

海島算經學習（3）

劉徽 著

賀軒 學習

原文：

今有南望方邑，不知大小。立兩表東、西去六丈，齊人目，以索連之。令東表與邑東南隅及東北隅參¹相直。當東表之北卻行五步，遙望邑西北隅，入索東端二丈二尺六寸半。又卻北行去表一十三步二尺，遙望邑西北隅，適與西表相參合。問邑方及邑去表各幾何？

翻译：

現在仍向南望正方形城池，不知道它的大小。豎立兩個表，東西相距 6 丈，在與人眼睛一樣高的位置，用繩索連接。使東表與東南角、東北角三點一線。東表向北 5 步遠，遙望城池西北角，在繩索東端 2 丈 2 尺 $6\frac{1}{2}$ 寸處。再向北走，離東表 13 步 2 尺，遙望城池西北角，恰好與西表重合。問城池正方形在大小以及離表距離多少？

思考：

望島、望山松、望方邑，均有实战意义。

根据题意，绘制俯视图，如图1所示。则有：

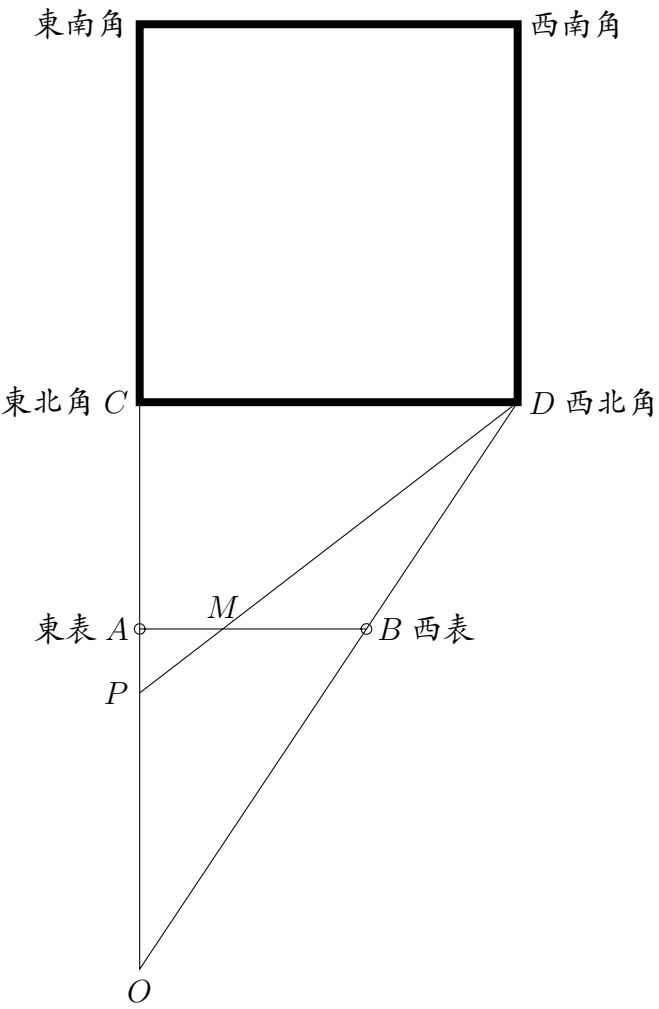


圖 1: 望方邑示意圖

$AB = 6$ 丈	$= 600$ 寸
$AP = 5$ 步	$= 300$ 寸
$AM = 2$ 丈 2 尺 $6\frac{1}{2}$ 寸	$= 226\frac{1}{2}$ 寸
$AO = 13$ 步 2 尺	$= 800$ 寸

求 CD 、 AC 长度。

$$\therefore \triangle PAM \approx \triangle PCD$$

$$\therefore \frac{AM}{AP} = \frac{CD}{CP} \quad (1)$$

又

$$\therefore \triangle OAB \approx \triangle OCD$$

$$\frac{AB}{AO} = \frac{CD}{CO} \quad (2)$$

式1与式2左右分别相比，消除 CD ：

$$\frac{AM \cdot AO}{AP \cdot AB} = \frac{CO}{CP} \quad (3)$$

又有

$$\begin{cases} CP = AC + AP \\ CO = AC + AO \end{cases} \quad (4a)$$

$$(4b)$$

代入式3：

$$\frac{AM \cdot AO}{AP \cdot AB} = \frac{AC + AO}{AC + AP} \quad (5)$$

整理得“去表”：

$$AC = AO \cdot AP \cdot \frac{AB - AM}{AM \cdot AO - AP \cdot AB} \quad (6)$$

代入数值：

$$\begin{aligned} AC &= 800 \cdot 300 \cdot \frac{600 - AM}{226\frac{1}{2} \cdot 800 - 300 \cdot 600} \\ &= 74700(\text{寸}) \end{aligned} \quad (7)$$

代入式4a：

$$CP = AO \cdot AP \cdot \frac{AB - AM}{AM \cdot AO - AP \cdot AB} + AP \quad (8)$$

代入式1：

$$CD = \frac{AM}{AP} \cdot (AO \cdot AP \cdot \frac{AB - AM}{AM \cdot AO - AP \cdot AB} + AP) \quad (9)$$

化简²，得：

$$CD = AB \cdot AM \cdot \frac{AO - AP}{AM \cdot AO - AB \cdot AP} \quad (10)$$

代入数值：

$$\begin{aligned} CD &= 600 \times 226\frac{1}{2} \times \frac{800 - 300}{226\frac{1}{2} \times 800 - 600 \times 300} \\ &= 56625(\text{寸}) \end{aligned} \quad (11)$$

原文：

答曰：邑方三里四十三步、四分步之三；邑去表四里四十五步。

翻译：

答案：城池邊長3里 $43\frac{3}{4}$ 步，城池離（東）表4里45步。

思考：

城池边长，与式11相符：

$$3\text{里}43\frac{3}{4}\text{步} = 943\frac{3}{4}\text{步} = 5662\frac{1}{2}\text{尺} = 56625\text{寸}$$

城池离（东）表距离，与式7相符：

$$4\text{里}45\text{步} = 1245\text{步} = 74700\text{寸}$$

原文：

術曰：以入索乘後去表，以兩表相去除之，所得為景差；以前去表減之，不盡以為法。置後去表，以前去表減之，餘以乘入索為實。實如法而一，得邑方。求去表遠近者：置後去表，以景差減之，餘以乘前去表為實。實如法而一，得邑去表。

翻译：

方法：用“入索” AM 乘以“后去表” AO ，再用“兩表相去” AB 除，得到“景差”；用“前去表” AP 減“景差”，差作為除數。將“后去表” AO ，用“前去表” AP 減，差乘以“入索” AM 作為被除數。被除數和除數作除法，得城池邊長“邑方”。求“去表遠近”的方法：將“後去表” AO ，用“景差”減，差用“前去表” AP 乘積，作為被除數，（與前邊計算的除數）作除法，得“邑去表” AC 。

思考：

“景差”：

$$\frac{AM \cdot AO}{AB} \quad (12)$$

“以前去表減之，不盡以為法”

$$\frac{AM \cdot AO}{AB} - AP \quad (13)$$

“置后去表，以前去表減之，余以乘入索為實”

$$(AO - AP) \cdot AM \quad (14)$$

實如法而一，得邑方。

$$\frac{(AO - AP) \cdot AM}{\frac{AM \cdot AO}{AB} - AP} \quad (15)$$

化簡得：

$$CD = AB \cdot AM \cdot \frac{AO - AP}{AM \cdot AO - AB \cdot AP} \quad (16)$$

与式10相符。

“置后去表，以景差减之，余以乘前去表为实”：

$$\left(AO - \frac{AM \cdot AO}{AB}\right) \cdot AP \quad (17)$$

“实如法而一，得邑去表”：

$$\frac{\left(AO - \frac{AM \cdot AO}{AB}\right) \cdot AP}{\frac{AM \cdot AO}{AB} - AP} \quad (18)$$

化简得：

$$AC = AP \cdot AO \cdot \frac{AB - AM}{AM \cdot AO - AB \cdot AP} \quad (19)$$

与式6相同。

小結

雖推導出現代計算公式與古代計算“公式”相同，但還搞不明白三人推導的原理。有待再學習、再思考。

Notes

¹此處進一步驗證“參”有“三點一線”的意思。

²CD化簡過程：

$$\begin{aligned} CD &= \frac{AM}{AP} \cdot \left(AO \cdot AP \cdot \frac{AB - AM}{AM \cdot AO - AP \cdot AB} + AP\right) \\ &= AM \cdot \left(AO \cdot \frac{AB - AM}{AM \cdot AO - AP \cdot AB} + 1\right) \\ &= AM \cdot \frac{AO \cdot AB - AO \cdot AM + AM \cdot AO - AP \cdot AB}{AM \cdot AO - AP \cdot AB} \\ &= AB \cdot AM \cdot \frac{AO - AP}{AM \cdot AO - AB \cdot AP} \end{aligned}$$