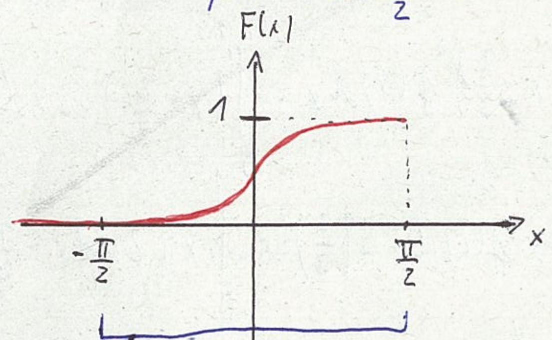
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \le -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\cos x & \text{pre } x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{pre } x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ako vyzerá distribučná funkcia?

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \le -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2} & \text{pre } x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \\ 1 & \text{pre } x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



graf hustoty



distrib. funk.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$$

$F'(x) = f(x)$, $F'(x) = \frac{1}{2}\cos x$, $F(x) = *$

$* = \frac{1}{2}\sin x + C$, $F(\frac{\pi}{2}) = 1$ musí platiť, $C = \frac{1}{2}$

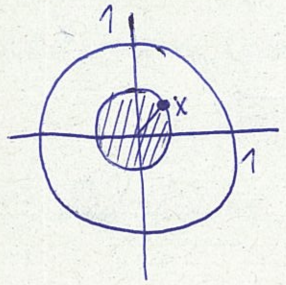
$$\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}}}$$

iný spôsob (lepší):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{2}\cos t\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{x} = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

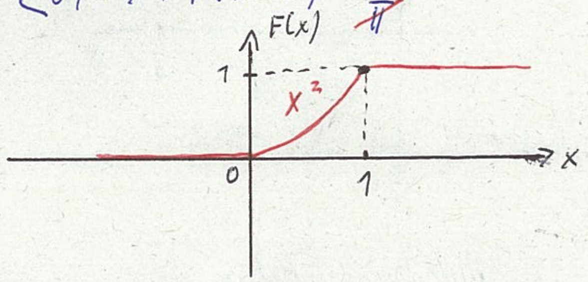
$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}}}$$

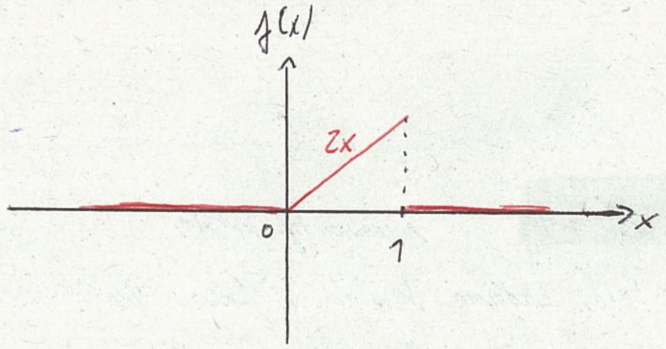
Pr → z prednášky



X = ~~náhodná~~ vzdialenosť náhodne vybraného bodu od počiatku

$x \in \langle 0; 1 \rangle : P(X \leq x) = \frac{\pi \cdot x^2}{\cancel{\pi}} = x^2$





Stredná hodnota:

$$\overset{\mu}{EX} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 2x\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Rozptyl:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2x\,dx \ldots$$ → varianta 1

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\,dx - \frac{4}{9} = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \underline{\underline{\frac{1}{18}}}$$ → varianta 2 (lepšia!)

Smerodajná odchýlka:

$$\sigma = \sqrt{DX} = \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}}$$

Exponenciálne rozdelenie

→ Nech platia rovnaké predpoklady ako u Poissonovho rozdelenia.

→ Náhodná veličina X, ktorá udáva dobu medzi dvoma výskytmi určitej udalosti (alebo tiež dobu čakania na ďalšiu udalosť), keď vieme že priemerne nastáva λ udalostí za jednotku času, má exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom λ, píšeme

$$X \sim Exp(\lambda)$$

za jednotku času ... λ udalostí
za x jednotiek času ... λx udalostí

$F(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x)$

↑

$X \sim EXP(\lambda)$

$P(0) = \frac{(\lambda x)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda x}$ → v Poissonovom rozdelení

Hustota exponenciálneho rozdelenia je

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pre } x \geq 0 \\ 0 & \text{pre } x < 0 \end{cases}$$

Distribučná funkcia je:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{pre } x \geq 0 \\ 0 & \text{pre } x < 0 \end{cases}$$

Stredná hodnota exponenciálneho rozdelenia:

$$EX = \frac{1}{\lambda}$$

~~J~~ Rozptyl:

$$DX = \frac{1}{x^2}$$

Pr → z prednášky

V továrni máme výrobnú linku, ktorá sa z času na čas zastaví

za 8 hodín ... 3 poruchy

Aká je pravdepodobnosť že porucha nastane do $\frac{1}{2}$ hodiny

1 hodina ... $\frac{3}{8}$ poruchy, $\lambda = \frac{3}{8}$, $X \sim EXP\left(\frac{3}{8}\right)$

↑

čas čakania na poruchu

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}} = \underline{\underline{1 - e^{-\frac{3}{16}}}}$$

26.11.2018

Normální rozdelení

Definícia:

→ Náhodná veličina X, ktorá má hustotu $\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$ pre $x \in \mathbb{R}$,

kde $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma > 0$ sú konštanty, má normální rozdelenie pravdepodobnosti so strednou hodnotou

Stredná hodnota: $\boxed{EX = \mu}$ **Rozptyl:** $\boxed{DX = \sigma^2}$

píšeme: $\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$

Štandardizované normální rozdelenie:

→ je rozdelenie so strednou hodnotou $\mu = 0$ a rozptylom $\sigma^2 = 1$.

→ Náhodnú veličinu so štandardizovaným normálnym rozdelením značíme U, platí teda: $U \sim N(0,1)$

→ Hustota štandardizovaného normálneho rozdelenia je: $\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}$ pre $x \in \mathbb{R}$

→ Distribučnú funkciu náhodnej veličiny U značíme Φ a platí:

$$\boxed{\Phi(u) = P(U \leq u)}$$

Vlastnosti distribučnej funkcie Φ:

→ $\Phi(u)$ sa nedá vyjadriť pomocou elementárnej funkcie

→ hodnoty $\Phi(u)$ pre $u \geq 0$ sú tabelované

→ platí $\boxed{\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)}$, pre kvantily náhodnej veličiny U platí $\boxed{u_\alpha = -u_{1-\alpha}}$

→ tento vzťah sa používa predovšetkým pre $\alpha < 0{,}5$

Výpočty rôznych pravdepodobností pomocou Φ

→ $P(U \leq b) = \Phi(b)$

→ $P(U > a) = 1 - \Phi(a)$

→ $P(a < U \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

PZ: Keďže U je spojitá náhodná veličina, všetky ostré nerovnosti tu nahradiť neostrými a naopak

Transformácia na štandardizované normálne rozdelenie:

- Ak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ potom náhodná veličina $\boxed{U = \frac{X-\mu}{\sigma}}$ má štandardizované normálne rozdelenie

Výpočty rôznych pravdepodobností u normálneho rozdelenia všeobecne

→ Ak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ potom

→ $P(X \leq b) = P\left(U \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$

→ $P(X > a) = P\left(U > \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

→ $P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < U < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

PZ: všetky ostré nerovnosti sa dá nahradiť neostrými a naopak

Súčet dvoch nezávislých náhodných veličín s normálnym rozdelením

→ Ak $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ sú dve nezávislé náhodné veličiny, potom

$$\boxed{X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$$

Náhodný výber (všeobecne nie len pre normálne rozdelenie)

- náhodný výber rozsahu n je vektor $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ kde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú navzájom nezávislé náhodné veličiny, ktoré majú všetky rovnaké rozdelenia pravdepodobnosti

Výberový priemer (všeobecne, nie len pre normálne rozdelenie)

→ výberový priemer z náhodného výberu $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je $\boxed{\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i}$, výberový priemer $\overline{X}$ je náhodná veličina

Rozdelenie pravdepodobnosti výberového priemeru z $N(\mu, \sigma^2)$

→ ak náhodný výber pochádza z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2 potom výberový priemer $\overline{X}$ má tiež normálne rozdelenie $\boxed{\overline{X} \sim N(\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}})}$ kde

$\boxed{\mu_{\overline{X}} = \mu}$, $\boxed{\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}}$

Pr → z prednášky

z tabuľky → 283 str

$$P(0{,}03 \le U \le 0{,}1) = \Phi(0{,}1) - \Phi(0{,}03) = 0{,}5398 - 0{,}512 = \underline{\underline{0{,}0278}}$$

Pr → z prednášky

$X \sim N(2,9)$

$\mu = 2,\ \sigma = 3 \quad \sigma = 3$

$$P(3 \le X \le 3{,}5) = P\left(\frac{3-2}{3} \le \frac{X-2}{\sigma} \le \frac{3{,}5-2}{3}\right) = P(\overset{\frac{1}{3}}{0{,}33} \le U \le 0{,}5) = \Phi(0{,}5) - \Phi(0{,}3) =$$

$$= 0{,}6915 - 0{,}6293 = \underline{\underline{0{,}0622}}$$

Pr → z prednášky

Maslo: 250 [g]

Norma: 245[g] - 255[g]

} X = hmotnosť masla, $X \sim (\mu, \sigma^2)$

$\mu = 248$ [g] ↓ stredná hodnota, $\sigma = 2{,}1$ [g] ↓ odchýlka

Aká je pravdepod. že náhodne vybraná tyčka masla bude v norme?

$$P(245 \le X \le 255) = P\left(\frac{245-248}{2{,}1} \le U \le \frac{255-248}{2{,}1}\right) = P(-1{,}429 \le U \le 3{,}333) = \Phi(3{,}33) - \Phi(-1{,}429) =$$

$$= 0{,}999 - (1 - \Phi(1{,}429)) = 0{,}999 - (1 - 0{,}924) = 0{,}999 - 0{,}076 = \underline{\underline{0{,}923}}$$

Centrálna limitná veta

Veta (Lindeberg-Lévy)

→ Ak $X_1, X_2, \dots, X_n$ sú navzájom nezávislé náhodné veličiny, ktoré majú rovnaké rozdelenie so strednou hodnotou $EX_i = \mu$ a konečným rozptylom $DX_i = \sigma^2$, potom pre súčet a priemer týchto náhodných veličín platí

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad a \quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{platí:}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} \le u\right) = \Phi(u) \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\cdot\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \le u\right) = \Phi(u)$$

pre každé $u \in \mathbb{R}$

Inými slovami:

Pre dostatočne veľké n (v praxi sa používa $n > 30$) majú Y a $\overline{X}$ približne normálne rozdelenie

$$Y \sim N(n\mu, n\sigma^2), \quad \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

alebo:

$$\frac{Y - n\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}} \doteq U, \quad \sqrt{n}\cdot\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \doteq U$$

Aproximácia binomického rozdelenia normálnym

Moivre-Laplaceova veta:

→ Ak X je náhodná veličina s binomickým rozdelením, $X \sim Bi(n,p)$, n je veľké a p nie je príliš blízko nule ani jednotke, potom X sa dá aproximovať normálnym rozdelením so rovnakou strednou hodnotou a rozptylom, ako malo pôvodné bin. rozdelenie

$$X \sim Bi(n,p) \Rightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

kde $\mu = n\cdot p$, $\sigma^2 = n\cdot p\cdot(1-p)$,

$$P(a < X \le b) \doteq P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < U \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Kedy sa dá aproximácia použiť? - empirická podmienka

→ aproximácia je dobrá, ak $n\cdot p > 5$ a súčasne $n\cdot(1-p) > 5$

→ iná podmienka: $n\cdot p\,(1-p) > 9$

Aproximácia s korekciou

→ lepšie výsledky dáva aproximácia s korekciou:

↳ Ak a, b sú celé čísla a $X \sim Bi(n,p)$, potom

$$P(a \le X \le b) \doteq P(a - 0{,}5 < X < b + 0{,}5) = \Phi\left(\frac{b+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$$

Pr → z prednášky

→ 100x hodíme kockou, aká je prav., že $\boxed{6}$ padne 20x až 30x

→ X = počet úspechov, $X \sim Bi\left(100, \frac{1}{6}\right)$, $\mu = \frac{100}{6}$, $\sigma = \sqrt{100\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}$, → $\mu = \underline{\underline{16{,}67}}$, $\sigma = \underline{\underline{3{,}727}}$

$$P(20 \le X \le 30) = P(19{,}5 < X < 30{,}5) = P\left(\frac{19{,}5 - 16{,}67}{3{,}727} \le U \le \frac{30{,}5 - 16{,}67}{3{,}727}\right) = P(0{,}76 \le U \le 3{,}71) =$$

$$= \Phi(3{,}71) - \Phi(0{,}76) = 0{,}9999 - 0{,}7764 = \underline{\underline{0{,}2235}}$$

3.12.2018

Testovanie hypotéz

Všeobecný postup pri testovaní hypotéz:

→ Vyslovíme nulovú hypotézu H_0 a alternatívnu hypotézu H_1.
→ Zvolíme testové kritérium
→ Predpokladáme, že platí H_0. Za tohto predpokladu poznáme rozdelenie testového kritéria.
→ nájdeme kritický obor pre testové kritérium – množinu (interval), do ktorého padne iba s pravdepodobnosťou α.
→ Leží hodnota testového kritéria v kritickom obore? Pokiaľ áno nulovú hypotézu H_0 zamietneme. Hypotéza H_1 bola testom preukázaná. Pokiaľ nie, nulovú hypotézu H_0 nezamietneme. Hypotéza H_1 nebola preukázaná

Možné výsledky testovania:

→ Pravdepodobnosť chyby 1. druhu je α
→ Pravdepodobnosť chyby 2. druhu je β
Čím väčšie je α tým je menšie β a naopak

Sila testu:

→ Sila testu je pravdepodobnosť, že správne zamietneme H_0, keď v skutočnosti platí H_1

$$\boxed{\text{Sila testu} = 1 - \beta}$$

Jednostranné a obojstranné testy:

Nulová hypotéza býva spravidla typu „určitý parameter = určitá hodnota"
Ak je napríklad $H_0: \mu = \mu_0$
alternatívna hypotéza H_1 potom môže byť niekoľko rôznych typov:

→ $H_1: \mu \neq \mu_0$
↳ obojstranný test, kritický obor je tvaru $(-\infty, T_{K1}) \cup (T_{K2}, \infty)$

→ $H_1: \mu > \mu_0$
↳ jednostranný (pravostranný test), kritický obor je tvaru (T_K, ∞)

→ $H_1: \mu < \mu_0$
↳ jednostranný (ľavostranný test), kritický obor je tvaru $(-\infty, T_K)$

Pr → z prednášky

100x hodím kockou, 30x padne $\boxed{6}$ → nadpriemerne veľa, treba to overiť

H_0 … "náhoda"
H_1 … "nejedná sa o náhodný výsledok z binomického rozdelenia s parametrami $n = 100$, $p = \frac{1}{6}$"
musíme si stanoviť hladinu významnosti: $\alpha = 0{,}01$

$X \sim Bi(100, \frac{1}{6})$ ← nahradíme normálnym rozdelením

$\mu = \frac{100}{6} = 16{,}667$; $\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 3{,}727$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ← nahradené binomické rozdelenie normálnym

$P(X \geq 30) = P(X > 29{,}5)$ → korekcia medzí

$P\left(U > \frac{29{,}5 - 16{,}667}{3{,}727}\right) \doteq P(U > 3{,}44) = 1 - \Phi(3{,}44) \doteq 1 - 0{,}9997 = 0{,}0003 < \alpha$ ← Test pomocou P-hodnoty

Výsledok: H_0 zamietame
H_1 prijímame

Pr → z prednášky → pravo stranný test

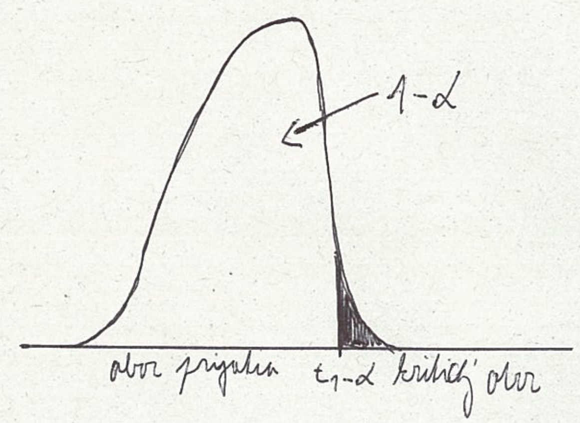
Chceme nájsť medz (hraničný bod)
$P(X \geq t) = 0{,}01$
$P(X \leq t) = 0{,}99$
$P(X < t + 0{,}5) = 0{,}99$
$P\left(U < \frac{t + 0{,}5 - 16{,}667}{3{,}727}\right) = 0{,}99$ → u = chceme nájsť

$\Phi(u) = P$ u … P-kvantil ⇒ u_p

$u_{0{,}99} = 2{,}33$

$\frac{t + 0{,}5 - 16{,}667}{3{,}727} = 2{,}33$

$t = 16{,}667 + 2{,}33 \cdot 3{,}727 - 0{,}5 =$
$t = 24{,}85$
$\underline{\underline{t = 25}}$ ← naša hľadaná hranica (medz)
počet $\boxed{6} > 25$ je už podozrivé



Pravostranný test ↑

Pr → z prednášky → obojstranný test

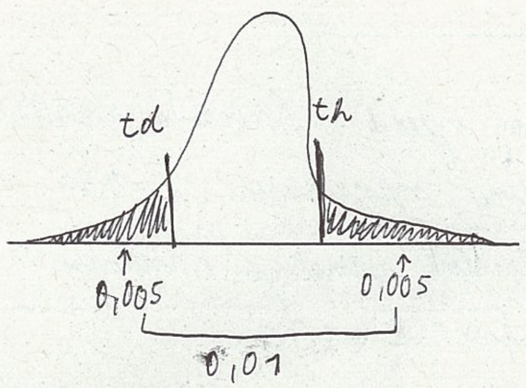
$\bar{X}$ ... priemerný čas 4 ľudí, $\mu = 12$, $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{4}} = 0{,}75$

$\left.\begin{array}{l}\mu = 12[s] \\ \sigma = 1{,}5[s]\end{array}\right\}$ X... čas 1 človeka

$\alpha = 0{,}01$

A... 4 ľudia : 13,5 [s]

B... 4 ľudia : 11,1 [s]



$P(X \geq th) = 0{,}005$

$P(X \leq th) = 0{,}995$

$P\left(U \leq \frac{th - 12}{0{,}75}\right) = 0{,}995$

$\Phi\left(\frac{th-12}{0{,}75}\right) = 0{,}995$

$\frac{th-12}{0{,}75} = 2{,}58$

$th = 12 + 0{,}75 \cdot 2{,}58$

$th = 12 + 1{,}935$

$\underline{\underline{th = 13{,}935}}$ ← kritická medz

$td = 12 - 1{,}935$

$\underline{\underline{td = 10{,}065}}$ ← kritická medz