数值代数第一次作业

数学与应用数学（强基计划）2101　王笑同　3210105450

2023 年 3 月 6 日

1. 设 $L = \begin{pmatrix} l_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$ 为下三角矩阵，$\prod\limits_{i=1}^{n} l_{ii} \neq 0$. 则其逆矩阵也是下三角矩阵，不妨设为 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. 则由 $LA = I$ 得 $La_k = e_k$，其中 $k = 1, 2, \ldots, n$. 从而可通过前代法解出每个 a_k，进而确定 A. 算法的伪代码如下：

```
for j = 1 : n
    for k = 1 : n − 1
        A (k, j) = A (k, j) / L (k, k)
        A (k + 1 : n, j) = A (k + 1 : n, j) −
                                A (k, j) ∗ L (j + 1 : n, k)
    end
    A (n, j) = A (n, j) / L (n, n)
end
```

4. 注意到 L 等价于将 $(2,3,4)^{\mathrm{T}}$ 的第一行的两倍分别加到第二、第三行上，因此

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. 设 $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & & \\ -\dfrac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{a_1}{a_{11}} & I_{n-1} \end{pmatrix}$，则 $L_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. 将 A 写作分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^{\mathrm{T}} \\ a_1 & A' \end{pmatrix}$，则有 $A_2 = -\dfrac{a_1}{a_{11}} \cdot a_1^{\mathrm{T}} + A' I_{n-1}$. 因为 A' 是对称矩阵，$a_1 \cdot a_1^{\mathrm{T}}$ 显然也是 $n \times n$ 的对称矩阵，

所以 A_2 是对称矩阵.

8. 沿用前一题的记号，记 $L_1A=(b_{ij})_{n\times n}$，则在矩阵 A_2 中，有

$$b_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}},\ i,j=2,3,\dots,n.$$

从而

$$|b_{ii}|=\left|a_{ii}-\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}\right|>|a_{ii}|-\frac{|a_{i1}||a_{1i}|}{|a_{11}|},$$

$$\sum_{k=2,k\neq i}^{n}|b_{ik}|=\sum_{k=2,k\neq i}^{n}\left|a_{ik}-\frac{a_{i1}a_{1k}}{a_{11}}\right|\leqslant\sum_{k=2,k\neq i}^{n}|a_{ik}|+\frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}\sum_{k=2,k\neq i}^{n}|a_{1k}|,$$

且

$$\sum_{k=2,k\neq i}^{n}|a_{ik}|<|a_{ii}|-|a_{i1}|,\qquad \sum_{k=2,k\neq i}^{n}|a_{1k}|<|a_{11}|-|a_{i1}|.$$

所以

$$|b_{ii}|>\sum_{k=2,k\neq i}^{n}|b_{ik}|.$$

10. 沿用第 7 题中的记号，有

$$L_1AL_1^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11} & \\ & A_2\end{pmatrix}.$$

因为 L_1 非奇异，所以对任何非零的 $x\in\mathbb{R}^{n-1}$，可构造 $\tilde{x}=(0,x^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 以及 $y=L_1^{\mathrm{T}}\tilde{x}$，则由 A 是正定矩阵得

$$0<y^{\mathrm{T}}Ay=\tilde{x}^{\mathrm{T}}L_1AL_1^{\mathrm{T}}\tilde{x}=(0,x^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}a_{11} & \\ & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ x\end{pmatrix}=x^{\mathrm{T}}A_2x.$$

由 x 的任意性知 A_2 是正定矩阵.