第四章-作业

1

在一条直线上有 n 堆石子，每堆有一定的数量，每次可以将两堆相邻的石子合并，合并后放在两堆的中间位置，合并的费用为两堆石子的总数。（30分）

求把所有石子合并成一堆的最小花费(定义 $dp[i][j]$ 为第 i 堆石子到第 j 堆合并的最小花费)。
(1) 写出该问题的递推方程。（10分）
(2) 有 5 堆石子 ($n=5$)，每堆石子大小分别为 $<1,3,5,2,4>$,求出把所有石子合并成一堆的最小花费(要求写出运算矩阵)。（10分）
(3) 写出该问题的伪代码。（10分）

答:

设 $w[i]$ 为第 i 堆石子的数量;

$R[i][j]$ 为第 i 堆石子到第 j 堆石子的总数量，即 $R[i][j]=\sum_{r=i}^{j} w[r]$.

(1)

$$dp[i][j]=\begin{cases}0, & \text{if } i=j;\\ min_{i\le k<j}\{dp[i][k]+dp[k+1,j]+R[i][j]\}, & \text{if } j>i.\end{cases}$$

(2)

$R[1][1]=1$	$R[1][2]=4$	$R[1][3]=9$	$R[1][4]=11$	$R[1][5]=15$
\	$R[2][2]=3$	$R[2][3]=8$	$R[2][4]=10$	$R[2][5]=14$
\	\	$R[3][3]=5$	$R[3][4]=7$	$R[3][5]=11$
\	\	\	$R[4][4]=2$	$R[4][5]=6$
\	\	\	\	$R[5][5]=4$

$dp[1][1]=0$	$dp[1][2]=4$	$dp[1][3]=13$	$dp[1][4]=22$	$dp[1][5]=34$
\	$dp[2][2]=0$	$dp[2][3]=8$	$dp[2][4]=17$	$dp[2][5]=28$
\	\	$dp[3][3]=0$	$dp[3][4]=7$	$dp[3][5]=17$
\	\	\	$dp[4][4]=0$	$dp[4][5]=6$
\	\	\	\	$dp[5][5]=0$

(3)

$stone\_merge(n, w[])$

```
for i <- 1 to n do
    dp[i][i] <- 0
    R[i][i] <- w[i]
for l <- 2 to n do
    for i <- 1 to n - l + 1 do
        j = i + l - 1
        dp[i][j] = MAX_NUM
        R[i][j] = R[i][j - 1] + w[j]
        for k <- i to j - 1 do
            q = dp[i][k] + dp[k + 1][j] + R[i][j]
            if(q < dp[i][j]) then
                dp[i][j] = q
return dp[1][n]
```

c 语言代码：1.c

2

若 7 个关键字的概率如下所示，求其最优二叉搜索树的结构和代价，要求必须写出递推方程。（30分）

i	0	1	2	3	4	5	6	7
p_i		0.04	0.06	0.08	0.02	0.10	0.12	0.14
q_j	0.06	0.06	0.06	0.06	0.05	0.05	0.05	0.05

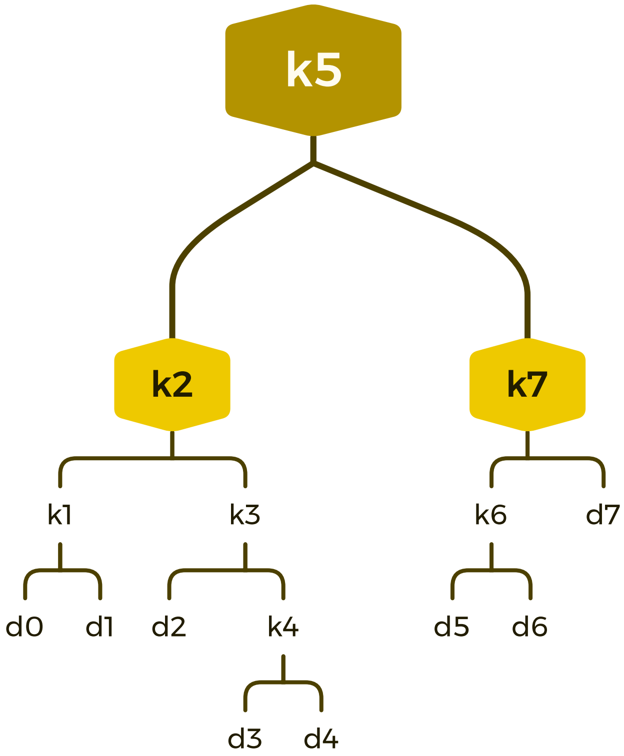
答：

递推方程

$$E(i,j)=\begin{cases} q_{i-1}=q_j, & \text{if } j=i-1; \\ min_{i\le k\le j}\{E(i,R-1)+E(r+1,j)+W(i,j)\}, & \text{if } j>i. \end{cases}$$

$$W(i,j)=\sum_{l=i}^{j} p_l+\sum_{l=i-1}^{j} q_l$$

最优二叉搜索树的结构



代价为 3.12.

3

编程题：兑换零钱问题（40分）

题目描述：

给定不同面额的硬币 $coins$ 和一个总金额 $amount$。编写一个函数来计算可以凑成总金额所需的最少的硬币个数。如果没有任何一种硬币组合能组成总金额，返回-1。（提示：你可以认为每种硬币的数量是无限的）。

示例 1:

> 输入: coins = [1, 2, 5], amount = 11
>
> 输出: 3
>
> 解释: 11 = 5 + 5 + 1

示例 2:

> 输入: coins = [2], amount = 3
>
> 输出: -1

运用动态规划的思想作答，请写出分析过程和状态转移方程，并用一种语言（最好是 $C++$ 或 $JAVA$ ）实现你的思路，并保证代码能正确运行，复杂度尽可能低。

原题：[322. 零钱兑换 - 力扣（LeetCode）](#)

答：

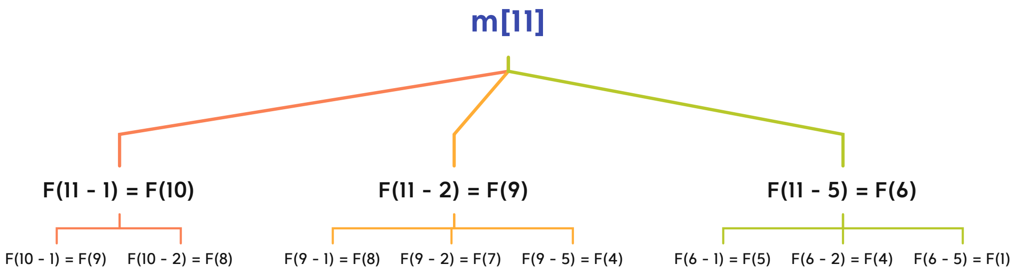
1. 分析优化解的结构

   设凑成总金额 i 所需的最少的硬币个数为 $dp[i]$，设选择的最后一枚硬币为第 j 枚硬币，其面值为 c_j。

   若$dp[i-c_j]$ 存在，则求 $dp[i-c_j]$ 是求 $dp[i]$ 的子问题。对应于子问题 $dp[i-c_j]$ 的解是子问题 $dp[i-c_j]$ 的优化解。

   证明：反证法略

   子问题的重叠性：上示例 1



2. 递归地定义最优值的代价

$$dp[i] = \begin{cases} 0, & \text{if } i = 0; \\ min_{0\le k\le coinsSize-1}\{dp[i], dp[i-c_j]+1\}, & \text{if } i > c_j. \end{cases}$$

3. 自底向上地计算优化解的代价保存之，并获取构造最优值的信息 & 根据构造最优值的信息构造优化解

   一维数组，由小到大计算即可。

4. 源代码

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
int min(int a, int b)
{
    return (a < b) ? a : b;
}

int coinChange(int *coins, int coinsSize, int amount)
{
    int MAX_NUM = amount + 1;
    if (coins == NULL || coinsSize == 0 || amount < 0)  return -1;
    if (amount == 0) return 0;
    if (coinsSize == 1 && (amount % coins[0])) return -1;

    int dp[amount + 1];

    for (int i = 0; i <= amount; i++)
        dp[i] = MAX_NUM;
    dp[0] = 0;

    for (int i = 0; i <= amount; i++)
        for (int j = 0; j < coinsSize; j++)
        {
            if (i < coins[j]) continue;
            dp[i] = min(dp[i], dp[i - coins[j]] + 1);
        }
```

```c

    return (dp[amount] == MAX_NUM) ? -1 : dp[amount];
}

int main()
{
    int coins1[4] = {1, 2, 5};
    int amount1 = 11;
    int coins2[2] = {2};
    int amount2 = 3;
    int coins3[9] = {328, 122, 26, 397, 252, 455, 250, 252};
    int amount3 = 7121;
    int coins4[9] = {430, 360, 440, 204, 206, 194, 150, 443};
    int amount4 = 3580;
    int coins5[9] = {259, 78, 94, 130, 493, 4, 168, 149};
    int amount5 = 4769;
    int coins6[9] = {244, 125, 459, 120, 316, 68, 357, 320};
    int amount6 = 9793;
    int coins7[2] = {2147483647}; //超大 coins 面额打击，大于 amount 的 coins 直接不考虑
    int amount7 = 2;

    printf("%d\n", coinChange(coins1, 3, amount1));
    printf("%d\n", coinChange(coins2, 1, amount2));
    printf("%d\n", coinChange(coins3, 8, amount3));
    printf("%d\n", coinChange(coins4, 8, amount4));
    printf("%d\n", coinChange(coins5, 8, amount5));
    printf("%d\n", coinChange(coins6, 8, amount6));
    printf("%d\n", coinChange(coins7, 1, amount7));
    return 0;
}
```

源文件：3.c