

清华 大学

综合 论文 训 练

题目: 多面体无穷小刚性与
Hilbert-Einstein 泛函

系 别: 数学科学系
专 业: 数学与应用数学
姓 名: 李轩
指 导 教 师: 顾险峰 副教授
联合指导教师: 王振波 副教授

2017 年 6 月 1 日

中文摘要

Hilbert-Einstein 泛函和多面体无穷小刚性有着意想不到的联系，为多面体无穷小刚性提供了新的思路。将多面体进行四面体剖分，并固定边界度量不变，在其上定义离散 Hilbert-Einstein 泛函。理论证明，无穷小刚性等价于 Hilbert-Einstein 泛函的对内边的 Hessian 矩阵的零空间维数等于内点个数的 3 倍。

本文利用以上理论，提出了判断多面体无穷小刚性的算法，以及进一步提出了计算多面体表面所有无穷小变换构成的线性空间的基的算法。

关键词：多面体；无穷小刚性；Hilbert-Einstein 泛函

ABSTRACT

Hilbert-Einstein functional has a very surprised connection with the infinitesimal rigidity of polyhedra. After tetrahedralization and under the condition of fixed boundary metric, we can define discrete Hilbert-Einstein functional on the polyhedron. It is proved that infinitesimal rigidity is equivalent with the condition that the dimension of the kernal of the Hessian matrix of Hilbert-Einstein functional with respect to inner edge length equals to three.

In this paper, we propose an algorithm which can judge whether a polyhedron is infinitesimally rigid using Hilbert-Einstein functional, can continue to propose an algorithm that can compute all infinitesimal motions on the polyhedron.

Keywords: polyhedron; infinitesimal rigidity; Hilbert-Einstein functional

目 录

第 1 章 引言	1
1.1 研究背景	1
1.2 主要问题和主要结果	3
第 2 章 多面体无穷小刚性理论	4
2.1 多面体无穷小刚性	4
2.1.1 多面体与框架	4
2.1.2 框架的等距变换	4
2.1.3 框架的无穷小变换	5
2.1.4 无穷小刚性与刚性	6
2.2 离散几何基本概念	7
2.2.1 离散流形	8
2.2.2 度量	8
2.2.3 曲率	9
2.3 利用 Hilbert-Einstein 泛函研究无穷小刚性	10
2.3.1 Hilbert-Einstein 泛函	10
2.3.2 利用 Hilbert-Einstein 泛函判定多面体无穷小刚性	11
2.3.3 平凡无穷小变换	13
第 3 章 算法	14
3.1 数据结构	14
3.1.1 半边数据结构	14
3.1.2 半面数据结构	14
3.2 三角剖分	15
3.3 Hilbert-Einstein 函数的导数计算及无穷小刚性判定算法	16
3.4 多面体非平凡无穷小变换求解算法	17
第 4 章 实验结果	19

第 5 章 结论	23
插图索引	24
表格索引	25
公式索引	26
参考文献	28
致 谢	30
声 明	31
附录 A 外文资料调研阅读报告或书面翻译	32
A.1 Introduction	32
A.2 Rigidity and Infinitesimal Rigidity	32
A.2.1 Frameworks	32
A.2.2 Rigidity	33
A.2.3 Infinitesimal Rigidity	34
A.2.4 Relationship between Rigidity and Infinitesimal Rigidity	36
A.2.5 The Rigidity of Convex Polyhedra	36
A.3 Infinitesimal Rigidity and Hilbert-Einstein Functional	37
A.3.1 Hilbert-Einstein Functional	37
A.3.2 Prove the Infinitesimal Rigidity of Convex Polyhedra via Hilbert-Einstein Function	39
A.4 Research Plan	41
在学期间参加课题的研究成果	43

主要符号对照表

P	框架/多面体
G	图
M^2	离散 2-流形
M^3	离散 3-流形
V	离散流形的顶点集
E	离散流形的边集
F	离散流形的面集
C	离散流形的胞集
v_i	离散流形的第 i 个顶点
e_{ij}	离散流形中以顶点 v_i, v_j 形成的边
f_{ijk}	离散流形以顶点 v_i, v_j, v_k 形成的面
c_{ijkl}	离散流形以顶点 v_i, v_j, v_k, v_l 形成的胞
p_i	顶点 v_i 在三维空间中的坐标
l_{ij}	边 e_{ij} 的长度
θ_i^{jk}	面 f_{ijk} 中顶点 v_i 处的角
θ_{ij}^{kl}	胞 c_{ijkl} 中边 e_{ij} 处的二面角
ω_i	离散 2-流形顶点 v_i 处的周角和
ω_{ij}	离散 3-流形边 e_{ij} 处的周二面角和
K_i	离散 2-流形顶点 v_i 处的曲率
K_{ij}	离散 3-流形边 e_{ij} 处的曲率
ξ	R^3 上的向量场
Q	V 上的向量场
HE	Hilbert-Einstein 泛函
M_T	Hilbert-Einstein 泛函的 Hessian 矩阵
\widetilde{M}_T	增广的 M_T 矩阵
IM	多面体的增广无穷小变换
IM_0	多面体的平凡增广无穷小变换

第 1 章 引言

1.1 研究背景

什么样的条件可以以多大程度决定一个多面体？这就是多面体刚性研究所要考虑的问题。判断一个多面体是否具有刚性是一个经典的几何问题。其中最著名的定理便是 Cauchy 刚性定理^[1]，为多面体刚性理论研究的开山之作。1913 年，Cauchy 证明了如下的刚性定理：

定理 1.1：(Cauchy) 如果两个 3 维凸多面体 P 和 P' 组合等价，对应面全等，那么这两个多面体对应二面角相等。

这意味着，凸多面体在相差一个 \mathbb{R}^3 等距变换的意义下是唯一的。

形变理论也为多面体刚性研究提供了非常广阔的思路。在形变理论的框架下，我们可以将刚性理解成多面体无法发生连续变化，即在所有面全等的条件下，二面角无法连续变化。这样我们便可以利用分析的手段研究问题。与刚性相对，便是柔性多面体，即二面角可以发生连续变化。但是，柔性多面体似乎异常难以寻找。1897 年，法国工程师 Bricard 首次构造出了柔性非凸多面体^[2]，但这并不是严格意义上的多面体，因为它有自交。直到 1977 年，Connelly 才定义及构造出了一类不自交的柔性非凸多面体^[3]，1978 年 Steffen 找到了其中一个非常经典的例子是——Steffen 多面体^[4]。

我们不仅可以研究多面体的 0 阶形变，还可以研究 1 阶形变，这就是所谓

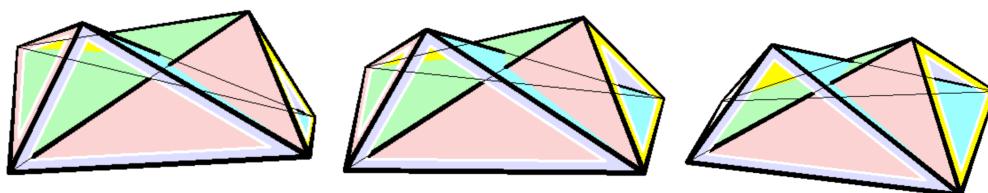


图 1.1 Bricard 多面体变换过程。^②

^② <http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/e0307e4a-0a25-420e-2e8b-339499f76038/izgib.html>

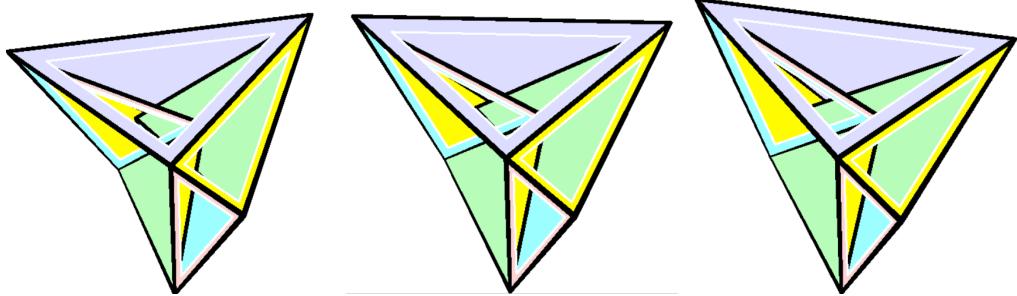


图 1.2 Steffen 多面体变换过程。^①

^① <http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/e0307e4a-0a25-420e-2e8b-339499f76038/izgib.html>

的无穷小形变。我们不再着眼于全局，而是局部，将问题线性化。我们将研究多面体上的向量场，要求多面体在沿向量场形变时边长的 1 阶导数在初始位置为 0。例如等距变换的速度场便是无穷小形变，但反之不然。虽然 1 阶形变与 0 阶形变无法严格 1-1 对应，但是 1 阶形变会构成线性空间，使得研究变得易于操作，而它也确实和 0 阶形变有着非常重要的联系，所以它是研究多面体刚性、柔性的强有力武器。

我们称一个多面体具有无穷小刚性，如果其上所有无穷小变换都是平凡的。Dehn 证明所有的凸多面体都是无穷小刚性的^[5]。从凸多面体开始，研究者们一直在尝试在非凸多面体中扩充无穷小刚性多面体这一大类。Schlenker 证明顶点在一个椭球上的多面体是无穷小刚性的^[6] 以及可以以一个顶点为中心的星形弱凸多面体是无穷小刚性的^[7]。

无穷小刚性和 Hilbert-Einstein 函数有着非常有趣的联系。而 Hilbert-Einstein 函数竟然首次定义在一篇研究广义相对论的论文中^[8]。利用 Hilbert-Einstein 泛函，Izmestiev 重新证明了凸多面体的刚性^[9]。利用这一工具，Izmestiev 继而证明了所谓的 Alexandrov 定理^{[10][11]} 以及弱凸、可分解、补可分解的多面体是无穷小刚性的^[12]。

目前，对非凸多面体无穷小刚性的研究仍处于起步阶段，还没有建立完备的理论，还有很多问题等待着解决。

1.2 主要问题和主要结果

本文主要关注的问题是如何判断多面体是否具有无穷小刚性，以及如何构建出多面体上的非平凡无穷小变换。

根据 Izmestiev 提供的理论方法^{[9][11][12]}，本文提出了利用 Hilbert-Einstein 泛函判断多面体是否具有无穷小刚性的算法，以及求解出所有非平凡的无穷小变换的算法。

第 2 章 多面体无穷小刚性理论

2.1 多面体无穷小刚性

2.1.1 多面体与框架

通常，多面体可以看成有一些连杆连成的框架，由边和顶点构成图来定义^[13]。严格定义如下：

定义 2.1： \mathbb{R}^3 中由图 $G = (V, E)$ 定义的框架 P 是如下的映射

$$\begin{aligned} P : V &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ i &\mapsto p_i \end{aligned}$$

使得 $p_i \neq p_j, ij \in E$

以下将只定义框架的无穷小变换、无穷小刚性，但是由于这些定义不涉及面的概念，所以所有定义和性质都适用于多面体，不在赘述。

此外，我们假设框架不退化，即框架中任意一个所有边共面的环内没有其他顶点。

2.1.2 框架的等距变换

本文是从形变理论的角度讨论多面体刚性的，所以需要先对多面体的变换作出定义，我们主要关心等距变换，多面体的等距变换推广自空间的等距变换。

形变通常被视作以时间 t 为参数的函数族^[13]。

定义 2.2： 函数族 $f_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 被称为 \mathbb{R}^3 中的等距变换，如果

$$\|f_t(x) - f_t(y)\| = \text{const}$$

对 $\forall x, y \in \mathbb{R}^3, t \in [0, +\infty)$ 成立。

定义 2.3: 函数族 $f_t : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ 被称为框架 P 的等距变换, 如果

$$\|f_t(v_i) - f_t(v_j)\| = \text{const}$$

对 $\forall ij \in E, t \in [0, +\infty)$ 成立。

2.1.3 框架的无穷小变换

本文主要讨论无穷小变换, 与等距变换相同, 框架的无穷小变换推广自空间的无穷小变换^[13]。

定义 2.4: \mathbb{R}^3 上的向量场

$$\begin{aligned}\xi : & \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ & x \mapsto \xi(x)\end{aligned}$$

被称为 \mathbb{R}^3 中的无穷小变换, 如果沿这个向量场变换, \mathbb{R}^3 中任何点对 (x, y) 在 1 阶意义下距离不变:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|(x + t\xi(x)) - (y + t\xi(y))\| = 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d \quad (2-1)$$

通常, 我使用如下等价定义^[13]:

定理 2.1: 向量场 ξ 是 R^3 中的无穷小变换当且仅当

$$\langle \xi(x) - \xi(y), x - y \rangle = 0 \quad (2-2)$$

对任意 $x, y \in \mathbb{R}^3$ 成立。

我们知道, \mathbb{R}^3 中的等距变换都可以表示成矩阵形式, 无穷小变换也是如此^[13]:

定理 2.2: \mathbb{R}^3 中的所有无穷小变换都可以表示成如下形式:

$$\xi(x) = Zx + b \quad (2-3)$$

其中 Z 是 3×3 反对称矩阵。

将如上定义套用在框架之上，我们就可以定义框架的无穷小变换，这时我们就只需关心每个顶点的变换^[13]：

定义 2.5： 给定框架 P, V 上的向量场

$$Q : V \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$i \mapsto q_i$$

被称为是 P 的无穷小变换，如果任意一条边在 1 阶意义下长度不变：

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|(p_i + tq_i) - (p_j + tq_j)\| = 0, \quad \forall ij \in E \quad (2-4)$$

和 \mathbb{R}^3 的无穷小变换类似，我们通常使用如下等价定义^{[13][9]}

定理 2.3： 向量场 Q 是框架 P 的无穷小变换，当且仅当

$$\langle q_i - q_j, p_i - p_j \rangle = 0. \quad (2-5)$$

对 $\forall ij \in E$ 成立。

无穷小变换保持 1 阶不变性，相应的，通常所说的变换保持 0 阶不变性，即在变换过程中保持框架的边长不变。这样的变换被称为框架的**保距变换**。

框架的无穷小变换和保距变换存在一定联系。容易证明，一个框架的所有保距变换的速度场都是无穷小变换，但是反之不然。无穷小变换需要满足一定的条件才能积分成 0 阶变换，实现对框架的保距变换。

2.1.4 无穷小刚性与刚性

首先我们对框架的刚性和无穷小刚性进行定义^[13]：

定义 2.6： 我们称一个框架 P 是刚性的，如果这个框架的所有保距变换都是 \mathbb{R}^3 中的刚体变换在框架上的限制。否则，该多面体具有柔性。

我们称一个框架 P 是无穷小刚性的，如果这个框架的所有无穷小变换都是 \mathbb{R}^3 中的无穷小变换在框架上的限制。否则，该多面体具有无穷小柔性。

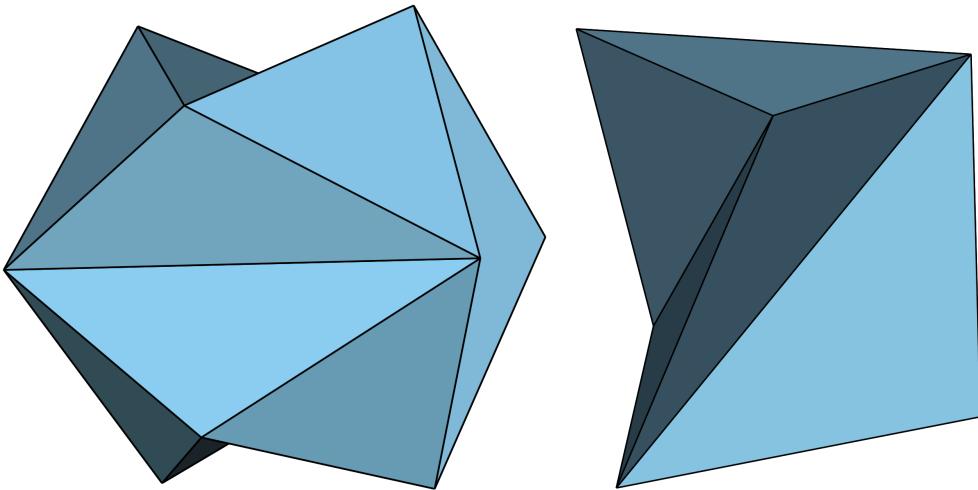


图 2.1 Jessen 正交二十面体（左）和 Schönhardt 多面体（右）。它们都是刚性的，但不是无穷小刚性的。^[12]

刚体变换的速度场为无穷小变换，但是这种变换会干扰我们的研究。为了去除刚体变换（旋转、平移），我们通常会选择框架中的 K_3 子图 (v_1, v_2, v_3)（在多面体情形，就是一个三角面。），使得向量场在该三点处为零。这样的三角形我们成为基准三角形^[14]。

在这种限制下，无穷小刚性有非常好的描述^[14]：

定义 2.7：一个框架 P 是无穷小刚性的，如果将基准三角形上的向量场限制为零，其上所有无穷小变换都是零向量场。

无穷小刚性比刚性要更强一些，我们有如下命题^[13]：

定理 2.4：具有无穷小刚性的框架都是刚性的。

这是由于等距变换的速度场都是无穷小变换，而无穷小变换需要满足一定的条件才可以成为等距变换。

2.2 离散几何基本概念

由于计算机只能存储离散的数据，连续的几何对象必须离散化才能存储进计算机，进行后续的处理。离散几何便是对连续几何的离散化。连续几何中的度量、曲率都可以推广到离散几何中。

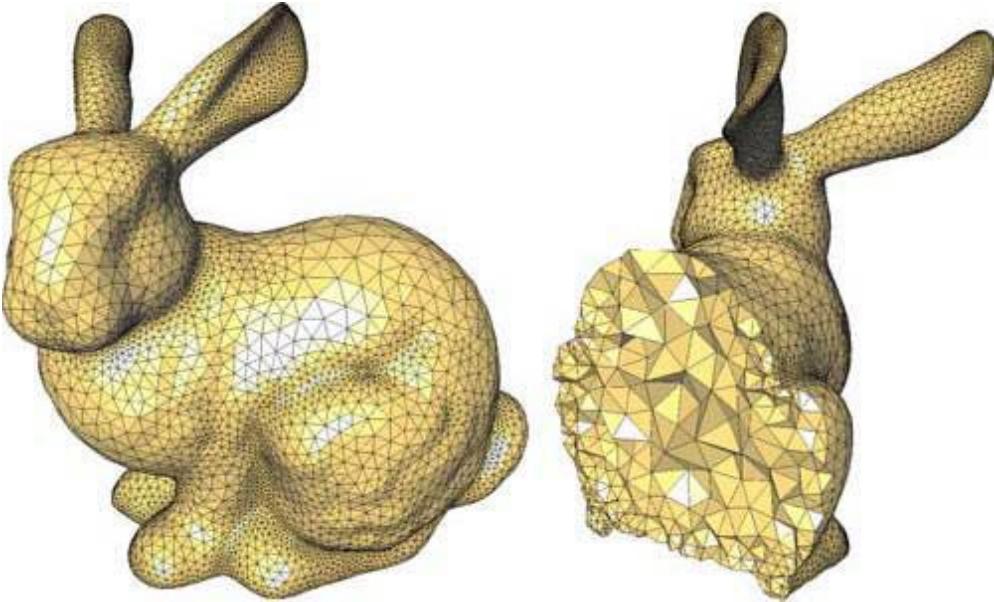


图 2.2 离散 2-流形（左）及其四面体剖分后得到的离散 3-流形截面^②

② 来源：老顾谈几何（Wechat ID: conformalgeometry）

2.2.1 离散流形

本文主要讨论可以嵌入（不必是等距嵌入） \mathbb{R}^3 的 2-流形和 3-流形。我们一般会对这些几何对象进行三角剖分，2-流形会剖分成三角面片^[15]，3-流形会剖分成四面体^[16]。

离散 2-流形的三角剖分由点、边、三角面定义，通常记为 $M^2 = (V, E, F)$ 。

可嵌入 \mathbb{R} 的 3-流形一般为带边流形，边界为 2-流形。其三角剖分由点、边、三角面、四面体胞定义，记为 $M^3 = (V, E, F, C)$ 。

根据实际需要，可以将离散曲面分片嵌入欧式空间、双曲空间、球面空间，从而赋予不同的几何结构。

2.2.2 度量

离散流形是分片线性的，其度量结构一般定义成分片线性的，因此可以定义在边上，然后根据几何背景空间延拓至整个曲面。这样计算机才可以进行存储^[17]。

定义 2.8： 分片线性离散曲面上的黎曼度量是定义在边集上的正值函数：

$$l : E \rightarrow \mathbb{R}^+$$

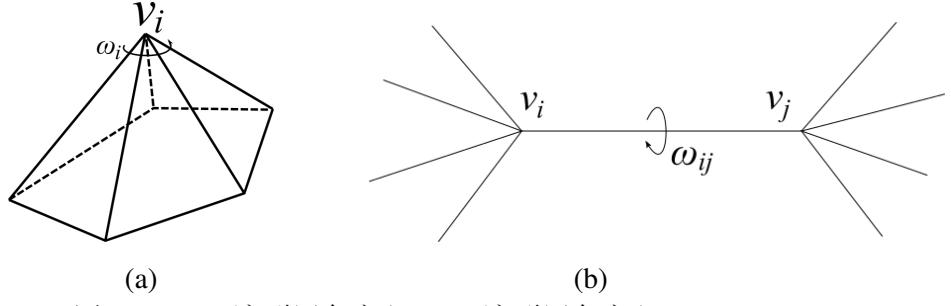


图 2.3 (a)2-流形周角定义; (b)3-流形周角定义

使得对任意三角面 $f_{ijk} \in F$, 三边的函数值 $\{l_{ij}, l_{jk}, l_{ki}\}$ 满足三角不等式:

$$l_{ij} + l_{jk} > l_{ki}$$

$$l_{ij} + l_{ki} > l_{jk}$$

$$l_{jk} + l_{ki} > l_{ij}$$

有了度量, 我们就可以根据几何背景空间中的余弦定理定义每个面上的角以及每个胞内的二面角。

2.2.3 曲率

曲率是衡量流形与平直程度的几何量。在离散几何中, 我们使用所谓的角欠来定义流形的度量^[17]。

对于 2-流形, 曲率是顶点集上的函数:

定义 2.9: 给定离散 2-流形 M^2 , 顶点 v_i 的周角定义为

$$\omega_i = \sum_{f_{ijk}} \theta_i^{jk}$$

其中 f_{ijk} 为包含顶点 v_i 的面, θ_i^{jk} 为面 f_{ijk} 的 v_i 处的角, 定义参见图2.3(a)。

曲率 K_i 定义为

$$K_i = \begin{cases} \pi - \omega_i & v_i \in \partial M^2 \\ 2\pi - \omega_i & v_i \in Int M^2 \end{cases}$$

其中 ∂M^2 为 M^2 的边界, $Int M^2$ 为 M^2 的内部。

对于 3-流形，曲率是边集上的函数：

定义 2.10： 给定离散 3-流形 M^3 ，边 e_{ij} 处周角定义为

$$\omega_{ij} = \sum_{c_{ijkl}} \theta_{ij}^{kl} \quad (2-6)$$

其中 c_{ijkl} 为包含边 e_{ij} 的胞， θ_{ij}^{kl} 为 c_{ijkl} 中 e_{ij} 处的二面角，定义参见图2.3(b)。

曲率 K_{ij} 定义为该边周围二面角和与 2π 之差：

$$K_{ij} = \begin{cases} \pi - \omega_{ij} & e_{ij} \in \partial M^3 \\ 2\pi - \omega_{ij} & e_{ij} \in Int M^3 \end{cases}$$

∂M^3 为 M^3 的边界， $Int M^3$ 为 M^3 的内部。

2.3 利用 Hilbert-Einstein 泛函研究无穷小刚性

2.3.1 Hilbert-Einstein 泛函

离散 Hibert-Einstein 泛函是定义在离散 3-流形度量之上的泛函^[18]：

定义 2.11： 给定三角剖分后的离散 3-流形 M^3 ，Hilbert-Einstein 泛函为度量 l 的函数：

$$HE(l) = \sum_{e_{ij}} K_{ij} l_{ij}$$

其中 l_{ij} 为边 e_{ij} 上的度量。

该泛函关于度量的导数有着非常简洁的表达^[18]：

定理 2.5：

$$\frac{\partial HE}{\partial l_{ij}} = K_{ij} \quad (2-7)$$

其证明需要对如下 Schläfli 公式在所有四面体上进行加和^[18]：

定理 2.6: 欧式空间 \mathbb{R}^3 中多面体在 1 阶形变的意义下满足如下等式：

$$\sum_e l_e d\alpha_e = 0 \quad (2-8)$$

其中 l_e 是边 e 的长度, α_e 为边 e 处的二面角。

2.3.2 利用 Hilbert-Einstein 泛函判定多面体无穷小刚性

将多面体进行四面体剖分, 便构成一个离散 3-流形, 我们取度量为各个边的欧式长度, 即嵌入三维欧式空间后两个端点的欧式长度。

当我们固定边界度量, 改变内边的度量, 内边处的曲率可能会变为非零, 此时该 3-流形将无法等距嵌入三维欧式空间。在一阶意义下保持内边曲率不变的度量变换与多面体的无穷小变换有着非常紧密的联系。

我们考虑 Hilbert-Einstein 泛函关于内部度量的 Hessian 矩阵, 我们记为 M_T , 根据定理 2.5 可得^[12]:

$$M_T = \left(\frac{\partial^2 HE}{\partial l_{ij} \partial l_{kl}} \right)_{e_{ij}, e_{kl} \in Int M^3} = \left(\frac{\partial K_{ij}}{\partial l_{kl}} \right)_{e_{ij}, e_{kl} \in Int M^3} \quad (2-9)$$

我们将多面体的无穷小变换的向量场延拓到其对应的离散 3-流形上, 考虑包括内点在内的所有顶点, 但内点将不再满足无穷小变换的要求, 我们要使得内点沿向量场变换时, 和内边度量的变换相容, 我们称这样的变换为多面体的**增广无穷小变换**。我们可以找到增广无穷小变换与 $\ker(M_T)$ 之间的一一对应, 且这种映射是线性的。

定义 2.12: 将多面体 P 进行四面体剖分, 得到离散 3-流形 M^3 , 定义在 M^3 顶点集上的向量场 Q 被称为 P 的增广无穷小变换, 如果 $Q|_{\partial M^3}$ 是 P 的无穷小变换。

Q 被称为平凡增广无穷小变换, 如果 $Q|_{\partial M^3}$ 是 P 的平凡无穷小变换。

无穷小变换和平凡无穷小变换各形成线性空间, 且后者是前者的子空间, 分别记为 IM 和 IM_0 。

如果多面体存在非三角面, 那么, 这些面就会被三角剖分, 形成新的边界边。由于任何区域都可以不加点三角化, 我们仅考虑不加点三角剖分。

可以证明，在一个面内增加连边不会对多面体的无穷小刚性产生影响。由于内积的线性性，在增加新边后，新边两端的原向量自动满足该边 1 阶意义下长度不变。

关于 M_T 与离散 3-流形上向量场之间的关系，我们给出如下主要定理，^[12] 证明了对凸多面体成立，但我们认为同样的证明过程也适用于非凸多面体：

定理 2.7： 给定多面体 P ，及其剖分得到的离散 3-流形 $M^3 = (V, E, F, C)$ (不引入新的边界点)。 P 是无穷小刚性的，当且仅当 $\dim(\ker(M_T)) = 3i$ 。其中 i 为四面体剖分时引入的内点个数。

证明 1. 假设 P 具有无穷小刚性。

定义 V 上向量场 $Q : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ，满足 $q_i = 0$ 如果 p_i 为边界顶点。这些向量就是 P 的所有平凡无穷小变换，它们形成了 IM_0 。由于内点有 i 个，故 IM_0 的维数为 $3i$ 。

对所有 $e_{ij} \in IntM^3$, 定义：

$$l_{ij}^Q = \frac{p_i - p_j}{\|p_i - p_j\|} \cdot (q_i - q_j) \quad (2-10)$$

易见，这些量正是 Q 引起的边长的 1 阶变化。由于 Q 不会改变内边的曲率，故 $l^Q \in \ker(M_T)$

定义映射 f ，将 Q 映射为 l^Q ，故 f 是线性的。下证明 f 是一一的。

首先证明 f 是单射：只需证明 $l^Q = 0 \Rightarrow Q = 0$ 。 $l^Q = 0$ 意味着所有四面体胞的边长保持 1 阶不变，但由于除去平移、旋转，四面体的无穷小变换为零向量场，故 $Q = 0$ ，从而证明 f 为单射。

其次证明 f 为满射：给定 $l^Q \in \ker(M_T)$ ，选定一个基准三角面，将三个顶点上的向量设置为 0，然后按照广度优先遍历的原则，顺次根据等式2-10以及

$$0 = (p_i - p_j) \cdot (q_i - q_j), \quad e_{ij} \in \partial M^3 \quad (2-11)$$

□

确定新顶点上的向量，如此确定的向量场 Q 是唯一的。由于 P 具有无穷小刚性，所以 $q_i = 0$ 如果 $v_i \in \partial M^3$ 。因此 $Q \in IM_0$ 。

故 f 为满射， $\dim(\ker(M_T)) = \dim(IM_0) = 3i$

2. 假设 $\dim(\ker(M_T)) = 3i$

更具如上同样的过程, $\ker(M_T)$ 中的任意元素都对应一个 M^3 上的向量场, 向量场在边界上的限制是 P 的无穷小变换。这些向量场的全体即为 IM 。由于 IM_0 是 IM 的子空间, $\dim(IM_0) = \dim(M_T)$, $\dim(IM) = \dim(\ker(IM))$, 故 $IM = IM_0$, 因此 P 具有无穷小刚性。

2.3.3 平凡无穷小变换

从上一节我们知道, IM 和 $\ker(M_T)$ 之间存在一一对应。而 $\dim(IM/IM_0)$ 被称为多面体 P 的自由度。为了求得 IM_0 , 我们仍然可以借助于 M_T , 只不过还需要加一些限制条件, 对 M_T 进行增广。

具体来说, 这个条件就是保持所有边界边二面角 1 阶不变性。易知, 取基准三角面上的子向量场为零向量场, 如果我们要求边界边的二面角 1 阶不变, 则边界的向量场必为零向量场。从广度优先遍历的构建顺序即可看出这一点。因此这样的向量场是平凡无穷小变换。

首先定义:

$$N_T = \left(\frac{\partial K_{ij}}{\partial l_{kl}} \right)_{e_{ij} \in \partial M^3, e_{kl} \in \text{Int } M^3} \quad (2-12)$$

我们定义增广的 M_T 如下:

$$\widetilde{M}_T = \begin{pmatrix} M_T \\ N_T \end{pmatrix} \quad (2-13)$$

利用同样的对应方法, $\ker(\widetilde{M}_T)$ 对应的增广无穷小变换即为平凡增广无穷小变换。

由此, $\dim(IM/IM_0) = \dim(\ker(M_T)/\ker(\widetilde{M}_T))$, 平凡增广无穷小变换在边界上的限制即为多面体的平凡无穷小变换。

第3章 算法

3.1 数据结构

3.1.1 半边数据结构

计算机表示多边形网格组成的离散2-流形通常采用半边结构，如图3.1。每条边与方向相反的条半边相联系，点、边、面通过半边联系在一起：

1. 每个顶点关联从它出发的半边；
2. 每个面关联位于其边界的一条半边（我们规定面的半边逆时针排列）；
3. 每条半边关联它指向的顶点、它属于的面、位于同一个面的下一条半边、位于同一条边处的对边。

本文的算法实现采用OpenMesh库^①作为处理离散2-流形的数据结构。

3.1.2 半面数据结构

半面数据结构是半边的推广，向下兼容半边数据结构，但是每个面与两个半面相联系，同时增加了腔的概念。每个腔有围绕它的半面定义。如图3.2所示。

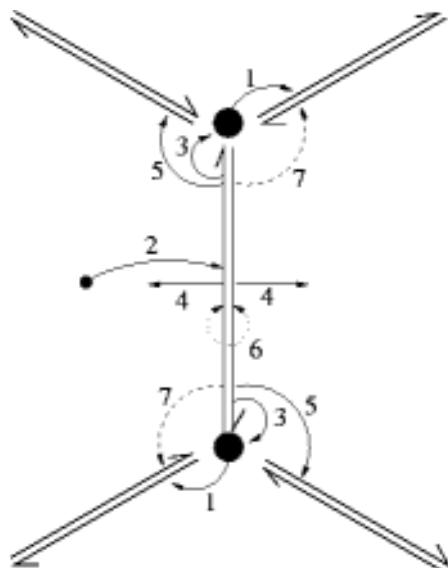


图 3.1 半边数据结构

^① <https://www.openmesh.org/>

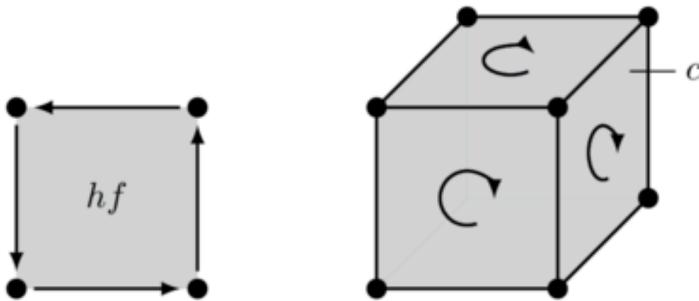
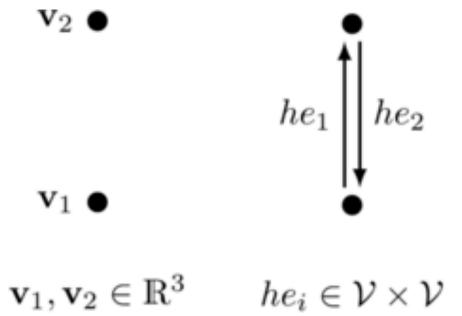


图 3.2 半面数据结构

本文的算法实现采用 OpenVolumeMesh 库^①作为处理离散 3-流形的数据结构。

3.2 三角剖分

本文需要分别对多面体表面，以及闭合多面体内腔进行三角剖分（四面体剖分）。

任意区域可以不需要加入额外顶点实现三角化，多面体表面同样如此，本文的算法实现采用了 PolyPartition 库^②实现的 Ear Cut 三角剖分算法。

但是存在必须加入内点才能三角化的 3-流形，所以在必要时我们需要在多面体内部加入内点，实现三角化，这种顶点被称为 Steiner 点。本文的算法实现采用 Tetgen 库^③提供的算法对多面体内部进行四面体剖分。

① <http://www.openvolumemesh.org/>

② <https://github.com/ivanfratric/polypartition>

③ <http://wias-berlin.de/software/tetgen/>

3.3 Hilbert-Einstein 函数的导数计算及无穷小刚性判定算法

算法的核心步骤是计算离散 3-流形边上的曲率对内边的导数，对此我们有如下公式：

定理 3.1：

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial l_{ik}} = \frac{\cot \theta_{jk}^{il} + \cot \theta_{jk}^{im}}{l_{jk} \sin \theta_j^{ik} \sin \theta_k^{ij}} \quad (3-1)$$

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial l_{kl}} = -\frac{1}{l_{jk} \sin \theta_j^{ki} \sin \theta_k^{jl} \sin \theta_{jk}^{il}} \quad (3-2)$$

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial l_{ij}} = -\sum_{f_{ijk}} \cos \theta_i^{jk} \frac{\partial K_{ik}}{\partial l_{ij}} \quad (3-3)$$

公式的证明参见^[19] 的 3.1 节。

根据定理2.7，我们只需计算 M_T 的零空间的维数即可知道该多面体是否具有无穷小刚性。由于计算机误差的影响，我们通过 M_T 的特征值计算零空间的维数，算法参见算法1。

Algorithm 1 多面体无穷小刚性判定算法

Input: 多面体 P , 阈值 ϵ

Output: 多面体是否具有无穷小刚性

- 1: 对多面体表面进行三角剖分
- 2: 对多面体内部进行四面体剖分，并计算内点个数 i
- 3: 根据定理3.1计算 M_T
- 4: 计算 M_T 的所有特征值
- 5: **if** 小于 ϵ 的特征值个数等于 $3i$ **then**
- 6: 多面体具有无穷小刚性
- 7: **else**
- 8: 多面体不具有无穷小刚性
- 9: **end if**

3.4 多面体非平凡无穷小变换求解算法

由于 IM_0 是 IM 的子空间, $\ker(\widetilde{M_T})$ 是 $\ker(M_T)$ 的子空间, IM_0 与 $\ker(\widetilde{M_T})$ 、 IM 与 $\ker(M_T)$ 之间是单满线性映射, 且是同一个映射, 我们可以先求 $\ker(\widetilde{M_T})$ 在 $\ker(M_T)$ 中的补空间, 然后利用线性映射的逆映射求得 IM_0 在 IM 中的补空间, 即是多面体的非平凡增广无穷小变换, 其在多面体表面的限制即是多面体的非平凡无穷小变换。

求解正交补的算法利用的是 Hibert 空间内积的性质, 具体步骤见算法2。

Algorithm 2 求解正交补子空间

Input: 底空间基底 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 子空间基底 $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$

Output: 子空间在低空间的补空间的基底 $\{c_1, c_2, \dots, c_{n-m}\}$

- 1: 正交化底空间的基底
 - 2: 将子空间表示成为底空间基底的坐标矩阵
 - 3: 求解坐标矩阵的零空间, 零空间的转置即为补空间的坐标矩阵
 - 4: 将零空间的转置恢复成底空间基的组合, 得到补空间的基
-

在定理2.7我们已经给出了矩阵核空间与增广无穷小变换之间的对应关系。现总结如下:

$l^Q \in \ker(M_T)$ (或者 $\ker(\widetilde{M_T})$) 与 $Q : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ 之间的一一线性映射由如下式子决定:

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0, \quad (3-4)$$

$$l_{ij}^Q = \frac{p_i - p_j}{\|p_i - p_j\|} \cdot (q_i - q_j), e_{ij} \in \text{Int } M^3 \quad (3-5)$$

$$0 = (p_i - p_j) \cdot (q_i - q_j), e_{ij} \in \partial M^3 \quad (3-6)$$

因此给定 $l^Q \in \ker(M_T)$ (或者 $\ker(\widetilde{M_T})$), 建立如上线性系统就可以唯一确定出对应的增广无穷小变换, 而其限制在边界上的向量场即为多面体的无穷小变换。具体见算法3。

利用算法2和算法3, 我们就可以求得多面体上所有无穷小变换的基, 详见算法4。

Algorithm 3 求解无穷小变换

Input: 多面体 P 及其对应的离散 3-流形 M^3 , $l_Q \in \ker(M_T)$

Output: 多面体上的无穷小变换

- 1: 选取基准三角面 f_0
 - 2: 根据公式2-11、公式2-10以及 f_0 上向量场为 0 建立线性系统
 - 3: 求解线性系统, 将求解出的增广无穷小运动 Q 限制在边界上, 返回
-

Algorithm 4 求解非平凡无穷小变换

Input: 非无穷小刚性的多面体 P 及其对应的离散 3-流形 M^3

Output: 多面体上所有非平凡无穷小变换的基

- 1: 构建矩阵 M_T 与 \widetilde{M}_T
 - 2: 计算 $\ker(M_T)$ 与 $\ker(\widetilde{M}_T)$
 - 3: 利用算法2计算 $\ker(\widetilde{M}_T)$ 在 $\ker(M_T)$ 中的补空间 W
 - 4: 利用算法3依次计算 W 的基对应的无穷小变换, 此即为 P 上非平凡无穷小变换的基
-

第 4 章 实验结果

我们根据以上算法实现了一个可视化无穷小变换的系统，GUI 界面采用了 Libigl 库^①。系统界面如图4.1。

无穷小刚性判定

我们选取了一些多面体进行了实验，模型如图所示。

实验结果如表4.1所示。

可以看出，实验的所有凸多面体都是无穷小刚性的，这和^[9] 所证明的一致。而非凸多面体中也存在具有无穷小刚性的，如模型 6。

可视化无穷小运动

我们的系统可以将多面体无穷小变换的基显示出来，模型 8 的非平凡无穷小有 4 个基，如图4.3。红色线段的长度代表向量的模长。

值得注意的两个模型是模型 9 和模型 10，它们分别被称为 Jessen 多面体和 Steffen 多面体。二者都不具有无穷小刚性，但是前者是刚性的，而后者是柔性的。它们表面的无穷小变换空间都是 1 维的，如图4.4。

多面体的等距变换并不是所有的无穷小运动都是某个等距变换的速度场，

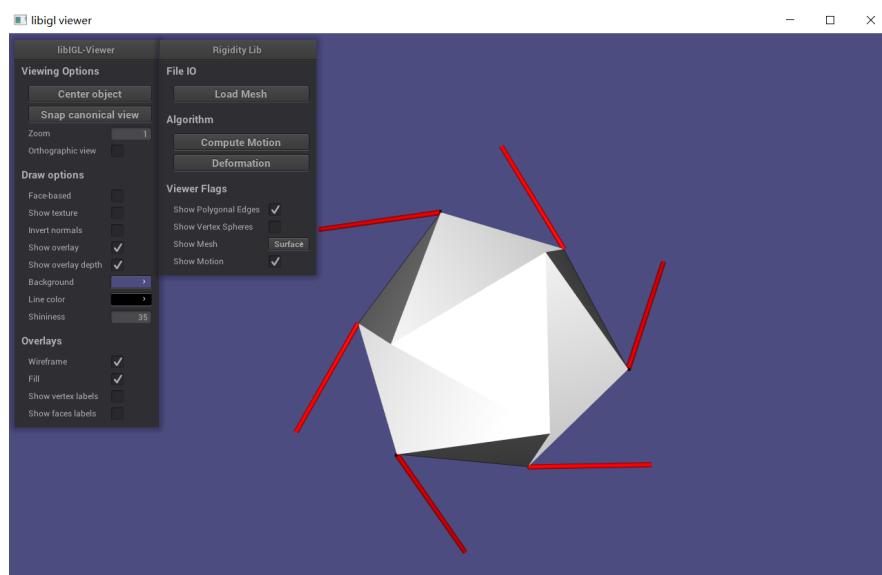


图 4.1 系统界面

① <https://github.com/libigl/libigl/>

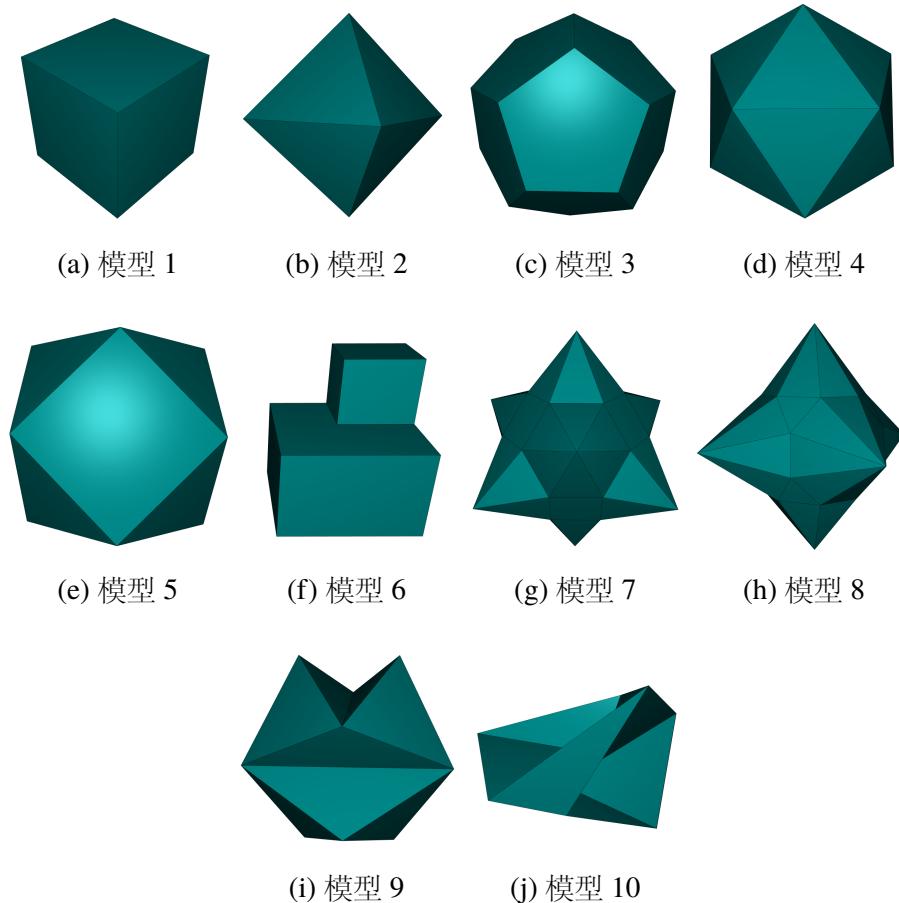


图 4.2 实验模型

需要满足一定条件才无穷小变换才可积分成等距变换。

但是，无穷小变换的可积条件我们仍然不知道，在实验中，我们尝试直接积分无穷小变换，即按照一定步长，对多面体的顶点按照该点的无穷小变换向量方形进行变换。

我们取步长为 0.0001，发现了一些有趣的现象。

我们已经知道 Steffen 多面体（模型 10）是柔性的，因此其无穷小变换理应是该多面体等距变换的速度场，在尝试积分后，我们发现其柔性可以在较长时间内保持，如图4.5。

但是无穷小运动对于顶点位置比较敏感，再加上数值误差的积累，最终会变成具有无穷小刚性。

而测试模型中其他不具有无穷小刚性的模型，在第一次变换后，无穷小柔性就消失了。例如我们已经知道 Jessen 多面体（模型 10）是刚性的，其在第一

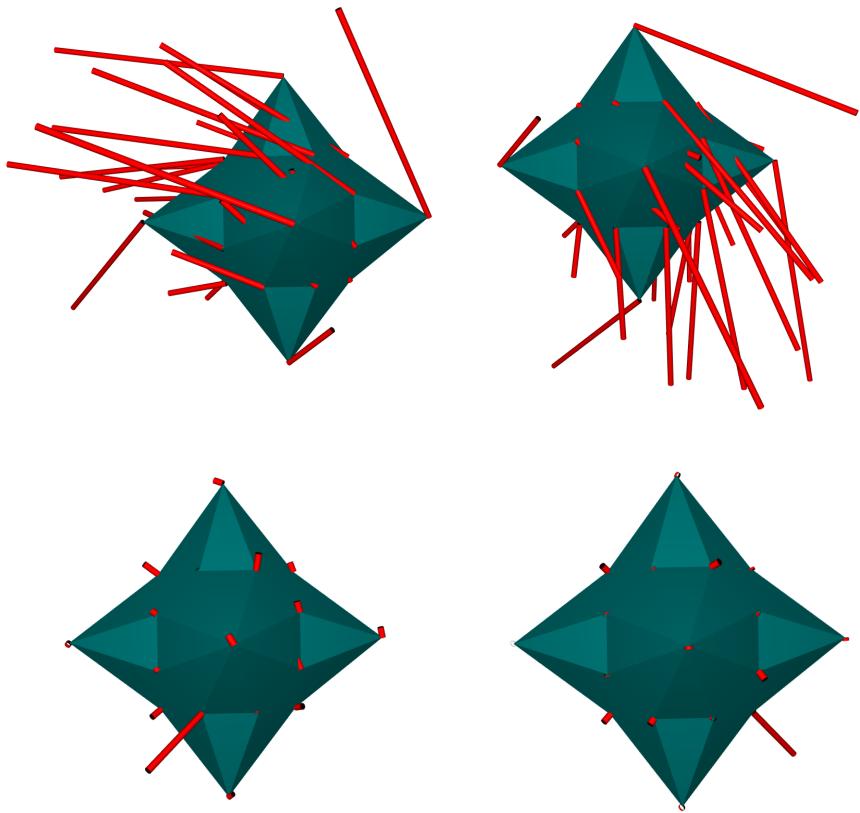


图 4.3 模型 8 上无穷小变换的 4 个基

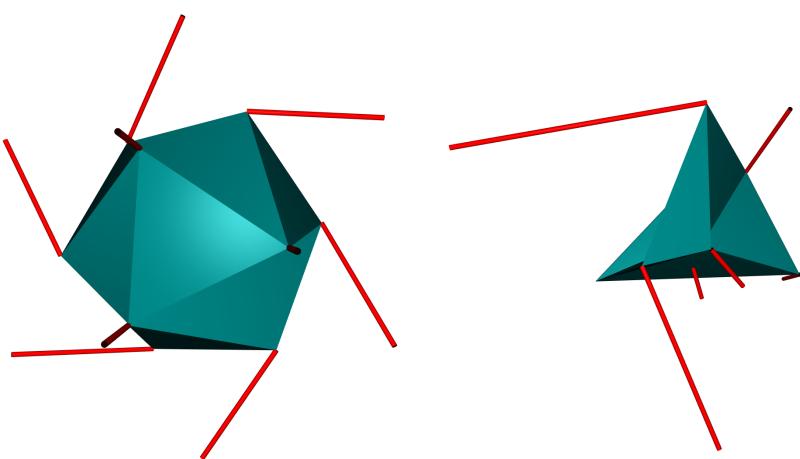


图 4.4 Jessen 多面体和 Steffen 多面体上的无穷小变换

表 4.1 凸多面体实验结果

模型	是否凸	内点数	增广无穷小	平凡增广无	是否无穷小
			变换空间维数	穷小变换维数	
模型 1	是	1	3	3	是
模型 2	是	0	0	0	是
模型 3	是	4	12	12	是
模型 4	是	0	0	0	是
模型 5	是	0	0	0	是
模型 6	否	0	0	0	是
模型 7	否	0	12	0	否
模型 8	否	0	4	0	否
模型 9	否	1	4	3	否
模型 10	否	2	7	6	否



图 4.5 Steffen 多面体等距变换时的三个中间状态

次变换后就变成了无穷小刚性。

我们或许可以猜测，具有柔性的多面体是十分稀疏的。而上面这种尝试形变发生的现象能否作为判断多面体是否真的是柔性的判定方法，仍然需要进一步研究，我们可能需要在理论上进一步研究不具有柔性、但具有无穷小柔性的多面体，其无穷小变换的在顶点位置的一个小邻域中的局部性质。

第 5 章 结论

本文根据^{[9][12][19]}提供的理论框架，提出了利用 Hilbert-Einstein 泛函判断多面体是否具有无穷小刚性的算法，以及求解多面体上非平凡无穷小变换的算法。

理论已经证明所有凸多面体，以及满足一些条件的多面体是具有无穷小刚性的，但是可以严格证明是具有无穷小刚性的多面体仍然很少。本文的算法可以通过数值计算，对多面体的无穷小刚性进行判断，并可视化出所有无穷小变换。

但是由于数值误差的影响，计算机判断出的结果有一定概率是错误的，但是至少可以为理论证明提供一定的方向参考。

最后，我们通过最无穷小变换直接积分，发现多面体上的无穷小变换对顶点的位置比较敏感，并且发现，如果多面体真具有柔性，其无穷小柔性会在变换过程中保持，而不具有柔性，但具有无穷小柔性的多面体则会在变换过程中很快失去无穷小柔性，但是这是否可以成为判断多面体是否真正具有刚性的判定条件，还有待进一步研究。

插图索引

图 1.1 Bricard 多面体变换过程。	1
图 1.2 Steffen 多面体变换过程。	2
图 2.1 Jessen 正交二十面体（左）和 Schönhardt 多面体（右）。它们都是刚性的，但不是无穷小刚性的。	7
图 2.2 离散 2-流形（左）及其四面体剖分后得到的离散 3-流形截面	8
图 2.3 (a)2-流形周角定义; (b)3-流形周角定义	9
图 3.1 半边数据结构	14
图 3.2 半面数据结构	15
图 4.1 系统界面	19
图 4.2 实验模型	20
图 4.3 模型 8 上无穷小变换的 4 个基	21
图 4.4 Jessen 多面体和 Steffen 多面体上的无穷小变换	21
图 4.5 Steffen 多面体等距变换时的三个中间状态	22
图 A-1 A rigid framework that is not infinitesimally rigid.....	36
图 A-2 The interpretation of curvatures.....	38

表格索引

表 4.1 凸多面体实验结果	22
----------------------	----

公式索引

公式 2-1	5
公式 2-2	5
公式 2-3	5
公式 2-4	6
公式 2-5	6
公式 2-6	10
公式 2-7	10
公式 2-8	11
公式 2-9	11
公式 2-10	12
公式 2-11	12
公式 2-12	13
公式 2-13	13
公式 3-1	16
公式 3-2	16
公式 3-3	16
公式 3-4	17
公式 3-5	17
公式 3-6	17
公式 A-1	33
公式 A-2	33

公式 A-3	34
公式 A-4	34
公式 A-5	35
公式 A-6	35
公式 A-7	35
公式 A-8	37
公式 A-9	39
公式 A-10	39
公式 A-11	40
公式 A-12	40
公式 A-13	40
公式 A-14	41

参考文献

- [1] Cauchy A L. Cambridge library collection - mathematics: volume 1 sur les polygones et les polyèdres (second mémoire)[M]. [S.l.]: Cambridge University Press, 1905: 26–38
- [2] Bricard R. Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé[J]. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1897, 3: 113–148.
- [3] Connelly R. A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra[J]. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 1977, 47: 333–338.
- [4] Steffen K. A symmetric flexible connelly sphere with only nine vertices[J]. IHES Available, 1978.
- [5] Dehn M. Über die starrheit konvexer polyeder. (mit 5 figuren im text)[J]. Mathematische Annalen, 1916, 77: 466–473.
- [6] Schlenker J M. A rigidity criterion for non-convex polyhedra[J]. Discrete and Computational Geometry, 2005, 33: 207–221.
- [7] Schlenker J M. On weakly convex star-shaped polyhedra[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(20): 6139 – 6145.
- [8] Regge T. General relativity without coordinates[J]. Il Nuovo Cimento (1955-1965), 1961, 19(3): 558–571.
- [9] Izmestiev I. Infinitesimal rigidity of convex polyhedra through the second derivative of the hilbert-einstein functional[J]. Canadian Journal of Mathematics, 2014(66): 783–825.
- [10] Alexandroff A. Existence of a convex polyhedron and of a convex surface with a given metric [J]. Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 1942, 11(53): 15–65.
- [11] Bobenko I I, Alexander I. Alexandrov’ s theorem, weighted delaunay triangulations, and mixed volumes[J]. Annales de l’ institut Fourier, 2008, 58(2): 447–505.
- [12] Izmestiev I, Schlenker J M. Infinitesimal rigidity of polyhedra with vertices in convex position[J]. Pacific Journal of Mathematics, 2010, 248(1): 171–190.
- [13] Izmestiev I. Infinitesimal rigidity of frameworks and surfaces[J]. Lectures on Infinitesimal Rigidity, Kyushu University, Japan, 2009.
- [14] Pak I. A short proof of rigidity of convex polytopes[J]. Siberian Mathematical Journal, 2006, 47(4): 710–713.
- [15] Gu X, Yau S T. Computing conformal structure of surfaces[J]. arXiv preprint cs/0212043, 2002.
- [16] Wang Y, Gu X, Yau S T, et al. Volumetric harmonic map[J]. Communications in Information & Systems, 2003, 3(3): 191–202.

- [17] Yin X, Jin M, Luo F, et al. Discrete curvature flows for surfaces and 3-manifolds[M]// Emerging Trends in Visual Computing. [S.l.]: Springer, 2009: 38–74
- [18] Izmestiev I. Variational properties of the discrete hilbert-einstein functional[J]. Actes des rencontres du CIRM, 2013, 3(1): 151–157.
- [19] Bobenko A I, Izmestiev I. Alexandrov’s theorem, weighted Delaunay triangulations, and mixed volumes[J]. Annales de l’institut Fourier, 2008, 58(2): 447–505.

致 谢

衷心感谢导师顾险峰教授和副导师王振波教授对本人的精心指导。他们的言传身教将使我终生受益。

感谢数学中心访问教授赵辉老师，在与赵辉老师近半年的合作中，我学会了学术论文的写作方法，并且其在编程方面对我的指导使我的编程思维、编程能力均有大幅度提高。

感谢 polyHédonisme^①提供各种多面体模型。

感谢 THUThESIS^②，它的存在让我的论文写作轻松自在了许多，让我的论文格式规整漂亮了许多。

① <http://levskaya.github.io/polyhedronisme/>
② <https://github.com/xueruini/thuthesis>

附录 A 外文资料调研阅读报告或书面翻译

Infinitesimal Rigidity of Polyhedra

A.1 Introduction

Rigidity of surfaces is a classical problem in geometry. One famous result is that all convex polyhedra are rigid. This theorem is first proved by Cauchy . This result had a profound influenceon geometry, which led to Alexandrov's rigidity for smooth convex surfaces in \mathbb{R}^3 .

From a practical viewpoint, global rigidity is difficult to handle. So we consider so called infinitesimal rigidity, which is involved with the first order of metric and is stronger than rigidity. It is proved that any convex polyhedron is infinitesimally rigid .

However, these two theorems can not extend to nonconvex polyhedra. Recent research results find the surprising relationships between Hilbert-Einstein functional. Its discrete generalization is also known in the physics community as the Tegge function. The discrete Hilber-Einstein functional provides new proofs for classical results in infinitesimal rigidityand extends rigidity theorems to some nonconvex polyhedra. This may be a very powerful tool which can help us get an deep insight of geometry behind the rigidity and flexibility of surfaces.

A.2 Rigidity and Infinitesimal Rigidity

A.2.1 Frameworks

定义 A.1： A **framework** in \mathbb{R}^d with graph $G = (V, E)$ is a map

$$P : V \rightarrow R$$

$$i \mapsto p_i$$

such that $p_i \neq p_j$ whenever $ij \in E$.

Every polyhedron can be seen as a graph embedded in \mathbb{R}^3 . And using framework, we can easily define the rigidity and infinitesimal rigidity.

A.2.2 Rigidity

A.2.2.1 Isometries and Motions in \mathbb{R}^d

定义 A.2: An **isometry** of \mathbb{R}^d is a bijective map

$$\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

such that

$$||\Phi(x) - \Phi(y)|| = ||x - y|| \quad (\text{A-1})$$

for all pairs of points $x, y \in \mathbb{R}^d$. The set of all isometries is denoted by $Iso(\mathbb{R}^d)$.

定理 A.1: Every isometry $\Phi \in Iso(\mathbb{R}^d)$ has the form

$$\Phi(x) = Ax + b \quad (\text{A-2})$$

where $A \in O(d)$, and the representation is unique.

定义 A.3: A **motion** of \mathbb{R}^d is a continuous family Φ_t of isometries of \mathbb{R}^d for $t \in [0, 1]$ such that Φ_0 is the identity.

A.2.2.2 Definition of Rigidity

定义 A.4: A **motion** of a framework P is a continuous family of frameworks $P(t)$ for $t \in [0, 1]$ such that $P(0) = P$ and

$$||p_i(t) - p_j(t)|| = ||p_i - p_j||$$

for all $ij \in E$ and for all $t \in [0, 1]$.

定义 A.5: A motion $P(t)$ of a framework P is called **trivial** if it is induced by a motion of \mathbb{R}^d :

$$P(t) = \Phi_t \circ P$$

for some motion Φ_t of \mathbb{R}^d .

定义 A.6: A framework is called **rigid** if all of its motions are trivial. Otherwise, it is called flexible.

定义 A.7: We say two frameworks P_1 and P_2 are **congruent**, if there exist a trivial motion Φ_{t_0} and some t_0 , such that

$$P_2 = \Phi_{t_0} \circ P_1$$

A.2.3 Infinitesimal Rigidity

A.2.3.1 Infinitesimal Motions of \mathbb{R}^d

定义 A.8: An **infinitesimal motion** of \mathbb{R}^d is a vector field

$$\xi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$x \mapsto \xi(x)$$

such that motion of each point of \mathbb{R}^d along its vector does not change the distances in the first order:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \|(x + t\xi(x)) - (y + t\xi(y))\| = 0 \quad (\text{A-3})$$

for all $x, y \in \mathbb{R}^d$

There are some properties of infinitesimal motion of \mathbb{R}^d

定理 A.2: A vector field ξ is an infinitesimal motion of a framework P if and only if

$$\langle \xi(x) - \xi(y), x - y \rangle = 0 \quad (\text{A-4})$$

for all $x, y \in \mathbb{R}^d$

Every infinitesimal motion of \mathbb{R}^d has the form:

$$\xi(x) = Zx + b \quad (\text{A-5})$$

where Z is a $d \times d$ antisymmetric matrix.

A.2.3.2 Definition of Infinitesimal Rigidity

定义 A.9: An **infinitesimal motion** of a framework P is a map

$$\begin{aligned} Q : V &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ i &\mapsto q_i \end{aligned}$$

such that

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \|(p_i + tq_i) - (p_j + tq_j)\| = 0 \quad (\text{A-6})$$

for all $ij \in E$

定义 A.10: An infinitesimal motion Q of a framework P is called **trivial** if it is induced by some infinitesimal motion ξ of \mathbb{R}^d :

$$Q = \xi \circ P$$

that is, $q_i = \xi(p_i)$ for all $i \in V$

定义 A.11: A framework is called **infinitesimally rigid** if all of its infinitesimal motions are trivial. Otherwise, it is called infinitesimal flexible.

Infinitesimal rigidity of a framework has an equivalent definition, as follows:

定理 A.3: A map Q is an infinitesimal motion of a framework P if and only if

$$\langle q_i - q_j, p_i - p_j \rangle = 0. \quad (\text{A-7})$$

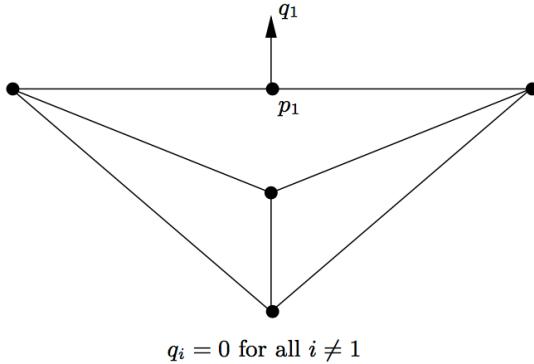


图 A-1 A rigid framework that is not infinitesimally rigid

A.2.4 Relationship between Rigidity and Infinitesimal Rigidity

Intuitively, infinitesimal motions have relation with the velocity fields of motions. Indeed, we have the following theorem:

定理 A.4: The velocity field of a smooth motion (of \mathbb{R}^d or a framework) is an infinitesimal motion.

Infinitesimal rigidity is actually stronger than rigidity. It requires that the framework cannot move even slightly. We have following theorem:

定理 A.5: Every infinitesimally rigid framework is rigid.

However, the reverse is not true. It is easy to find a rigid framework that is not infinitesimal rigid. For example, adding a vertex on the edge of a rigid frame work, such as Fig. A-1.

A.2.5 The Rigidity of Convex Polyhedra

All convex polyhedra is rigid and infinitesimally rigid. The theorems are as follows:

定理 A.6: The rigidity of polyhedra. Let $P, Q \subset \mathbb{R}^3$ be two convex polyhedra with the same combinatorics whose corresponding faces are congruent. Then P and Q are congruent.

定理 A.7: The infinitesimal rigidity of polyhedra. Let ξ be an infinitesimal motion of a convex polyhedron such that the restriction of ξ to every face is a trivial infinitesimal motion. Then ξ itself is trivial.

A.3 Infinitesimal Rigidity and Hilbert-Einstein Functional

A.3.1 Hilbert-Einstein Functional

This section is based on.

A.3.1.1 Smooth Case

Let M be a smooth manifold, the Riemannian metrics on M becomes a linear space, denoted as Met_M .

定义 A.12: The **Hilbert-Einstein functional** is a function on the metrics space Met_M on M :

$$S : Met_M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g \mapsto S(g) = \frac{1}{2} \int_M R_g dM + \int_{\partial M} H_g d\partial M$$

where R_g is the scalar curvature of M and H_g is the trace of the second fundamental form Π .

We only consider three-dimensional case.

In 3-dimension, the variational property of S is given as follows:

定理 A.8: The first variation of S is given by the formula:

$$S'_h = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} S(g + th) = \frac{1}{2} \int_M \left\langle \frac{R_g}{2} g - Ric_g, h \right\rangle dM + \int_{\partial M} \left\langle H_g g - \Pi, h \right\rangle d\partial M \quad (\text{A-8})$$

A.3.1.2 Discrete Case

Let M be a 3-manifold. Fix a triangulation T of M . We call this triangulation as triangular mesh. First we generalize the concept of metrics and curvatures to discrete case.

定义 A.13: A **metric** on M is a map from E to \mathbb{R}_+ :

$$l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$e \mapsto l_e$$

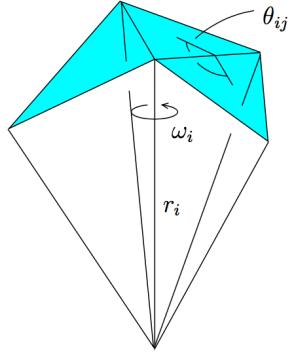


图 A-2 The interpretation of curvatures.

定义 A.14: The **curvatures** of mesh is defined as a map from edges to \mathbb{R}_+ :

$$k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$e \mapsto k_e$$

Here,

$$k_e = \begin{cases} 2\pi - \omega_e, & e \in E_i(T) \\ \pi - \theta_e, & e \in E_\partial(T) \end{cases}$$

where ω_e is the total angle around e , and θ_e is the dihedral angle at the boundary edge e

Now we define the discrete Hilbert-Einstein functional:

定义 A.15: The **discrete Hilbert-Einstein functional** is defined as a map on spaces of triangulations and metrics:

$$S(T, l) = \sum_{e \in E(T)} l_e k_e$$

The similar variational properties is given as:

定理 A.9: The first variation of S with respect to metrics is given by the formula:

$$\frac{\partial S}{\partial l_e} = k_e \quad (\text{A-9})$$

A.3.2 Prove the Infinitesimal Rigidity of Convex Polyhedra via Hilbert-Einstein Function

A.3.2.1 Simplicial Case

First, we consider simplicial polyhedra, that is, all of their faces are triangles.

Assume $P \subset \mathbb{R}^3$ be a convex polyhedron with vertices p_1, p_2, \dots, p_n , and P is simplicial.

Without loss of generality, we assume that the coordinate origin $0 \in \mathbb{R}^3$ lies in the interior of P . Connect the origin with each vertex, this will triangularize the polyhedron. For every vertex p_i of P , denote

$$r_i^0 = \|p_i\|$$

For each edge $p_i p_j$, denote the length by

$$l_{ij} = \|p_i - p_j\|$$

And we denote the curvature of edge $0p_i$ as k_i .

The key lemma we use to prove the infinitesimal rigidity of convex polyhedra is as follows:

引理 A.1: A convex polyhedron P is infinitesimally rigid if and only if

$$\dim \ker \left(\frac{\partial k_i}{\partial r_j} \right) \Big|_{r=r^0} = 3 \quad (\text{A-10})$$

where r_i^0 is the initial norm of p_i

The matrix above is actually the second derivative of Hilbert-Einstein function.

定理 A.10:

$$M_T = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial r_i \partial r_j} \right) = \left(\frac{\partial k_i}{\partial r_j} \right)$$

To prove this lemma, we need to construct **the correspondence between the kernel of M_T and infinitesimal motions**:

引理 A.2: Every element $\dot{r} \in \ker M_T$ can determine a infinitesimal motion q uniquely up to an infinitesimal rotation.

证明 Assume $\dot{r} \in \ker M_T$. Choose a root face, say $p_1 p_2 p_3$, of P . Choose q_1 as:

$$q_1 = \dot{r}_1 \frac{p_1}{\|p_1\|} \quad (\text{A-11})$$

Choose q_2 which satisfies:

$$\left\langle q_2, \frac{p_2}{\|p_2\|} \right\rangle = \dot{r}_2, \quad \langle p_1 - p_2, q_1 - q_2 \rangle = 0 \quad (\text{A-12})$$

Choose q_3 which satisfies:

$$\left\langle q_3, \frac{p_3}{\|p_3\|} \right\rangle = \dot{r}_3, \quad \langle p_1 - p_3, q_1 - q_3 \rangle = 0, \quad \langle p_2 - p_3, q_2 - q_3 \rangle = 0 \quad (\text{A-13})$$

Then continue to process all adjacent faces $p_1 p_i p_{i+1}$ around p_1 and choose q_{i+1} with similar condition as (A-13).

Using this scheme, we can find a well-defined vector field on vertices of P , and it is a infinitesimal motion of P . \square

Using this lemma, we can easily prove Lemma A.1.

At last, we only need to prove that the corank of M_T of convex polyhedra equals to 3. Detail proof can be found in^[12]. And here finishes the proof of Theorem A.7.

A.3.2.2 Non-simplicial Case

For non-simplicial convex polyhedra P , we can triangularize P by adding some interior vertices of P and adding some vertices of faces of P .

引理 A.3: Assume T is a triangulation of P and all interior edge are $\{l_i\}$, the infinitesimal rigidity of P is equivalent to:

$$\ker M_T = \ker \left(\frac{\partial^2 S}{\partial l_i \partial l_j} \right) = 3n + m \quad (\text{A-14})$$

where n is the number of interior vertices and m is flat vertices added to the interior of faces.

A.4 Research Plan

In the following research, I want to try to figure out the following problems:

问题 A.1: The correspondence between elements in the kernel of M_T and infinitesimal motions, where T is the arbitrary triangulation of any polyhedra.

The proof of Lemma A.2 provide a method to reconstruct an infinitesimal motion from an element of $\ker M_T$. The next step is to generalize it to the case when the interior vertices is not unique.

问题 A.2: The conditions when a infinitesimal motion will become a velocity field of a motion of frameworks.

In Chapter 2, we know that the velocity field of a motion is a infinitesimal motion, but the reverse is not true. For a velocity field, we can use integral to find the motion the field is corresponded with. And then we can watch the evolution of surfaces in computers.

问题 A.3: The generalization to open surfaces.

The case I've discussed only involves polyhedra, that is, 2-dimensional closed surfaces. I want to figure out whether the same scheme can be applied to 2-dimensinal open surfaces.

问题 A.4: How to find new type of flexible surfaces.

Flexible geometry may have a lot of applications such as robotics, satellites and flexible materials. I want to figure out whether it is possible to search new flexible surfaces via computers.

参考文献

- [1] Izmestiev I. Infinitesimal rigidity of convex polyhedra through the second derivative of the hilbert-einstein functional[J]. Canadian Journal of Mathematics, 2014(66): 783–825.
- [2] Izmestiev I, Schlenker J M. Infinitesimal rigidity of polyhedra with vertices in convex position[J]. Pacific Journal of Mathematics, 2010, 248(1): 171–190.
- [3] Bobenko I I, Alexander I. Alexandrov’ s theorem, weighted delaunay triangulations, and mixed volumes[J/OL]. Annales de l’ institut Fourier, 2008, 58(2): 447–505. <http://eudml.org/doc/10322>.