卡尔曼滤波
状态方程

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k \tag{1}$$

$$z_k = Hx_k \tag{2}$$

有过程噪声和观测噪声情况下

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + \omega_{k-1} \tag{3}$$

$$z_k = Hx_k + v_k \tag{4}$$

w 和 v 分别是过程噪声和测量噪声，假设两者相互独立，且都是正态分布的白噪声（高斯白噪声），满足：

$$P(\omega) \sim N(0, Q) \tag{5}$$

$$P(v\,) \sim N(0, R) \tag{6}$$

先验状态估计$\hat{x}_k^-$
后验状态估计$\hat{x}_k$
真实值x_k

传统卡尔曼滤波的推导方法
状态预测值(先验状态估计)$\hat{x}_k^-$

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \tag{7}$$

状态估计值(后验状态估计)由状态预测值和传感器输出值线性组合而成

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \tag{8}$$

先验误差

$$e_k^- = \hat{x}_k^- - x_k \tag{9}$$

后验误差

$$e_k = \hat{x}_k - x_k \tag{10}$$

先验误差协方差

$$P_k^- = E[e_k^- {e_k^-}^T] \tag{11}$$

后验误差协方差

$$P_k = E[e_k {e_k}^T] \tag{12}$$

由式(8) (4)可以得到

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(Hx_k + v_k - H\hat{x}_k^-)$$

变形得

$$\hat{x}_k - x_k = \hat{x}_k^- - x_k + K_k(Hx_k + v_k - H\hat{x}_k^-)$$

$$e_k = (I - K_kH)e_k^- - K_kv_k$$

所以

$$\begin{aligned} P_k = E[e_k {e_k}^T] &= E\left[[(I - K_kH)e_k^- - K_kv_k] * [(I - K_kH)e_k^- - K_kv_k]^T\right] \\ &= (I - K_kH)P_k^-(I - K_kH)^T + K_kRK_k^T \end{aligned} \tag{13}$$

确定K_k使后验误差协方差P_k最小
对K_k求导，使导数为 0

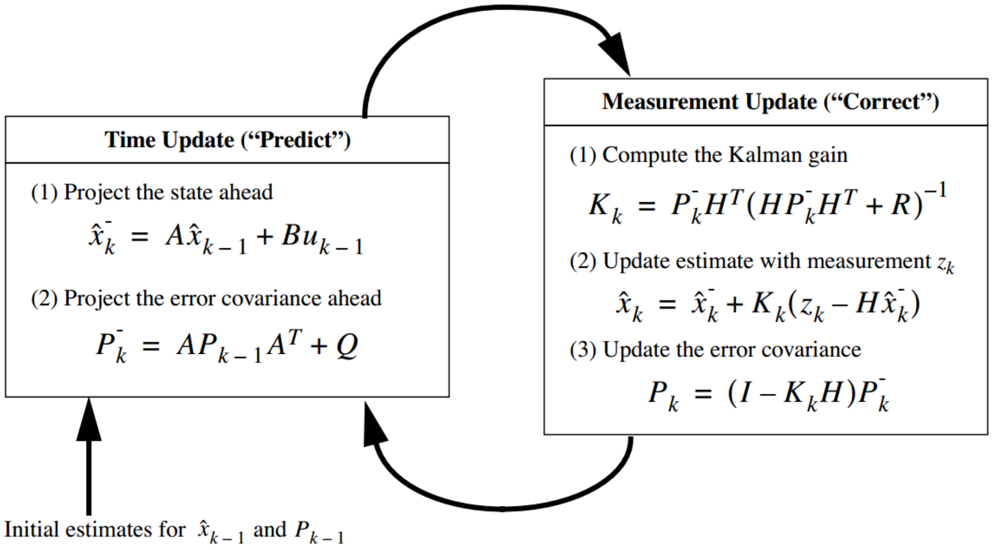
$$-2(P_k^-H^T) + 2K_k(HP_k^-H^T + R) = 0 \tag{14}$$

得

$$K_k = P_k^-H^T(HP_k^-H^T + R)^{-1} \tag{15}$$

有

$$P_k = (I - K_kH)P_k^- \tag{16}$$



贝叶斯:
将状态变量看作是高斯分布

$$x_{k-1} \sim N(\hat{x}_{k-1}, P_{k-1}) \tag{17}$$

由（3）式及高斯分布的运算可得，先验分布

$$x_k \sim N(A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}, AP_{k-1}A^T + Q) \tag{18}$$

当传感器获得一个数据z_k,由（4）式可知，获得数据z_k的概率分布为

$$z \sim N(Hx_k, R) \tag{19}$$

其中x_k为真实状态变量，R 为传感器协方差参数，令

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \\ P_k^- &= AP_{k-1}A^T + Q \end{aligned} \tag{20}$$

有

$$x_k \sim N(\hat{x}_k^-, P_k^-) \tag{21}$$

思路是：(21)为x_k的先验分布，(19)为传感器z概率分布，同时传感器分布采集一次数据为z_k，希望能求出x_k的后验分布

$$p(x_k | z_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-))$$

贝叶斯原理有

$$\begin{aligned} p\left(x_k \middle| z_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-)\right) &= \frac{p\left(z_k \middle| x_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-)\right) p(x_k | N(\hat{x}_k^-, P_k^-))}{p(z_k | N(\hat{x}_k^-, P_k^-))} \\ &= \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | N(\hat{x}_k^-, P_k^-))}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(z_k | x_k) p(x_k | N(\hat{x}_k^-, P_k^-)) dx_k} \end{aligned} \tag{22}$$

在(22)式中，x_k, z_k, $N(\hat{x}_k^-, P_k^-)$有

$$p\left(z_k \middle| x_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-)\right) = p(z_k | x_k)$$

因为(19)式中，z_k的分布仅取决于x_k，虽然同$N(\hat{x}_k^-, P_k^-)$也有相关性，但是在x_k已经确定时，就不再依赖于$N(\hat{x}_k^-, P_k^-)$

$p(z_k | x_k)$与$p(x_k | N(\hat{x}_k^-, P_k^-))$即为(19)与(21)的高斯分布，可根据多维高斯分布的概率密度公式来计算$p\left(x_k \middle| z_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-)\right)$，$x_k$的后验分布。

在此验证当 H=1，状态变量维数为 1 的结论。

dx_k区域概率,在z_k到$z_k + dz$的区域中计算:

$$p\left(x_k \middle| z_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-)\right) = \frac{\frac{1}{(2\pi R)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{-2R}(z_k - x_k)^2} dz \times \frac{1}{(2\pi P_k^-)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{-2R}(x_k - \hat{x}_k^-)^2} dx_k}{\int_{x_k=-\infty}^{x_k=+\infty} \frac{1}{(2\pi R)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{-2R}(z_k - x_k)^2} dz \times \frac{1}{(2\pi P_k^-)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{-2R}(x_k - \hat{x}_k^-)^2} dx_k}$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi \frac{RP_k^-}{P_k^- + R}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{-2\frac{RP_k^-}{P_k^- + R}}\left(x_k - \left(\frac{R}{P_k^- + R}\hat{x}_k^- + \frac{P_k^-}{P_k^- + R} z_k\right)\right)^2}$$

即

$$\left(x_k \middle| z_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-)\right) \sim N\left(\frac{R}{P_k^- + R}\hat{x}_k^- + \frac{P_k^-}{P_k^- + R} z_k, \frac{RP_k^-}{P_k^- + R}\right) \tag{23}$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \\ P_k^- &= AP_{k-1}A^T + Q \end{aligned} \tag{20}$$

也是一个高斯分布，而且同优化得到的卡尔曼滤波器是吻合的。