树状数组

一、前缀和与差分

1. 原数组：$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$
2. 前缀和：$S_i = \sum_{k=1}^{k=i} a_i$，$a_i = S_i - S_{i-1}$
3. 差分数组：$X_i = a_i - a_{i-1}$
4. X 数组是 a 数组的差分数组，a 数组是 S 数组的差分数组
5. S 数组是 a 数组的前缀和数组，a 数组是 X 数组的前缀和数组
6. 前缀和数组以及差分数组，并没有增加信息，只是信息的另外一种表示形式
7. 前缀和数组用来优化区间和操作
8. 差分数组用来优化区间修改操作

问题1：原数组区间和操作

a 数组上的操作：$O(n)$

S 数组上的操作：$O(1)$，$S_i - S_{j-1} = a[j, i]$区间和

问题2：原数组区间元素修改（加法）

$a = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$

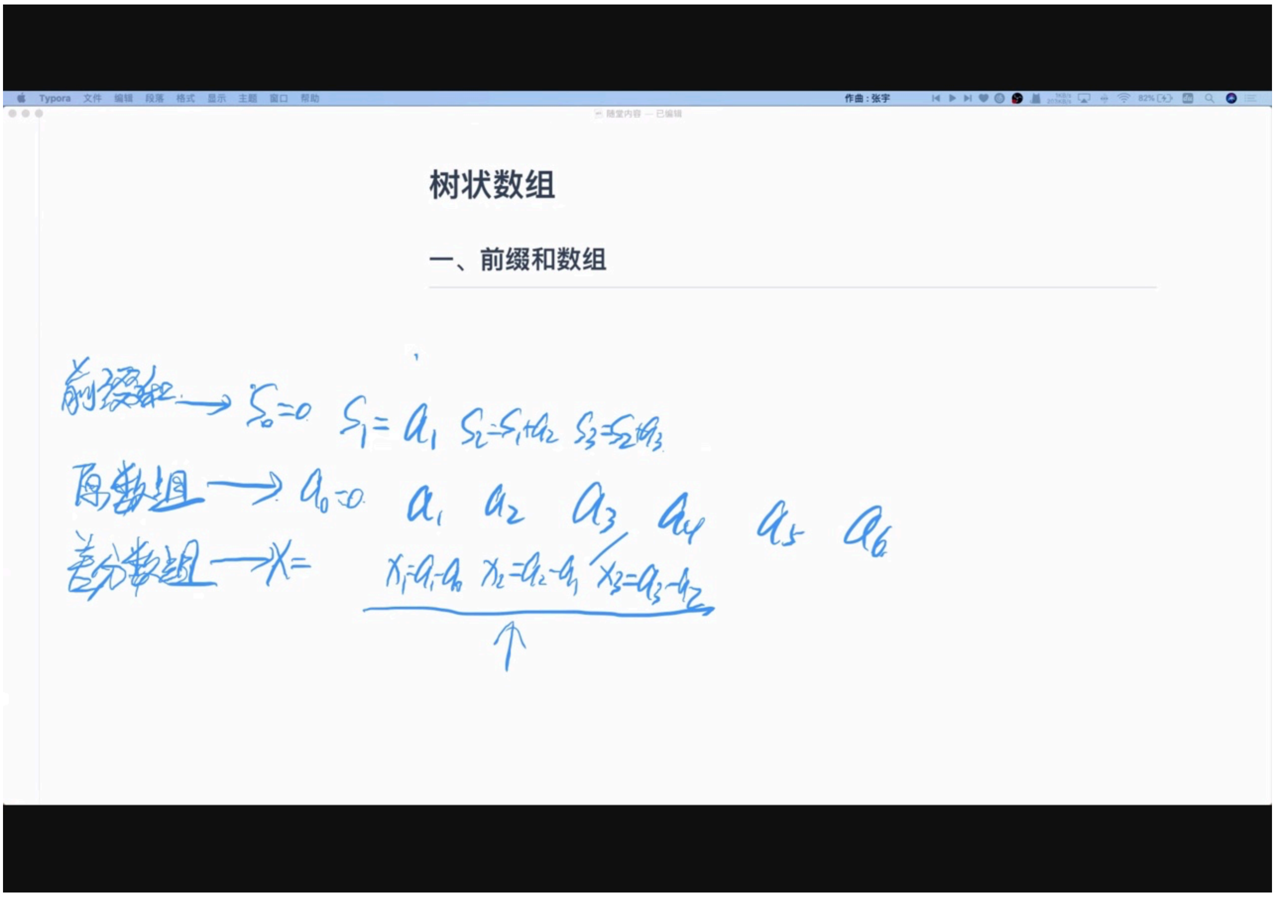
$X = \{X_1 = a_1 - a_0, X_2 = a_2 - a_1, X_3 = a_3 - a_2, X_4 = a_4 - a_3, X_5 = a_5 - a_4, X_6 = a_6 - a_5\}$

$\{a_1, a_2 + d, a_3 + d, a_4 + d, a_5, a_6\}$

$X = \{X_1 = a_1 - a_0, X_2 = a_2 - a_1 + d, X_3 = a_3 - a_2, X_4 = a_4 - a_3, X_5 = a_5 - a_4 - d, X_6 = a_6 - a_5\}$

a 数组时间复杂度：$O(n)$

X 数组时间复杂度：$O(1)$



二、树状数组

1. lowbit 函数求数字 i，二进制表示中的最低1所在的位权
2. lowbit(x) = x & -x
3. 树状数组本质上是对前缀和数组的一种优化，主要体现在单点修改操作上
4. 前缀和查询 $O(logn)$，单点修改$O(logn)$
5. 相比于最普通的前缀和数组，查询方面变差，单点修改操作变好，综合时间复杂度变好
6. 查询的时候，向前统计，i 的前一位 $i - lowbit(i)$
7. 修改的时候，向后修改，i 的后一位 $i + lowbit(i)$

三、海贼 OJ-329-弱化的整数问题

引入差分数组

$a = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$

$X = \{X_1 = a_1 - a_0, X_2 = a_2 - a_1, X_3 = a_3 - a_2, X_4 = a_4 - a_3, X_5 = a_5 - a_4, X_6 = a_6 - a_5\}$

$\{a_1, a_2 + d, a_3 + d, a_4 + d, a_5, a_6\}$

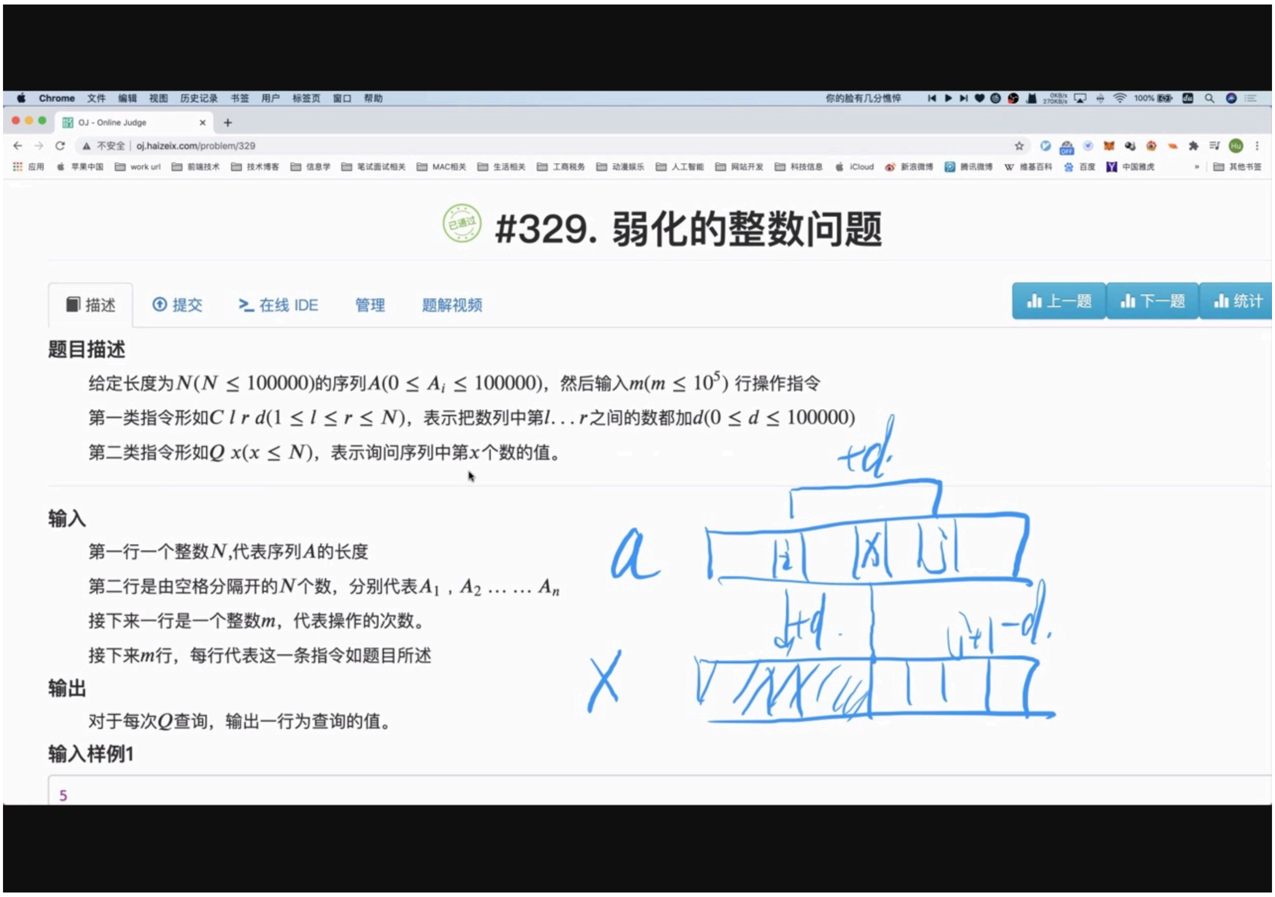
$X = \{X_1 = a_1 - a_0, X_2 = a_2 - a_1 + d, X_3 = a_3 - a_2, X_4 = a_4 - a_3, X_5 = a_5 - a_4 - d, X_6 = a_6 - a_5\}$

引入差分数组 X，将原数组 a 上的区间加操作，转换成 X 数组上的两次【单点操作】

对于查询原数组 a[i] 的值，等价于查询 X 数组前 i 位的【前缀和】

结论

由于，既要维护【前缀和】，又要进行【单点修改】，所以可以使用树状数组



四、海贼 OJ-330-加强的整数问题

引入差分数组

参考 HZOJ-329 的解法，主要为了维护原数组上的区间修改操作

原数组上的区间和问题转化

$a = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$

$X = \{X_1 = a_1 - a_0, X_2 = a_2 - a_1, X_3 = a_3 - a_2, X_4 = a_4 - a_3, X_5 = a_5 - a_4, X_6 = a_6 - a_5\}$

$Query(l, r) = S(r) - S(l-1)$，重点分析 S 怎么求，会求 S，万事大吉

$S_i = \sum_{k=1}^{i} \sum_{y=1}^{k} X_y = \sum_{k=1} i(i+1)X_k - k * X_k = (i+1)\sum_{k=1}^{i} X_k - \sum_{k=1}^{i} k * X_k$

设$Y_i = i \times X_i$

$S_i = (i+1)\sum_{k=1}^{i} X_k - \sum_{k=1}^{i} Y_k$

结论

S_i 可以通过维护 X 与 Y 两个序列的前缀和得到

所以可以通过维护两个与差分数组 X 相关的前缀和数组，从而得到原数组 a 的前缀和值

需要维护两个：树状数组