第七章-作业

1

假设我们对一个数据结构执行 n 次操作，如果 i 是 2 的乘方则第 i 个操作的开销为 i，否则为 1。分别使用聚集法、会计法和势能法分析操作的平摊代价。

答:

设第 i 个操作的代价为 $c(i)$，则:

$$c(i) = \begin{cases} i+1, & \text{if i 是 2 的幂;} \\ 1, & \text{if i 不是 2 的幂.} \end{cases}$$

聚集法

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c(i) &= \sum_{i=1}^{\lceil \lg n \rceil} 2^i + \sum_{\text{i 不是 2 的幂}} 1 \\ &\le \sum_{i=1}^{\lceil \lg n \rceil} 2^i + n = 2^{\lceil \lg n \rceil + 1} - 1 + n \\ &\le 2n - 1 + n \le 3n = O(n) \end{aligned}$$

因此平摊代价为 $O(1)$。

会计法

设每次操作花费 3 。

显然第 2^0 次操作有可用资金。

当第 2^i 次操作有可用资金时，对于第 2^{i+1} 次操作，操作之后剩余资金总数为:

$$W = 3 \times 2^{i+1} - (2^{i+1} - (i+1) + 2^{i+2} - 2) = i + 3 > 0$$

即第 2^{i+1} 次操作也有可用资金。

综上可知，$\forall i \ge 0$，第 2^i 次操作都有可用资金。

而对于任意 $2^i < j < 2^{i+1}$，第 j 次操作之后剩余资金总数为:

$$W = i + 2 + 2(j - 2^i) > 0$$

即所有操作都有可用资金。

总投入为 $3n$，平摊代价为 $O(1)$。

势能法

定义:

- $\Phi(D_0) = 0$
- 第 i 次操作后数据结构的势能函数：$\Phi(D_i) = 2i - 2^{\lfloor \lg i \rfloor + 1} \ge 0,\ i \ge 1$

- 若 $i \neq 2^j$，$c_i = 1 + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + 2 = 3$
- 若 $i = 2^j$，$c_i = i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = i + (2i - 2^{j+1}) - (2(i-1) - 2^{j-1+1}) = 2$

因此平摊代价为 $O(1)$。

2

Bill 提出了一种称为翻转栈的数据结构，该结构仅支持 Flip_push() 操作。 每次执行 Flip_push() 时，首先入栈，然后检查栈中的对象数是否为 2 的幂。 如果是，则将翻转栈中的所有对象。

例如，我们使用 Flip_push() 将对象 1、2、3 和 4 压入栈。堆栈的内容变化（从下至上）如下：

$(1) \Rightarrow (2,1) \Rightarrow (2,1,3) \Rightarrow (4,3,1,2)$。

你需要使用分别使用聚集法、会计法和势能法分析 Flipping_push() 函数的摊销成本。

堆栈反转的成本等于堆栈中现有对象的数量。

答：

设第 i 个操作的代价为 $c(i)$，则：

$$c(i) = \begin{cases} i+1, & \text{if i 是 2 的幂;} \\ 1, & \text{if i 不是 2 的幂.} \end{cases}$$

聚集法

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c(i) &= \sum_{i=1}^{\lceil \lg n \rceil} 2^i + \sum_{\text{i 不是 2 的幂}} 1 \\ &\le \sum_{i=1}^{\lceil \lg n \rceil} 2^i + n = 2^{\lceil \lg n \rceil + 1} - 1 + n \\ &\le 2n - 1 + n \le 3n = O(n) \end{aligned}$$

因此平摊代价为 $O(1)$。(没点区别)

会计法

设每次操作花费 3。

显然第 2^0 次操作有可用资金。

当第 2^i 次操作有可用资金时，对于第 2^{i+1} 次操作，操作之后剩余资金总数为：

$$W = 3 \times 2^{i+1} - (2^{i+1} + 2^{i+2} - 2) = 2 > 0$$

即第 2^{i+1} 次操作也有可用资金。

综上可知，$\forall i \ge 0$，第 2^i 次操作都有可用资金。

而对于任意 $2^i < j < 2^{i+1}$，第 j 次操作之后剩余资金总数为：

$$W = 2 + 2(j - 2^i) > 0$$

即所有操作都有可用资金。

总投入为 $3n$，平摊代价为 $O(1)$。

势能法

定义：

- $\Phi(D_0) = 0$
- 第 i 次操作后数据结构的势能函数：$\Phi(D_i) = 2i - 2^{\lfloor \lg i \rfloor + 1} \geq 0,\ i \geq 1$

- 若 $i \neq 2^j$，$c_i = 1 + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + 2 = 3$
- 若 $i = 2^j$，
  $c_i = 1 + i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + i + (2i - 2^{j+1}) - (2(i-1) - 2^{j-1+1}) = 3$

因此平摊代价为 $O(1)$。