

## 海島算經學習（4）

劉徽 著

賀軒 學習

原文：

今有望深谷，偃矩岸上，令句<sup>1</sup>高六尺。從句端望谷底，入下股九尺一寸。又設重矩于上，其矩間相去三丈。更從句端望谷底，入上股八尺五寸。問谷深幾何？

翻译：

現在要測量深谷，將矩倒放在岸上，使勾高 6 尺。從勾頂端望谷底，與“下股” 9 尺 1 寸處重合。又在這個矩上再放一個矩，兩矩距離 3 丈。再從（上矩）勾頂端望谷底，與“上股” 8 尺 5 寸處重合。問谷深多少？

思考：

根据题意作图，如图1所示。重矩（红色）在“岸”上，则有

$$AB = CD = 3\text{丈} = 300\text{寸}$$

$$AC = BD = 6\text{尺} = 60\text{寸}$$

$$BN = 8\text{尺}5\text{寸} = 85\text{寸}$$

$$AM = 9\text{尺}1\text{寸} = 91\text{寸}$$

求  $OA$ 。

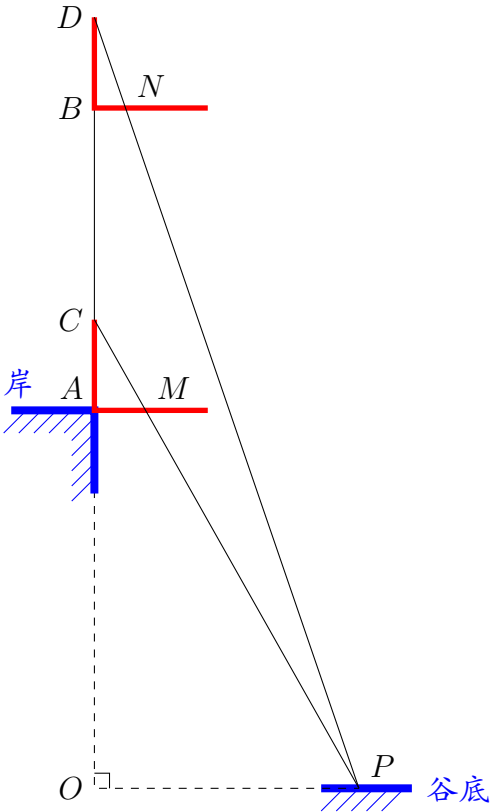


圖 1: 望深谷示意圖

$$\because \triangle CAM \approx \triangle COP$$

$$\therefore \frac{CA}{CO} = \frac{AM}{OP} \quad (1)$$

$$\text{又} \because \triangle DBN \approx \triangle DOP$$

$$\therefore \frac{DB}{DO} = \frac{BN}{OP} \quad (2)$$

式1 式2 左右同比，消 OP，得：

$$\frac{CA \cdot DO}{CO \cdot DB} = \frac{AM}{BN} \quad (3)$$

将下列关系代入上式

$$\begin{cases} CO = CA + AO \\ DO = DB + BA + AO \end{cases} \quad (4a)$$

$$(4b)$$

得：

$$\frac{CA \cdot (DB + BA + AO)}{DB \cdot (CA + AO)} = \frac{AM}{BN} \quad (5)$$

可解 AO 得：<sup>2</sup>

$$AO = \frac{BN \cdot BA}{AM - BN} - CA \quad (6)$$

代入数值：

$$\begin{aligned} AO &= \frac{85 \cdot 300}{91 - 85} - 60 \\ &= 4190(\text{寸}) \end{aligned} \quad (7)$$

原文：

答曰：四十一丈九尺。

翻译：

答案：41 丈 9 尺。

思考：

与式7相符：

$$41\text{丈}9\text{尺} = 4190\text{寸}$$

原文：

術曰：置矩間，以上股乘之，為實。上、下股相減，餘為法，除之。所得以勾高減之，即得谷深。

翻译：

方法：用兩矩距離 3 丈，乘以“上股”8 尺 5 寸，作為被除數。“下股”9 尺 1 寸減去“上股”8 尺 5 寸，差作為除數，作除法。得到的數減去勾高 6 尺，就得到谷深。

思考：

“置矩間，以上股乘之，為實”：

$$AB \cdot BN \quad (8)$$

“上、下股相減，余為法”：

$$AM - BN \quad (9)$$

“除之。所得以句高減之，即得谷深”：

$$AO = \frac{AB \cdot BN}{AM - BN} - CA \quad (10)$$

## 小結

本題為“偃矩以測深”的實例。

## Notes

<sup>1</sup>句：通“勾”。

<sup>2</sup>解方程式 5，過程如下：

$$\begin{aligned} \frac{CA \cdot (DB + BA + AO)}{DB \cdot (CA + AO)} &= \frac{AM}{BN} \\ \frac{CA \cdot (CA + BA + AO)}{CA \cdot (CA + AO)} &= \frac{AM}{BN} \\ BN \cdot (CA + BA + AO) &= AM \cdot (CA + AO) \\ (BN - AM) \cdot AO &= AM \cdot CA - BN \cdot (CA + BA) \\ AO &= \frac{AM \cdot CA - CA \cdot BN - BN \cdot BA}{BN - AM} \\ AO &= \frac{BN \cdot BA}{AM - BN} - CA \end{aligned}$$