

从递推到动归（上）

从递推到动归（上）

一、递推问题的求解套路

确定递推状态

推导递推公式

爬楼梯问题

状态定义

递推公式

凑钱币问题

状态定义

递推公式

墙壁涂色

方法1

状态定义

递推公式

方法2

状态定义

递推公式

方法3

状态定义

递推公式

一、递推问题的求解套路

1. 确定递推状态，一个数学符号 + 一个数学符号的语义解释
2. 确定递推状态，推导递推状态符号的自我表示方法
3. 程序实现，（递归+记忆化 / 循环实现）

确定递推状态

注意：这是学习递推问题的重中之重。学习确定递推状态的技巧。

$$f(x) = y$$

y: 问题中的求解量，也是我们所谓的因变量

x: 问题中直接影响求解量的部分，也是我们所谓的自变量

本质：就是寻找问题中的自变量与因变量

推导递推公式

本质：分析状态中的容斥关系

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

$f(n-1)$ ，代表 $n-1$ 个月的兔子数量，恰巧等于第 n 个月的成年兔子数量

$f(n-2)$ ，代表 $n-2$ 个月的兔子数量，恰巧等于第 n 个月的幼年兔子数量

所谓的推导，就是推导上面的这两句话的内容

爬楼梯问题

状态定义

$f(n)$ 代表爬 n 节楼梯的方法总数

递推公式

$$f(n) = f(n-2) + f(n-3)$$

kaikeba 开课吧

练习题1：爬楼梯

自：上楼梯数
因：方法数

- 1、确定递推状态
- 2、确定递推公式
- 3、程序实现

The diagram shows a staircase with 7 steps, numbered 1 to 7. A blue circle highlights the last two steps (6 and 7) with arrows pointing to $f(n-1)$ and $f(n-2)$ respectively. A green arrow points from step 1 to step 2, and a blue arrow points from step 2 to step 3.

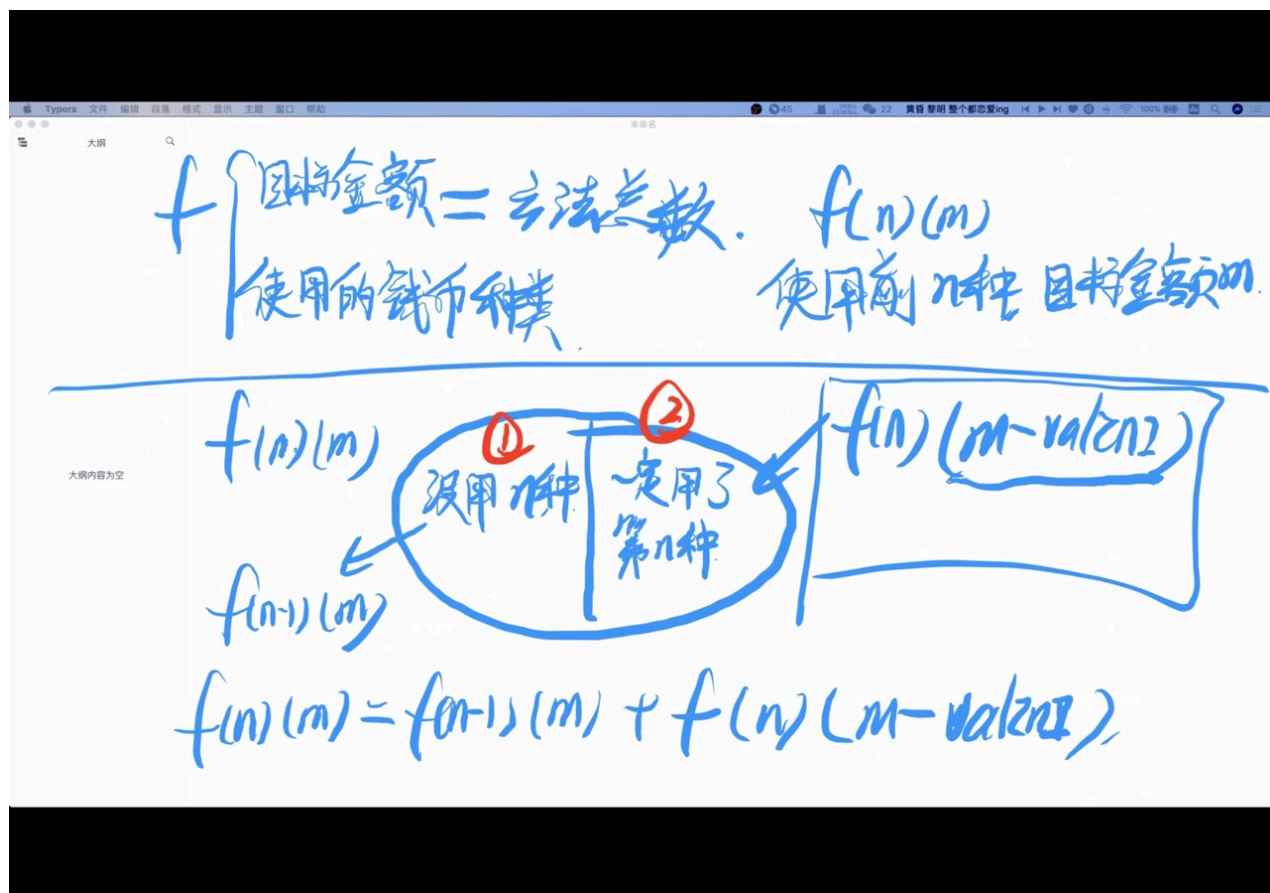
凑钱币问题

状态定义

$f(n, m)$ 代表用前 n 种钱币，拼凑 m 元钱的方案总数

递推公式

$$f(n, m) = f(n-1, m) + f(n, m - \text{val}[n])$$



墙壁涂色

方法1

技巧：先按照非环情况做，保证所有方案之间，相邻墙壁颜色不同，最后再保证首尾颜色不同

状态定义

$f(n, i, j)$ 代表 n 块墙壁，第一块涂颜色 i ，最后一块涂颜色 j 的方案总数

递推公式

$$f(n, i, j) = \sum_k f(n-1, i, k) \mid k \neq j$$

变量: 方法总数. 解题技巧: 头颜色, 尾颜色.
自变量: 墙壁数量, $f(n, i, j)$ n , 头, 尾, 方案总数.

Diagram illustrating the recurrence relation for painting walls. A horizontal bar represents a wall of length n . The first segment is labeled i and the last segment is labeled k . The total length is labeled n .

$$f(n, i, j) = \sum_k f(n-1, i, k) \mid k \neq j$$

答: $\sum_i \sum_j f(n, i, j) \mid i \neq j$

方法2

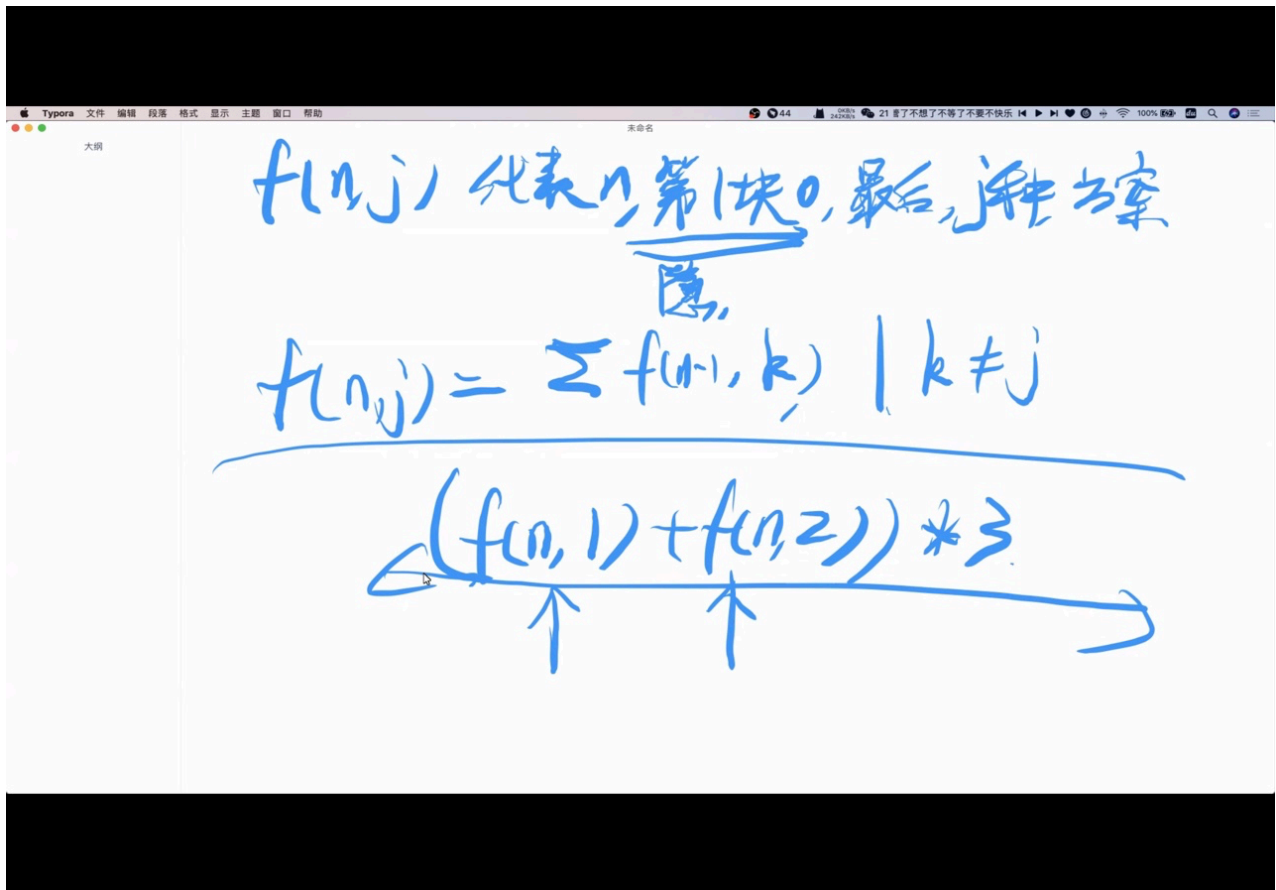
基于第一种做法, 优化状态定义, 忽略第一块的颜色

状态定义

$f(n, j)$ 代表 n 块墙壁, 第一块涂颜色 0, 最后一块涂颜色 j 的方案总数

递推公式

$$f(n, j) = \sum_k f(n-1, k) \mid k \neq j$$



方法3

单刀直入，直接定义状态，求什么定义什么

状态定义

$f(n)$ 代表 n 块墙壁，首尾颜色不同的方法总数

递推公式

$$f(n) = f(n-1) + 2 \times f(n-2)$$

$f(n)$ 代表首尾颜色不同的方案总数.

