Teoretická informatika (TIN) - Úkol 1

Šimon Stupinský - xstupi00@stud.fit.vutbr.cz

Hodnotenie:

1. ÚLOHA

Zadanie: Uvažujme operáciu $\circ$ definovanú nasledovne: $L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}$. S využitím uzáverových vlastností dokážte alebo vyvráťte, nasledujúce vzťahy:

(a) $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathscr{L}_3$

(b) $L_1 \in \mathscr{L}_3, L_2 \in \mathscr{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathscr{L}_2^D$

(c) $L_1 \in \mathscr{L}_3, L_2 \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathscr{L}_2$

$\mathscr{L}_2^D$ značí triedu deterministických bezkontextových jazykov, $\mathscr{L}_2$ triedu bezkontextových jazykov a $\mathscr{L}_3$ triedu regulárnych jazykov.

Overenie platnosti vzťahu (a):

Pre úplnosť uvedieme vety týkajúce sa uzáverových vlastností triedy regulárnych jazykov ($\mathscr{L}_3$), potrebné k dokázaniu tohto vzťahu:

Veta 3.22 Trieda regulárnych jazykov je *uzavretá* (mimo iné) vzhľadom k operaciám $\cup$ (*zjednotenia*), $\cdot$ (konkatenácie) a * (iterácie).

Veta 3.23 Trieda regulárnych jazykov tvorí množinovú *Booleovu algebru*.

Z vety **3.23** plynie uzatvorenosť vzhľadom ku komplementu z čoho vyplýva, že nasledujúci vzťah platí: $L_2 \in \mathscr{L}_3 \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathscr{L}_3$. Ako definuje veta **3.22**, trieda regulárnych jazykov ($\mathscr{L}_3$) je uzatvorená vzhľadom k operácií zjednotenia ($\cup$), z čoho už jasne plynie, že zadaný vzťah **(a)** platí: $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathscr{L}_3$.

Zadaný vzťah PLATÍ. □

Overenie platnosti vzťahu (b):

Na úvod znova uvedieme vetu týkajúcu sa uzáverových vlastností, ktorú budeme následne využívať pre overenie platnosti zadaného vzťahu. V tejto podúlohe to bude veta ohľadom triedy deterministických bezkontextových jazykov $\mathscr{L}_2^D$:

Veta 4.27 Deterministické bezkontextové jazyky sú uzatvorené voči *prieniku s regulárnymi jazykmi* a *doplnku*.

Prvá časť vety **4.27** vraví, že trieda deterministických bezkontextových jazykov je uzatvorená voči operací *prieniku* s triedou regulárnych jazykov. Využijeme taktiež vyššie uvedenú vetu **3.23**, ktorá vraví o uzatvorenosti triedy regulárnych jazykov vzhľadom k *doplnku*. Na základe týchto tvrdení môžme prehlásiť nasledujúci vzťah za platný:

$$L_1 \in \mathscr{L}_3, L_2 \in \mathscr{L}_2^D \Rightarrow \overline{L_1} \cap L_2 \in \mathscr{L}_2^D.$$

Na základe druhej časti vety **4.27**, ktorá vraví o tom, že trieda deterministických bezkontextových jazykov je uzatvorená voči *doplnku* (*komplementu*), môžme vyjadriť nasledujúci vzťah: $L_2 \in \mathscr{L}_2^D \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathscr{L}_2^D$. Aplikovaním tohto tvrdenia môžme prehlásiť nasledujúci vzťah za platný:

$$\overline{L_1} \cap L_2 \in \mathscr{L}_2^D \Rightarrow \overline{\overline{L_1} \cap L_2} \in \mathscr{L}_2^D.$$

Aplikovaním *De Morganovho* zákona na pravú stranu uvedenej implikácie dostaneme pôvodne skúmaný vzťah, teda: $\overline{\overline{L_1} \cap L_2} = L_1 \cup \overline{L_2} = L_1 \circ L_2$. Týmto sme ukázali, že zadaný vzťah **(b)** je platný:

$$L_1 \in \mathscr{L}_3, L_2 \in \mathscr{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathscr{L}_2^D.$$

Zadaný vzťah PLATÍ. □

Overenie platnosti vzťahu (c):

Na úvod uvedieme vetu, ktoré bude základom následného overovania platnosti tohto vzťahu:

Veta 4.24 Bezkontextové jazyky *nie sú* uzatvorené voči prieniku a *doplnku*.

Vzhľadom na to, že vzťah $L_1 \circ L_2$, respektíve $L_1 \cup \overline{L_2}$, obsahuje komplement jazyka L_2, ktorý je bezkontextový ($L_2 \in \mathscr{L}_2$), je v tomto vzťahu porušená uzáverová vlastnosť podľa vety **4.24**. Použijeme dôkaz sporom k tomu, aby sme predpoklad, že tento vzťah platí vyvrátili.

Predpokladáme, že zadaný vzťah je platný. Nech Σ je ľubovoľná konečná abeceda a L_1, L_2 sú jazyky nad touto abecedou. Keďže $\emptyset$ (tj. prázdna množina) je *regulárna* množina nad Σ, potom aj jazyk značiaci túto množinu je *regulárny*. Položme teda $L_1 = \emptyset$, pričom platí: $L_1 \in \mathscr{L}_3$ a zároveň nech $L_2 \in \mathscr{L}_2$. Po dosadení do nášho prepdokladu teda získame nasledujúci vzťah:

$$L_1 \in \mathscr{L}_3, L_2 \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow \emptyset \cup \overline{L_2} \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathscr{L}_2.$$

Avšak, veta **4.24** vraví o tom, že trieda bezkontextových jazykov nie je uzatvorená voči operácií doplnku. Ako príklad môžme uviesť jazyk $\{\overline{a^n b^n c^n \,|\, n \geq 0}\}$ ktorý je bezkontextový, avšak jeho doplnok je jazyk *kontextový*. Operácia doplnku sa nachádza vo vzťahu $\overline{L_2} \in \mathscr{L}_2$ a preto sme dospeli k sporu vôči pôvodnemu predpokladu. Keďže nemusí platiť vzťah $\overline{L_2} \in \mathscr{L}_2$, tak následne z toho jasne vyplýva, že nemusí platiť ani pôvodný vzťah **(c)**.

Zadaný vzťah NEPLATÍ. □

2. ÚLOHA

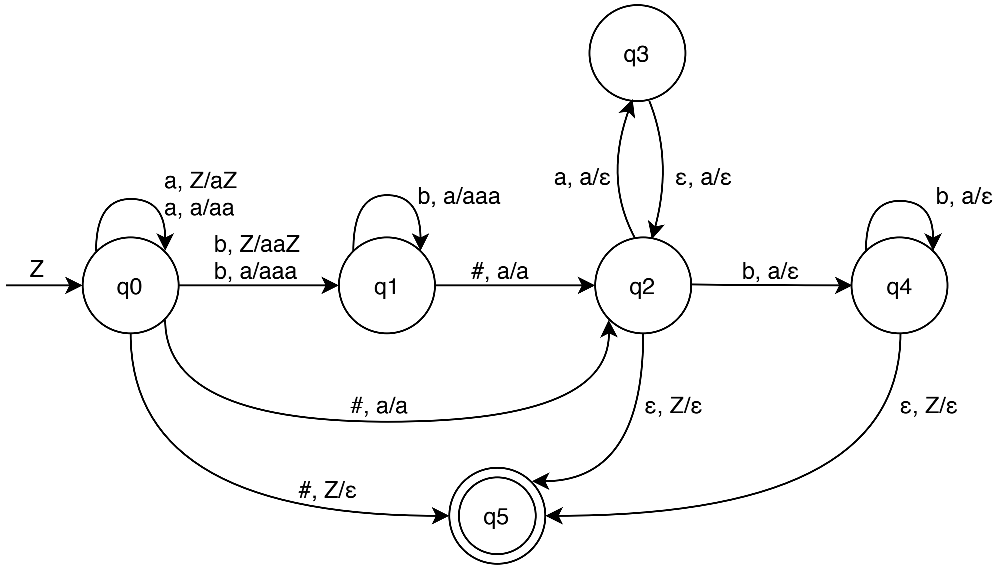
Zadanie: Nech L je jazyk nad abecedou $\{a, b, \#\}$ definovaný nasledovne: $L = \{a^i b^j \# a^k b^l \mid i + 2j = 2k + l\}$. Zostrojte deterministický zásobnikový automat M_L taký, že $L(M_L) = L$.

Riešenie

Nech $M_L = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a, b, \#\}, \{Z, a\}, \delta, Z, q_0, \{q_5\})$ je deterministický zásobnikový automat, kde δ je definovaná nasledovne:

$$\begin{array}{lll}
\delta(q_0, a, Z) = (q_0, aZ) & \delta(q_0, a, a) = (q_0, aa) & \delta(q_0, b, Z) = (q_1, aaZ) \\
\delta(q_0, b, a) = (q_1, aaa) & \delta(q_0, \#, a) = (q_2, a) & \delta(q_0, \#, Z) = (q_5, \varepsilon) \\
\delta(q_1, b, a) = (q_1, aaa) & \delta(q_1, \#, a) = (q_2, a) & \delta(q_2, a, a) = (q_3, \varepsilon) \\
\delta(q_2, b, a) = (q_4, \varepsilon) & \delta(q_2, \varepsilon, Z) = (q_5, \varepsilon) & \delta(q_3, \varepsilon, a) = (q_2, \varepsilon) \\
\delta(q_4, b, a) = (q_4, \varepsilon) & \delta(q_4, \varepsilon, Z) = (q_5, \varepsilon) &
\end{array}$$

Diagram výsledného deterministického zásobnikového automatu M_L je znázornený nižšie. DZA M_L príjma reťazec $w \in L$ prechodom do koncového stavu a prečitaním celého vstupného reťazca. Vrchol zásobnika uvádzame vždy vľavo.



Obr. 1. Diagram deterministického zásobnikového automatu M_L.

3. ÚLOHA

Zadanie: Nech L je jazyk nad abecedou $\{a,b,\#\}$ definovaný nasledovne: $L = \{a^i b^j \# a^k b^l \mid i+2j = 2k+l\}$. Dokážte, že jazyk L *nie je regulárny*.

Riešenie

Dôkaz budeme vykonávať s využitím *Pumping lemmy* o nekonečných regulárnych jazykoch a preto si ju na úvod uvedieme v jej plnom znení:

Veta 3.18 Nech L je nekonečný regulárny jazyk. Potom existuje celočíselná konštanta $p > 0$ taká, že platí:

$$w \in L \wedge |w| \geq p \quad \Rightarrow \quad w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq p \wedge xy^i z \in L \text{ pre } i \geq 0.$$

Intuitívne povedané, Pumping lemma vraví, že v každej dostatočne dlhej vete každého regulárneho jazyka sme schopní (blízko jeho začiatku) nájsť pomerne krátku sekvenciu, ktorú je možné vypustiť, respektíve zopakovať ľubovoľne krát, pričom výsledná veta stále patrí do daného jazyka.

Dôkaz: Dôkaz budeme viesť sporom s využitím vyššie uvedenej Pumping lemmy. Prepokládame, že jazyk L patrí do triedy nekonečných regulárnych jazykov: $L \in \mathscr{L}_3$. Podľa Pumping lemmy potom platí nasledujúce tvrdenie:

$$\exists p > 0 : \forall w \in L : |w| \geq p \Rightarrow \exists x,y,z \in \{a,b,\#\}^* : w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq p \wedge \forall i \geq 0 : xy^i z \in L.$$

Uvažujme ľubovoľné p, ktoré spĺňa vyššie uvedené podmienky. Zvoľme následne $w = a^p b^p \# a^p b^p$, u ktorého je zrejmé, že platí $w \in L \wedge |w| = 4p+1$, teda $|w| \geq p$. Podľa Pumping lemmy teda má platiť aj pravá strana vyššie uvedenej implikácie. Pri hľadaní podreťazca y môže vďaka podmienke $|xy| \leq p$ nastať len jedna možnosť, kde $y \in \{a\}^+$, pričom bude platiť, že:

$$w = a^p b^p \# a^p b^p = \underbrace{a^l}_{x} \underbrace{a^m}_{y} \underbrace{a^{p-l-m} b^p \# a^p b^p}_{z} \quad \text{, kde } l \geq 0 \wedge m > 0 \wedge l+m \leq p.$$

Ďalej musí platiť, že: $\forall i \geq 0 : xy^i z \in L$. Položme teda $i = 0$ a podľa predpokladu by malo platiť $xy^0 z \in L$:

$$xy^0 z = xz = \underbrace{a^l}_{x} \underbrace{a^m}_{y^0} \underbrace{a^{p-l-m} b^p \# a^p b^p}_{z} = \underbrace{a^l}_{x} \underbrace{a^{p-l-m} b^p \# a^p b^p}_{z} = a^{p-m} b^p \# a^p b^p.$$

Avšak, dosadením do definovaného predikátu jazyka L vidíme, že $\underbrace{(p-m)}_{\text{i}}+\underbrace{2*p}_{\text{2j}}\neq\underbrace{2*p}_{\text{2k}}+\underbrace{p}_{\text{l}}$ a preto $xz\notin L$, čo je spor voči nášmu pôvodnemu predpokladu, že $L\in\mathscr{L}_3$. $\square$

Ukážeme, že nevhodná voľba slova môže dôkaz výrazne zkomplikovať, no aj tak dospejeme k rovnakému záveru ako v prvom prípade. Znova predpokladáme, že jazyk L je nekonečný regulárny jazyk. Podľa vety **3.18** potom existuje $p>0$ také, že veta $w=a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}\#a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}$, ktorá patrí do jazyka L ($w\in L$) a jej dĺžka je aspoň rovná p ($|w|=2p+1$, teda $|w|\geq p$), sa dá zapísať v nasledujúcom tvare:

$$w=xyz=a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}\#a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}},\ y\neq\varepsilon\ \wedge\ |xy|\leq p\ \wedge\ \forall i\geq 0: xy^iz\in L.$$

Pri hľadaní podreťazca y môžu nastať nasledujúce 3 možnosti:

(a) $y\in\{a\}^+$, $\underbrace{a^l}_{\text{x}}\underbrace{a^m}_{\text{y}}\underbrace{a^{\frac{p}{2}-l-m}b^{\frac{p}{2}}\#a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}}_{\text{z}}$, kde, $l\geq 0\ \wedge\ m>0\ \wedge\ l+m\leq\frac{p}{2}$

(b) $y\in\{b\}^+$, $\underbrace{a^{\frac{p}{2}}b^l}_{\text{x}}\underbrace{b^m}_{\text{y}}\underbrace{b^{\frac{p}{2}-l-m}\#a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}}_{\text{z}}$, kde, $l\geq 0\ \wedge m>0\ \wedge\ l+m\leq\frac{p}{2}$

(c) $y\in\{a\}^+\cdot\{b\}^+$, $\underbrace{a^{\frac{p}{2}-l}}_{\text{x}}\underbrace{a^lb^m}_{\text{y}}\underbrace{b^{\frac{p}{2}-m}\#a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}}_{\text{z}}$, kde, $0<l,m\leq\frac{p}{2}$

Ukážeme, že vo všetkých troch možnostiach dochádza k porušeniu podmienky $xy^iz\in L,\ pre\ \exists i\geq 0$ a preto jazyk L nemôže byť označený ako nekonečný regulárny jazyk:

(a) $xy^iz=\underbrace{a^l}_{\text{x}}\underbrace{a^{m*i}}_{y^i}\underbrace{a^{\frac{p}{2}-l-m}b^{\frac{p}{2}}\#a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}}_{\text{z}}=a^{l+(m*i)+\frac{p}{2}-l-m}b^{\frac{p}{2}}\#a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}=a^{\frac{p}{2}-m+(m*i)}b^{\frac{p}{2}}\#a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}$

(b) $xy^iz=\underbrace{a^{\frac{p}{2}}b^l}_{\text{x}}\underbrace{b^{m*i}}_{y^i}\underbrace{b^{\frac{p}{2}-l-m}\#a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}}_{\text{z}}=a^{\frac{p}{2}}b^{l+(m*i)+\frac{p}{2}-l-m}\#a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}=a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}-m+(m*i)}\#a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}$

(c) $xy^iz=\underbrace{a^{\frac{p}{2}-l}}_{\text{x}}\underbrace{(a^lb^m)^i}_{y^i}\underbrace{b^{\frac{p}{2}-m}\#a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}}_{\text{z}}$

Z vyššie uvedených vzťahov jasne plynie, že $xy^iz\in L$ iba v prípade kedy je $i=1$. Vo všetkých zvyšných prípadoch bude porušená podmienka jazyka L. V možnostiach **(a)** a **(b)** dôjde k porušeniu počtu znakov na oboch stranách príslušnej vety podľa definovaného predikátu jazyka L, a v možnosti **(c)** dokonca k porušeniu toho, ze na oboch stranách musia všetky `a` predchádzať všetky `b`. Pre názornosť uvedieme príklad, kedy $i=0$ pre možnosti **(a)** aj **(b)**:

(a) $a^{\frac{p}{2}-m}b^{\frac{p}{2}}\#a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}\notin L$, keďže $\underbrace{(\frac{p}{2}-m)}_{\text{i}}+\underbrace{p}_{\text{2j}}\neq\underbrace{p}_{\text{2k}}+\underbrace{\frac{p}{2}}_{\text{l}}$

(b) $a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}-m}\#a^{\frac{p}{2}}b^{\frac{p}{2}}\notin L$, keďže $\underbrace{\frac{p}{2}}_{\text{i}}+\underbrace{(p-2m)}_{\text{2j}}\neq\underbrace{p}_{\text{2k}}+\underbrace{\frac{p}{2}}_{\text{l}}$

Keďže pre ľubovoľné i neplatí, že $xy^iz\in L$, opäť sme dospeli k sporu voči prepokladu, že L je nekonečný regulárny jazyk.

L **nie je nekonečný regulárny jazyk:** $L\notin\mathscr{L}_3$. $\square$

4. ÚLOHA

Zadanie: Navrhnite algoritmus, ktorý pre daný nedeterministický konečný automat $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ rozhodne, či $\forall w\in L(A): |w|\geq 5$.
Ďalej demonštrujte beh tohto algoritmu na automate $A=(\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\},\{a\},\delta,q_0,\{q_4\})$, kde δ je definovaná ako:

$$\delta(q_0,a)=\{q_0,q_1\},\delta(q_1,a)=\{q_1,q_2\},$$
$$\delta(q_2,a)=\{q_0,q_3\},\delta(q_3,a)=\{q_0,q_4\},$$
$$\delta(q_4,a)=\{q_0\}$$

Algoritmus

Overenie faktu či daný nedeterministický konečný automat A akceptuje len slová s minimálnou dlžkou 5, teda platí: $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$.

Vstup: Nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Výstup: `True` ak $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$ alebo `False` ak $\exists w \in L(A) : |w| < 5$.

Metóda:

1. $Q_0 := \{q_0\}$, $i := 0$
2. **while** $i < 4 \wedge Q_i \cap F = \emptyset$:
3. $\quad Q_{i+1} = \{q \in Q_i \mid \exists a \in \Sigma : \delta(q,a) \neq \emptyset\}$
4. $\quad i := i+1$
5. **return** True **if** $Q_i \cap F = \emptyset$ **else** False

Myšlienka algoritmu spočíva v postupnom generovaní množín takých stavov, do ktorých existuje prechod automatu A z jeho počiatočného stavu q_0 v rámci *i-tej mocniny* relácie ($\vdash_A^i$) tak, že pre $\forall\, 0 \leq i < 5$:

$$Q_i = \{q \in Q \mid \exists w \in \Sigma^* :\ (q_0, w) \vdash_A^i (q, \varepsilon) \wedge |w| = i\}$$

Na začiatok položme $Q_0 = \{q_o\}$, kde q_0 je počiatočný stav daného automatu A. Množinu Q_1 budú následne tvoriť všetky stavy do ktorých sa vieme dostať z počiatočného stavu prečítaním jedného symbolu zo vstupného reťazca, teda: $Q_1 = \bigcup_{a \in \Sigma} \delta(q_0, a)$. Množiny $Q_i,\ 1 < i < 5$, budú vytvorené rovnakým spôsobom ako množina Q_1 s tým rozdielom, že výsledok týchto množín bude tvorený zjednotením výsledkov všetkých stavov $q \in Q_{i-1}$:

$$Q_i = \bigcup_{q \in Q_{i-1}} \bigcup_{a \in \Sigma} \delta(q, a)$$

Algoritmus vráti `False` v prípade, že v niektorej z vytvorených množín $Q_i,\ 0 \leq i < 5$ sa nachádza aspoň jeden koncový stav z množiny F: $\exists q_f \in Q_i : q_f \in F$, inak vráti `True`. V prvom prípade to implikuje porušenie pôvodnej podmienky $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$:

$$\exists 0 <= i < 5 :\ Q_i \cap F \neq \emptyset \Rightarrow \exists w \in L(A) : |w| < 5$$

Tento algoritmus by bolo možné doplniť o podmienku na kontrolu veľkosti množiny Q. V prípade, že má nedeterministický konečný automat príjmať slová o dlžke $\mathbf{n}$ musí obsahovať aspoň $\mathbf{n+1}$ stavov. V našom prípade, ak $|Q| <= 5$, mohli by sme okamžite prehlásiť, že požadovaná podmienka neplatí a vrátiť `False`. Bez ujmy na obecnosti nášho algoritmu však túto podmienku nebudeme uvažovať.

Demonštrácia

Navrhnutý algoritmus demonštrujeme na nedeterministickom konečnom automate: $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a\}, \delta, q_0, \{q_4\})$, kde δ je definovaná ako:

$$\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}, \delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\},$$
$$\delta(q_2, a) = \{q_0, q_3\}, \delta(q_3, a) = \{q_0, q_4\},$$
$$\delta(q_4, a) = \{q_0\}$$

Postup:

1. $Q_0 = \{q_o\},\ i = 0$
2. $Q_0 \cap F = \emptyset \wedge i = 0 :\ Q_1 = \bigcup_{z \in \Sigma} \delta(q_0, z) = \delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$
3. $Q_1 \cap F = \emptyset \wedge i = 1 :\ Q_2 = \bigcup_{q \in Q_1} \bigcup_{z \in \Sigma} \delta(q, z) = \delta(q_0, a) \cup \delta(q_1, a) = \{q_0, q_1, q_2\}$
4. $Q_2 \cap F = \emptyset \wedge i = 2 :\ Q_3 = \bigcup_{q \in Q_2} \bigcup_{z \in \Sigma} \delta(q, z) = \delta(q_0, a) \cup \delta(q_1, a) \cup \delta(q_2, a) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
5. $Q_3 \cap F = \emptyset \wedge i = 3 :\ Q_4 = \bigcup_{q \in Q_3} \bigcup_{z \in \Sigma} \delta(q, z) = \delta(q_0, a) \cup \delta(q_1, a) \cup \delta(q_2, a) \cup \delta(q_3, a) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
6. $Q_4 \cap F = \{q_4\} \wedge i = 4$ (loop end) : **return** False $\Rightarrow \exists w \in L(A) : |w| < 5$

Nedeterministický konečný automat A prijma presne jeden reťazec w taký, že $w \in L(A) \wedge |w| < 5$. Uvedieme jednotlivé konfigurácie ktorými nedeterministický konečný automat A akceptuje reťazec $w = aaaa$:

$$(q_o, aaaa) \vdash (q_1, aaa) \vdash (q_2, aa) \vdash (q_3, a) \vdash (q_4, \varepsilon).$$

5. ÚLOHA

Zadanie: Dokážte, že jazyk $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 \neq 0 \wedge \#_b(w) \leq 2\}$ je regulárny. Postupujte nasledovne:

(a) Definujte $\sim_L$ pre jazyk L.

(b) Zapíšte rozklad $\Sigma^* / \sim_L$ a určte počet tried tohto rozkladu.

(c) Ukážte, že L je zjednotením niektorých tried rozkladu $\Sigma^* / \sim_L$.

Postup riešenia

K dôkazu, že zadaný jazyk L je regulárny použijeme *Myhill-Nerodovu vetu* a preto si ju na úvod definujeme:

Veta 3.20 Nech L je jazyk nad Σ. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

1. L je jazyk prijímaný deterministickým konečným automatom.
2. L je zjednotením niektorých tried rozkladu určeného pravou kongruenciou na Σ^* s konečným indexom.
3. Relácia $\sim_L$ má konečný index.

Naším cieľom teda bude ukázať, že existuje relácia $\sim_L$ s konečným indexom a že daný jazyk L je zjednotením niektorých tried rozkladu $\Sigma^* / \sim_L$.

Riešenie bodu (a)

V tomto bode máme za úlohu definovať $\sim_L$ pre jazyk L. Týmto symbolom sa označuje *prefixová ekvivalencia* a pre úplnosť najprv uvedieme jej definíciu:

Definícia 3.17 Nech L je ľubovoľný (nie nutne regulárny) jazyk nad abecedou Σ. Na množine Σ^* definujeme reláciu $\sim_L$ nazývanú *prefixová ekvivalencia* pre L takto:

$$u \sim_L v \overset{\text{def}}{\iff} \forall w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L$$

Vzhľadom na predikát, ktorý definuje reťazce náležiace do jazyka L môžme definovať reláciu prefixovej ekvivalencie na jazyku L ($\sim_L$) nasledovne pre $\forall u, v \in \Sigma^*$:

$$u \sim_L v \overset{\text{def}}{\iff} (\,(\#_a(u)\ mod\ 2 = \#_a(v)\ mod\ 2) \wedge (\#_b(u) = \#_b(v) \wedge 0 \leq \#_b(u), \#_b(v) \leq 2)\,) \vee (\#_b(u), \#_b(v) > 2)$$

Riešenie bodu (b)

Prefixová ekvivalencia $\sim_L$ vytvorená v predchádzajúcom bode definuje nasledujúce triedy rozkladu $\Sigma^* / \sim_L$:

$$L_0 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 0\} \qquad L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 0\}$$
$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 1\} \qquad L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 1\}$$
$$L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 2\} \qquad L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 2\}$$
$$L_6 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_b(w) > 2\}$$

Počet tried rozkladu Σ^* podľa prefixovej ekvivalencie $\sim_L$ je rovný **7**. Je zrejmé, že rozklad $\Sigma^* / \sim_L$ má teda konečný počet tried a z toho vyplýva, že prefixová ekvivalencia $\sim_L$ má taktiež konečný index, ktorý je rovný **7**.

Riešenie bodu (c)

Vzhľadom na definovaný predikát jazyka L, ktorý určuje aké reťazce náležia tomuto jazyku je zrejmé, že výsledný jazyk je tvorený zjednotením nasledujúcich tried: $L = L_1 \cup L_3 \cup L_5$

Dôsledok Ako sme ukázali, relácia $\sim_L$ má konečný index a daný jazyk L je zjednotnením niektorých tried rozkladu $\Sigma^* / \sim_L$. Na základe vyššie uvedenej Myhill-Nerodovej vety, môžme teda prehlásiť, že daný jazyk L **je regulárny** a nutne k nemu existuje deterministický konečný automat taký, že $L(M) = L$. □