第二章-作业

1

用 O、Ω、θ 表示函数 f 与 g 之间阶的关系，并分别指出下列函数中阶最低和最高的函数：（该题考察阶的关系，20分）

1. $f(n)=100$，$g(n)=\sqrt[100]{n}$
   $f(n)=O(g(n))$
2. $f(n)=6n+n\lfloor\log n\rfloor$，$g(n)=3n$
   $g(n)=O(f(n))$
3. $f(n)=\frac{n}{\log n}-1$，$g(n)=2\sqrt{n}$
   $g(n)=O(f(n))$
4. $f(n)=2^n+n^2$，$g(n)=3^n$
   $f(n)=O(g(n))$
5. $f(n)=\log_3 n$，$g(n)=\log_2 n$
   $f(n)=\theta(g(n))$

- 阶最低的函数: $f(n)=100$
- 阶最高的函数: $g(n)=3^n$

2

证明：$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 有常数上界。（该题考察和式求和，20分）

证明：

因为当 $k-1\leq x\leq k$ 时，有 $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{x^2}$，所以

$$\frac{1}{k^2}=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^2}\,dx\leq\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^2}\,dx\,(k=2,3\cdots)$$

从而级数的部分和为

$$\begin{aligned}S_n&=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^2}\,dx=1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x^2}\,dx\\&=1+\frac{1}{2-1}(1-\frac{1}{n^{2-1}})<1+\frac{1}{2-1}=2\,(n=2,3\cdots)\end{aligned}$$

表明数列 $\{S_n\}$ 有界，即 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 有常数上界。

3

给出下列各式中 $T(n)$ 的渐近上下界，假设当 $n\leq 10$ 时，$T(n)$ 为常数，尽可能保证给出的界限是紧的，并验证给出的答案。（该题考察递归方程解法，20分）

3.1

$T(n)=3T(n/5)+(lgn)^2$

$$\begin{gathered}a=3,b=5,f(n)=(lgn)^2,n^{\log_b a}=n^{\log_5 3}=O(n^{0.683})\\f(n)=(lgn)^2=O(n^{\log_5 3-0.28})\\\therefore T(n)=\Theta(n^{\log_5 3}).\end{gathered}$$

3.2

$T(n)=T(\sqrt{n})+\Theta(\lg\lg n)$

设 $m=\lg n$，则 $n=2^m$，$T(2^m)=T(2^{m/2})+\Theta(lgm)$.

令 $S(m)=T(2^m)$，则 $S(m)=S(\frac{m}{2})+\Theta(\lg m)$.

尝试使用 $master$ 定理，则

$$a=1, b=2, f(m)=\Theta(\lg m), m^{\log_b a}=m^{\log_2 1}=1$$

$f(m)$ 不是多项式的大于 $n^{\log_b a}$，不能用 $master$ 定理.

设 $q=\lg m$，则 $m=2^q$，$S(2^q)=S(2^q/2)+\Theta(q)$.

令 $P(q)=S(2^q)$，则 $P(q)=P(q-1)+\Theta(q)$.

故 $\Theta(q)=P(q)-P(q-1)$，由定义有：存在 $c_1, c_2>0, n_0>0$，使得当 $n>n_0$ 时，下式成立：

$$c_1 q\leqslant P(q)-P(q-1)\leqslant c_2 q$$

q 从 1 取到 q，并累加得

$$\frac{c_1}{2}q^2\leqslant c_1\sum_{k=1}^{q}k\leqslant P(q)-P(0)\leqslant c_2\sum_{k=1}^{q}k\leqslant c_2 q^2$$

可知 $P(q)=\Theta(q^2)$，而 $n=2^{2^q}, q=\lg\lg n$，故 $T(n)=\Theta((\lg\lg n)^2)$

3.3

$T(n)=10T(n/3)+17n^{1.2}$

$$a=10, b=2, f(n)=17n^{1.2}, n^{\log_b a}=n^{\log_3 10}=O(n^{2.095})$$
$$f(n)=17n^{1.2}=O\left(n^{\log_3 10-\epsilon}\right), \epsilon=0.8.$$
$$\therefore T(n)=\Theta(n^{\log_3 10}).$$

3.4

$T(n)=7T(n/2)+n^3$

$$a=7, b=2, f(n)=n^3, n^{\log_b a}=n^{\log_2 7}=O(n^{2.80})$$
$$f(n)=n^3=\Omega\left(n^{\log_2 7+\epsilon}\right), \epsilon=0.2.$$

且 $af(n/b)=7(n/2)^3\leq cn^3=cf(n)$，只需 $c\geq 7/8$.

故存在常数 $7/8\leq c<1$，使得 $af(n/b)\leq cf(n)$ 成立.故 $T(n)=\Theta(n^3)$.

3.5

$T(n)=T(n/2+\sqrt{n})+\sqrt{6046}$

显然存在 $n_0>0$，使得当 $n>n_0$ 时，$T(n/2)<T(n/2+\sqrt{n})<T(3n/4)$，

因 $T(n)=T(n/2)+\sqrt{6046}$ 和 $T(n)=T(3n/4)+\sqrt{6046}$ 由 $master$ 定理都可得 $T(n)=\Theta(\log n)$.

故 $T(n)=\Theta(\log n)$.

4

运用主定理求解下面方程，假设 T 为 $O(1)$ 作为基本情况：（该题考察主定理，20分）

4.1

$T(n) = 25T(n/5) + n^{2.1}$

$$a = 25, b = 5, f(n) = n^{2.1}, n^{\log_b a} = n^{\log_5 25} = n^2$$
$$f(n) = n^{2.1} = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}), \epsilon = 0.1.$$

且 $af(n/b) = 25(n/5)^{2.1} \le cn^{2.1} = cf(n)$，只需 $c \ge 5^{-0.1}$.

故存在常数 $c = 0.9 < 1$，使得 $af(n/b) \le cf(n)$ 成立.故 $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^{2.1})$.

4.2

$T(n) = 25T(n/5) + n^{1.5}$

$$a = 25, b = 5, f(n) = n^{1.5}, n^{\log_b a} = n^2$$
$$f(n) = n^{1.5} = \Theta(n^{\log_b a - \epsilon}), \epsilon = 0.5.$$
$$\therefore T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^2).$$

4.3

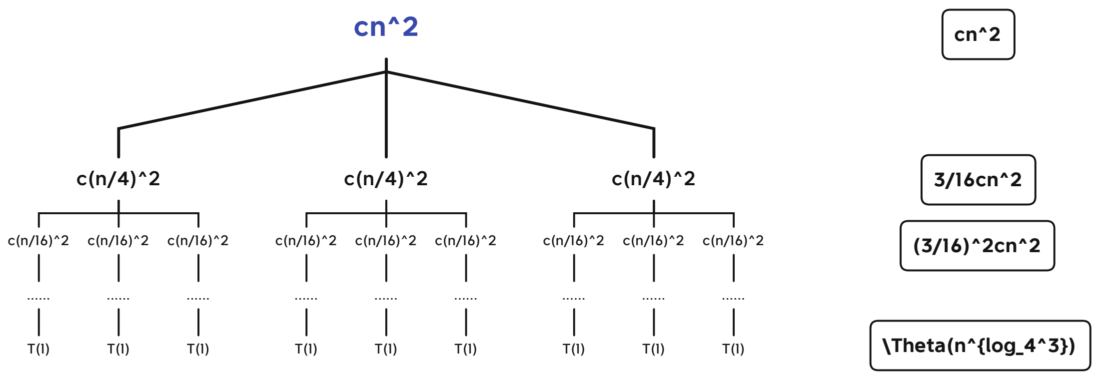
$T(n) = 25T(n/5) + n^2$

$$a = 25, b = 5, f(n) = n^2, n^{\log_b a} = n^2$$
$$f(n) = n^2 = \Theta(n^2) = \Theta(n^{\log_b a})$$
$$\therefore T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(n^2 \log n).$$

5

对递归式 $T(n) = 3T(n/4) + cn^2$，用递归法确定一个渐进上界，并画出递归树。

可能会用到的公式：$a^{\log b^c} = c^{\log b^a}$（该题考察递归树，20分）



$$
\begin{aligned}
T(n) &= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + (\frac{3}{16})^2 cn^2 + \cdots + (\frac{3}{16})^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} (\frac{3}{16})^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4^3}) \\
&= \frac{(\frac{3}{16})^{\log_4 n} - 1}{\frac{3}{16} - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})
\end{aligned}
$$

猜测 $T(n) = O(n^2)$，用代入法验证.

即证：$T(n) = O(n^2)$，即证：存在 $d > 0$，$n_0 > 0$，使得当 $n > n_0$ 时，有 $T(n) \leq dn^2$

证：假设当 $m < n$ 时，有 $T(m) \leq dm^2$ 成立.
那么当 $m = n$ 时，
$T(m) = 3T(m/4) + cm^2 \leq 3d(m/4)^2 + cm^2 = 3/16dm^2 + cm^2 = (c + \frac{3}{16}d)m^2$

要使得上式成立，只需 $d \geq 16/13c$.

故当 $d \geq 16/13c$ 时，当 $m = n$ 时，$T(m) \leq dm^2$ 成立.

即证得 $T(n) = O(n^2)$.