SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

DEŠIFROVANIE V QC-LDPC MCELIECEOVOM KRYPTOSYSTÉME

TÍMOVÝ PROJEKT

2019 **Forks**

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

DEŠIFROVANIE V QC-LDPC MCELIECEOVOM KRYPTOSYSTÉME

TÍMOVÝ PROJEKT

Študijný program:	Aplikovaná informatika
Číslo študijného odboru:	2511
Názov študijného odboru:	9.2.9 Aplikovaná informatika
Školiace pracovisko:	Ústav informatiky a matematiky
Vedúci záverečnej práce:	Ing. Viliam Hromada, PhD., Mgr. Tomáš Fabšič, PhD.

Bratislava 2019 **Forks**

Poďakovanie

Chceli by sme sa poďakovať vedúcim tímového projektu Mgr. Tomášovi Fabšičovi, PhD. a Ing. Viliamovi Hromadovi, PhD. za odborné vedenie počas práce na tímovom projekte, ako aj za cenné rady ohľadom implementácie riešenia.

Obsah

Zoznam obrázkov a tabuliek

Zoznam skratiek a značiek

GF - Galois Field

RSA - Rivest–Shamir–Adleman

QC - Kvázi-cyklická (matica)

LDPC - Low density parity check

MDPC - Moderate density parity check

UPC - Unsatisfied Parity-check Equation

Úvod

Na predmete Tímový projekt sme si vybrali tému, ktorá v poslednom čase rezonuje nielen vo vedeckej komunite, a to *post-kvantová* kryptografia. Hoci existuje viacero skupín kryptosystémov odolných voči kvantovému počítaču, my sme sa zamerali na tie, ktoré sú založené na tzv. *dekódovacom probléme*. Naša práce nesie názov *Dešifrovanie v QC-LDPC McElieceovom kryptosystéme* a hlavnou úlohou bolo experimentálne porovnanie dvoch spôsobom dešifrovania v tomto kryptosystéme.

Riešiteľský kolektív pozostával z piatich študentov aplikovanej informatiky pod vedením Mgr. Tomáša Fabšiča, PhD. a Ing. Viliama Hromadu, PhD. Pretože problematika, na ktorú sa zameriaval tento tímový projekt bola pre nás nová, prvou úlohou bolo teda naštudovanie si princípov fungovania QC-LDPC McElieceovho kryptosystému. Po získaní prvotných poznatkov z oblasti sme si rozdelili úlohy na projekte. Každý mal za úlohu spracovať inú časť teórie. Ďalej sme sa museli oboznámiť s implementáciou QC-LDPC McElieceovho kryptosystému v knižnici *BitPunch* a doplniť ju o ďalšiu funkcionalitu. Pri procese tvorby praktickej časti sme sa museli s vedúcimi projektu niekoľkokrát stretnúť a konzultovať ďalší postup.

Jednou z úloh tímového projektu bolo aj vypracovanie dokumentácie, ktorá objasňuje riešenie zadania. Práca sa skladá z dvoch hlavných častí. V teoretickej časti čitateľovi predkladáme nevyhnutné matematické základy na pochopenie problematiky projektu. Následne vysvetľujeme konštrukciu McElieceovho kryptosystému. Praktická časť obsahuje popis implementácie, ako aj zistené výsledky z experimentálnej časti.

1 Ponuka

Riešiteľský tím v zložení: Bc. Nikoleta Furičková, Bc. Juraj Karásek, Bc. Matej Ohradzanský, Bc. Peter Radvan a Bc. Lukáš Štrba na tomto mieste predkladá záväznú ponuku na riešenie problému s pracovným názvom: *Dešifrovanie v QC-LDPC McElieceovom kryptosystéme*. Projekt budeme riešiť pod vedením Mgr. Tomáša Fabšiča, PhD. a Ing. Viliama Hromadu, PhD. v rámci predmetu **Tímový projekt**.

V časti Riešiteľský kolektív stručne predstavíme členov tímu. Zameriame sa na ich schopnosti a skúsenosti, ktoré súvisia s problematikou tímového projektu. Zadanie a úlohy, ktoré z neho plynú budú opísané v časti Anotácia tímového projektu. Nasledovať bude časť, v ktorej vyjadríme našu dôveru v post-kvantovú kryptografiu a jej využitia v *blízkej* budúcnosti. Ponuku ukončíme popisom organizácie projektu.

1.1 Riešiteľský kolektív

Tím pozostáva z piatich študentov aplikovanej informatiky na Fakulte elektroniky a informatiky Slovenskej Technickej Univerzity. Členovia tímu sú spolužiaci už 4 roky a panujú medzi nimi priateľské vzťahy. Pracovný názov nášho kolektívu je *Forks*.

Bc. Nikoleta Furičková
Pozícia v tíme: Analytička

Je absolventkou bakalárskeho štúdia na Fakulte elektrotechniky a informatiky Slovenskej Technickej Univerzity v Bratislave, v študijnom programe Aplikovaná informatika, odbor Bezpečnosť informačných systémov. Bakalárske štúdium ukončila vypracovaním bakalárskej práce s názvom: *Invertovateľnosť blokovo cyklických matíc*. Bakalársku prácu robila pod vedením Mgr. Tomáša Fabšiča, PhD., pričom získala cenné skúsenosti a poznatky, ktoré sa dajú dobre využiť pri riešení tímového projektu.

Bc. Juraj Karásek
Pozícia v tíme: Developer

Je absolventom bakalárskeho štúdia na Fakulte elektrotechniky a informatiky Slovenskej Technickej Univerzity v Bratislave, v študijnom programe Aplikovaná informatika, odbor

Bezpečnosť informačných systémov. Bakalárske štúdium ukončil vypracovaním bakalárskej práce s názvom: *Porovnanie vybraných mechanizmov distribuovaného konsenzu z hľadiska IT bezpečnosti.*

Bc. Matej Ohradzanský
Pozícia v tíme: Developer

Je absolventom bakalárskeho štúdia na Fakulte elektrotechniky a informatiky Slovenskej Technickej Univerzity v Bratislave, v študijnom programe Aplikovaná informatika, odbor Bezpečnosť informačných systémov. Bakalárske štúdium ukončil vypracovaním bakalárskej práce s názvom: *Lúštenie substitučných šifrier.* Bakalársku prácu robil pod vedením prof. Ing. Pavla Zajaca, PhD. a v apríli tohto roku sa zúčastnil SVOČ-ky (*Študentská vedecká a odborná činnosť*), pričom sa umiestnil na prvom mieste vo svojej kategórii.

Bc. Peter Radvan
Pozícia v tíme: Web Developer

Je absolventom bakalárskeho štúdia na Fakulte elektrotechniky a informatiky Slovenskej Technickej Univerzity v Bratislave, v študijnom programe Aplikovaná informatika, odbor Bezpečnosť informačných systémov. Bakalárske štúdium ukončil s vyznamenaním. Pod vedením Ing. Viliama Hromadu, PhD. vypracoval bakalársku prácu s názvom: *ABC kryptosystém*, pri tvorbe ktorej získal množstvo vedomostí z oblasti post-kvantovej kryptografie, ktoré predstavujú značný náskok v analytickej časti projektu.

Bc. Lukáš Štrba
Pozícia v tíme: Analytik a vedúci riešiteľského kolektívu?

Je absolventom bakalárskeho štúdia na Fakulte elektrotechniky a informatiky Slovenskej Technickej Univerzity v Bratislave, v študijnom programe Aplikovaná informatika, odbor Bezpečnosť informačných systémov. Bakalárske štúdium ukončil s vyznamenaním. Pod vedením Ing. Viliama Hromadu, PhD. vypracoval bakalársku prácu s názvom: *Kubický ABC kryptosystém*, pri tvorbe ktorej získal množstvo vedomostí z oblasti post-kvantovej kryptografie. Tieto poznatky sú stále aktuálne a predstavujú dobrý základ potrebný na úspešné vypracovanie projektu.

1.2 Anotácia tímového projektu

Pokrok vo vývoji kvantového počítača má vážne dôsledky aj pre kryptografiu. Je známe, že dostatočne vykonné kvantové počítače budú vedieť efektívne riešiť problém faktorizácie čísla na prvočísla a problém diskrétneho logaritmu. Na náročnosti riešenia týchto problémov je založená bezpečnosť v súčasnosti používaných asymetrických kryptosystémov (napríklad RSA). To znamená, že v prípade existencie dostatočne výkonného kvantového počítača by súčasné asymetrické kryptosystémy už neboli bezpečné. Niektoré odhady hovoria, že takto výkonné kvantové počítače by mohli existovať už o 10 rokov. Je preto dôležité, pracovať na vývoji nových asymetrických kryptosystémov, ktoré budú odolné voči útokom kvantového počítača, a ktoré by mohli nahradiť súčasné asymetrické kryptosystémy. Na dôležitosť tejto témy upozornil aj americký inštitút pre štandardy a technológiu *NIST* v správe Report on Post-Quantum Cryptography. NIST zároveň vyhlásil súťaž Post-Quantum Cryptography Standardization Process s cieľom navrhnúť nové kryptografické štandardy odolné voči kvantovým počítačom. Do súťaže prišlo vyše 60 návrhov kryptosystémov. Tieto návrhy budú v najbližších rokoch verejne analyzované vedeckou komunitou s cieľom vybrať najlepších kandidátov.

Viacero návrhov zaslaných do súťaže je založených na QC-LDPC McElieceovom kryptosystéme. Jedná sa o variant McElieceovho kryptosystému, v ktorom sa využívajú QC-LDPC kódy. Pri šifrovaní sa správa prevedie na kódové slovo QC-LDPC kódu a ku kódovému slovu sa pridá chyba. Pri dešifrovaní je potrebné túto chybu odstrániť použitím tajného kľúča, ktorý obsahuje matice H a Q. Na odstránenie chyby je možné použiť dve metódy: buď sa použije dekódovací algoritmus pre QC-LDPC kódy, ktorý využíva maticu H, alebo sa použije dekódovací algoritmus pre QC-MDPC kódy, ktorý používa maticu H*Q. Cieľom práce je porovnať efektívnosť týchto dvoch metód. Úlohy, ktoré z toho vyplývajú sú nasledovné:

- naštudovanie si princípov fungovania QC-LDPC McElieceovho kryptosystému
- oboznámenie sa s implementáciou QC-LDPC McElieceovho kryptosystému v knižnici BitPunch (implementácia je v jazyku C)
- porovnanie efektívnosti dvoch vyššie spomenutých metód na odstránenie chyby zo správy zašifrovanej QC-LDPC McElieceovým kryptosystémom

1.3 Motivácia

Pre projekt sme sa rozhodli preto, že si uvedomujeme hrozbu, ktorú by predstavovalo zostrojenie dostatočne silného kvantového počítača pre dnešný svet. Dôkazom aktuálnosti tejto problematiky je aj fakt, že existujú viaceré medzinárodné projekty organizované napr. *NATO* alebo *VEGA*, do ktorých je zapojený aj Ústav informatiky a matematiky FEI STU. Skúmanie rôznych post-kvantových kryptosystémov je nesmierne dôležité a sme radi, že sa toho môžeme zúčastniť. Získané vedomosti môžu predstavovať cenný zdroj nových informácií pre členov tímu, ktorí sa už podrobnejšie stretli s post-kvantovou kryptografiou a zároveň dobrý základ pre členov, ktorí sú noví a vedomosti iba zbierajú. Veríme, že naše výsledky z tímového projektu pomôžu k napredovaniu výskúmu v tejto oblasti.

1.4 Organizácia projektu

Z diskusie členov riešiteľského kolektívu so zadávateľmi tímového projektu vyplynulo, že jediný možný termín pravidelných konzultácií je utorok ráno (cca 08:00). S návrhom súhlasili všetci prítomní. Neprítomný Bc. Peter Radvan s časom stretnutia dodatočne súhlasil. Z pravidelných stretnutí sa priebežne tvoria zápisnice, ktoré sú spolu s ostatnými materiálmi a informáciami dostupné na stránke projektu. Súčasťou vypracovania projektu je aj odovzdanie dokumentácie, v ktorej bude opísaný matematický model QC-LDPC McElieceovho kryptosystému, ako aj nami zistené výsledky meraní. Na vypracovanie analytickej časti projektu neuvažujeme nad žiadnymi špeciálnymi hardvérovými požiadavkami, ale v prípade spúšťania väčšieho množstva výpočtov uvažujeme nad využitím klastra STU v Bratislave.

2 Teoretická časť

2.1 Úvod do problematiky

Pri prenose informácií vznikajú prirodzene rôzne otázky. Nezachytáva niekto našu komunikáciu, nemení nám niekto obsah našich správ? Ako odpoveď na tieto otázky sa dáta začali rôzne modifikovať do podoby, ktorej by tretia strana nebola schopná rozumieť t.j. *šifrovať*. Pomocou šifrovania vieme informáciu bezpečne dostať od odosielateľa k prijímateľovi. Kryptografia ako vedná disciplína sa časom vyvíjala. Postupne vznikali nové a bezpečnejšie kryptosystémy. Avšak zostrojením dostatočne silného kvantového počítača by bolo možné tieto kryptosystémy prelomiť. Súčasná asymetrická kryptografia sa spolieha na problémy z teórie čísel, ako sú napríklad *faktorizácia prvočísel* a výpočet *diskrétneho logaritmu*. Tieto problémy by boli podľa P. W. Shora [11] riešiteľné v polynomiálnom čase na kvantovom počítači. Tým sa stávajú asymetrické kryptosystémy a podpisové schémy, ako napr. RSA a DSA zraniteľné a prelomiteľné [3].

Našťastie, existuje skupina matematických problémov, označované ako *NP-úplné* problémy, pre ktoré nepoznáme *efektívny* algoritmus, ktorý by ich dokázal riešiť na klasickom ani na kvantovom počítači. Je teda rozumné skúmať takéto problémy a na nich zakladať nové kryptosystémy odolné voči útokom na kvantovom počítači. Veda, ktorá sa zaoberá touto problematikou sa nazýva *post-kvantová kryptografia*. Jedným z takýchto problémov je aj tvz. *dekódovací problém*, ktorý sa zaoberá dekódovaním náhodného lineárneho kódu.

2.2 Lineárne kódy

Pri prenose správy prostredníctvom komunikačného kanálu môže nastať chyba prenosu a preto príjemnca nedostane pôvodnú odoslanú správu. Riešením tohto problému sa zaoberá *teória kódovania*. Pridaním *redundantnej* informácie je možné *detekovať*, alebo dokonca *opraviť* určitý počet chýb. Takto sa správa dĺžky k rozšíri o r redundantných bitov a celková dĺžka správy narastie na $k + r$. Ďalej budú vysvetlené základné pojmy a definície.

Lineárny kód je k rozmerný lineárny podpriestor v F_q^n. Označujeme ho ako $[n, k]$. Každé kódové slovo lineárneho kódu C má dĺžku n a samotný lineárny kód C má dimenziu k. Konečné pole F_q obsahuje q prvkov. Počet kódových slov je q^k [2].

Lineárny kód vieme reprezentovať prostredníctvom *generujúcej* alebo *kontrolnej* matice. Generujúca matica G má veľkosť $k \times n$. Riadky matice sú tvorené bázou pre lineárny kód C. Báza obsahuje k lineárne nezávislých vektorov z vektorového priestoru F_q^n. Lineárny kód vieme vygenerovať nasledujúcim predpisom:

$$C = \{aG | a \in F_q^k\} \tag{1}$$

Štandardná forma generujúcej matice G má tvar $G = [I_k|P]$, kde I_k reprezentuje jednotkovú maticu veľkosti $k \times k$ a matica P má rozmery $k \times r$.

Vieme, že existuje $n - k$ lineárne nezávislých vektorov, ktoré sú kolmé na všetky vektory z lineárneho kódu C a teda lineárny kód vieme zapísať ako:

$$C = \{v \in F_q^n : Hv^T = \bar{0}\} \tag{2}$$

Maticu H, ktorá spĺňa (2) nazývame *kontrolná matica*. Pre lineárny kód C existuje viacero kontrolných matíc.

Uveďme príklad generujúcej a kontrolnej matice binárneho lineárneho kódu [7,4]. Generujúca matica G lineárneho kódu je definovaná štyrmi bázovými vektormi, ktoré sa nachádzajú v 7-rozmernom binárnom priestore. Počet všetkých možných kódových slov je 2^4.

Generujúca matica $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Kontrolná matica $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lineárny kód máme definovaný a môžeme vytvoriť kódové slovo. Napríklad, nech vektor $v = (1, 0, 1, 0)$. Takto vytvorený vektor vynásobíme maticou G a dostaneme kódové slovo $k = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$ lineárneho kódu C. Správnosť vytvorenia kódového slova k si vieme overiť práve pomocou kontrolnej matice H tak, že po vynásobení dostaneme nulový vektor.

$$H \cdot k^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nižšie uvádzame ďalšie potrebné informácie dôležité pre problematiku tímového projektu. Kontrolné matice H pre binárny kód, môžu mať rôznu hustotu. Ak však existuje kontrolná matica s nízkou hustotou, tak kód nazývame *LDPC kód* (z anglického Low Density Parity-check Code). Ak existuje kontrolná matica H s miernou hustotou, kód nazývame *MDPC kódom* (z anglického Moderate Density Parity-check Code). Kontrolná matica MDPC obsahuje viac jednotiek ako matica pre LDPC kód.

Pod pojmom *cyklická matica* chápeme maticu, ktorá vznikne postupnou rotáciou prvého riadku a *kvázi-cyklická* matica pozostáva z blokov takýchto matíc.

Príklad cyklickej matice: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Príklad kvázi-cyklickej matice: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pri QC (kvázi-cyklických) kódoch existuje kontrolná matica H zložená z cyklických matíc. Cyklickým posunom v kódovom slove sa vytvorí taktiež kódové slovo. Ak pre LDPC, resp. MDPC kód existuje takáto matica, tak lineárny kód označujeme *QC-LDPC*, resp. *QC-MDPC*.

Hammingova váha vektora predstavuje počet nenulových prvkov vektora. Hammingova vzdialenosť dvoch vektorov predstavuje počet prvkov, ktoré sa odlišujú. Môžeme to chápať aj ako počet nutných zmien na to, aby sa jeden vektor pretransformoval na druhý [12].

2.3 McEliece kryptosystém

McEliece kryptosystém je asymetrický šifrovací algoritmus vyvinutý v roku 1978 profesorom Robertom McElieceom [9]. Bol to prvý kryptosystém svojho druhu, ktorý pri šifrovacom procese využíva náhodnosť. Napriek tomu, že si v kryptografickej komunite nikdy nenašiel príliš veľké prijatie, je jedným z kandidátov na post-kvantovú kryptografiu vďaka jeho odolnosti voči útokom, ktoré používajú Shorov algoritmus. Jeho bezpečnosť je založená na probléme dekódovania lineárnych kódov, ktorý je klasifikovaný ako *NP-úplný* problém [3]. Pri jeho konštrukcii je potrebné zvoliť dekódovací algoritmus, ktorý dokáže opraviť t chýb, ktoré sú zanesené do kódu pri šifrovaní. Pôvodný algoritmus využíva tzv. *Goppa kódy* [9] a pozostáva z troch častí: generovanie kľúčov, šifrovanie a deterministický dešifrovací algoritmus. Všetci používatelia takéhoto kryptosystému musia zdielať rovnaké bezpečnostné parametre n, k, t, kde n je dimenzia priestoru, k je dimenzia kódu (podpriestoru) a t je minimálny počet opraviteľných chýb.

2.3.1 Generovanie kľúčov

Alica si zvolí generujúcu maticu G s rozmermi $k \times n$ kódu C, pre ktorý existuje efektívny dekódovací algoritmus. Náhodne vygeneruje maticu S s rozmermi $k \times k$, ktorá nie je singulárna. Náhodne vygeneruje permutačnú maticu P s rozmermi $n \times n$. Vypočíta maticu $G' = SGP$ s rozmermi $k \times n$. Potom jej verejný kľúč je (G', t) a súkromný kľúč sú matice (S, G, P).

2.3.2 Šifrovanie

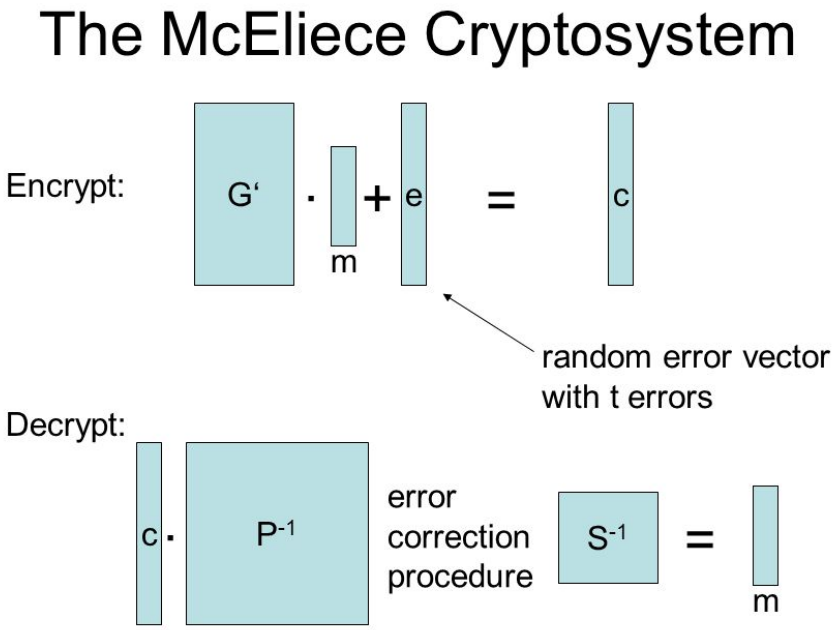
Bob chce poslať správu m Alici. Vygeneruje zašifrovanú správu $x = mG' + e$, kde e je náhodný chybový vektor s dĺžkou n, ktorého Hammingova váha nie je väčšia ako t. Táto podmienka zabezpečuje, že kód bude možné pri dešifrovaní dekódovať.

2.3.3 Dešifrovanie

Alica vypočíta inverznú maticu P^{-1}. Ďalej vypočíta xP^{-1}, čo môžeme rozpísať ako:

$$xP^{-1} = (mG' + e)P^{-1} = mSGPP^{-1} + eP^{-1} = mSG + eP^{-1} \tag{3}$$

Na tento výsledok vieme použiť dekódovací algoritmus pre kód generovaný maticou G a teda vieme dostať m'. Posledný krok, ktorý musí urobiť je vypočítať $m = m'S^{-1}$, aby sa dostala k správe, ktorú jej Bob poslal.



Obrázok 1: Schéma McEliece kryptosystému [5]

McElieceov kryptosystém má viacero výhod. Jednou z nich je napríklad, že šifrovanie a dešifrovanie je rýchlejšie ako pri RSA [4]. Je to hlavne preto, že McEliece vyžaduje iba násobenie vektora a matice, zatiaľ čo RSA umocňovanie čísel. Hlavnou nevýhodou tohto kryptosystému je veľkosť kľúčov. To je dôvod prečo sa tento kryptosystém veľmi neuchytil v praxi. Jednou z mála aplikácií, ktorá používala toto šifrovanie bola aplikácia *Entropy*, čo je decentralizovaná *peer-to-peer* komunikačná sieť, ktorá bola navrhnutá, aby bola odolná proti akejkoľvek cenzúre [10].

2.4 QC-LDPC McEliece

Napriek tomu, že nie je známy praktický útok na McElieceov kryptosystém s Goppa kódmi, mal pôvodný návrh jednu nevýhodu - veľkosť kľúčov. Existuje však spôsob, ako túto veľkosť znížiť a to výber kódov z veľkej automorfnej grupy, akými sú kvázi-cyklické kódy [1]. Avšak mnohé z nich sú napadnuteľné algebraickým útokom, pri ktorom môže útočník vytvoriť systém rovníc a tento systém riešiť pomocou Groebnerových báz. Úspešnosť takéhoto útoku vychádza z vlastností algebraickej štruktúry použitej rodiny kódov. Jedným z dôvodov prečo je takýto útok realizovateľný je, že kvázi-cyklická štruktúra umožňuje drastické zníženie počtu neznámych v systéme [8]. Hrozbe takéhoto útoku môžeme predísť použitím kódov, ktoré nemajú algebraickú štruktúru.

Vhodnými kandidátmi pre tento účel sú LDPC kódy, ktoré nemajú algebraickú štruktúru. Rozdiel voči QC-MDPC kódom spočíva v *redšej* kontrolnej matici H, ktorá umožňuje efektívnu korekciu chýb pri dekódovaní [1].

Ak by chcela Alica dostávať šifrované správy od Boba, potrebuje si vytvoriť verejný kľúč K_V, ktorým Bob bude šifrovať správy adresované Alici a súkromný kľúč K_S, ktorým bude Alica správy dešifrovať. Pre vytvorenie súkromneho kľúča si Alica potrebuje zvoliť náhodnú riedku kontrolnú kvázi-cyklickú maticu H a maskovacie matice S a Q. Matice S a Q sú kvázi-cyklické štvorcové invertovateľné matice, pričom S je hustá matica a Q riedka. Tieto tri matice tvoria Alicin súkromný kľúč K_S. Pre vytvorenie verejného kľúča K_V potrebuje Alica z matice H odvodiť generujúcu maticu G. Matice $H_1, ..., H_{n_0}$ sú riedke cyklické štvorcové matice.

$$H = \left[\begin{array}{cccc} H_1 & |H_2 & |... & |H_{n_0} \end{array} \right]$$

Nech matica I je jednotková štvorcová matica, potom generujúcu maticu G vytvorí Alica nasledovne:

$$G = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & \begin{array}{c} (H_n^{-1}H_1)^T \\ \vdots \\ (H_n^{-1}H_{n-1})^T \end{array} \end{array} \right]$$

Po dostaní generujúcej matice môže Alica vypočítať svoj verejný kľúč K_V ako $S^{-1}GQ^{-1}$. Následne môže Bob zašifrovať správu m jej vynásobením Aliciným verejným kľúčom K_V a pridaním chyby e. Pričom Hammingova váha chybového vektoru nie je väčšia ako t, čo je počet chýb, ktorý dokáže kód generovaný maticou G opraviť.

$$x = mK_V + e \tag{4}$$

Alica prijatú správu x dešifruje nasledovne: šifrovanú správu x vynásobí maticou Q, čím dostane $x' = mS^{-1}G + eQ$ (Q je riedka a teda Hammingova váha eQ je malá). x' je kódové slovo QC-LDPC kódu + chyba. Následne použitím vhodného dekódovacieho algoritmu odstráni chyby. Tak dostane správu m' rovnú mS^{-1}, ktorú stačí vynásobiť maticou S a získa pôvodnú správu m.

Správu šifrovanú pomocou QC-LDPC McElieceovho kryptosystému môže Alica dešifrovať podobne ako pri použití QC-MDPC kódov. Alicin verejný kľúč $K_V = S^{-1}GQ^{-1}$ generuje práve QC-MDPC kód. Nech matica $H' = HQ^T$. Keďže H aj Q sú riedke kvázi-cyklické matice, H' je tiež riedka kvázi-cyklická matica, ktorá je kontrolnou maticou pre tento kód, a teda platí $K_V(H')^T = 0$, čo môžeme dokázať nasledovne:

$$\begin{aligned} K_V(H')^T &= K_V(H')^T = \\ &= K_V(HQ^T)^T = \\ &= K_V QH^T = \\ &= S^{-1}GQ^{-1}QH^T = \\ &= S^{-1}GH^T = \\ &= S^{-1}0 = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

2.5 Bit-flippingové algoritmy

Gallagerov bit-flippingový algoritmus je iteratívny dekódovací algoritmus pre LDPC kódy. V prvom kroku sa vypočíta syndróm správy vynásobením kontrolnej matice H a transponovaného vektoru x^T. Tento výsledok môžeme chápať ako sústavu r rovníc alebo PC rovníc (Parity-check). Ak má rovnica na pravej strane 1, môžeme ju označiť ako UPC (Unsatisfied Parity-check Equation). Následne pre každý bit zo správy x zrátame počet UPC rovníc, do ktorých prispieva. Pre tento výpočet môžeme použiť *Tannerov* graf. Bit, ktorý prispieva do najviac UPC rovníc preklopíme, opäť vypočítame syndróm správy, ale teraz už s aktualizovaným vektorom x'. Ak je výsledok nulový vektor, tak sme správne dekódovali. Ak nie, pokračujeme rovnako v ďalšej iterácii pokým syndróm nie je nulový vektor, alebo sa nedosiahne maximálny počet iterácií. Pre ilustráciu si predvedieme jednoduchý príklad s jednou iteráciou.

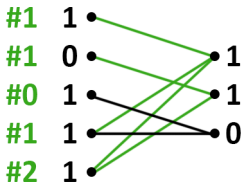
Majme kontrolnú maticu H a vektor x:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ďalej si vypočítame syndróm správy s:

$$s = Hx^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pomocou Tannerovho grafu vieme určiť množstvo UPC rovníc, do ktorých jednotlivé bity prispievajú. Na ľavo je transponovaný vektor x a na pravej strane je syndróm správy. Konkrétny bit prispieva do UPC rovnice, ak existuje spojenie v grafe z daného bitu do ktoréhokoľvek bitu syndrómu s hodnotou 1.



Obrázok 2: Tannerov graf na zistenie najpodozrivejšieho bitu

Z Tannerovho grafu vieme určiť najpodozrivejší bit, v našom prípade piaty, nakoľko zasahuje až do dvoch UPC rovníc. Preto ho preklopíme. Dostávame nové x' a opäť môžeme vypočítať syndróm s':

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s' = H(x')^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

V tomto prípade je výsledok nulový vektor, čo je ukazovateľom toho, že sme kódové slovo úspešne dekódovali.

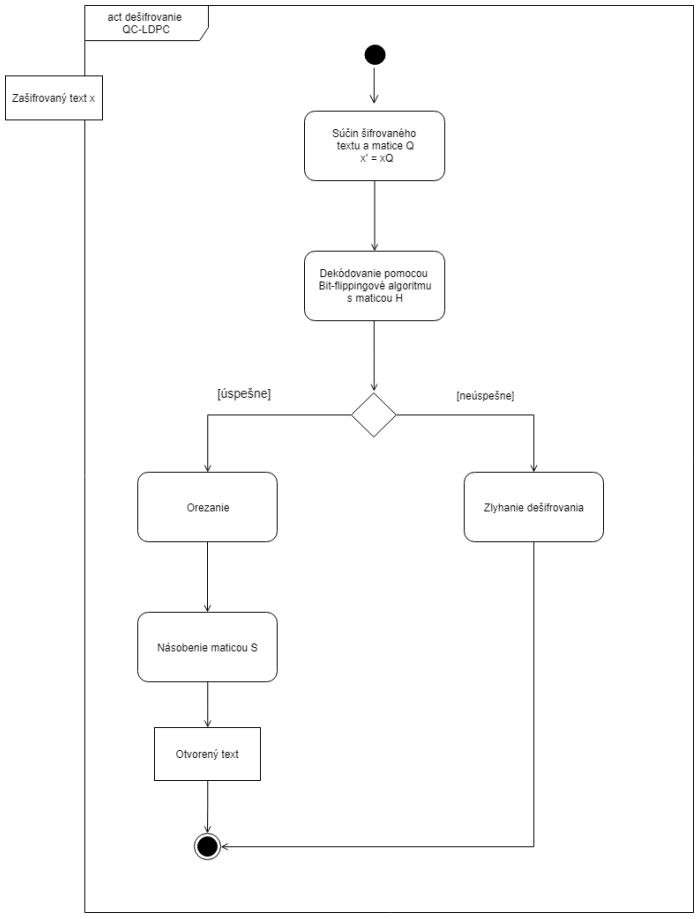
Ako bolo spomenuté vyššie, existujú mnohé modifikácie bit-flippingových algoritmov. Najväčší rozdiel medzi jednotlivými modifikáciami možno pozorovať pri nastavovaní *prahovej hodnoty*, podľa ktorej sa určuje či sa má daný bit preklopiť alebo nie. Vo všeobecnosti, ak je táto hodnota nízka, algoritmus je rýchlejší ale kódové slovo nemusí byť správne dekódované. Naopak ak je táto hodnota vysoká, algoritmus je pomalší, no zväčšuje sa pravdepodobnosť, že povedie k správnemu výsledku. Preto by sa dalo považovať správne nastavenie tejto hodnoty za kritické.

Modifikáciou bit-flippingového algoritmu môžu byť napríklad, že sa prahová hodnota predpočítava podľa návrhu R. G. Gallagera z jeho práce *Low Density Parity-check Codes* [6]. Ďalší prístup volí túto prahovú hodnotu ako maximálny počet UPC v každej iterácii. Treťou možnosťou je určenie prahovej hodnoty podľa vzorca, v ktorom sa od maximálneho počtu UPC rovníc odpočíta malá hodnota δ. Takýto krok má za následok preklopenie väčšieho počtu bitov na rozdiel od druhej modifikácie, kde sa preklopí jeden alebo len malý počet bitov [7], [8].

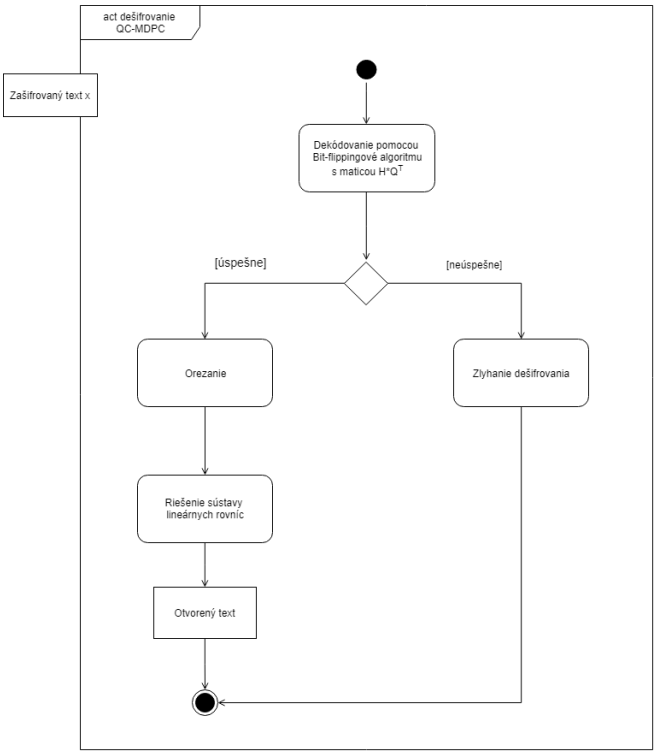
3 Praktická časť

Po naštudovaní problematiky tímového projektu a dostatočnom pochopení teoretickej stránky problému sme začali s praktickou realizáciou práce, na ktorú sme využili knižnicu *BitPunch*. Knižnica je výsledkom niekoľkých diplomových a tímových projektov na Ústave informatiky a matematiky FEI STU. Obsahuje implementáciu McElieceovho kryptosystému s využitím Goppa kódov, ale aj QC-LDPC, resp. QC-MDPC kódov.

Ako sme už v anotácii tímového projektu spomenuli, našou úlohou bolo porovať efektívnosť dvoch spôsobom dekódovania v McElieceovom QC-LDPC kryptosystéme. Na toto porovnanie sme boli nútení rozšíriť knižnicu BitPunch o ďalšiu funkcionalitu, konkrétne vynásobenie matice H s maticou Q^T, ktoré boli reprezentované v tzv. *kvázi-cyklickej riedkej* forme. Následne sme zostrojili implementácie kryptosystémov, pomocou ktorých vykonávame experimenty. UML diagramy implementácií zobrazujeme na obrázkoch nižšie.



Obrázok 3: UML diagram - dešifrovanie v QC-LDPC



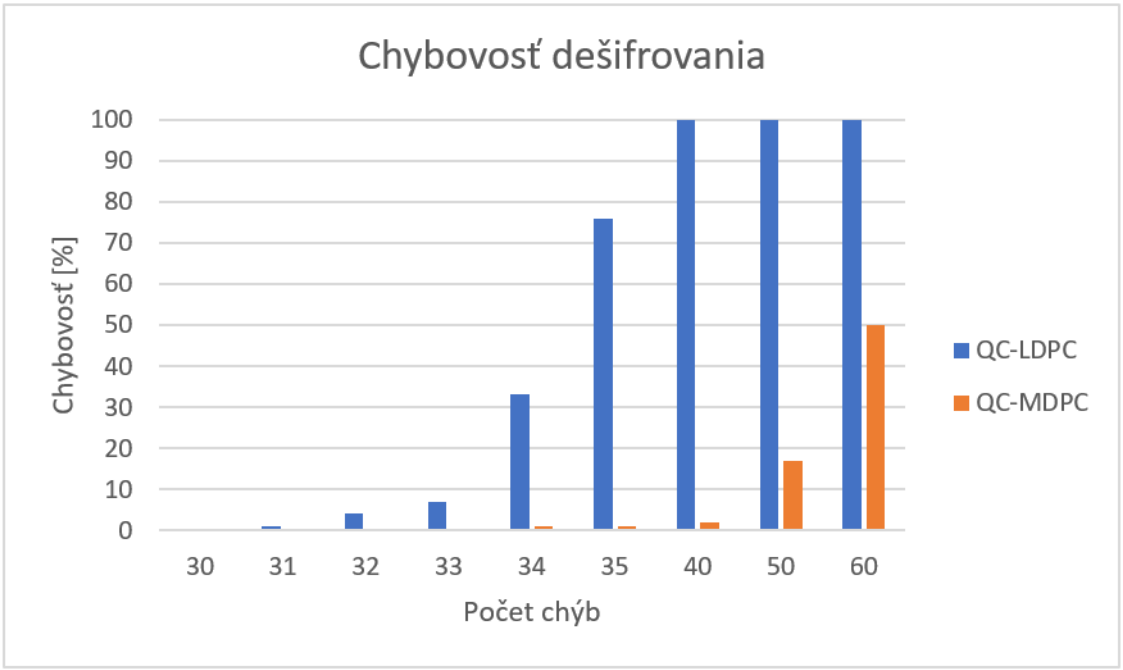
Obrázok 4: UML diagram - dešifrovanie v QC-MDPC

V nasledovnej časti zobrazujeme výsledky experimentu, pričom otvorený text a chybový vektor s vopred určeným počtom chýb sme generovali náhodne. Dešifrovanie sme opakovali 100-krát a zaznamenávali sme počet zlyhaní pri danom počte chýb. Počet chýb bol volený v intervale od 30 po 35 s krokom 1 a v intervale 40 až 60 s krokom 10.

Počet chýb	**Chybovosť [%]**	
	QC-LDPC	**QC-MDPC**
30	0	0
31	1	0
32	4	0
33	7	0
34	33	1
35	76	1
40	100	2
50	100	17
60	100	50

Obrázok 5: Tabuľka výsledkov experimentu

Z grafu Chybovosti dešifrovania môžeme vidieť, že v prípade použitia QC-LDPC kódu nastáva výrazne vyššia chybovosť ako v prípade QC-MDPC kódu. Ďalej môžeme pozorovať, že od hranice 40 chýb má dešifrovanie pomocou QC-LDPC kódu 100% chybovosť a je teda nepoužiteľný. QC-MDPC má pri tomto počte chýb približne 2% chybovosť a je výrazne lepší. Pri zvyšovaní počtu pridaných chýb môžeme pozorovať nárasť chybovosti aj u QC-MDPC.



Obrázok 6: Graf chybovosti dešifrovania

Záver

Cieľom tohto tímového projektu bolo experimentálne porovnať dva spôsoby dešifrovania v QC-LDPC McElieceovom kryptosystéme. Aby sme mohli uskutočniť merania, museli sme najprv doplniť knižnicu BitPunch o novú funkcionalitu. Zistili sme, že ak pri dekódovaní použijeme maticu, ktorá vznikne súčinom HQ^T, tak dosahuje výrazne menšiu chybovosť ako v prípade použitia matice H. Výsledky zobrazujeme v praktickej časti dokumentácie. Prácou na tomto tímovom projekte sme získali nové vedomosti a praktické skúsenosti z oblasti post-kvantovej kryptografie.

Zoznam použitej literatúry

[1] Baldi, M., Bodrato, M., and Chiaraluce, F. A new analysis of the mceliece cryptosystem based on qc-ldpc codes. In *International Conference on Security and Cryptography for Networks* (2008), Springer, pp. 246–262.

[2] Berlekamp, Elwyn. *Algebraic coding theory*. World Scientific.

[3] Berlekamp, E., McEliece, R., and Van Tilborg, H. On the inherent intractability of certain coding problems (corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory 24*, 3 (1978), 384–386.

[4] Canteaut, A., and Sendrier, N. Cryptanalysis of the original mceliece cryptosystem. In *International Conference on the Theory and Application of Cryptology and Information Security* (1998), Springer, pp. 187–199.

[5] Dowsley, R., van de Graaf, J., Müller-Quade, J., and Nascimento, A. C. Oblivious transfer based on the mceliece assumptions. In *International Conference on Information Theoretic Security* (2008), Springer, pp. 107–117.

[6] Gallager, R. Low-density parity-check codes. *IRE Transactions on information theory 8*, 1 (1962), 21–28.

[7] Andrej Gulyás. *Implementácia QC-MDPC McEliecovho kryptosystému*.

[8] Guo, Q., Johansson, T., and Stankovski, P. A key recovery attack on mdpc with cca security using decoding errors. In *International Conference on the Theory and Application of Cryptology and Information Security* (2016), Springer, pp. 789–815.

[9] Mceliece, R. J. A public-key cryptosystem based on algebraic. *Coding Thv 4244* (1978), 114–116.

[10] MIT Technology Review. *Cryptosystem Resists Quantum Attack*.

[11] Shor, P. W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM review 41*, 2 (1999), 303–332.

[12] Zlatoš, P. Lineárna algebra a geometria. *Martinus, Bratislava* (2011).

Prílohy

A Štruktúra elektronického nosiča

\
\Tímový projekt.pdf
\Zdrojové súbory - *upravená knižnica BitPunch*

B Používateľská príručka

Elektronický nosič obsahuje dokumentáciu k Tímovému projektu a upravenú verziu knižnice BitPunch.

Používateľ musí mať nainštalovaný kompilátor jazyka C. Na kompilovanie knižnice *BitPunch* je možné použiť priložený *makefile*:

- *Kompilovanie knižnice* v príkazovom riadku: v priečinku *../BitPunch/lib* zadať príkaz **make**
- *Spustenie implementácie*: v priečinku *../BitPunch/lib/dist/test* spustiť novovytvorený binárny súbor pomocou príkazu **./BitPunch**