

海島算經學習（2）

劉徽 著

賀軒 學習

原文：

今有望松生山上，不知高下。立兩表齊，高二丈，前後相去五十步，令後表與前表參相直。從前表卻行七步四尺，薄地遙望松末，與表端參合。又望松本，入表二尺八寸。復從後表卻行八步五尺，薄地遙望松末，亦與表端參合。問松高及山去表各幾何？

翻译：

有一棵松樹生長在山上，不知道它的高低位置。豎立兩個表，在同一個平面，且都高2丈，前後距離50步遠，讓后表與前表重合對準松樹。從前表后退7步4尺，貼地遠望松樹頂尖，與表頂尖重合。再望松樹根部，與表尖向下2尺8寸處重合。再從后表後退8步5尺，貼地遠望樹頂尖，與表頂尖重合。問松樹高及山與表的距離各多少？

思考：

这个问题较前一个问题多了“再望松树根部，与表尖向下2尺8寸处重合。”的条件。可借用前题方法。

根据题意，作图。如图1所示，有：

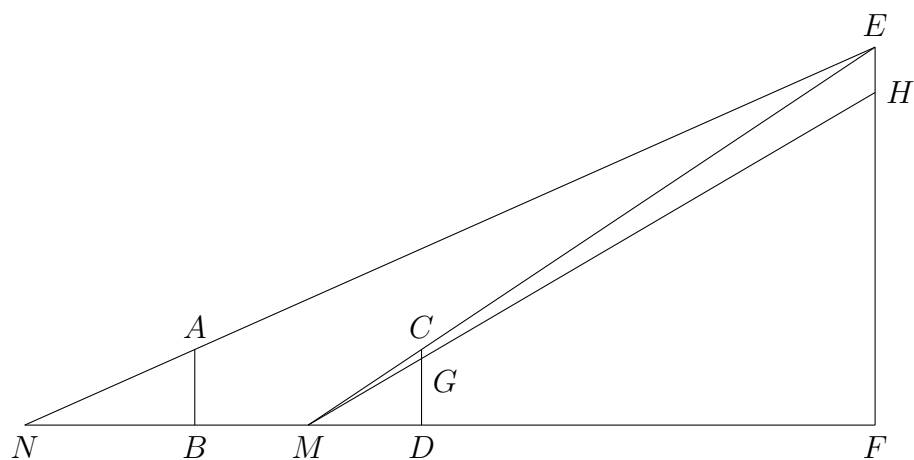


圖 1: 望山松示意圖

$$AB = CD = 2\text{丈}$$

$$AB \perp BD \perp CD$$

$$BD = 50\text{步}$$

$$DM = 7\text{步}4\text{尺}$$

$$CG = 2\text{尺}8\text{寸}$$

$$BN = 8\text{步}5\text{尺}$$

求 EH 及 DF 。

根据前題：

$$\begin{aligned} DF &= \frac{DM \cdot BD}{BN - DM} \\ &= \frac{7\text{步}4\text{尺} \times 50\text{步}}{8\text{步}5\text{尺} - 7\text{步}4\text{尺}} \\ &= \frac{7\text{步}4\text{尺} \times 50\text{步}}{1\text{步}1\text{尺}} \end{aligned}$$

$$EF = \frac{CD \cdot BD}{BN - DM} + CD \quad (1)$$

$$= \frac{2(\text{丈}) \times 50(\text{步})}{8\text{步}5\text{尺} - 7\text{步}4\text{尺}} + 2(\text{丈}) \quad (2)$$

$$= \frac{2(\text{丈}) \times 50(\text{步})}{1\text{步}1\text{尺}} + 2(\text{丈}) \quad (3)$$

这里需要知道“步”和“尺”之间的换算。

原文：

答曰：松高一十二丈二尺八寸；山去表一里二十八步、七分步之四。

翻译：

答案：松树高 12 丈 2 尺 8 寸；山离（前）表 1 里 $28\frac{4}{7}$ 步。

思考：

这里看到分母为 7 的答案，猜测

$$1(\text{步}) = 6\text{尺} \quad (4)$$

试加以验证：

$$\begin{aligned}
 DF &= \frac{7\text{步}4\text{尺} \times 50\text{步}}{1\text{步}1\text{尺}} \\
 &= \frac{46\text{尺} \times 50\text{步}}{7\text{尺}} \\
 &= \frac{2300}{7}\text{步} \\
 &= 328\frac{4}{7}\text{步} \\
 &= 1\text{里}28\frac{4}{7}\text{步}
 \end{aligned}$$

符合。

方法二，设：

$$1(\text{步}) = x(\text{尺}) \quad (5)$$

则：

$$\begin{aligned}
 DF &= \frac{7\text{步}4\text{尺} \times 50\text{步}}{1\text{步}1\text{尺}} \\
 &= \frac{(7x+4)\text{尺} \times 50\text{步}}{(x+1)\text{尺}} \\
 &= \frac{7x+4}{x+1} \times 50\text{步} \\
 &= 1\text{里}28\frac{4}{7}\text{步} \\
 &= 328\frac{4}{7}\text{步}
 \end{aligned}$$

即：

$$\begin{aligned}\frac{7x+4}{x+1} \times 50 &= 328\frac{4}{7} \\ \frac{350x+200}{x+1} &= \frac{2300}{7} \\ 2450x+1400 &= 2300x+2300 \\ 150x &= 900 \\ x &= 6\end{aligned}$$

确证式4。

$$\begin{aligned}EF &= \frac{CD \cdot BD}{BN - DM} + CD \\ &= \frac{2(\text{丈}) \times 50(\text{步})}{1(\text{步})1(\text{尺})} + 2(\text{丈}) \\ &= \frac{600}{7} + 2(\text{丈}) \\ &= 87\frac{5}{7}(\text{丈})\end{aligned}\tag{6}$$

根据相似比例：

$$\frac{CG}{CD} = \frac{EH}{EF}\tag{7}$$

则松高：

$$\begin{aligned}EH &= \frac{CG \cdot EF}{CD} \\ &= \frac{2\text{尺}8\text{寸} \times 87\frac{5}{7}(\text{丈})}{2\text{丈}} \\ &= 87\frac{5}{7} \times (1\text{尺}4\text{寸})\end{aligned}$$

又有“尺”“寸”转换的问题。猜测

$$1\text{尺} = 10\text{寸}$$

则有：

$$\begin{aligned}
 EH &= 87\frac{5}{7} \times (1\text{尺}4\text{寸}) &= 87\frac{5}{7} \times 14\text{寸} \\
 &= 1228\text{寸} \\
 &= 12\text{丈}2\text{尺}8\text{寸}
 \end{aligned}$$

与算经中数据相符。

原文：

術曰：以入表乘表間為實。相多為法，除之。加入表，即得松高。求表去山遠近者：置表間，以前表卻行乘之為實。相多為法，除之，得山去表。

翻译：

方法：用“入表”（ CG ）乘以“表間”（ BD ）作為被除數（分子），后退的差（ $BN - DM$ ）作為除數（分母），作除法。結果加上“入表”，就得到了“松高”。

求（前）表到山的距離的方法：“置表間”（ BD ），用“前表卻行”（ DM ）乘它作為被除數（分子），后退的差（ $BN - DM$ ）作為除數（分母），作除法。得（前）表到山的距離。

思考：

两句方法所表述的计算公式：

$$EH = \frac{CG \cdot BD}{BN - DM} + CG \quad (8)$$

$$DF = \frac{BD \cdot DM}{BN - DM} \quad (9)$$

式9与上一题相同，不讨论。

对于式8讨论如下：

由式6和式7可得

$$EH = \frac{CG}{CD} \cdot \left(\frac{CD \cdot BD}{BN - DM} + CD \right) \quad (10)$$

$$= \frac{CG \cdot BD}{BN - DM} + CG \quad (11)$$

式11恰与式8相同。

小結拓展

根據本題，增加了“尺”“寸”的比例著麼：

$$1(\text{里}) = 180(\text{丈})$$

$$= 300(\text{步})$$

$$1(\text{丈}) = \frac{5}{3}(\text{步}) \approx 1.667(\text{步})$$

$$= 10(\text{尺})$$

$$= 100(\text{寸})$$

$$1(\text{步}) = 0.6(\text{丈})$$

$$= 6(\text{尺})$$

$$1(\text{尺}) = 10(\text{寸})$$

由以上比例，感覺“丈、尺、寸”應該為一套十進制測量單位；“里、步”為另一套。待考證。

如果沒有“相似三角形”的知識，如何推導出這些操作方法呢？待考。