Algorithmique Avancée 2018 — École Centrale-Supélec

# PC7 : Algorithmes d'approximations

*Christoph Dürr, Nguyễn Kim Thắng*

## 1 Problème de couverture par ensembles

On vous donne un univers $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ et $m$ ensembles $S_1, \ldots, S_m \subseteq U$ ainsi qu'une pondération $w_i \in \mathbb{N}$ pour tout chacun des ensembles $S_i$. Une *couverture par ensembles* est une collection $\mathcal{C}$ de ces ensembles telle que $\bigcup_{S_i \in \mathcal{C}} S_i = U$. L'objectif est de trouver une couverture telle que le poids total $\sum_{i:S_i \in \mathcal{C}} w_i$ soit minimal.
Ce problème est NP-complet. Nous allons chercher un algorithme d'approximation. Considérez l'algorithme suivant.

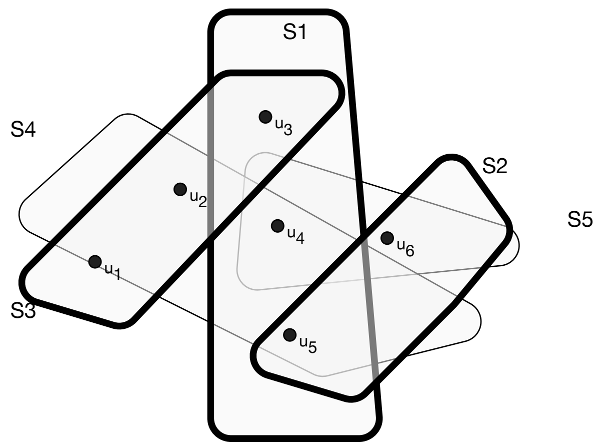


**Figure 1:** En gras une solution possible

---

**Algorithm 1** Algorithme glouton pour Couverture des ensembles.

---

Initialement, $R \leftarrow U$ and $\mathcal{C} \leftarrow \emptyset$.
**while** $R \neq \emptyset$ **do**
  Soit $S_i$ un ensemble qui minimise $\frac{w_i}{|S_i \cap R|}$.
  $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup S_i$.
  $c_u \leftarrow \frac{w_i}{|S_i \cap R|}$ pour tous $u \in S_i \cap R$. {cette définition est pour l'analyse seulement.}
  $R \leftarrow R \setminus S_i$.
Retourner $\mathcal{C}$.

---

1. Donner une interprétation de $c_u$.

2. Montrer que $\sum_{S_i \in \mathcal{C}} w_i = \sum_{u \in U} c_u$.

3. Montrer que pour chaque ensemble $S_i$, $\sum_{u \in S_i} c_u \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{|S_i|}\right) \cdot w_i$

4. Déduire que l'algorithm glouton ci-dessus est $O(\log n)$-approximation.

## 2 Couverture par sommets

On vous donne un graphe $G(V, E)$ avec $n = |V|, m = |E|$ et chaque sommet $v \in V$ est associé avec un poids $w_v$. Une *couverture par sommets* est un sous-ensemble des sommets $S \subseteq V$ tel que chaque arête $e \in E$ a au moins une extrémité dans $S$. L'objectif est de trouver une couverture des arêtes telle que le poids total $w(S) = \sum_{v \in S} w_v$ soit minimal.

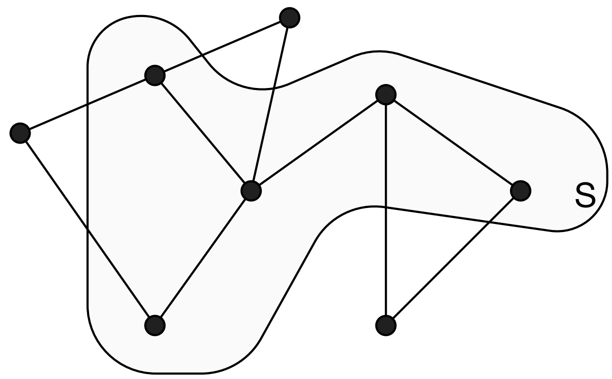


**Figure 2:** Le problème de couverture par sommets.

Ce problème est NP-complet. Nous allons chercher un algorithme d'approximation. Intuitivement, nous allons associer un prix $p_e$ à chaque arête. Les prix $p_e$ (pour $e \in E$) sont *équitables* si $\sum_{e \ni v} p_e \leq w_v$ pour chaque sommet $v$; c.a.d., les arêtes adjacents à $v$ ne payent pas plus que le poids du sommet $v$.

1. Montrer que pour chaque couverture des arêtes $S$, on a $\sum_e p_e \leq w(S)$.

Etant donné les prix $p_e$ pour $e \in E$, un sommet $v$ est dit *saturé* si $\sum_{e=(\cdot,v) \in E} p_e = w_v$. Considérer l'algorithme suivant.

**Algorithm 2** Algorithme pour COUVERTURE DES ARÊTES.

1: Initialement, $p_e \leftarrow 0$ pour toutes $e \in E$.
2: **while** il y a une arête $e = (u, v)$ telle que soit $u$ ou $v$ n'est pas saturé **do**
3: Choisir une telle arête $e$.
4: Augmenter $p_e$ sans violer la propriété équitable.
5: Retourner l'ensemble $S$ des sommets saturés.

2. Prouver que l'ensemble $S$ et les prix $p_e$ retournés par l'algorithme satisfait $w(S) \leq 2 \sum_{e \in E} p_e$.

3. Montrer que l'algorithme est 2-approximation.