数值代数第二次作业

数学与应用数学（强基计划）2101　王笑同　3210105450

2023 年 3 月 13 日

1. (1) 以 n 阶可逆上三角矩阵 A 为例，只需说明其伴随 A^* 是上三角矩阵，即要说明对任何 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，有 $M_{ij} = 0$，其中 M_{ij} 代表 a_{ij} 的余子式. 注意到 a_{ij} 是上三角元，因此根据代数余子式的定义，M_{ij} 中必然有一个对角元是 0，即 $M_{ij} = 0$. 由 i, j 的任意性知 $(A^*)^{\mathrm{T}}$ 是下三角矩阵，从而 A^* 是上三角矩阵.

(2) 对矩阵 A 的阶数 n 做归纳. 当 $n = 1$ 时，结论自明. 现设结论对大小为 $n < m$ 的单位上三角阵成立，欲证明结论对 $n = m$ 的单位上三角阵成立. 记 $A^{-1} = (b_{ij})_{n \times n}$. 此时，根据归纳假设，$A$ 的 $(m-1)$ 阶顺序主子阵的逆是单位上三角阵，则 $\det A^{-1} = b_{mm}$. 由 $\det A^{-1} \cdot \det A = 1$ 即知 $b_{mm} = 1$，即 A^{-1} 是单位上三角矩阵.

2.