

海島算經學習（1）

劉徽 著

賀軒 學習

原文：

今有望海島，立兩表，齊高三丈，前後相去千步，令後表與前表參相直。從前表卻行一百二十三步，人目著地取望島峯，與表末參合。從後表卻行一百二十七步，人目著地取望島峯，亦與表末參合。問島高及去表各幾何？

翻译：

現如今有“望海島”方法：豎直立兩根表，一樣高3丈，前後距離1000步，使後表、前表重合，並對準海島峯。從前表後退123步，人眼貼地望島峯，與前表頂端重合（三點一線）。從後表後退127步，人眼貼地望島峯，與後表頂端重合（三點一線）。問：海島多高、多遠？

思考：

參：應作“重合”解，並且有“三點重合”之意。類似用槍瞄準。

按問題作圖如圖1所示。其中， E 為島峰， CD 為前表， AB 為後表， F, B, D 共線（地平線），有 $AB \perp BF, CD \perp BF, EF \perp BF, EC$ 延長線交地平線於 M, EA 延長線交地平線於 N ，有：

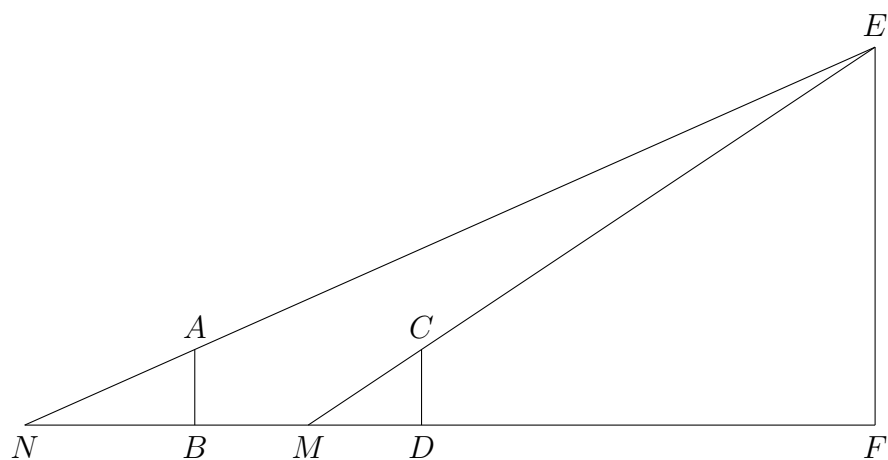


圖 1: 望海島示意圖

$$AB = CD = 3(\text{丈})$$

$$BD = 1000(\text{步})$$

$$DM = 123(\text{步})$$

$$BN = 127(\text{步})$$

求：EF, BF(或 DF).

解：

$$\because \triangle NAB \approx \triangle NEF$$

$$\therefore \frac{AB}{BN} = \frac{EF}{NF} \quad (1)$$

$$\text{又} \because \triangle MCD \approx \triangle MEF$$

$$\therefore \frac{CD}{DM} = \frac{EF}{MF} \quad (2)$$

式1和式2左右分別相除，消 EF，得：

$$\frac{AB \cdot DM}{BN \cdot CD} = \frac{FM}{FN} \quad (3)$$

又有：

$$\begin{cases} FM = DF + DM \\ FN = DF + BD + BN \end{cases} \quad \begin{matrix} (4a) \\ (4b) \end{matrix}$$

代入式3，得：

$$\frac{AB \cdot DM}{BN \cdot CD} = \frac{DF + DM}{DF + BD + BN} \quad (5)$$

整理可得：

$$DF = \frac{DM \cdot BD}{BN - DM} \quad (6)$$

代入数值：

$$DF = \frac{123(\text{步}) \times 1000(\text{步})}{127(\text{步}) - 123(\text{步})} = 30750(\text{步}) \quad (7)$$

将6式代入4a式，得：

$$FM = \frac{DM \cdot BD}{BN - DM} + DM$$

再代入式2

$$\frac{CD}{DM} = \frac{EF}{\frac{DM \cdot BD}{BN - DM} + DM}$$

整理得：

$$\begin{aligned} EF &= \frac{CD \cdot BD}{BN - DM} + CD \\ &= \frac{3(\text{丈}) \times 1000(\text{步})}{127(\text{步}) - 123(\text{步})} + 3(\text{丈}) \\ &= 753(\text{丈}) \end{aligned} \quad (8)$$

原文：

答曰：島高四里五十五步；去表一百二里一百五十步。

翻译：

回答：島高 4 里 55 步；離（前）表 102 里 150 步。

思考：

“去表”是前是后？是可以验证的（不贅述）。另后述“术曰”中也有表述。

根据前面计算：

$$EF = 753(\text{丈}) = 4(\text{里})55(\text{步}) \quad (9)$$

$$DF = 30750(\text{步}) = 102(\text{里})150(\text{步}) \quad (10)$$

由10式得：

$$1(\text{里}) = 300(\text{步}) \quad (11)$$

代入9式得：

$$753(\text{丈}) = 1255(\text{步}) \quad (12)$$

得：

$$1(\text{丈}) = \frac{5}{3}(\text{步}) \approx 1.667(\text{步})$$

$$1(\text{步}) = 0.6(\text{丈})$$

原文：

術曰：以表高乘表間為實；相多為法，除之。所得加表高，即得島高。求前表去島遠近者：以前表卻行乘表間為實；相多為法。除之，得島去表數。

翻译：

術：用表高乘以兩表間距作為分子，退後相差作為分母，做除法，得商再加表高，得到的就是島高。求前表到島的距離的方法：用前表的後退距離乘以兩表間距作為分子，退後相差作為分母，做除法，得島前表距離。

思考：

前半段正合8式；后半段正合6式。

小結拓展

原文摘自 中國哲學書電子化計劃。

“中国數学家白尚恕對海島算經有較詳細的論證。吴文俊院士論文《我国古代測望之学重差理論評介兼評數學史研究中的某些方法問題》与《海島算經古證探源》两篇論文對《海島算經》有詳細的論證，前文批評一些前人對《海島算經》的論證中添加歐几里德几何的平行線或利用相似形理論或后代的代數論證的方法，顛倒歷史，都是錯誤的方法，并提出正确的論證，必須以劉徽時代的出入相补原理為基礎，才能還原《海島算經》的本來面目。”——摘自**百度百科**

$$1(\text{里}) = 180(\text{丈})$$

$$= 300(\text{步})$$

$$1(\text{丈}) = \frac{5}{3}(\text{步}) \approx 1.667(\text{步})$$

$$1(\text{步}) = 0.6(\text{丈})$$

這些換算為什麼是這樣的？