微积分知识梳理

经院—赵心童—U202316334

摘要

本文对从实数系到不定积分前的内容进行了梳理总结, 旨在回顾期中考试前的微积分知识, 力求在整理资料的过程中查缺补漏. 主要内容来自华东师范大学版《数学分析》 [1]和《数学分析习题课讲义》 [2].

目录

1 极限

1.1 定义

1.1.1 数列极限

定理 1.1. *数列$\{X_n\}$, 常数 a, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, $\forall n > N$, $|Xn - a| < \varepsilon$, 则*

$$\lim_{x\to\infty} Xn = a$$

.

定理 1.2 (柯西收敛准则)**.** *数列$\{X_n\}$, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, $\forall m, n > N$, $|Xn - Xm| < \varepsilon$, 则收敛.*

定理 1.3. *数列$\{X_n\}$, $\forall\varepsilon > 0$, 若在$U(a;\varepsilon)$外至多有有限项, 则收敛.*

定理 1.4. *数列收敛的充要条件是其任何子列都收敛.*

定理 1.5 (单调有界原理)**.** *实数系中, 单调有界数列必有极限.*

1.1.2 函数极限

$x \to x_0$极限, $x \to \infty$极限, 左极限, 右极限.

remark. *若左右极限都存在且相等, 该点极限存在*

定理 1.6 (复合函数极限)**.**

$$\lim_{x\to a} g(x) = A, \lim_{y\to A} f(x) = B$$

若满足以下条件之一:
1、存在a的去心邻域, 在其中$g(x) \neq g(a)$
2、外层函数连续
3、$A = \infty$,且$\lim_{y\to A} f(x)$有意义

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to A} f(y) = B$$

定理 1.7 (柯西准则)**.**

1.1.3 海涅定理

$\{x_n\} \to x_0$, $\{x_n\} \neq x_0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A$

1.2 性质

1.2.1 唯一性

1.2.2 有界性

Ⅰ.数集

若 S 既有上界又有下界, 则称 S 有界. 等价于 $\exists M > 0, \forall x \in S, |x| \leqslant M$.

定理 1.8 (确界原理)**.** *若非空数集 S 有上(下)界, 则 S 有上(下)确界.*

remark. *确界: ①上/下界②最小/大*

remark. *确界原理: ①非空数集②有上/下界*

Ⅱ.数列

定理 1.9. *若一数列收敛, 则该数列有界.*

remark. *收敛→有界, 单调+有界→收敛.*

定理 1.10 (致密性定理)**.** *有界数列一定有收敛子列.*

remark. *任何数列都存在单调子列.*

Ⅲ.函数

若 $\exists M > 0$, 在定义域内 $|f(x)| \leqslant M$, 则 $f(x)$ 有界.

定理 1.11. *若函数在某点极限存在, 则函数在该点的某个去心邻域内局部有界.*

1.2.3 保号性

1.2.4 保不等式性

1.2.5 迫敛性

1.3 无穷大与无穷小

$f(x) = o(1)$,$f(x)$无穷小. $f(x) = o(g(x))$, $f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小.
$f(x) = O(1)$, $f(x)$有界. $f(x) = O(g(x))$, $\frac{f(x)}{g(x)}$有界.
$\frac{f(x)}{g(x)} = k$, 同阶. $k = 1$, 等价, $f(x) \sim g(x)$.

remark. *在含有o, O的等式中,含o, O的部分表示集合, 例如$o(x)$表示x的高阶无穷小的集合. $f(x) = o(x)$表示$f(x) \in o(x)$.*

1.3.1 无穷小量的替换

乘除可以直接替换, 加减保留高阶无穷小量.

1.4 常用结论

定理 1.12. *若$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则:*

①$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$

②当$a_i > 0(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$

定理 1.13 (Stolz定理)**.** *若满足下列条件之一:*

①$(\frac{*}{\infty})\{a_n\}$严格单调递减且$a_n \to \infty$

②$(\frac{0}{0})\{a_n\}$严格单调递减且$a_n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}}$$

定理 1.14 (洛必达法则)**.** *使用条件①$\frac{*}{\infty}$或$\frac{0}{0}$②所求函数在该点连续*

remark. *满足条件时, 若使用洛必达后仍为未定式, 可继续使用洛必达法则判断.*

remark. *如果使用洛必达后得到极限不存在, 不能说明原极限不存在.*

remark. *若条件为函数n阶可导, 可以使用洛必达法则$n-1$次,第n次用定义; 若条件为n阶连续可导, 可使用洛必达法则n次.*

remark. *对于抽象函数$f(x)$, 可导和连续情况未知, 只能通过题设条件判断.*

2 函数连续性

2.1 连续性

2.1.1 连续

若$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,则称$f(x)$在点$x_0$处连续.

remark. *有极限一定连续*

2.1.2 一致连续

$f(x)$定义在区间I上,若$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\sigma > 0$, 对于$\forall x_1, x_2 \in I$,当$|x_1 - x_2| < \sigma$,有$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 则$f(x)$一致连续.

定理 2.1 (一致连续定理(Cantor定理))**.** *若$f(x)$在闭区间上连续, 则$f(x)$在该区间一致连续.*

2.2 间断点

第一类间断点(左右极限都存在):可去间断点、跳跃间断点
第二类间断点

2.3 连续函数的性质

2.3.1 局部连续性

2.3.2 局部保号性

2.3.3 最大、最小值定理

若$f(x)$在闭区间上连续, 则$f(x)$在区间内一定有最大最小值(有界).

2.3.4 介值定理

$f(x)$在$[a, b]$上连续,$f(a) \neq f(b)$, 不妨设$f(b) > f(a)$, 则$\forall m \in (f(a), f(b))$, $\exists c \in (a, b)$, $f(c) = m$.

2.3.5 根的存在性定理(零点定理)

3 导数与微分

3.1 导数的定义

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

remark. *若某点可导, 该点一定连续*

3.2 导数的运算

3.2.1 四则运算

3.2.2 反函数求导

$f(x)$为$g(x)$反函数, 则$g'(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

3.2.3 复合函数求导

$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

3.2.4 参数方程求导

对参数方程$x = x(t)$, $y = y(t)$, 其导数为$\frac{y'(t)}{x'(t)}$

remark. 二阶导数为$\frac{(\frac{y'(t)}{x'(t)})'}{x'(t)}$

3.3 高阶导数

由上一阶导数通过定义或公式求.

定理 3.1 (莱布尼茨公式)**.**

3.4 基本初等函数的导数公式

$(\tan x)' = \sec^2 x$, $(\cot x)' = -\csc^2 x$.
$(\sec x)' = \sec x \tan x$, $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(arccotx) = -\frac{1}{1+x^2}$.
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.5 微分的定义

若$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, 称$f(x)$在该点可微, 记$dy = A\Delta x$. 其中$A = f'(x)$, $\Delta x = dx$,从而$dy = f'(x)dx$

remark. 微分是增量Δy的线性主部.

remark. 在一元函数中, 可导与可微等价.

3.6 微分的运算

3.6.1 四则运算

与导数运算相似

3.6.2 复合函数求微分

$d(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)dx = f'(g(x))d(g(x))$

remark (一阶微分形式的不变性). *$d(f(\square)) = f'(\square)d(\square)$, 无论$\square$是自变量还是一个函数.*

3.6.3 参数方程求微分

对参数方程$x = x(t)$,$y = y(t)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{d(x(t))}{d(y(t))}$.

3.7 高阶微分

以$y = x^2$为例. 以下为当x为中间变量时的化简结果. 而当x为自变量时, 由于$d(dx) = 0$, 可进一步化简为$d^2y = 2(dx)^2$.

$$y = x^2 \tag{1}$$

$$dy = 2xdx \tag{2}$$

$$d(dy) = 2d(xdx) \tag{3}$$

$$d^2y = 2(dx)^2 + 2xd(dx) \tag{4}$$

remark. *说明高阶微分不具有形式上的不变性.*

4 微分学基本定理

remark. *连续可微(可导): 可导且导函数连续.*

4.1 中值定理

4.1.1 罗尔定理

$f(x)$闭区间$[a, b]$连续, 开区间(a, b)可导, $f(a) = f(b)$, $\exists c \in (a, b)$, $f'(c) = 0$.

4.1.2 拉格朗日中值定理

$f(x)$闭区间$[a,b]$连续, 开区间(a,b)可导, $\exists c\in(a,b)$, $f'(c)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

4.1.3 柯西中值定理

$f(x)$和$g(x)$闭区间$[a,b]$连续, 开区间(a,b)可导, $\exists c\in(a,b)$, $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$.

4.2 泰勒公式

4.2.1 Peano余项

若$f(x)$在点x_0存在n阶导数, $\forall x\in O(x_0)$, $x\neq x_0$:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+o((x-x_0)^n)$$

4.2.2 Lagrange余项

泰勒定理: 若$f(x)$在点x_0存在$n+1$阶导数, $\forall x\in O(x_0)$, $x\neq x_0$, 在x和x_0间存在ξ:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

4.2.3 麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots+R_n(x)$$

5 函数的图像

5.1 极值点

定理 5.1 (费马定理)**.** *若x_0是$f(x)$的极值点且$f'(x_0)$存在, 则$f'(x_0)=0$.*

remark. *考虑$f(x)=|x|$.*

remark. *极值点必须是区间的内点(有时也称处于区间端点的最值点为单侧极值点).*

若$f(x)$二阶可导,$f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\neq 0$, 则x_0为极值点.

若$f(x)$$n$阶可微, 且在$x_0$点前$n-1$阶导数为零,$f^{(n)}(x_0)\neq 0$:

①n为奇数, x_0不是极值点.

②n为偶数, 极值点.

remark. 以上为充分不必要条件. 目前尚不知道极值点的充分必要条件.

remark. 极值点的一阶导数要么为0, 要么不存在.

5.2 凹凸性

凹凸性: ①二阶导的正负. ② $f(x+\Delta x)$与$f(x)+f'(x)\Delta x$的大小关系.

5.3 拐点

拐点(凹凸分界点): 若$f(x)$二阶可导, $f''(x_0)=0$是x_0为拐点的充分条件.

remark. 拐点处的导数可能不存在. 如$f(x)=\sqrt[\frac{1}{3}]{x}$及其拐点$x=0$.

5.4 渐近线

当$x\to\infty$, $f(x)$上的动点m到直线的距离$d\to 0$.

remark. 水平/垂直/斜渐近线

5.5 曲率

5.5.1 弧微分公式

$ds=\sqrt{1+f'^2(x)}dx$

5.5.2 曲率

①$K=\frac{|y''|}{\sqrt[\frac{3}{2}]{1+y'^2}}$

②对参数方程$x=x(t)$,$y=y(t)$: $K=\frac{|x'y''-x''y'|}{\sqrt[\frac{3}{2}]{x'^2+y'^2}}$

③曲率半径: $R=\frac{1}{k}$, $(k\neq 0)$

参考文献

[1] 华东师范大学数学科学学院. *数学分析(第五版)*. 高等教育出版社, 2019.

[2] 谢惠民, 恽自求, 易法槐, and 钱定边. *数学分析习题课讲义(第二版)*. 高等教育出版社, 2018.