Universidade de Lisboa - Instituto Superior Técnico
Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores
Análise e Síntese de Algoritmos

1º Projeto

Nuno Amaro, 81824 Afonso Tinoco, 81861

Introdução

Com este projeto pretendemos expor um algoritmo em tempo linear para o problema proposto, explicar a sua implementação e fazer uma análise teórica e experimental da complexidade temporal e espacial deste.

Descrição do problema

O problema descrito pedia para, dentro de uma rede social onde a informação pode ser partilhada entre todas as pessoas da rede, encontrar pessoas que são fundamentais para a transmissão de informação. Isto é, pessoas que ao serem removidas da rede social tornam impossível a transmissão de informação entre todos os membros da rede.

Ora este problema pode ser descrito como um problema num grafo não direcionado, em que:

- cada pessoa é um nó da rede
- uma ligação entre pessoas corresponde a uma aresta
- o grafo é conexo. ("existe sempre uma forma de partilha de informação entre qualquer par de pessoas")

Assim, o problema descrito é equivalente ao de encontrar num grafo conexo $G(V, E)$ (com $N = \#V$ e $L = \#E$) nós que se forem removidos tornam o grafo desconexo, ou seja, de encontrar nós de corte (articulation points).

Algoritmo utilizado

Tendo solução do problema sido estudada nas aulas, foi utilizado o algoritmo estudado - o algoritmo de Tarjan para encontrar nós de corte - descrito como *biconnected components algorithm* em [2]. A descrição do algoritmo será baseada na noção de tempo de descoberta, mas não será utilizada a pilha auxiliar, uma vez que não é necessário encontrar componentes fortemente conexos.

Estruturas utilizadas:

- **G**[u][**i**] - O grafo G foi representado como uma lista de adjacências (foi utilizado um std::vector (array dinâmica) em vez de std::list (lista duplamente ligada), pelo facto de a implementação do std::vector ser bastante mais eficiente que a de std::list [1]).
- **disco**[u] - tempo de descoberta do nó u
- **low**[u] - tempo do mínimo valor de descoberta alcançável sem usar a aresta que retorna ao pai na àrvore DFS a partir do nó u
- **parent**[u] - nó pai do nó u na àrvore DFS
- **AP**[u] - o nó u é Articulation Point?

Todas estas estruturas foram implementadas com o std::vector de C++ que tem tempo de inserção no fim $O(1+)$ e de acesso $O(1)$. Com tempo de inserção $O(1+)$ (constante amortizado), queremos dizer que para inserir N elementos a complexidade de pior caso é $O(N)$, apesar da complexidade de pior caso de inserção de 1 elemento não ser $O(1)$ (de facto é também $O(N)$). [1]

Explicação do algoritmo

Para o caso de um grafo conexo não-direcionado com pelo menos 2 nós, é executada uma pesquisa em profundidade ao longo dos nós, a partir do nó 1. Para cada nó visitado na DFS é guardada informação relativa ao tempo de descoberta (vetor disco) e ao valor do tempo de descoberta do nó com menor tempo de descoberta acessível a partir do nó atual utilizando apenas arestas ainda não visitadas (vetor low). Se após uma chamada recursiva retornar, o valor de low do filho visitado for superior ao do pai então o pai é um nó de corte.
Após todas as chamadas recursivas há um caso degenerado a considerar, que é o caso da raíz da àrvore DFS. Esta apenas será um nó de corte se o seu número de filhos na àrvore DFS for superior a 1.

Prova de correção do algoritmo

A demonstração do algoritmo é simples. Para cada nó u que não seja a raiz da àrvore, e v qualquer nó tal que parent[v] $= u$, low[v] representa o mínimo valor de disco atingível a partir de v utilizando apenas arestas ainda não visitadas quando v começa a ser visitado. Ora se no momento em que a chamada de DFS com parametro v vai retornar, low[v] $\geq$ disco[u], isto implica que não existe nenhum caminho entre v e os nós visitados antes de se visitar v que não utilize u, como tal u é nó de articulação. De igual modo, se para todos os v a condição se cumpre, então para todo o v filho de u na árvore DFS existe um caminho para um nó antes de u na àrvore DFS que não utiliza u, e vice-versa e como tal u não é nó de corte uma vez que a sua remoção não afeta a conetividade do grafo. Por fim, falta-nos analisar o caso em que u é a raíz da àrvore. Este caso, implica que se quando o primeiro filho de u, a, retornar da chamada DFS os nós ainda não tiver sido todos visitados, então é porque não existe nenhum caminho de a para qualquer nó que ainda não tenha sido visitado que não passe por u, logo u é nó de corte. No caso contrário, se quando o primeiro filho de a retornar os nós já tiverem sido todos visitados, então existe existe um caminho de todos os nós (excepto u) para todos os nós (excepto u) que não passa por u. Logo u não é nó de corte. Assim a condição equivalente para a raíz ser nó de corte é o número de filhos na àrvore DFS ser superior a 1, e temos a correção do algoritmo demonstrada.

Análise assintótica temporal téorica do algoritmo

O algoritmo visita cada nó exatamente uma vez, sendo a função de visita chamada exatamente N vezes. A função de visita tem complexidade local (sem incluir as chamadas recursivas) de $\#(G[u])$. Assim, a complexidade de todas as chamadas pode ser descrita como $\sum_{i=1}^{N} \#G[i] = L$. Assim, a complexidade do algoritmo é $O(max(N, L)) = O(N + L)$

Análise assintótica temporal experimental do algoritmo

Para se realizar a análise experimental temporal do algoritmo, foi utilizada a aproximação que cada instrução de C corresponde em média a um número fixo de instruções de CPU. Assim, em primeiro lugar procedeu-se à geração de K diferentes casos de teste aleatórios (para cada caso foi escolhido aleatóriamente um N e um $L \geq N - 1$ e depois gerado um grafo conexo aleatório para esses parâmetros). De seguida, para cada caso de teste foi utilizada a ferramenta perf para contar o número de instruções de CPU utilizadas em modo utilizador durante a execução do program - I. Por fim, fez-se o plot do gráfico de I em função de $N + L$. Obteve-se assim os resultados da Figura 1.

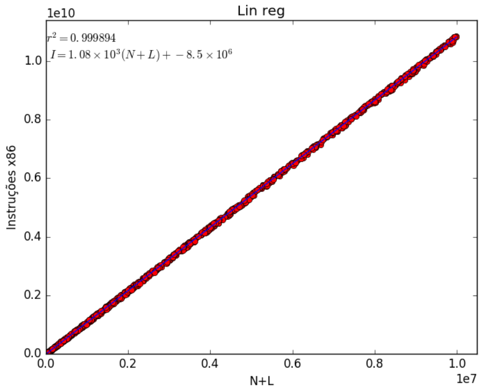


Figura 1: Análise experimental com parâmetros $2 \leq N \leq 10000$ (1000 pontos)

Sendo o quoficiente de correlação linear muito próximo de 1 para todos os exemplos, a análise experimental comprova o resultado teórico esperado.

Encontra-se também em anexo testes executados mantendo a densidade do grafo aproximadamente constante, mas variando N [anexo A].

Análise assintótica espacial

Como se verifica pelas estruturas utilizadas, o algoritmo utiliza 3 estruturas com N inteiros (disco, low, parent), 1 estrutura com N booleanos (AP), e uma estrutura com N vetores, mas com no total L inteiros no interior. Durante a recursividade, nunca é atingido um nível de profundidade superior a N, pelo que a memória de stack tem complexidade de pior caso $O(N)$ (num grafo linear). Assim a complexidade espacial será $O(N + L)$. Se não for contabilizada a memória utilizada para representar o grafo, o algoritmo tem complexidade espacial $O(N)$.

Prova de otimalidade do algoritmo

Fácilmente se verifica que o algoritmo é ótimo com base no lema ”o algoritmo ótimo para verificar se um nó é nó de corte tem complexidade de pior caso $\Omega(N+L)$”. Se para encontrar num grafo todos os nós de corte se tivesse complexidade assintóticamente inferior a $O(N + L)$, então seria possível utilizar esse algoritmo para verificar se um nó é nó de corte em tempo de pior caso inferior a $O(N + L)$, o que contradiz o lema, logo a complexidade estará em $\Omega(N + L)$. Pela nossa prova de correção e análise assintótica, o algoritmo de Tarjan corre em pior caso em $O(N + L)$, sendo portanto uma solução ótima $\blacksquare$

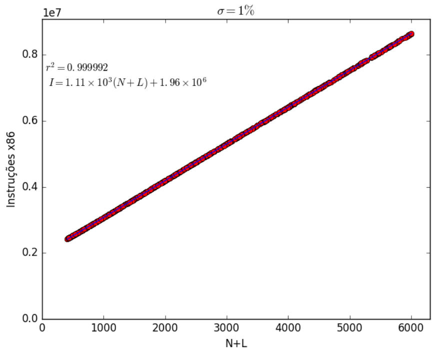
Uma demonstração do lema baseia-se em não ser possível verificar para um grafo geral que u é um nó de corte sem de facto percorrer todos os nós e arestas pelo menos uma vez, o que implica a complexidade de pior caso de $\Omega(N + L)$.

Referências

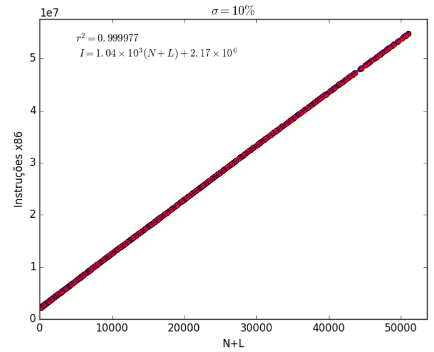
[1] Programming languages - c++. *ISO/IEC 14882:2003*, page 879, 2003.

[2] John Hopcroft and Robert Tarjan. Algorithm 447: Efficient algorithms for graph manipulation. *Commun. ACM*, 16(6):372–378, June 1973.

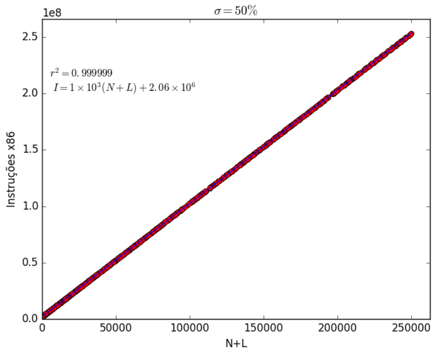
ANEXO A - Análise experimental para σ fixo



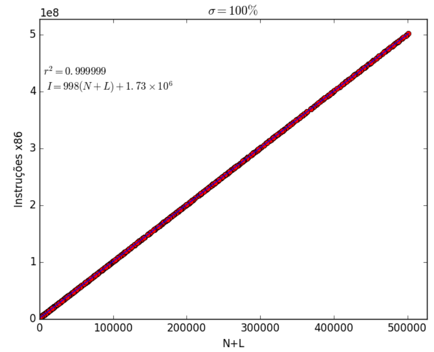
(a) Análise experimental com parâmetros $202 \leq N \leq 1000$ (1000 pontos) e $\sigma = 1\%$



(b) Análise experimental com parâmetros $22 \leq N \leq 1000$ (1000 pontos) e $\sigma = 10\%$



(c) Análise experimental com parâmetros $6 \leq N \leq 1000$ (1000 pontos) e $\sigma = 50\%$



(d) Análise experimental com parâmetros $4 \leq N \leq 1000$ (1000 pontos) e $\sigma = 100\%$