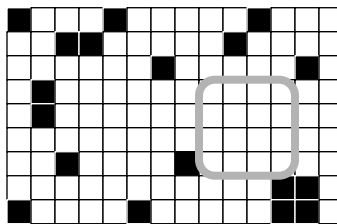


PC3 : Programmation dynamique 2

Christoph Dürr, Nguyễn Kim Thắng

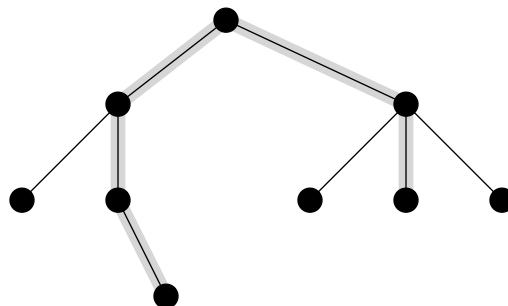
1 Plus grand carré dans une grille

Étant donnée une grille de dimension $n \times m$ aux cases colorées en blanc ou noir, trouvez un plus grand carré dans la grille (intersection de lignes $[i, i + k]$ et colonnes $[j, j + k]$ pour des entiers i, j, k) qui soit entièrement blanc.



2 Plus long chemin dans un arbre

Étant donné un arbre $G(V, E)$ calculez la longueur du plus long chemin dans l'arbre. Ceci peut être fait par deux parcours successifs en profondeur, mais pour cet exercice donnez un programme dynamique.



3 Jeux avec des pièces alignées

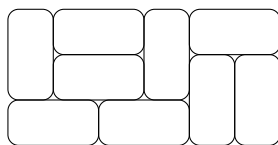
Vous jouez un jeu avec votre nièce Sigrid. Sur la table sont alignées des pièces valant chacune une différente somme d'argent, disons w_1 à w_n en prenant les pièces de gauche à droite. À tour de rôle, chacun de vous prend une des deux pièces extrêmes, toute à gauche ou toute à droite. Sigrid commence. Quand il n'y a plus de pièces sur la table, vous comparez le total des pièces ramassées. La personne avec la plus grande somme gagne.



1. Donnez un programme dynamique pour maximiser votre gain, dans le cas où Sigrid essaye de maximiser son gain à elle.
2. (Bonus) Montrez pour n pair, vous ne pouvez pas gagner strictement. Indice: ne pensez plus *programmation dynamique* mais *Zugzwang*.

4 Pavage par des dominos

Un domino est une forme géométrique qui couvre exactement deux cases sur une grille. Un pavage d'une grille par des dominos est un placement de dominos qui couvre chaque case exactement une fois, et tel qu'aucun domino ne dépasse la grille. On cherche à déterminer le nombre de pavages possible d'une grille de 3 lignes et de n colonnes, pour n pair.



1. Donnez un programme dynamique de complexité $O(n)$ pour ce problème.
2. Trouvez une autre méthode pour résoudre ce problème en temps $O(\log n)$.
3. Maintenant si une opération arithmétique ne prend plus un temps constant mais dépend du nombre de bits des nombres concernés, alors quelle est la complexité ?

[pour la dernière question: *Algorithms*, Jeff Erickson, section 5.1.6]