Algorithmique Avancée 2019 — École Centrale-Supélec

PC8 : Algorithmes randomisés

Christoph Dürr, Nguyễn Kim Thắng

1 MAX 3-SAT

MAX 3-SAT est similaire au 3-SAT — il y n littéraux (variables booléennes) $x_1, \ldots, x_n$ et m clauses $C_1, \ldots, C_m$. Chaque clause contient 3 littéraux et la clause est satisfait si au moins un des trois littéraux s'évalue à vrai. L'objectif est de trouver une affectation x_i à Vrai ou Faux telle que le nombre de clauses satisfaites soit maximum. Considérer l'algorithme (extrêmement) simple suivant:

> *Affecter x_i pour $1 \leq i \leq n$ uniformément aléatoirement à Vrai ou Faux.*

Montrer que l'espérance du nombre des clauses satisfaites est $7/8 \cdot m$.
Indice: Définir $X_j = 1$ si la clause C_j est satisfaite et 0 sinon.

2 Médian

Soit S un ensemble des n entiers $\{a_1, \ldots, a_n\}$. L'élément *médian* de S est le $k^{\text{ième}}$ plus grand élément de S où $k = \lceil n/2 \rceil$. Considérer l'algorithme $\texttt{Select}(S, k)$ suivant.

Algorithm 1 Algorithme déterministe pour MÉDIAN.

1: Choisir un élément arbitraire $a_i \in S$.
2: $S^+ \leftarrow \{a_j : a_j > a_i\}$ et $S^- \leftarrow \{a_j : a_j < a_i\}$.
3: **if** $|S^-| = k - 1$ **then**
4:     **return** a_i
5: **else**
6:     **if** $|S^-| \geq k$ **then** — `# l'élément est dans` S^-
7:         **return** $\texttt{Select}(S^-, k)$
8:     **else** — `# l'élément est dans` S^+
9:         **return** $\texttt{Select}(S^+, k - 1 - |S^-|)$

1. Prouver que $\texttt{Select}(S, k)$ retourne toujours l'élément médian. Quelle est sa complexité?

2. Modifier la ligne **??** par:

Choisir un élément $a_i \in S$ uniformément aléatoirement.

Prouver que l'espérance du temps d'exécution de ce nouveau algorithme est $O(n)$.

3 Collectionneur de coupons

Supposons que chaque boîte de céréales contient un des n différents coupons. Dès que vous avez tous les coupons de différents types, vous allez gagner un prix. Supposons que chaque fois vous achetez une boîte de céréale, le coupon dedans est mis de façons uniformément aléatoirement des n différentes types.

1. Combien de boîtes de céréales (en espérance) devrez-vous acheter pour gagner le prix?

2. Quelle est la probabilité de ne pas gagner le prix après avoir acheté $2n \log n$ boîtes de céréales?