数值代数第二次作业

数学与应用数学（强基计划）2101　王笑同　3210105450

2023 年 3 月 20 日

1. (1) 以 n 阶可逆上三角矩阵 A 为例，只需说明其伴随 A^* 是上三角矩阵，即要说明对任何 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，有 $M_{ij} = 0$，其中 M_{ij} 代表 a_{ij} 的余子式. 注意到 a_{ij} 是上三角元，因此根据代数余子式的定义，M_{ij} 中必然有一个对角元是 0，即 $M_{ij} = 0$. 由 i, j 的任意性知 $(A^*)^{\mathrm{T}}$ 是下三角矩阵，从而 A^* 是上三角矩阵.

(2) 对矩阵 A 的阶数 n 做归纳. 当 $n = 1$ 时，结论自明. 现设结论对大小为 $n < m$ 的单位上三角阵成立，欲证明结论对 $n = m$ 的单位上三角阵成立. 记 $A^{-1} = (b_{ij})_{n\times n}$. 此时，根据归纳假设，$A$ 的 $(m-1)$ 阶顺序主子阵的逆是单位上三角阵，则 $\det A^{-1} = b_{mm}$. 由 $\det A^{-1} \cdot \det A = 1$ 即知 $b_{mm} = 1$，即 A^{-1} 是单位上三角矩阵.

2. 类似熟知的 Gauss 变换，对 n 阶矩阵 A，在第 $k\,(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 步消元时，令

$$U_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & -u_{kj} & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $u_{kj} = \dfrac{a_{jk}^{(n-k)}}{a_{kk}^{(n-k)}}$，$j = 1, 2, \ldots, k-1$. 则

$$L_k \cdots L_{n-k} A^{(n-k)} = \begin{pmatrix} A_{22}^{(n-k)} & O & \\ A_{12}^{(n-k)} & A_{11} & (n-k) \end{pmatrix}.$$

记 $L = U_1 U_2 \cdots U_n A$，则 L 为下三角矩阵；$U = U_n^{-1} U_{n-1}^{-1} \cdots U_2^{-1} = I + u_n e_n^{\mathrm{T}} + \cdots + u_2 e_2^{\mathrm{T}}$ 位单位上三角矩阵. 此时成立 $A = UL$. 特别地，若 A 可逆，则 $a_{ii}^{(i-1)}$，$i = 1, 2, \ldots, k$ 均非零，从而对角线上所有顺序主子阵非奇异，由此即得分解的唯一性.

3. (1) 将 A 左乘 $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，得到 $L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix}$；将 $L_1 A$ 左乘 $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，得到 $L_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 从而所求 LU 分解为

$$L = (L_2 L_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

利用前代法，解方程组 $Ly = b$ 得 $y = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$，再利用回代法解方程组 $Ux = y$ 得 $x = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right)$.

(2) 第 1 步消元，选定第 1 列的第 3 个元素为主元，交换第 1 行和第 3 行得 $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$，此时 $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{2}{3} & 1 & \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$，消元后 $L_1A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 2 & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$. 第 2 步消元，选定第 2 列的第 2 个元素为主元，交换 L_1A 的第 2 行和第 3 行得 $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. 此时 $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$，消元后 $L_2(L_1A) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. 从而所求列主元分解为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{3} & 1 & \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = L_2(L_1A) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

用前代法解方程组 $Ly = Pb$ 得 $y = \left(1, \frac{2}{3}, 0\right)^{\mathrm{T}}$，用回代法解方程组 $Ux = y$ 得 $x = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$.

(3) 第 1 步消元, 选定第 3 行第 3 列的元素为主元, 交换第 3 行和第 1 行、第 3 列和第 1 列得 $\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. 此时 $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{4}{5} & 1 & \\ -\frac{7}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix}$，消元得 $L_1A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{11}{10} \end{pmatrix}$. 第 2 步消元，主元为第 3 行第 3 列的元素，交换第 3 行和第 2 行、第 3 列和第 2 列得 $\begin{pmatrix} 10 & 3 & 6 \\ 0 & -\frac{11}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. 此时 $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -\frac{4}{11} & 1 \end{pmatrix}$，从而 $L_2(L_1A) = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 6 \\ 0 & -\frac{11}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{7}{55} \end{pmatrix}$. 于是

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{10} & 1 & 0 \\ \frac{8}{10} & \frac{4}{11} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 6 \\ 0 & -\frac{11}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{7}{55} \end{pmatrix}.$$

用前代法求解 $Ly = Pb$ 得 y，用回代法解 $Uz = y$ 得 z，最后由 $x = Qz$ 得 $x = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$.

上机习题见 program 文件夹，程序是在 Linux 下编译的:)