

卡尔曼滤波

状态方程

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k \quad (1)$$

$$z_k = Hx_k \quad (2)$$

有过程噪声和观测噪声情况下

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + \omega_{k-1} \quad (3)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (4)$$

w 和 v 分别是过程噪声和测量噪声，假设两者相互独立，且都是正态分布的白噪声（高斯白噪声），满足：

$$P(\omega) \sim N(0, Q) \quad (5)$$

$$P(v) \sim N(0, R) \quad (6)$$

先验状态估计 \hat{x}_k^-

后验状态估计 \hat{x}_k

真实值 x_k

传统卡尔曼滤波的推导方法

状态预测值(先验状态估计) \hat{x}_k^-

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \quad (7)$$

状态估计值(后验状态估计)由状态预测值和传感器输出值线性组合而成

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (8)$$

先验误差

$$e_k^- = \hat{x}_k^- - x_k \quad (9)$$

后验误差

$$e_k = \hat{x}_k - x_k \quad (10)$$

先验误差协方差

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] \quad (11)$$

后验误差协方差

$$P_k = E[e_k e_k^T] \quad (12)$$

由式(8) (4)可以得到

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(Hx_k + v_k - H\hat{x}_k^-)$$

变形得

$$\begin{aligned} \hat{x}_k - x_k &= \hat{x}_k^- - x_k + K_k(Hx_k + v_k - H\hat{x}_k^-) \\ e_k &= (I - K_k H)e_k^- - K_k v_k \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} P_k &= E[e_k e_k^T] = E[(I - K_k H)e_k^- - K_k v_k] * [(I - K_k H)e_k^- - K_k v_k]^T \\ &= (I - K_k H)P_k^- (I - K_k H)^T + K_k R K_k^T \end{aligned} \quad (13)$$

确定 K_k 使后验误差协方差 P_k 最小

对 K_k 求导，使导数为 0

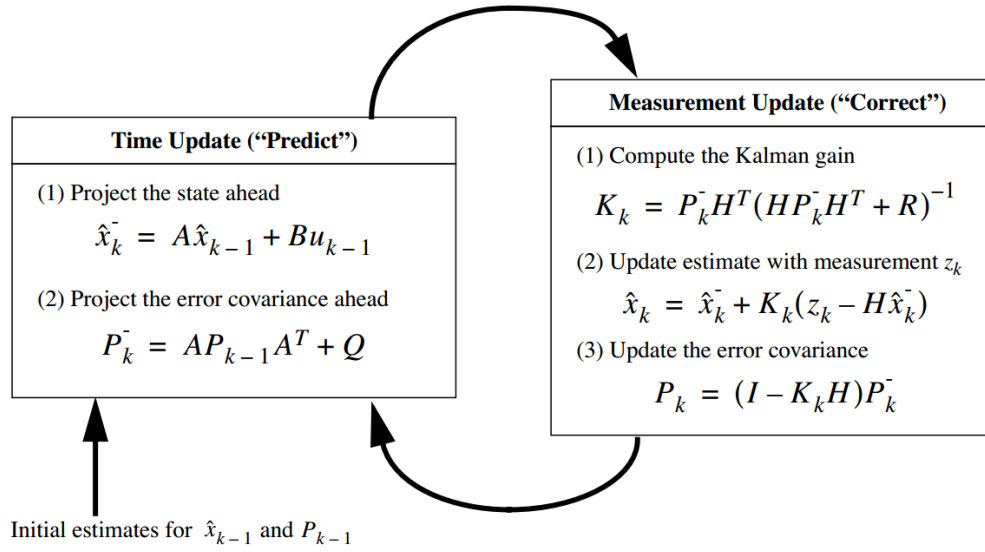
$$-2(P_k^- H^T) + 2K_k(HP_k^- H^T + R) = 0 \quad (14)$$

得

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (15)$$

有

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad (16)$$



贝叶斯:

将状态变量看作是高斯分布

$$x_{k-1} \sim N(\hat{x}_{k-1}, P_{k-1}) \quad (17)$$

由 (3) 式及高斯分布的运算可得, 先验分布

$$x_k \sim N(A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}, AP_{k-1}A^T + Q) \quad (18)$$

当传感器获得一个数据 z_k , 由 (4) 式可知, 获得数据 z_k 的概率分布为

$$z \sim N(Hx_k, R) \quad (19)$$

其中 x_k 为真实状态变量, R 为传感器协方差参数, 令

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \\ P_k^- &= AP_{k-1}A^T + Q \end{aligned} \quad (20)$$

有

$$x_k \sim N(\hat{x}_k^-, P_k^-) \quad (21)$$

思路是: (21) 为 x_k 的先验分布, (19) 为传感器 z 概率分布, 同时传感器分布采集一次数据为 z_k , 希望能求出 x_k 的后验分布

$$p(x_k | z_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-))$$

贝叶斯原理有

$$\begin{aligned} p(x_k | z_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-)) &= \frac{p(z_k | x_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-)) p(x_k | N(\hat{x}_k^-, P_k^-))}{p(z_k | N(\hat{x}_k^-, P_k^-))} \\ &= \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | N(\hat{x}_k^-, P_k^-))}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(z_k | x_k) p(x_k | N(\hat{x}_k^-, P_k^-)) dx_k} \end{aligned} \quad (22)$$

在(22)式中, $x_k, z_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-)$ 有

$$p(z_k | x_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-)) = p(z_k | x_k)$$

因为(19)式中, z_k 的分布仅取决于 x_k , 虽然同 $N(\hat{x}_k^-, P_k^-)$ 也有相关性, 但是在 x_k 已经确定时, 就不再依赖于 $N(\hat{x}_k^-, P_k^-)$

$p(z_k | x_k)$ 与 $p(x_k | N(\hat{x}_k^-, P_k^-))$ 即为(19)与(21)的高斯分布, 可根据多维高斯分布的概率密度公式来计算 $p(x_k | z_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-))$, x_k 的后验分布。

在此验证当 $H=1$, 状态变量维数为 1 的结论。

dx_k 区域概率, 在 z_k 到 $z_k + dz$ 的区域中计算:

$$p(x_k | z_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-)) = \frac{\frac{1}{(2\pi R)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2R}(z_k - x_k)^2} dz \times \frac{1}{(2\pi P_k^-)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2R}(x_k - \hat{x}_k^-)^2} dx_k}{\int_{x_k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi R)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2R}(z_k - x_k)^2} \times \frac{1}{(2\pi P_k^-)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2R}(x_k - \hat{x}_k^-)^2} dz dx_k}$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi \frac{RP_k^-}{P_k^- + R}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2 \frac{RP_k^-}{P_k^- + R}} \left(x_k - \left(\frac{R}{P_k^- + R} \hat{x}_k^- + \frac{P_k^-}{P_k^- + R} z_k\right)\right)^2} dx_k$$

即

$$(x_k | z_k, N(\hat{x}_k^-, P_k^-)) \sim N\left(\frac{R}{P_k^- + R} \hat{x}_k^- + \frac{P_k^-}{P_k^- + R} z_k, \frac{RP_k^-}{P_k^- + R}\right) \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \\ P_k^- &= AP_{k-1}A^T + Q \end{aligned} \quad (20)$$

也是一个高斯分布, 而且同优化得到的卡尔曼滤波器是吻合的。

