

第二章-作业

1

用 O 、 Ω 、 θ 表示函数 f 与 g 之间阶的关系，并分别指出下列函数中阶最低和最高的函数：（该题考察阶的关系，20分）

1. $f(n) = 100, g(n) = \sqrt[100]{n}$
 $f(n) = O(g(n))$
2. $f(n) = 6n + n \lfloor \log n \rfloor, g(n) = 3n$
 $g(n) = O(f(n))$
3. $f(n) = \frac{n}{\log n} - 1, g(n) = 2\sqrt{n}$
 $f(n) = O(g(n))$
4. $f(n) = 2^n + n^2, g(n) = 3^n$
 $f(n) = O(g(n))$
5. $f(n) = \log_3 n, g(n) = \log_2 n$
 $f(n) = \theta(g(n))$

- 阶最低的函数: $f(n) = 100$
- 阶最高的函数: $g(n) = 3^n$

2

证明: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 有常数上界。（该题考察和式求和，20分）

证明:

因为当 $k-1 \leq x \leq k$ 时, 有 $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{x^2}$, 所以

$$\frac{1}{k^2} = \int_{k-1}^k \frac{1}{k^2} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^2} dx \quad (k = 2, 3, \dots)$$

从而级数的部分和为

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x^2} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx \\ &= 1 + \frac{1}{2-1} (1 - \frac{1}{n^{2-1}}) < 1 + \frac{1}{2-1} = 2 \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

表明数列 $\{S_n\}$ 有界, 即 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 有常数上界。

3

给出下列各式中 $T(n)$ 的渐近上下界, 假设当 $n \leq 10$ 时, $T(n)$ 为常数, 尽可能保证给出的界限是紧的, 并验证给出的答案。（该题考察递归方程解法, 20分）

3.1

$$T(n) = 3T(n/5) + (\lg n)^2$$

$$a = 3, b = 5, f(n) = (\lg n)^2, n^{\log_b a} = n^{\log_5 3} = O(n^{0.683})$$

$$f(n) = (\lg n)^2 = O(n^{\log_5 3 - 0.28})$$

$$\therefore T(n) = \Theta(n^{\log_5 3}).$$

3.2

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + \Theta(\lg \lg n)$$

设 $m = \log n$, 则 $n = 2^m$, $T(2^m) = T(2^{m/2}) + \Theta(\lg m)$.

令 $S(m) = T(2^m)$, 则 $S(m) = S(\frac{m}{2}) + \Theta(\lg m)$.

尝试使用 *master* 定理, 则

$$a = 1, b = 2, f(m) = \Theta(\log m), m^{\log_b a} = m^{\log_2 1} = 1$$

$f(m)$ 不是多项式的大于 $n^{\log_b a}$, 不能用 *master* 定理.

设 $q = \log m$, 则 $m = 2^q$, $S(2^q) = S(2^q/2) + \Theta(q)$.

令 $P(q) = S(2^q)$, 则 $P(q) = P(q-1) + \Theta(q)$.

故 $\Theta(q) = P(q) - P(q-1)$, 由定义有: 存在 $c_1, c_2 > 0, n_0 > 0$, 使得当 $n > n_0$ 时, 下式成立:

$$c_1 q \leq P(q) - P(q-1) \leq c_2 q$$

q 从 1 取到 q , 并累加得:

$$\frac{c_1}{2} q^2 \leq c_1 \sum_{k=1}^q k \leq P(q) - P(0) \leq c_2 \sum_{k=1}^q k \leq c_2 q^2$$

可知 $P(q) = \Theta(q^2)$, 而 $n = 2^{2^q}$, $q = \log \log n$, 故 $T(n) = \Theta((\log \log n)^2)$

3.3

$$T(n) = 10T(n/3) + 17n^{1.2}$$

$$a = 10, b = 3, f(n) = 17n^{1.2}, n^{\log_b a} = n^{\log_3 10} = O(n^{2.095})$$

$$f(n) = 17n^{1.2} = O(n^{\log_3 10 - \epsilon}), \epsilon = 0.8.$$

$$\therefore T(n) = \Theta(n^{\log_3 10}).$$

3.4

$$T(n) = 7T(n/2) + n^3$$

$$a = 7, b = 2, f(n) = n^3, n^{\log_b a} = n^{\log_2 7} = O(n^{2.80})$$

$$f(n) = n^3 = \Omega(n^{\log_2 7 + \epsilon}), \epsilon = 0.2.$$

且 $af(n/b) = 7(n/2)^3 \leq cn^3 = cf(n)$, 只需 $c \geq 7/8$.

故存在常数 $7/8 \leq c < 1$, 使得 $af(n/b) \leq cf(n)$ 成立. 故 $T(n) = \Theta(n^3)$.

3.5

$$T(n) = T(n/2 + \sqrt{n}) + \sqrt{6046}$$

显然存在 $n_0 > 0$, 使得当 $n > n_0$ 时, $T(n/2) < T(n/2 + \sqrt{n}) < T(3n/4)$,

因 $T(n) = T(n/2) + \sqrt{6046}$ 和 $T(n) = T(3n/4) + \sqrt{6046}$ 由 *master* 定理都可得 $T(n) = \Theta(\log n)$.

故 $T(n) = \Theta(\log n)$.

运用主定理求解下面方程，假设 T 为 $O(1)$ 作为基本情况：（该题考察主定理，20分）

4.1

$$T(n) = 25T(n/5) + n^{2.1}$$

$$a = 25, b = 5, f(n) = n^{2.1}, n^{\log_b a} = n^{\log_5 25} = n^2$$

$$f(n) = n^{2.1} = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}), \epsilon = 0.1.$$

且 $af(n/b) = 25(n/5)^{2.1} \leq cn^{2.1} = cf(n)$, 只需 $c \geq 5^{-0.1}$.

故存在常数 $c = 0.9 < 1$, 使得 $af(n/b) \leq cf(n)$ 成立. 故 $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^{2.1})$.

4.2

$$T(n) = 25T(n/5) + n^{1.5}$$

$$a = 25, b = 5, f(n) = n^{1.5}, n^{\log_b a} = n^2$$

$$f(n) = n^{1.5} = \Theta(n^{\log_b a - \epsilon}), \epsilon = 0.5.$$

$$\therefore T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^2).$$

4.3

$$T(n) = 25T(n/5) + n^2$$

$$a = 25, b = 5, f(n) = n^2, n^{\log_b a} = n^2$$

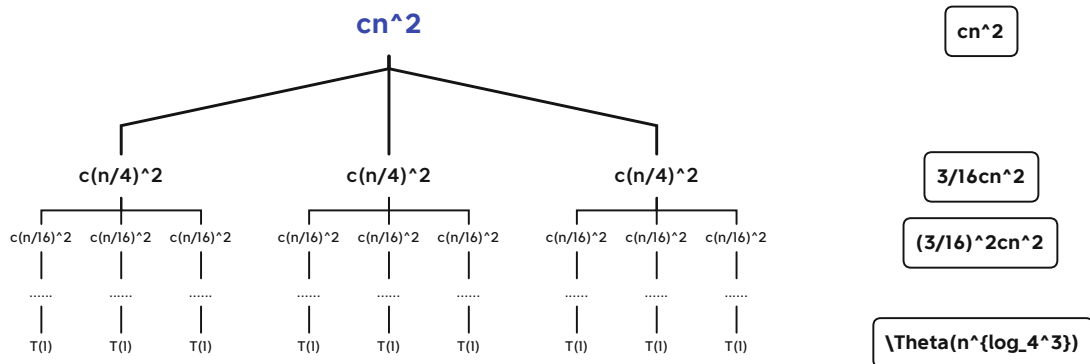
$$f(n) = n^2 = \Theta(n^2) = \Theta(n^{\log_b a})$$

$$\therefore T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(n^2 \log n).$$

5

对递归式 $T(n) = 3T(n/4) + cn^2$, 用递归法确定一个渐进上界, 并画出递归树。

可能会用到的公式: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ (该题考察递归树, 20分)



$$\begin{aligned}
T(n) &= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1}cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{\left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n} - 1}{\frac{3}{16} - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})
\end{aligned}$$

猜测 $T(n) = O(n^2)$, 用代入法验证.

即证: $T(n) = O(n^2)$, 即证: 存在 $d > 0$, $n_0 > 0$, 使得当 $n > n_0$ 时, 有 $T(n) \leq dn^2$

证: 假设当 $m < n$ 时, 有 $T(m) \leq dm^2$ 成立.

那么当 $m = n$ 时,

$$T(m) = 3T(m/4) + cm^2 \leq 3d(m/4)^2 + cm^2 = 3/16dm^2 + cm^2 = \left(c + \frac{3}{16}d\right)m^2.$$

要使得上式成立, 只需 $d \geq 16/13c$.

故当 $d \geq 16/13c$ 时, 当 $m = n$ 时, $T(m) \leq dm^2$ 成立.

即证得 $T(n) = O(n^2)$.