Algorithmique Avancée 2018 — École Centrale-Supélec

PC7 : Algorithmes d'approximations

Christoph Dürr, Nguyễn Kim Thắng

1 Couverture des ensembles

Étant donné un universe $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ et de m ensembles $S_1, \ldots, S_m$ où chaque ensemble $S_i \subseteq U$ est associé avec un poids w_i pour tout $1 \leq i \leq m$. Une *couverture des ensembles* est une collection $\mathcal{C}$ de ces ensemble telle que $U \subseteq \bigcup_{S_i \in \mathcal{C}} S_i$. L'objectif est de trouver une couverture des ensembles telle que le poids total $\sum_{S_i \in \mathcal{C}} w_i$ soit minimal.

Ce problème est NP-complet. Nous allons chercher un algorithme d'approximation. Considérer l'algorithme suivant.

Algorithm 1 Algorithme glouton pour COUVERTURE DES ENSEMBLES.

```
Initialement, R ← U and C ← ∅.
while R ≠ ∅ do
    Soit S_i un ensemble qui minimise w_i / |S_i ∩ R|.
    C ← C ∪ S_i.
    c_u ← w_i / |S_i ∩ R| pour tous u ∈ S_i ∩ R. {cette définition est pour l'analyse seulement.}
    R ← R \ S_i.
Retourner C.
```

1. Donner une interprétation de c_u.
2. Montrer que $\sum_{S_i \in \mathcal{C}} w_i = \sum_{u \in U} c_u$.
3. Montrer que pour chaque ensemble S_i, $\sum_{u \in S_i} c_u \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{|S_i|}\right) \cdot w_i$
4. Déduire que l'algorithm glouton ci-dessus est $O(\log n)$-approximation.

2 Couverture des arêtes

Étant donné un graph $G(V, E)$ où $|V| = n, |E| = m$ et chaque sommet $v \in V$ est associé avec un poids w_v. Une *couverture des arêtes* S est un sous-ensemble des sommets tel que chaque arête $e \in E$ a au moins une extrémité dans S. L'objectif est de trouver une couverture des arêtes telle que le poids total $w(S) = \sum_{v \in S} w_v$ soit minimal.

Ce problème est NP-complet. Nous allons chercher un algorithme d'approximation. Intuitivement, nous allons associer un prix p_e à chaque arête. Les prix p_e (pour $e \in E$) sont *équitables* si $\sum_{e=(\cdot,v)\in E} p_e \leq w_v$ pour chaque sommet v; c.a.d., les arêtes adjacents à v ne payent pas plus que le poids du sommet v.

1. Montrer que pour chaque couverture des arêtes S, on a $\sum_e p_e \leq w(S)$.

Etant donné les prix p_e pour $e \in E$, un sommet v est dit *saturé* si $\sum_{e=(\cdot,v)\in E} p_e = w_v$. Considérer l'algorithme suivant.

Algorithm 2 Algorithme pour COUVERTURE DES ARÊTES.

1: Initialement, $p_e \leftarrow 0$ pour toutes $e \in E$.
2: **while** il y a une arête $e = (u, v)$ telle que soit u ou v n'est pas saturé **do**
3: Choisir une telle arête e.
4: Augmenter p_e sans violer la propriété équitable.
5: Retourner l'ensemble S des sommets saturés.

2. Prouver que l'ensemble S et les prix p_e retournés par l'algorithme satisfait $w(S) \leq 2\sum_{e\in E} p_e$.

3. Montrer que l'algorithme est 2-approximation.