杨威线性代数每日一题 25 考研

YuTengLaTeX

作者：Yu Teng

组织：和光同尘

时间：December 29, 2024

版本：1.0

ElegantLaTeX Program

不要以为抹消过去，重新来过，即可发生什么改变。——比企谷八幡

【2024-05-06】设 n 阶矩阵 A 的秩为 $r(r>0)$，且满足 $A^k=O$(k 为正整数)，则

(1) A 的特征值为____________。

(2) $|A+aE|=$____________。

(3) $\left|E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_{k-1}A^{k-1}\right|=$____________。

(4) A 共有____________个线性无关的特征向量。

(5) A 相似对角化____________。

解:

(1) 设λ是A的特征值则，$A\alpha=\lambda\alpha$（$\alpha\neq 0$），$A^2\alpha=\lambda^2\alpha,\cdots,A^k\alpha=\lambda^k\alpha=O$由于$\alpha\neq 0$，故$\lambda^k=0$，即$\lambda=0$。即若$\lambda$是$A$的特征值则$\lambda=0$。即$A$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$。

(2) 引理: 若λ是A的特征值，则$f(\lambda)$是$f(A)$的特征值。$A+aE$的特征值是a，$a,\cdots a\left(n\text{个}a\right)$。即$|A+aE|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=a^n$。

(3) $1^n=1$。

(4) 因为A的特征值只有一个 0，所以就是看$Ax=0$的基础解系含有的解向量个数，即求$n-r(A)=n-r$。

(5) 因为A只有$n-r<n$个线性无关的特征向量，所以A不能相似对角化。

【2024-05-06】多项式$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & x^2 & 3 & x \\ x & x & -2 & x^2 \\ 2x^2 & 2 & x & 5 \\ 1 & -1 & 3x & 2 \end{vmatrix}$的最高项系数和常数项分别为____________。

解:

本题 4 行每行的最高项可以同时取得，所以最高项系数为$(-1)^{\tau(2413)}\cdot x^2\cdot x^2\cdot 2x^2\cdot 3x=-6x^7$。

常数项由于$f(x)=a_4x^4+a_3x^3+\cdots+a_1x^1+a_0$，所以$f(0)=$常数项。

所以常数项为$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot(4+5)=18$。