

## PC3 : Programmation dynamique 2

*Christoph Dürr, Nguyễn Kim Thắng*

## 1 Trianguler un polygone convexe

On vous donne un polygone convexe formé des points  $p_0, \dots, p_{n-1}$  dans l'ordre normal, et tel que pour tout  $i$ , le point  $p_{i+1}$  ne soit pas sur la droite définie par  $p_i$  et  $p_{i+2}$  (les indices sont pris modulo  $n$ ). Le but est de relier les points avec des segments de longueur totale minimale, pour décomposer le polygone en triangles. Donnez un programme dynamique pour ce problème.

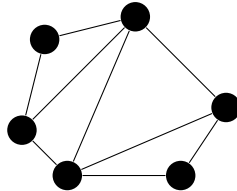


Figure 1: Un polygone et sa triangulation (pas forcément optimale).

## 2 Plus grand carré dans une grille

Étant donnée une grille de dimension  $n \times m$  aux cases colorés en blanc ou noir, trouvez un plus grand carré dans la grille (intersection de lignes  $[i, i + k]$  et colonnes  $[j, j + k]$  pour des entiers  $i, j, k$ ) qui soit entièrement blanc.

## 3 Ensemble indépendant de poids maximum dans un arbre

Un ensemble  $S \subseteq V$  est indépendant dans le graphe  $G(V, E)$  si les sommets de  $S$  ne sont pas reliés par une arête. Étant donné une pondération  $w : V \rightarrow \mathbb{N}$ , trouvez un ensemble indépendant  $S$  qui maximise  $\sum_v \in S w_v$ . C'est un problème NP-difficile, mais très facile pour les arbres. Donnez un programme dynamique de complexité linéaire pour ce problème. Indice: choisissez un sommet arbitraire comme racine pour définir la notion de sous-arbre.

## 4 Plus long chemin dans un arbre

Étant donné un arbre  $G(V, E)$  calculez la longueur du plus long chemin dans l'arbre. Ceci peut être fait par deux parcours successifs en profondeur, mais pour cet exercice donnez un programme dynamique.

## 5 Jeux avec des pièces alignées

Vous jouez un jeu avec votre nièce Sigrid. Sur la table sont alignées des pièces valant chacune une différente sommet d'argent, disons  $w_1$  à  $w_n$  en prenant les pièces de gauche à droite. À tour de rôle, chacun de vous prend une des deux pièces extrêmes, toute à gauche ou toute à droite. Sigrid commence. Quand il n'y a plus de pièces sur la table, vous comparez le total des pièces ramassées. La personne avec la plus grande somme gagne.



Figure 2: Une configuration du jeu. Le prochain joueur peut prendre une des deux pièces grises.

## 6 Ski alpin

Considérons une piste de ski alpin, modélisé par le plan euclidien, où la gravitation agit dans la direction  $-y$ . Vous débutez votre descente en le point  $(x_0, y_0)$ . Le long de la piste se trouvent des paires de drapeaux, la  $i$ -ième paire est composé des drapeaux en  $(x_i, y_i)$  et  $(x'_i, y_i)$ , avec  $x_i < x'_i$  et  $y_0 > y_1 > \dots y_n > 0$ . Votre but est de descendre le plus rapidement possible. Pour cela déterminez un plus court chemin du point de départ à la ligne d'arrivée  $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  en passant entre les drapeaux de chaque paire. Ce plus court chemin sera linéaire par morceaux et donc on ne tient pas compte des virages à effectuer en arrondi.

Donnez un programme dynamique pour ce problème.