学号________ 姓名________ 班级________ 院（系）________

密 封 线

成都理工大学2013—2014学年
第一学期《线性代数》考试试卷（A卷）

大题	一	二	三	总分
得分				

一、 填空题（每题3分，共48分）

得 分	

1. 计算矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

2. 已知向量组 $\alpha_1=(1,1,0,1),\alpha_2=(0,1,a,4),\alpha_3=(2,1,-2,-2)$ 线性相关，则 $a=$____2______.

3. 设 $\alpha_1=(2,-4,1,-1),\alpha_2=(-3,-1,2,-4)$，向量 β 满足 $\alpha_1-2(\beta+\alpha_2)=0$，则 $\beta=$

$\underline{(4,-1,-\frac{3}{2},\frac{7}{2})}$

4. 设矩阵 A 的特征值为 -6，那么矩阵 $3A+2E$ 的特征值为 $\underline{-16}$

5. 设 A 为三阶方阵，且 $|A|=3$，则 $|-2A|=$ $\underline{-24}$

6. 设 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，且有 $ABC=E$，则 $A^{-1}=\underline{\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$

7. 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似，则 x,y 的值是：$\underline{x=0,y=1.}$

8. 设 $\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_5$ 是 $AX=b$ 的一组解，且 $c_1\xi_1+c_2\xi_2+\ldots+c_5\xi_5$ 也是 $AX=b$ 的解，则 $c_1+c_2+\ldots c_5=$_____1_____

9. 若3阶矩阵 A 的特征值为1,2,3，则 $|A+E|=\underline{24}$

10. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}=$ $\underline{32}$

11. $\underline{11}$

12. $\underline{-\frac{\sqrt{15}}{3}<t<\frac{\sqrt{15}}{3}}$ 或 $-\frac{\sqrt{15}}{3}<t<\frac{\sqrt{15}}{3}$

13. $\underline{2}$

14. 线性相关　15. $\underline{-4}$　16. $E+A$.

2、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

四

1. $$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$=$$

3. $$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a_1-3 \\ a_2-1 \\ a_3+2 \\ a_4-4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} 2(a_1-3)=2 \\ 2(a_2-1)=-4 \\ 2(a_3+2)=1 \\ 2(a_4-4)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1=4 \\ a_2=-1 \\ a_3=-\frac{3}{2} \\ a_4=\frac{7}{2} \end{array}$$

②

4.

11. 逆序数$\tau(546213)=\underline{11}$

12 若$f=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3$为正定二次型，则$t$的范围是：$\underline{-\sqrt{\frac{5}{3}}<t<\sqrt{\frac{5}{3}}}$

13. 矩阵$\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1\\ 3 & -1 & -3 & 4\\ 1 & 5 & -9 & -8\end{pmatrix}$的秩= $\underline{2}$

14. 向量组α_1，α_2，α_3，线性无关，则向量组$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$的相关性是：

<u>线性相关</u>（填线性相关或线性无关）

15. 设A、B均为5阶矩阵，$|A|=\frac{1}{2},|B|=2$，则$|-B'A^{-1}|=\underline{-4}$

16. 已知$A^2=A,2A-B-AB=E$，则$(A-B)^{-1}=\underline{E+A}$

得 分	

二、 解答题（每题 6 分，共 24 分）

17. 已知A, B均为3阶矩阵，且满足$AB+E=A^2+B$，若矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，试求矩阵B.

$AB+E=A^2+B\Rightarrow AB-B=A^2-E\Rightarrow(A-E)B=(A-E)(A+E)$ ······ 2分

解：因为$A-E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$显然是可逆的， ······ 1分

则$B=A+E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}+E=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ ······ 3分

18.
解：$(A\vdots E)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$ ······ 4分

故$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$. ······ 2分

班级______ 姓名______ 学号______

密 封 线

19.已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\\6\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\5\\4\\8\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$，

求向量组的秩以及它的一个极大无关组.

解：

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\-1&3&-5&5&-2\\2&1&3&4&2\\4&2&6&8&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&3&-3&6&1\\0&1&-1&2&2\\0&2&-2&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&1&-1&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ……4分

所以秩r=3，其极大无关组可以取为α_1，α_2，α_5. ---1分

----1分

20. 计算 计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}1&a_1&0&\dots&0\\0&1&a_2&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$的值.

解：按照第一列展开，有

$$D_n=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&a_2&0&\dots&0\\0&1&a_2&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}+a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}a_1&0&0&\dots&0\\1&a_2&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&1&a_{n-1}\end{vmatrix}$$ ……4分

$=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n$. ----2分

三、解答题(每题7分，共28分)

得 分	

21. n 阶方阵 A，且$|A|=a\neq0$，A^{-1}为 A 的逆矩阵，A^*为A的伴随矩阵，求

$\left|-4\begin{pmatrix}(2A)^{-1}&0\\0&A^*\end{pmatrix}\right|$的值，

解：$\left|-4\begin{pmatrix}(2A)^{-1}&0\\0&A^*\end{pmatrix}\right|=(-4)^{2n}|2A|^{-1}\times|A^*|$ ------ 2分

$=(-4)^{2n}|2A|^{-1}\times\left||A|A^{-1}\right|=(-4)^{2n}2^{-n}|A|^{-1}\times\left||A|A^{-1}\right|$ 2分

$=(-4)^{2n}2^{-n}|A|^{-1}\times a^n\left|A^{-1}\right|=(-4)^{2n}2^{-n}a^{-1}\times a^na^{-1}$

$=(-4)^{2n}2^{-n}a^{n-2}$ - - - - - 3分

22. 设矩阵P=$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,矩阵A由关系式$P^{-1}AP=D$确定，试求$A^5$.

解：由$P^{-1}AP=D$,得到$A=PDP^{-1}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ……3分

$$A^5=PD^5P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^5\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$ ……2分

$$=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 43 & 44 \\ -11 & -12 \end{pmatrix}$$ ……2分

23. 求非齐次线性程组$\begin{cases} x_1-x_2-2x_3+3x_4=0 \\ x_1-3x_2-5x_3+2x_4=-1 \\ x_1+x_2+x_3+4x_4=1 \\ x_1+7x_2+10x_3+7x_4=4 \end{cases}$的通解.

解：对增广矩阵作初等行变换，有

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 10 & 7 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ……2分

r(A)=r($\bar{A}$)=2, 对应的其次方程组为$\begin{cases} x_1-x_2-2x_3+3x_4=0 \\ -2x_2-3x_3-x_4=0 \end{cases}$,选取$x_3$，$x_4$为自由未知量，则其次方程组的两个基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\xi_2=\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ……2分 取非齐次方程的一个特解$\eta_0=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, …… 1分

通解为$\eta=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta_0$. ……1分

24.已知二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$，
用正交变换法化二次型为标准型，并出正交变换法所用的正交矩阵。

解：二次型的矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&5&0\\-2&0&5\end{pmatrix}$，由矩阵的特征多项式

$|\lambda E-A|=(\lambda-5)(\lambda^2-6\lambda)$得到特征值是:0,5,6; …… 1分

当$\lambda=0$时由（$(0E-A)X=0$得到0的特征向量$\alpha_1=(5,-1,2)^T$;

当$\lambda=5$时由（$(5E-A)X=0$得到5的特征向量$\alpha_2=(0,2,1)^T$;

当$\lambda=6$时由（$(6E-A)X=0$得到6的特征向量$\alpha_3=(1,1,-2)^T$; ……

只需要单位化$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\beta_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$，$\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$; …… 4分

令P=$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}}&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$;经过正交变换X=PY，二次型化为标准型

$f=5y_2^2+6y_3^2$. … 2分