数值代数第三次作业

数学与应用数学（强基计划）2101　王笑同　3210105450

2023 年 3 月 20 日

1. 利用平方分解法，可得 $LL^{\mathrm{T}} = A$，其中

$$L = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ -1 & 3 & & \\ 2 & 0 & 2 & \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

用前代法解方程组 $Ly = b$，得 $y = (4, 2, 4, 2)^{\mathrm{T}}$；再利用回代法解 $L^{\mathrm{T}}x = y$，得 $x = (1, 2, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

2. 利用改进的平方分解法，可得 $LDL^{\mathrm{T}} = A$，其中

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 10 & & \\ & 5 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

用前代法解方程 $Ly = b$ 得 $y = (10, -15, -1)^{\mathrm{T}}$，简单计算得 $Dz = y$ 的解是 $z = (1, -3, 1)^{\mathrm{T}}$，用回代法求方程 $L^{\mathrm{T}}x = z$ 得 $x = (2, 1, -1)^{\mathrm{T}}$.

3. 设 A 有分解

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \\ & \gamma_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \\ & 1 & \beta_2 \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

则由追赶法公式

$$\begin{cases} \alpha_i = a_i - c_i, \\ \beta_i = \dfrac{b_i}{a_i - c_i}, \\ \gamma_i = c_i \end{cases}$$

得到

$$A = \begin{pmatrix} -4 & & \\ 2 & -4 & \\ & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

依次用前代法和回代法解得 $x = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$.

4. 写出增广矩阵，依次进行行列变换得到（过程太长就不写了 QAQ）

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{4}{85} & \frac{10}{17} & -\frac{23}{85} & -\frac{16}{17} \\ \frac{33}{85} & -\frac{6}{17} & \frac{41}{85} & \frac{13}{17} \\ \frac{19}{85} & \frac{5}{17} & -\frac{3}{85} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{3}{85} & -\frac{1}{17} & \frac{4}{85} & \frac{5}{17} \end{pmatrix}$$

上机习题见 program 文件夹，其中的 result.md 给出了程序的计算结果和我对作业的解答．程序是在 Linux 下编译的:)