

PC6 : NP-complétude

Christoph Dürr, Nguyễn Kim Thắng

1 Subset Sum

Étant donné un ensemble de n entiers $S = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ et un entier B . Le but est décider s'il existe un sous-ensemble de S tel que la somme des entiers de ce sous-ensemble soit égal à B . Montrez que SUBSET-SUM est NP-complet.

Indice Faites une réduction de VERTEX COVER.

Le rôle d'un ensemble dans le deuxième problème doit jouer le rôle d'une somme dans le premier problème. Pour cela considérez l'écriture en base 3 d'un entier, et associez chacun des n premiers chiffres à une arête.

2 2-Partition

En entrée, nous avons un ensemble de n entiers $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. En sortie, nous devons renvoyer un sous-ensemble T de S tel que la somme des entiers de T soit égale à la somme des entiers de $S \setminus T$. Montrez que 2-PARTITION est NP-complet.

Indice Faites une réduction de SUBSET SUM.

3 Load Balancing

En entrée, nous avons un n tâches de durées respectives $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ et m machines identiques parallèles. Le but est d'affecter les tâches aux machines, afin de minimiser la charge maximale sur les machines. Montrez que LOAD BALANCING est NP-complet.

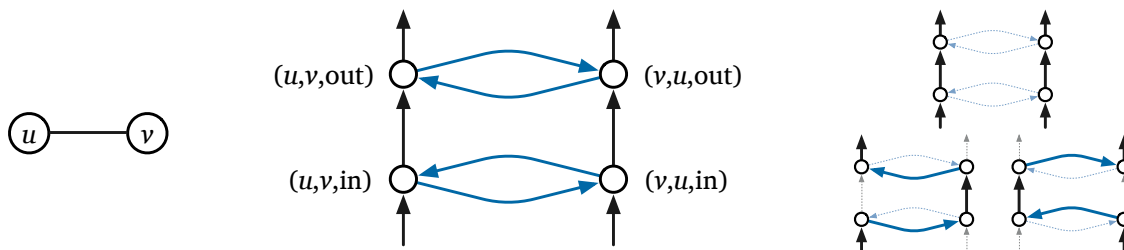
Indice Faites une réduction de 2-PARTITION.

4 Hamiltonian cycle

En entrée, nous avons un graphe orienté $G(V, A)$ et le but est de trouver un cycle orienté qui visite chaque sommet exactement une fois. Notez que ce problème est très différent de EULERIAN CYCLE où le but est de visiter chaque arc exactement une fois. Ce dernier est

dans P . On veut montrer que 2-PARTITION est NP-complet, par réduction de VERTEX COVER.

Les gadgets sont montrés ci-dessous. Chaque arête (u, v) génère 4 sommets et 6 arcs. On aimerait qu'un cycle Hamiltonien corresponde à un ensemble de sommets S qui couvre chaque arête. Il y a trois manières qu'un cycle Hamiltonien peut traverser ce gadget, correspondant à la couverture de u seulement, celle de v seulement ou celle de u et de v . Complétez la construction, pour s'assurer que S soit de cardinalité k et que la traversée des gadgets soit consistante avec la propriété $u \in S$ ou $u \notin S$.



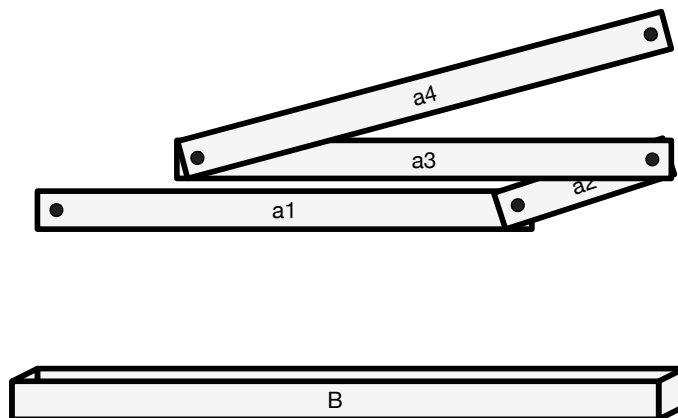
An edge gadget for uv and its only possible intersections with a Hamiltonian cycle.

[Jeff Erickson, *Algorithms etc, NP-Hard Problems*]

5 Règle de chantier

On vous donne une règle de chantier qui consiste en n bandes de bois, de largeur $2cm$, et reliées entre eux de manière séquentielle par des rivets à $1cm$ de chaque extrémité. La i -ième bande a une longueur de $a_i > 2$ cm pour a_i entier.

Le but est de la replier pour qu'elle entre sans dépasser dans une boîte de $2cm$ de haut et de B cm de long, et assez large. On veut montrer que RÈGLE DE CHANTIER est NP-complet, par réduction de 2-PARTITION.



6 Jeu de Cubic

Définition. Cubic est un jeu à un joueur qui se joue sur une grille de carrés. Il existe trois types de carrés:

- les murs (représentés en noir): ceux-ci ne peuvent pas être déplacés,
- les cases vides (représentées en blanc),
- les blocs de couleur (représentés en gris, la couleur est représentée par un nombre).

A chaque tour, le joueur peut déplacer un bloc de couleur d'une case vers la gauche ou d'une case vers la droite, si les cases correspondantes ne sont pas déjà occupées par un mur ou un autre bloc de couleur. Si un bloc de couleur se trouve au dessus d'une case vide, il "tombe" jusqu'à rencontrer un mur ou un bloc de couleur. Si deux blocs de la même couleur partagent un côté, ils disparaissent. Éventuellement, les blocs de couleur se trouvant au dessus-eux tombent. Le joueur gagne s'il arrive à faire disparaître tous les blocs de couleur.

1. Résolvez les problèmes de Cubic de la figure 1.

Étant donné une instance de Cubic, nous souhaitons déterminer si celle-ci admet une solution. Nous allons montrer que ce problème est NP-complet. Pour cela, nous allons effectuer une réduction à partir de SAT.

2. Exprimez le problème SAT sous la forme de circuit (graphe orienté où les sommets représentent des opérateurs logiques et tous les arcs sont orientés du haut vers le bas).

Nous allons transformer une instance de SAT encodée sous forme de circuit en une instance de Cubic qui admet une solution si et seulement si le circuit admet une affectation des variables qui donne une sortie VRAI. On encode les variables et les sorties comme indiqué dans la figure 2.

3. Expliquez comment fonctionne cette encodage. De quels autres gadgets a-t-on besoin?
4. Expliquez le fonctionnement de la porte AND de la figure 3.
5. Expliquez comment faire une porte NOT et une porte OR.
6. A quoi sert la construction SWITCH de la figure 3.
7. En utilisant la structure SWITCH, créez une structure faisant un croisement de fils.
8. Que fait la construction mystère de la figure 3.
9. Montrez que Cubic est NP-complet.

[<https://www2.stetson.edu/~efriedma/papers/spiral.ppt>]

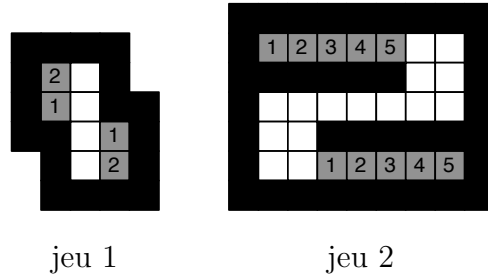


Figure 1: Deux configurations initiales du jeu *Cubic*.



Figure 2: Encodage des variables et de la sortie.

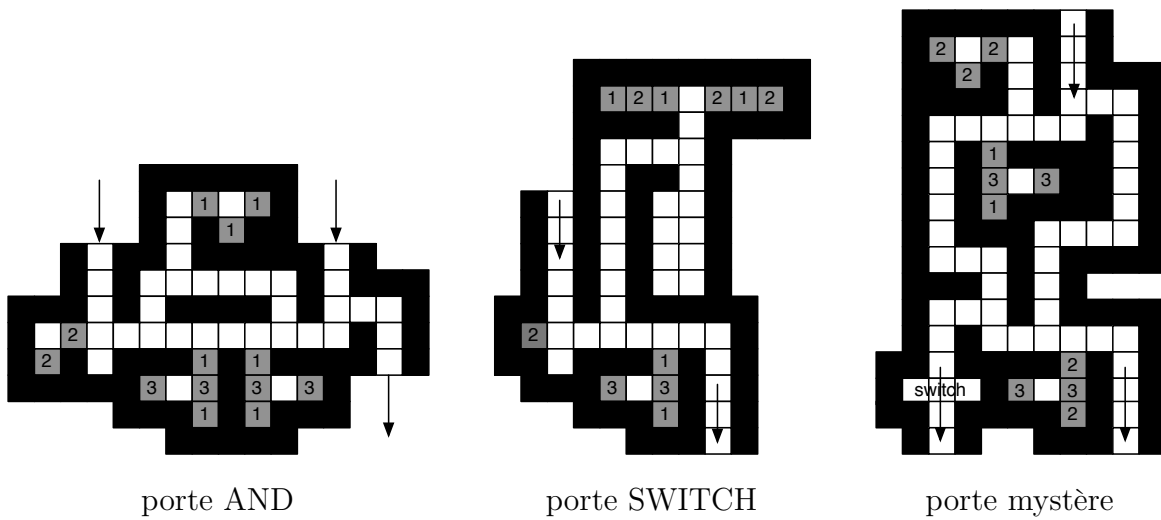


Figure 3: Différents gadgets.